

629.12-8  
С 79

**Федеральное агентство по образованию Российской Федерации**

**Филиал «Севмашвтуз» государственного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский  
государственный морской технический университет» в г.Северодвинске**

**В.А. Стенин**

## **ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЗАЦИИ СЭУ**

**Учебное пособие**

**Северодвинск  
2008**

**Стенин В.А. Пространство состояний в задачах автоматизации СЭУ:  
Учебное пособие.** – Северодвинск: Севмашвтуз, 2008. – 92 с.

Ответственный редактор: зав. кафедрой «Океанотехника и энергетические установки», профессор А.И. Лычаков

Рецензенты: к.т.н., доцент кафедры «Океанотехника и энергетические установки» О.Д.Мюллер;  
ведущий инженер-конструктор КО ФГУП (ЦС «Звездочка») к.т.н., доцент В.В.Кияница

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 140200, 141200.

В учебном пособии рассматриваются вопросы математического описания теории автоматического управления судовыми системами на основе пространства состояний, представлены основы матричного исчисления и векторного анализа, методы моделирования систем управления. Дается методика оценки устойчивости и качества процессов управления, рассматривается расчет нестационарного теплообмена методом переменных состояний.

В учебном пособии представлены: ил. 22, табл. 2, список литературы из 7 наименований.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Севмашвтуза.

## Введение

Исследование системы управления во временной области с помощью переменных состояния предпочтительнее как по методическим соображениям, так и благодаря удобству обозначений и простоте проведения анализа. Преимущество методического характера обуславливается возможностью охарактеризовать систему понятием «состояние системы», которому соответствует точка в определенном евклидовом пространстве. В этом случае поведение системы во времени характеризуется траекторией, описываемой этой точкой. Применение матриц и векторов позволяет записывать в более компактном виде, как уравнения системы управления, так и их решение.

Если система содержит переменные во времени параметры или нелинейные элементы, то возможность применения хорошо известных частотных методов (после соответствующего преобразования системы) становится ограниченной. Однако во временной области уравнений могут быть исследованы численными методами с использованием ПЭВМ. В этом случае представление системы в пространстве состояний оказывается особенно удобным.

Представленный в пособии материал является учебным. При изложении материала в главах 1, 2 и 3 автор опирался на фундаментально разработанную теорию матричного исчисления и векторного анализа, представленных в монографиях известных авторов: Деруссо П. Пространство состояний в теории управления.- М.: Мир, 1970.- 343с.; Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. Пер. с англ. Бочкова В.С.- М.:Машиностроение, 1972.-544с.; Директор С. Введение в теорию систем. Пер.с англ.Бусленко В.Н.- М.:Мир, 1974.-454с.; Теория автоматического управления. Ч.1 /Бабаков Н.А. и др. Под ред. Воронова А.А.- М.:Высшая школа, 1977.-303с.

Содержание главы 4 является оригинальным; теоретические и экспериментальные обоснования применения теории пространства состояния к исследованию нестационарного теплообмена выполнялись на кафедре «Океанотехника и энергетические установки». Результаты математического моделирования нестационарного теплообмена на ПЭВМ методом переменных состояния показывают перспективность использования этого метода для решения уравнений в частных производных, получения передаточных функций тепловых элементов и последующего результативного расчета систем автоматического регулирования СЭУ.

# 1. Матрицы

## 1.1. Основные понятия

Матрица – это совокупность чисел или объектов другой природы, расположенных в виде таблицы.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \hline \end{array}$$

Такая таблица, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, содержит  $m \cdot n$  клеток (позиций). Числа или любые другие объекты, расположенные в клетках таблицы, называют элементами матрицы.

Кроме приведенной клеточной записи используют и другие способы представления матриц, например:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Прямоугольная матрица, имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется  $m \times n$  матрицей. Если  $m=n$ , то матрица называется квадратной, а число  $n$  – её порядком. Матрицу можно определить соотношением:  $A = [a_{ij}]$ .

Если матрица состоит из одного столбца или одной строки, то она соответственно называется столбцовой (или строчной). К примеру,  $n \times 1$  матрица называется матрицей-столбцом, вектором-столбцом,  $n$ -вектором или просто вектором.

Вектор можно представить в виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица порядка  $n$  называется диагональной, если все элементы её вне главной диагонали равны нулю, то есть:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Эта матрица записывается кратко  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Если в диагональной матрице  $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ , то имеем единичную матрицу  $n$ -го порядка. Матрица произвольной размерности, все элементы которой равны 0, называется нулевой матрицей (обозначается 0).

## 1.2. Основные операции над матрицами

**Сложение матриц.** Сумма двух матриц  $A$  и  $B$  одинаковых размеров определяется как матрица  $C$  таких же размеров, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц, то есть  $C = A + B$ , если  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

**Пример 1.1.**

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2,5 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Умножение матрицы на число.** По определению произведением матрицы  $A$  на число  $\alpha$  (число называют скаляром) является матрица  $C = A \cdot \alpha$ , элементы которой получаются умножением соответствующих элементов матрицы  $A$  на это число, то есть  $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ .

**Пример 1.2.**

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Умножение матриц.** Произведением матрицы  $A$  размера  $(m \times n)$  на матрицу  $B$  размера  $(n \times r)$  является матрица  $C = A \cdot B$  размера  $(m \times r)$  элемент  $c_{ij}$  которой, расположенный в  $ij$  клетке, равен сумме произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  на соответствующий элемент  $j$ -го столбца матрицы  $B$ , то есть

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Умножение  $A$  на  $B$  допустимо (произведение  $A \cdot B$  существует), если число столбцов  $A$  равно числу строк матрицы  $B$  (в таких случаях говорят, что эти две матрицы согласуются по форме).

### Пример 1.3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3) & (2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5) \\ (5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3) & (5 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5) \\ (0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3) & (0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 11 \\ 15 & 16 \\ 19 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Транспонирование матрицы.** Преобразование матрицы  $A$ , состоящее в замене строк столбцами (или столбцов строками) при сохранении их нумерации, называется транспонированием. Полученная в результате такого преобразования матрица называется транспонированной к матрице  $A$  и обозначается  $A^1$  или  $A'$ .

### Пример 1.4.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Сумма главных диагональных элементов называется следом матрицы и обозначается  $\text{Sp}(A)$  или  $\text{Tr}(A)$  (Spag, Trace).

### 1.3. Матричная запись системы линейных уравнений

Первоначально матрицы были введены для упрощения записи систем линейных уравнений, что обусловило и определение основных матричных операций. Система линейных уравнений

[illegible]

записывается одним матричным равенством:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Действительно, перемножив в правой части равенства  $(m \times n)$  – матрицу на столбцовую матрицу, получим:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{bmatrix}.$$

Из равенства матриц-столбцов следуют равенства для соответствующих элементов, которые совпадают с исходной системой уравнений. Если обозначить

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то матричное равенство запишется следующим образом:  $y = A \cdot x$ .

#### 1.4. Определитель

Рассмотрим два линейных алгебраических уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= y_1; \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= y_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

или в матричной форме:

$$A \cdot x = y, \quad (1.2)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Выражения

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot y_2; \\ x_2 &= \frac{-a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot y_1 + \frac{a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot y_2 \end{aligned}$$

дают решение системы (1.1) в предположении, что величина  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$  не равна нулю. Величина  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$  называется определителем матрицы  $A$  и

обозначается  $\det(A)$ , то есть  $\det(A) = \Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ . Следовательно, система уравнений (1.1) имеет решение, если  $\det(A) \neq 0$ .

Основные свойства определителей легко доказываются на основе общего выражения и словесно формулируются следующим образом:

1. Определитель матрицы не изменяет своего значения при взаимной замене её строк и столбцов. Поэтому все свойства определителя, сформулированные для столбцов, справедливы и для строк и наоборот.
2. При перестановке двух столбцов определитель меняет знак (свойство антисимметрии).
3. Определитель равен нулю, если все элементы какого-нибудь столбца равны нулю или если один из столбцов является линейной комбинацией любых его других столбцов (в частности, определитель, у которого хотя бы два столбца одинаковы, равен нулю).
4. Умножение всех элементов какого-нибудь столбца на скаляр  $\lambda$  равнозначно умножению определителя на  $\lambda$  (общий множитель элементов строк или столбца можно вынести за знак определителя).
5. Умножение матрицы  $n$ -го порядка на скаляр  $\lambda$  соответствует умножению её определителя на  $\lambda^n$ , то есть  $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$ .
6. Значение определителя не изменяется, если к какому-нибудь столбцу прибавить другой столбец, умноженный на скаляр  $\lambda$ .
7. Если два определителя одинаковых порядков различаются между собой только элементами  $i$ -го столбца, то их сумма равна определителю, элементы  $i$ -го столбца которого равны суммам соответствующих элементов  $i$ -х столбцов исходных определителей, а остальные элементы те же, что у исходных (свойство линейности).

Вычисляется определитель различными способами. Разложение определителя по элементам строки или столбца проще всего, когда в этой в этой строке или столбце имеется единственный ненулевой элемент. Тогда определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение. К такому виду можно преобразовать определитель путем операций над его строками или столбцами, используя основные свойства.

Процесс вычисления иллюстрируется следующим образом.

**Пример 1.5.**

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \\ = -3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 17 & 17 \\ 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 \cdot \frac{17}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 102.$$



Здесь сначала первая строка, умноженная на  $(-2)$ , прибавляется к последней строке, в результате чего второй столбец содержит только один ненулевой элемент. Разложение по этому столбцу приводит к определителю третьего порядка. Прибавляя ко второй и третьей строкам первую, умноженную на  $(-4/5)$  и  $(-1)$ , получаем столбец с единственным ненулевым элементом. Теперь разлагаем определитель по первому столбцу и сводим его к определителю второго порядка. Так как элементы первой строки оказались равными, выносим за знак определителя множитель  $17/5$  и, раскрывая определитель второго порядка, получаем окончательный результат  $\Delta=102$ .

Наиболее просто вычисляется определитель треугольной или диагональной матрицы: он равен произведению диагональных элементов. Это следует из разложения по элементам столбцов (строк) определителя верхней (нижней) треугольной матрицы (в случае диагональной матрицы разложение можно выполнить по элементам строк или столбцов). Значения определителей треугольных матриц не зависят от элементов, расположенных вне главной диагонали.

#### Пример 1.6.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2 = 20.$$

#### Пример 1.7.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2 = 20.$$

С помощью разложения Лапласа можно также показать, что определитель квазидиагональной матрицы равен произведению определителей квадратных матриц, расположенных вдоль главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & A_m \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_m|.$$

### Пример 1.8.

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{array} \right| = 17 \cdot (-2) = -34.$$

## 1.5. Обращение матриц

В обычной алгебре два числа, произведение которых равно единице, называют взаимно обратными. Число, обратное числу  $a$ , обозначается  $a^{-1}$  и по определению  $a \cdot a^{-1} = 1$ . Аналогично в матричной алгебре две квадратные матрицы, произведение которых равно единичной матрице, то есть  $A \cdot A^{-1} = I$  называют взаимно обратными ( $A^{-1}$  обратно  $A$ ).

Определение обратной матрицы осуществляется следующим образом: 1) элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A$   $n$ -го порядка заменяются их алгебраическими дополнениями; 2) матрица алгебраических дополнений транспонируется, в результате чего получаем присоединенную или взаимную матрицу к  $A$  (она обозначается через  $\text{Adj}A$ ); 3) вычисляется определитель  $\Delta$  матрицы  $A$  и присоединенная матрица  $\text{Adj}A$  умножается на величину, обратную этому определителю.

Обратная матрица существует для матрицы  $A$  при условии, что  $\det A \neq 0$ . Вычисление обратной матрицы иллюстрируется примером:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -28 & -38 & -12 \\ 1 & -2 & -13 \\ 7 & -14 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -28 & 1 & 7 \\ -38 & -2 & -14 \\ -12 & -13 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 14 & -1 & -7 \\ 47 & -94 & -94 \\ 19 & 1 & 7 \\ 47 & 47 & 47 \\ 1 & 13 & 3 \\ 47 & 94 & -94 \end{vmatrix} \Rightarrow A^{-1},$$

учитывая, что  $\det A = -94$ .

## 1.6. Решения нормальной однородной системы

В матричной форме нормальная однородная система дифференциальных уравнений ( $f=0$ , в однородной системе все свободные члены равны нулю) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x.$$

Будем искать её решение в виде  $x = h \cdot e^{\lambda t}$ , где  $h$ -вектор (столбец) произвольных постоянных. Подставляя  $x$  в исходное уравнение, получаем  $h \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = A \cdot h \cdot e^{\lambda t}$ .

После сокращения на скаляр  $e^{\lambda t}$  и перенесения  $A \cdot h$  в левую часть равенства:  $(\lambda \cdot E - A) \cdot h = 0$ .

Вынося за скобки вектор  $h$ , необходимо умножить предварительно  $\lambda \cdot h$  на единичную матрицу  $E$ .

Уравнение  $(\lambda \cdot E - A) \cdot h = 0$  имеет нетривиальное решение при условии, что определитель матрицы  $(\lambda \cdot E - A)$  обращается в нуль, то есть  $|\lambda \cdot E - A| = 0$  или

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Так как порядок матрицы  $A$  равен  $n$ , то  $\Delta(\lambda)$  является многочленом  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ , то есть  $\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n$ . Корни уравнения  $\Delta(\lambda) = 0$  дадут значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , при которых исходная система имеет нетривиальные решения. Решение  $(0, 0, \dots, 0)$  называют тривиальным решением.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда все корни уравнения  $\Delta(\lambda) = 0$  простые. Тогда при  $\lambda = \lambda_i$  имеем однородное уравнение  $(\lambda_i \cdot E - A) \cdot h^{(i)} = 0$ , из которого можем определить вектор  $h^{(i)}$ . Таким образом, решение нормальной системы дифференциальных уравнений, соответствующее корню  $\lambda_i$ , будет  $x^{(i)} = h^{(i)} \cdot e^{\lambda_i t}$ . Всего получим  $n$  таких решений, соответствующих  $n$  корням  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Для любой квадратной матрицы  $A$  по установившейся терминологии  $(\lambda \cdot E - A)$  называется характеристической матрицей, а  $\Delta(\lambda) = 0$  – характеристическим уравнением. Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  называются собственными значениями (характеристическими числами), а вектора  $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(n)}$  – собственными векторами матрицы  $A$ .

## 1.7. Определение фундаментальной матрицы

Решение нормальной однородной системы линейных дифференциальных уравнений может быть представлено в виде:  $x = H \cdot \Phi(t) \cdot c$ . При  $t=0$  матрица  $\Phi(t)$  равна единичной матрице, следовательно, начальное условие  $x_0 = H \cdot c$ , откуда  $c = H^{-1} \cdot x_0$ . Подставляя это значение в общее решение, получим:  $x = H \cdot \Phi(t) \cdot H^{-1} \cdot x_0 = \Phi(t) \cdot x_0$ . Матрица  $n$ -го порядка  $\Phi(t) = H \cdot \Phi(t) \cdot H^{-1}$  называется фундаментальной матрицей. Матрица  $H$  называется модальной матрицей и может быть получена как совокупность  $n$  столбцов  $h^{(i)}$ , которые являются решениями однородных уравнений  $(\lambda_i \cdot E - A) \cdot h^{(i)} = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Элементами диагональной матрицы  $\Phi(t)$  являются экспоненциальные функции  $e^{\lambda_i t}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Рассмотрим в качестве примера однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + x_3; \\ \frac{dx_2}{dt} &= 5 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 + x_3; \\ \frac{dx_3}{dt} &= 4 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3. \end{aligned} \right\}$$

Для этой системы:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}; \quad \lambda \cdot E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 8 & -1 \\ -5 & \lambda + 9 & -1 \\ -4 & 6 & \lambda + 1 \end{bmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов первой строки:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda + 9 & -1 \\ 6 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10 \cdot \lambda + 15; \\ \Delta_{12}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \lambda + 9; \\ \Delta_{13}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -5 & \lambda + 9 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot \lambda + 6. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен и собственные значения:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda - 4) \cdot (\lambda^2 + 10 \cdot \lambda + 15) + 8 \cdot (5 \cdot \lambda + 9) - 1 \cdot (4 \cdot \lambda + 6) = \\ &= \lambda^3 + 6 \cdot \lambda^2 + 11 \cdot \lambda + 6 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 3) \\ \lambda_1 &= -1; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -3. \end{aligned}$$

Собственные векторы:

$$h^{(0)} = k_1 \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) \\ \Delta_{13}(\lambda_1) \end{bmatrix}; \quad h^{(1)} = k_1 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad h^{(2)} = k_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad h^{(3)} = k_3 \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Принимаем  $k_1=1/2$ ;  $k_2=-1$ ;  $k_3=-1/6$  (эти значения выбираются произвольно исходя из соображений удобства). Получаем модальную матрицу.

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Фундаментальная матрица:**

$$\Phi(t) = H \cdot \varphi(t) \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

**После перемножения получим:**

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3 \cdot e^{-t} + e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t} & -3 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 2 \cdot e^{-t} + e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t} & -2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-t} + 2 \cdot e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t} & -e^{-t} - 4 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t} & 2 \cdot e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

**Общее решение рассматриваемой однородной системы дифференциальных уравнений:**

$$\begin{aligned} x_1 &= (3 \cdot e^{-t} + e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{10} + (-3 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{20} + (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot x_{30}; \\ x_2 &= (2 \cdot e^{-t} + e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{10} + (-2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{20} + (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot x_{30}; \\ x_3 &= (e^{-t} + 2 \cdot e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{10} + (-e^{-t} - 4 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{20} + (2 \cdot e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot x_{30}, \end{aligned}$$

где  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $x_{30}$  – элементы вектора  $x_0$ , равные начальным значениям соответствующих переменных при  $t=0$ .

### **1.8. Определение характеристического полинома**

Многочлен  $n$ -ой степени относительно  $\lambda$ , определяемый уравнением  $|\lambda \cdot E - A| = 0$ , называется характеристическим уравнением матрицы  $A$ . Общий вид этого уравнения:  $\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$ . Здесь  $a_1$  – сумма всех диагональных миноров первого порядка, равная следу матрицы  $A$  (обозначается либо  $\text{Tr}(a)$ , либо  $\text{Sp}(A)$ );  $a_2$  – сумма всех диагональных миноров второго порядка матрицы  $A$ ;  $a_n$  – определитель матрицы  $A$ .

#### **Пример 1.9.**

Найти характеристическое уравнение матрицы  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

В общем виде характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^3 + a_1 \cdot \lambda^2 + a_2 \cdot \lambda + a_3 = 0.$$

Определим коэффициенты:

$$\begin{aligned}a_1 &= -\text{Tr}(A) = +(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = +(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = +(2 + 1 - 1) = +2; \\ \text{Tr}(A) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}); \\ a_2 &= + \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -5; \\ a_3 &= \Delta_3 = +6.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + 2 \cdot \lambda^2 - \lambda + 6 = 0.$$

Итак:

$$\lambda^n - \text{Tr}_1(A) \cdot \lambda^{n-1} + \text{Tr}_2(A) \cdot \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n |A| = 0$$

### 1.9. Экспоненциальная функция от матрицы

Воспользовавшись разложением в степенной ряд экспоненциальной функции от скалярной переменной

$$e^{\lambda \cdot t} = 1 + \frac{\lambda \cdot t}{1!} + \frac{(\lambda \cdot t)^2}{2!} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot t)^s}{s!},$$

подставим функциональную матрицу  $\varphi(t)$  в виде:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 \cdot t)^s}{s!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n \cdot t)^s}{s!} \end{bmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^s & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^s \end{bmatrix}.$$

Диагональную матрицу под знаком суммы можно рассматривать как результат возведения в  $s$ -ю степень диагональной матрицы  $\Lambda$ , элементами которой являются собственно числа матрицы  $A$ , то есть:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}; \quad \Lambda^s = \begin{bmatrix} \lambda_1^s & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^s \end{bmatrix}.$$

Таким образом, по аналогии со скалярным случаем можно записать:

$$\varphi(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Lambda^s \cdot t^s}{s!} = e^{\Lambda t} = \exp(\Lambda \cdot t),$$

то есть матрица  $\varphi(t)$  представляет собой экспоненциальную функцию от матрицы  $(\Lambda \cdot t)$ .

Выясним характер фундаментальной матрицы  $\varphi(t)$ . Подставляя решение в однородное дифференциальное уравнение  $\frac{dx}{dt} = A \cdot x$ , получаем тождества:

$$\begin{aligned} \frac{d[\Phi(t) \cdot x_0]}{dt} &= A \cdot \Phi(t) \cdot x_0; \\ \frac{d\Phi(t)}{dt} \cdot x_0 &= A \cdot \Phi(t) \cdot x_0. \end{aligned}$$

Так как в этих тождествах  $x_0$  – вектор начальных значений, не зависящий от времени, то  $\Phi(t) = A \cdot \Phi(t)$ , то есть  $\Phi(t)$  – это такая матрица, производная которой по времени равна произведению матрицы  $A$  на саму матрицу. Аналогичными свойствами обладает скалярная функция  $\exp(a \cdot t)$ , поэтому можно записать соотношение:

$$\varphi(t) = e^{\Lambda t}; \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d(e^{\Lambda t})}{dt} = A \cdot e^{\Lambda t} = A \cdot \Phi(t).$$

Вообще, экспоненциальную функцию от любой квадратной матрицы  $x$  можно представить в виде сходящегося ряда:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!}.$$

Обратной к матрице  $e^x$  является функциональная матрица:

$$(e^x)^{-1} = e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^s}{s!}.$$

Дифференцирование экспоненциальной функции от матрицы выполняется по обычному правилу:

$$\frac{d(e^{\Lambda t})}{dt} = A \cdot e^{\Lambda t}.$$

Разложение в ряд также используется для вычисления  $\Phi(t) = \exp(a \cdot t)$ , так как доказано, что этот ряд сходится равномерно и абсолютно.

## 1.10. Формула Коши для уравнения n-го порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \cdot x = \xi(t).$$

Задача Коши для такого уравнения состоит в отыскании решения  $x(t)$ , удовлетворяющего начальным условиям при  $t=0$ .

$$x = x_0; \quad \frac{dx}{dt} = x_1; \quad \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = x_{n-1}^{(n-1)}.$$

Уравнение n-го порядка приводится к нормальной форме серией подстановок:

$$x = x_0; \quad \frac{dx}{dt} = x_2; \quad \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = x_n.$$

Тогда получаем эквивалентную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от переменных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n; \\ \frac{dx_n}{dt} = -a_n \cdot x_1 - a_{n-1} \cdot x_2 - \dots - a_1 \cdot x_n + \xi(t) \end{array} \right.$$

В матричной записи эта система имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \xi(t) \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица:



$$F(\lambda) = (\lambda \cdot E - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & \lambda + a_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы раскроем по элементам последней строки. После удаления этой строки и  $j$ -го столбца получаем определитель, элементы которого выше главной диагонали равны нулю, а по главной диагонали располагаются  $j-1$  элементов  $\lambda$  и  $n-j$  элементов, равных  $-1$ . Следовательно, алгебраическое дополнение элементов последней строки:

$$\Delta_n(\lambda) = (-1)^{n+j} \cdot (-1)^{n-j} \cdot \lambda^{j-1} = \lambda^{j-1}; \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

И характеристическое уравнение получаем в виде:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0.$$

### 1.11. Приведение системы уравнений к нормальной форме

**Если система уравнений первого порядка задана в произвольной форме:**

$$\left. \begin{aligned} q_{11} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + q_{1n} \cdot \frac{dx_n}{dt} &= \omega_{11} \cdot x_1 + \dots + \omega_{1n} \cdot x_n + u_{11} \cdot v_1(t) + \dots + u_{1m} \cdot v_m(t), \\ &\vdots \\ q_{n1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + q_{nm} \cdot \frac{dx_n}{dt} &= \omega_{n1} \cdot x_1 + \dots + \omega_{nm} \cdot x_n + u_{n1} \cdot v_1(t) + \dots + u_{nm} \cdot v_m(t), \end{aligned} \right\}$$

где  $v_1(t), \dots, v_m(t)$  —  $m$  задающих функций времени.

**В матричной записи эта система имеет вид:**

$$Q \cdot \frac{dx}{dt} = W \cdot x + U \cdot v.$$

Приведение ее к нормальной форме означает преобразование матрицы  $Q$  в единичную, что можно осуществить умножением уравнения слева на  $Q^{-1}$ , если  $\det Q \neq 0$ . Тогда находим:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u,$$

где

$$A = Q^{-1} \cdot W \text{ и } B = Q^{-1} \cdot U.$$

В общем случае более целесообразно применить процедуру исключения Гаусса-Жордана к матрице  $[Q, W, U]$  по столбцам матрицы  $Q$ . В результате получим матрицу  $[I, A, B]$ , которая и определяет нормальную форму исходной системы дифференциальных уравнений.

**Пример 1.10.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot v(t).$$

Преобразование матрицы  $[Q, W, U]$  выполняется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & -6 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -2 \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \rightarrow \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -6 & 4 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 4 \\ -2 \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ 6 \end{array} \rightarrow \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 10 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \\ -4 \\ -6 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 0 \end{array} \rightarrow \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \\ 2 \\ -3 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 0 \end{array}. \end{aligned}$$

Эквивалентная система уравнений в нормальной форме:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot v(t).$$

## 2. Метод переменных состояния

### 2.1. Переменные и уравнения состояния динамической системы

Метод переменных состояния основан на понятии *состояние системы*. Состояние динамической системы описывается совокупностью физических переменных  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , характеризующих поведение системы в будущем при условии, если известно состояние в исходный момент времени и приложенные к системе воздействия.

Рассмотрим систему, показанную на рис. 2.1, описываемую переменными состояния  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , позволяющими по начальным значениям переменных  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  (в начальный момент времени  $t_0$ ) и заданным воздействиям  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  при  $t \geq t_0$  определить будущие значения переменных состояния и выходных переменных.

Поясним понятие переменных состояния на простом примере объекта (рис. 2.2), состоящего из груза с массой  $m$ , подвешенного на пружине с коэффициентом упругости  $k$  и двигающегося в цилиндре с коэффициентом трения  $f$ . Дифференциальное уравнение этой системы можно представить в виде

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = u(t). \quad (2.1)$$

В качестве переменных состояния введем переменные

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t); \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

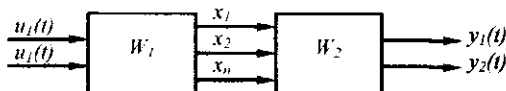


Рис. 2.1. Пример системы, описываемой переменными состояния  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :  
 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  — входные переменные;  
 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  — выходные переменные;

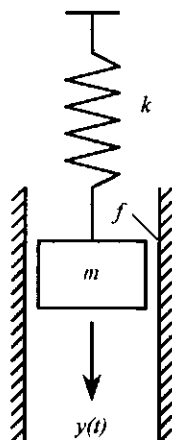


Рис. 2.2. Пример, поясняющий понятие переменных состояния

Подставляя выражения (2.2) в уравнение (2.1), получим

$$m \frac{dx_1}{dt} + f x_2 + k x_1 = u(t)$$

и, учитывая выражения (2.2), можно написать

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{f}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} u(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Система уравнений 1-го порядка (2.3) и является системой уравнений в переменных состояния для рассматриваемого объекта.

В общем случае нелинейной системы уравнения в переменных состояния имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1[x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m, t]; \\ \dot{x}_2(t) &= f_2[x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m, t]; \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n[x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m, t] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Если же предположить, что в (2.4) функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  линейны относительно переменных  $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$  и не зависят от времени  $t$ , то их можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1m}u_m; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2m}u_m; \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nm}u_m. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

В матричной форме уравнения (2.5) имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Матрицу-столбец, содержащую все переменные состояния в правой части уравнения (2.6), называют *вектором состояния* и обозначают просто через  $x$ , т.е.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Вектор выходных сигналов обозначают через  $y$ . Таким образом, в компактной векторно-матричной форме система может быть описана при помощи уравнения



где  $x$  и  $y$  — скалярные функции времени, а  $a$  и  $b$  — постоянные величины.

Преобразуя уравнение (2.9) по Лапласу, получим

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s),$$

откуда

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a} U(s). \quad (2.10)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа от уравнения (2.10), решение найдем в виде

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau. \quad (2.11)$$

Решение векторного уравнения (2.7) определим аналогичным образом, а именно:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (2.12)$$

или

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} BU(s), \quad (2.13)$$

где  $I$  — единичная ( $n, n$ ) матрица:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

По аналогии с решением (2.11) получим следующее решение неоднородного векторно-матричного уравнения (2.7):

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad (2.14)$$

где матричная функция  $e^{At}$  может быть представлена в виде ряда, т.е.

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots,$$

сходящегося для всех конечных значений  $t$ .

Общим решением однородного уравнения (2.7) при  $u(t) = 0$ , описывающим свободное колебание системы, является

$$x_{CB} = e^{At} x(0). \quad (2.15)$$

Функцию

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

называют переходной, или фундаментальной, матрицей. В развернутой форме выражение (2.15) имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \varphi_{i1}x_1(0) + \varphi_{i2}x_2(0) + \dots + \varphi_{in}x_n(0) = x_{i1}(t) + \\ &+ x_{i2}(t) + \dots + x_{in}(t) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Очевидно, что выражение (2.17) описывает изменение  $i$ -й составляющей вектора состояния  $x_i(t)$ , вызываемое начальными условиями  $x_i(0)$ , а каждый из членов выражения в правой части

$$x_{ij}(t) = \varphi_{ij}(t)x_j(0)$$

представляет собой изменение  $i$ -й составляющей вектора состояния  $x_i(t)$ , вызываемое  $j$ -м начальным условием.

Следовательно, каждый из элементов  $\varphi_{ij}(t)$  переходной матрицы  $\Phi(t)$  можно рассматривать как реакцию  $i$ -й переменной состояния при  $x_j(0) = 1$  и нулевых начальных значениях всех остальных переменных состояния.

Уравнение (2.14) с учетом выражения (2.16) можно представить также в виде суммы общего и частного решения

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (2.18)$$

где  $x_{вын}(t)$  — реакция системы на вектор управления  $u(t)$ ; при учете решения (2.14)

$$\Phi(t-\tau) = e^{A(t-\tau)}.$$

Составляющая  $x_{вын}(t)$  является частным решением дифференциального векторно-матричного уравнения (2.7).

**Методы вычисления переходной матрицы.** Вычисление переходной матрицы  $\Phi(t)$  в случае, когда матрица  $A$  не зависит от времени, можно выполнить одним из следующих методов.

**Метод разложения в ряд.** Переходную матрицу можно представить в виде бесконечного ряда

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots$$

Ограничившись конечным числом членов ряда и произведя их суммирование, найдем приближенное выражение для  $\Phi(t)$ .

Метод, основанный на определении собственных значений матрицы.

Применяя к выражению (2.16) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi(s) = L\{\Phi(t)\} = L\{e^{At}\} = [sI - A]^{-1}$$

и, следовательно,

$$\Phi(t) = L^{-1} \{ [sI - A]^{-1} \}. \quad (2.19)$$

Определение  $\Phi(t)$  сводится к вычислению собственных значений матрицы  $A$ .

Рассмотрим пример вычисления переходной матрицы. Пусть уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - ax_2. \end{aligned}$$

В этом случае

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ b & s+a \end{bmatrix}.$$

В результате обращения матрицы получим

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} = \frac{1}{s(s+a)+b} \begin{bmatrix} s+a & 1 \\ -b & s \end{bmatrix}.$$

Пусть матрица  $A$  имеет действительные и различные собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{-a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}; \quad \lambda_2 = \frac{-a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

где  $a^2 > 4b$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= L^{-1} \{ \Phi(s) \} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \times \\ &\times \begin{bmatrix} (\lambda_1 - a)e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_2 - a)e^{-\lambda_2 t} & e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \\ b(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) & \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Метод, основанный на теореме Сильвестра. Предположим, что имеется некоторая функция  $f(A)$  от матрицы  $A$ , которую можно представить в виде степенного ряда:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k,$$

где  $A$  — квадратная матрица ( $n, n$ ) с  $n$  различными собственными значениями  $\lambda_i$ .

Тогда согласно теореме Сильвестра

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) F(\lambda_i),$$

где

$$F(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

В частном случае, когда

$$f(A) = \Phi(t) = e^{At},$$

имеем

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} F(\lambda_i).$$



**Пример 2.1.** Предположим, что уравнения системы имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_1 - 3x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2.$$

В этом случае

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + 2 = 0,$$

так что

$$\lambda_1 = j\sqrt{2}; \quad \lambda_2 = -j\sqrt{2}.$$

Имеем

$$\Phi(t) = f(A) = e^{At} = \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} F(\lambda_i),$$

причем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Согласно Ю. Ту

$$F(\lambda_1) = \frac{A + j\sqrt{2}I}{j2\sqrt{2}}; \quad F(\lambda_2) = \frac{A - j\sqrt{2}I}{j2\sqrt{2}}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{[A + j\sqrt{2}I]e^{j\sqrt{2}t} - [A - j\sqrt{2}I]e^{-j\sqrt{2}t}}{j2\sqrt{2}} = (\cos \sqrt{2}t)I + \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \right) A = \cos \sqrt{2}t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t & -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t & \cos \sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.2. Матричная передаточная функция

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям в переменных состояниях (2.7), (2.8), получим

$$sX(s) = AX(s) + x(0) + BU(s); \tag{2.20}$$

$$Y(s) = CX(s),$$

откуда, исключая  $X(s)$  и полагая  $x(0) = 0$ , найдем

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s). \tag{2.21}$$

Матрицу

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B, \tag{2.22}$$

устанавливающую связь между векторами выхода  $Y(s)$  и входа  $U(s)$ , называют *матричной передаточной функцией системы (МПФ)*.

Если система имеет только один вход  $u(t)$  и только один выход  $y(t)$ , то матрицы  $B$  и  $C$  в (2.20) превращаются в скаляры, которые обозначим, соответственно, через  $b$  и  $c$ .

Таким образом, для одномерной системы

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c(sI - A)^{-1}b. \quad (2.23)$$

Из формулы (2.23), (2.22) очевидно, что определение передаточной функции системы по уравнениям состояния (2.7), (2.8) требует обращения матрицы  $(sI - A)$ , что в нашем случае высокой размерности матрицы  $A$  может представлять некоторые трудности. Один из способов решения этой задачи основан на так называемом алгоритме Левере.

Пусть

$$(sI - A)^{-1} = \Psi^{-1}(s)R(s),$$

где

$$\Psi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

и

$$R(s) = s^{n-1}I + s^{n-2}R_1 + \dots + R_{n-1}.$$

Тогда  $a_i$  и  $R_i$  можно вычислить по следующим формулам:

$$A_1 = A \rightarrow a_{n-1} = -\text{spur } A_1 \rightarrow R_1 = A_1 + a_{n-1}I;$$

$$A_2 = AR_1 \rightarrow a_{n-2} = -\frac{1}{2}\text{spur } A_2 \rightarrow R_2 = A_2 + a_{n-2}I;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{n-1} = AR_{n-2} \rightarrow a_1 = -\frac{1}{n-1}\text{spur } A_{n-1} \rightarrow R_{n-1} = A_{n-1} + a_1I;$$

$$A_n = AR_{n-1} \rightarrow a_0 = -\frac{1}{n}\text{spur } A_n \rightarrow R_n = 0.$$

Таким образом,

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Psi(s)} \sum_{i=0}^{n-1} CR_i Bs^{n-1-i}.$$

**Пример 2.2.**

Пусть

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u;$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} x.$$

Имеем

$$A_1 = A; \quad a_2 = 2; \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}; a_1 = -1;$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{A}_2 + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$a_0 = -\frac{2+2+2}{3} = -2; \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{0}.$$

И, следовательно,

$$\Phi(s) = \frac{1}{\psi(s)} [\mathbf{CIB}s^2 + \mathbf{CR}_1\mathbf{B}s + \mathbf{CR}_2\mathbf{B}];$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 - s - 2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

или

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 - s - 2} \left\{ \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 17 & 11 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 29 & 7 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 14 & 2 \end{bmatrix} \right\};$$

$$\Phi(s) = \frac{-65s^2 + 80s + 70}{s^3 + 2s^2 - s - 2} = \frac{35(-0,93s^2 + 1,14s + 1)}{0,5s^3 + s^2 - 0,5s - 1}.$$

Решение обратной задачи — определение уравнений состояния по заданной передаточной функции, в особенности для многомерных систем, связано с более существенными трудностями.

### 2.3. Управляемость и наблюдаемость

Предыдущий этап развития теории автоматического регулирования, до широкого использования в ней понятия переменных состояния, был связан с описанием САР при помощи переменных вход-выход. Этот способ математи-

ческого описания удобен для инженерной практики, но развитие метода переменных состояния показало, что метод вход-выход имеет и существенные ограничения. Эти ограничения связаны в основном с понятиями управляемости и наблюдаемости, которые не учитывались в методе переменных вход-выход. При получении передаточной матрицы сложной системы по передаточным матрицам или передаточным функциям ее подсистем (элементов) возможно сокращение полюсов (нулей), оказывающих существенное влияние на динамику системы. Пренебрежение этим сокращением при расчете систем управления, как показывает опыт, может привести к ошибочным результатам.

Управлять состоянием системы  $x(t)$  можно изменением вектора входа  $u(t)$ , а наблюдать ее состояние можно, измеряя вектор выхода  $y(t)$ . В связи с этим возникают два вопроса, имеющих кардинальное значение для теории автоматического управления.

Можно ли выбрав соответствующим образом входы  $u(t)$ , перевести объект управления из некоторого произвольного состояния  $x(t_0)$  в другое произвольное состояние  $x(t_1)$ ?

Можно ли, наблюдая вектор выхода  $y(t)$  в течение достаточно долгого промежутка времени, определить начальное состояние объекта  $x(t_0)$ ?

Ответ на первый вопрос связан с понятием управляемости, а ответ на второй вопрос — с понятием наблюдаемости.

**Определение понятий управляемости и наблюдаемости.** Понятие управляемости связано с возможностью приведения системы в заданное состояние с помощью входных или управляющих воздействий.

Понятие наблюдаемости связано с возможностью определения переменных состояния по результатам измерения выходных переменных.

В качестве примера, поясняющего эти понятия, рассмотрим объект, описываемый уравнениями состояния:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1; \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - u; \\ \dot{x}_3 &= -2x_3 + u; \\ \dot{x}_4 &= -3x_4 - 2u; \\ y &= x_1 + x_3 + 0.5x_4.\end{aligned}$$

Из рис. 2.3 видно, что переменная  $x_1$  не соединена со входом  $u$  поэтому он не может влиять на ее изменение во времени. Такую переменную состояния называют *неуправляемой*. Переменная  $x_2$  не соединена с выходом и поэтому по наблюдению выхода  $y$  невозможно определить  $x_2$ . Такую переменную состояния называют *ненаблюдаемой*.

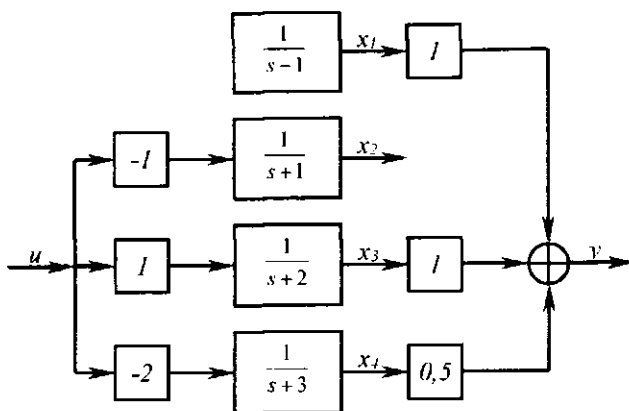


Рис. 2.3. Структурная схема системы с одним неуправляемым ( $\lambda = 1$ ) и одним ненаблюдаемым ( $\lambda = -1$ ) полюсом.

Более общее определение управляемости заключается в следующем.

Состояние  $[x_0, t_0]$  называют управляемым, если можно найти момент времени  $t_1 (t_1 > t_0)$  и вход  $u(t)$ , переводящий систему за интервал времени  $[t_0, t_1]$  из состояния  $[x_0, t_0]$  в состояние  $[0, t_1]$ . Если любое состояние  $x \in X$  является управляемым для  $t_0$ , то объект называют *полностью управляемым* в момент времени  $t_0$ . Если объект полностью управляем в указанном выше смысле для любого  $t_0$ , то его называют *полностью управляемым*.

Можно также дать следующее определение. Систему называют *полностью управляемой*, если для любых моментов времени  $t_0$  и  $t_1$ ,  $t_1 > t_0$  и любых заданных состояний  $x_0$  и  $x_1$  существует управление  $u(t), (t_0 < t < t_1)$ , переводящее начальное состояние  $x_0$  в конечное  $x_1$ .

Судить о том является ли система управляемой по виду ее уравнений состояния в общем случае (за исключением примера одномерной системы) очень трудно.

Однако, если уравнения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.24)$$

приведены к канонической форме

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u; \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \quad (2.25)$$

где  $\tilde{A}$  — диагональная матрица, то судить о том, является ли система управляемой, можно исходя из следующего.

Запишем первое уравнение (2.25) в развернутой форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \lambda_1 \tilde{x}_1 + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{1i} \tilde{u}_i; \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \lambda_2 \tilde{x}_2 + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{2i} \tilde{u}_i; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\tilde{x}}_n &= \lambda_n \tilde{x}_n + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ni} \tilde{u}_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Эти уравнения показывают, что управляющие воздействия  $\tilde{u}_i$  не будут оказывать какого-либо влияния на переменную  $\tilde{x}_j$ , если

$$\sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ji} \tilde{u}_i = 0,$$

т.е. если все элементы  $j$ -й строки матрицы  $\tilde{B}$  равны нулю.

Следовательно, канонические переменные состояния  $\tilde{x}$ , которые соответствуют нулевым строкам матрицы  $\tilde{B}$ , являются неуправляемыми. Это означает, что изменение этих переменных происходит независимо от управляющих воздействий  $u$ , и целиком определяется начальными условиями, а также внешними возмущениями.

Таким образом, система (2.24) является управляемой, если матрица  $\tilde{B}$  не содержит строк, все элементы которых равны нулю.

Условия управляемости для системы, описываемой уравнениями (2.24), не требующими их приведения к канонической форме (2.23), определяются следующей теоремой (или критерием), полученной Калманом.

Необходимое и достаточное условие для управляемости системы (2.24) заключается в том, чтобы матрица

$$Q = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.27)$$

имела ранг  $n$ .

Часто матрица (2.27) имеет ранг  $n$  для некоторого  $v < n$ , т.е.

$$\text{rang } Q_v = \text{rang}[B, AB, \dots, A^{v-1}B] = n. \quad (2.28)$$

Наименьшее значение  $v$ , при котором имеет место равенство (2.28), называют *показателем управляемости*.

Из выражения (2.27) видно, что управляемость определяется свойствами матриц  $A$  и  $B$ . Критерий управляемости (2.27) остается справедливым и для дискретной системы, если ее уравнения представить в виде

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k.$$

Как было показано в рассмотренном выше примере, переменная  $x_2$  является ненаблюдаемой, если она не соединена с выходом и по наблюдению выхода  $y$  ее определить невозможно. Но для управления необходимо располагать сведениями о текущих значениях вектора состояния. Поэтому возникает вопрос: при каких условиях, наблюдая векторы выхода и входа, можно найти переменные состояния  $x$ ?

Систему (2.24) называют *наблюдаемой*, если по данным измерения или наблюдения векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  на конечном интервале времени  $t_0 \leq t \leq t_1$  мож-



## 2.4. Операторная форма записи линейных систем

Линейная система  $n$ -го порядка с одним входным и одним выходным сигналами описывается обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка вида

$$L(p, t)y = M(p, t)u; \quad (2.31)$$

где  $y$  — выходной сигнал системы;

$u$  — входной сигнал системы;

$p$  — оператор  $\left(p = \frac{d}{dt}\right)$ .

Операторы  $L(p, t)$  и  $M(p, t)$  представляют собой полиномы относительно  $p$  с переменными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} L(p, t) &= \sum_{i=0}^n a_{n-i}(t)p^i; \\ M(p, t) &= \sum_{j=0}^l c_{l-j}(t)p^j. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

В случае стационарной системы уравнения (2.31) принимают вид

$$L(p)y = M(p)u, \quad (2.33)$$

где  $L(p)$  и  $M(p)$  — полиномы с постоянными коэффициентами;

$$L(p) = \sum_{i=0}^n a_{n-i}p^i; \quad M(p) = \sum_{j=0}^l c_{l-j}p^j. \quad (2.34)$$

Систему (2.33) можно представить в обычном виде (рис. 2.4 а), где передаточная функция  $G(s) = \frac{M(s)}{L(s)}$  характеризует систему в области изображений по Лапласу. Во многих случаях нет необходимости переходить в область изображений. Можно систему представить блоком  $G(p) = \frac{M(p)}{L(p)}$  (рис. 2.4 б) и считать, что этот блок обозначает те же действия, что и предусматриваемые дифференциальным уравнением (2.33). Другими словами,  $G(p)$  — операторное звено, но во временной области.

Рассмотрим основные способы получения уравнений в переменных состоянии для систем, описываемых дифференциальными уравнениями (2.31) или (2.33).

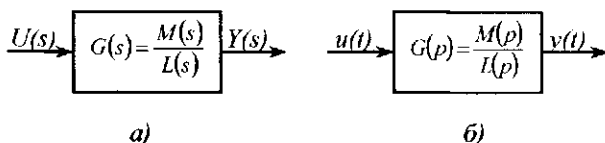


Рис. 2.4. Представление уравнений (2.33) в виде блок-схемы, составленной относительно:  
а — изображений переменных; б — оригиналов переменных (как функций времени).



Для системы вида (2.33) корни полинома  $L(p)$  являются полюсами, а корни полинома  $M(p)$  — нулями. Если  $M(p)$  сводится к постоянной величине, то можно сказать, что система не имеет членов в числителе, характеризующих динамику, и входной сигнал непосредственно не фигурирует в выражении для выходного сигнала  $y(t)$ . Для этого случая существует несколько простых методов получения уравнений состояния системы, некоторые из которых рассматриваются ниже.

### Метод разложения на простые дроби (канонические формы)

Без потери общности рассмотрим систему  $G(p) = \frac{1}{L(p)}$ , описываемую уравнением

$$L(p)y = u. \quad (2.35)$$

Полагая, что  $L(p)$  имеет простые нули, можно написать

$$L(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i), \quad (2.36)$$

где  $\lambda_i$  — полюсы функции  $G(p)$  или корни полинома  $L(\lambda_i)$ .

Разлагая  $\frac{1}{L(p)}$  на простые дроби, получим

$$\frac{1}{L(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - \lambda_i}, \quad (2.37)$$

откуда

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - \lambda_i} \right) u(t) = y(t).$$

Если положить

$$x_i(t) = \frac{1}{p - \lambda_i} u(t), \quad (2.38)$$

то

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t). \quad (2.39)$$

Согласно уравнению (2.38) переменная  $x_i$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\dot{x}_i - \lambda_i x_i = u; \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.40)$$

Система уравнений (2.40) эквивалентна уравнению

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (2.41)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Имеем также

$$y = c^T x, \quad (2.43)$$

где  $c$  — вектор, составляющими которого служат вычеты, т.е.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Уравнения (2.41) и (2.43), полностью характеризующие систему, образуют уравнения состояния системы.

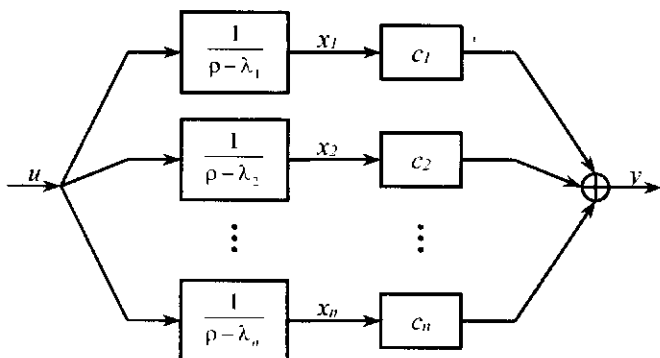


Рис. 2.5. Структурная схема стационарной системы, записанной в канонической форме.

Описанный метод получения уравнений состояния имеет то преимущество, что связан с получением  $A$ -матрицы, которая, будучи диагональной, значительно упрощает последующие выкладки. Кроме того, здесь в явной форме фигурируют собственные значения, или полюсы системы.

Блок-схема системы, соответствующая уравнениям (2.41) и (2.43), показана на рис. 2.5. Из этой схемы видно, что каждая составляющая функции  $G(p)$  представляется отдельной ветвью.

Нетрудно видеть, что для применимости метода не обязательно, чтобы все корни были действительными. Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексные сопряженные корни, то выходные сигналы  $x_1$  и  $x_2$  соответствующих ветвей также будут комплексными сопряженными.

**Пример 2.3.** Рассмотрим систему, описываемую уравнением  $(p^2 + 1)y = u$ . Производя разложение на простые дроби, получим

$$\frac{1}{p^2 + 1} = \frac{-\frac{j}{2}}{p - j} + \frac{\frac{j}{2}}{p + j},$$

где  $j = \sqrt{-1}$ .

Следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad c = \begin{bmatrix} -\frac{j}{2} \\ \frac{j}{2} \end{bmatrix}.$$

Необходимо, однако, заметить, что во многих случаях бывает неудобно вводить в рассмотрение комплексные переменные состояния. Одна из причин этого заключается в том, что мы лишаемся возможности представлять систему в  $n$ -мерном пространстве состояний, вследствие чего рекомендуется избегать применения мнимых величин при написании уравнений состояния. Поэтому описанное каноническое представление обычно не применяют, если имеются комплексные полюсы.

Если система имеет кратные корни, то, как показано ниже, метод разложения на простые дроби остается справедливым.

**Пример 2.4.** Рассмотрим систему, для которой  $M(p) = 1$  и

$$L(p) = (p - \lambda_1)^2 (p - \lambda_2).$$

В данном случае

$$G(p) = \frac{c_1}{(p - \lambda_1)^2} + \frac{c_2}{(p - \lambda_1)} + \frac{c_3}{(p - \lambda_2)},$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad c_2 = -\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} = -c_3.$$

Блок-схема системы представлена на рис. 2.6, а соответствующие уравнения состояния имеют вид

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2; \quad \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + u; \quad \dot{x}_3 = \lambda_2 x_3 + u$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

выходной сигнал определяется уравнением  $y = c^T x$ , где

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

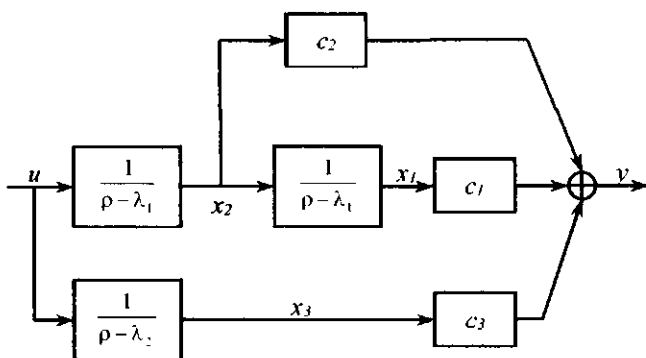


Рис. 2.6. Структурная схема системы.

В общем случае  $L(p) = (p - \lambda_1)^{k_1} (p - \lambda_2)^{k_2} \dots (p - \lambda_r)^{k_r}$  (где  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ ) метод разложения на простые дроби, как нетрудно видеть, придает матрице  $A$  системы жорданову каноническую форму, т.е.

$$A = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix} = \Lambda_J, \quad (2.44)$$

где каждый диагональный элемент  $J_{k_i}(\lambda_i)$  представляет матрицу типа

$$J_{k_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & h_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & h_{i2} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & h_{ik_i} \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

где каждый из элементов  $h_{i1}, \dots, h_{ik_i}$  — или единица, или нуль.

Составляющие вектора  $b$ , соответствующие  $k_1$ -й,  $(k_1 + k_2)$ -й, ...,  $(\sum_{i=1}^r k_i)$ -й позициям, равны единице, а все остальные — нулю.

Блок-схема, соответствующая каждой из подматриц  $J_{k_i}(\lambda_i)$ , показана на рис. 2.7 ( $c_j$ ,  $k_i$  — вычеты).

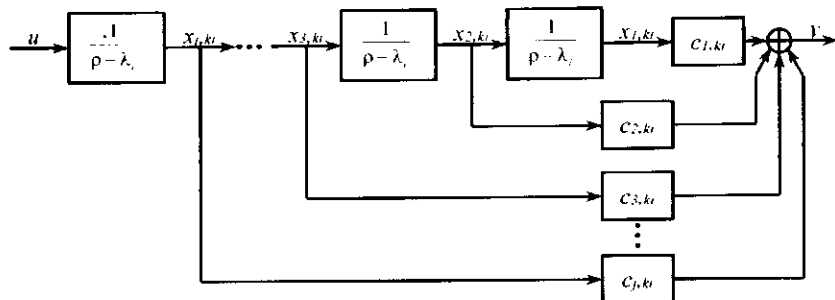


Рис. 2.7. Структурная схема линейной стационарной системы, матрица  $A$  которой имеет жорданову форму  $\Lambda_J$ .

Уравнения состояния, матрица  $A$  которых или диагональная  $\Lambda$  из собственных значений, или жорданова  $\Lambda_J$ , будут называться каноническими уравнениями состояния. В этом случае система представляется в простой форме, удобной для последующих выкладок.

### Метод простых множителей

Если функция  $G(p)$  разложима на множители, ее можно представить в виде

$$G(p) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(p - \lambda_i)}. \quad (2.46)$$

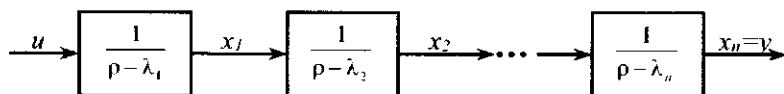


Рис. 2.8. Структурная схема линейной стационарной системы, функция  $G(p)$  которой разложена на множители.

Соответствующая блок-схема представлена на рис. 2.8. Принимая в качестве переменных состояния указанные на этом рисунке переменные, имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u; \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + x_1; \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + x_{n-1}; \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

причем выходной сигнал равен  $x_n$ . При записи уравнений состояния в матричной форме соответствующие матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & & & . & \\ . & 1 & & & . & \\ . & & . & & . & \\ . & & & . & . & \\ 0 & & & & 1 & \lambda_n \end{bmatrix}; \quad (2.48)$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Как нетрудно видеть, применимость этого метода не ограничивается случаем простых корней.

### Метод, применяемый при аналоговом моделировании

При аналоговом моделировании система  $G(p) = \frac{1}{L(p)}$  реализуется различными обратными связями. При этом используются суммирующие, инвертирующие и интегрирующие звенья. Уравнения состояния можно записать, основываясь на этом представлении системы. В данном случае раскладывать  $L(p)$  на множители нет необходимости.

**Пример 2.5.** Возможная реализация функции

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{p^3 + ap^2 + bp + c} \quad (2.50)$$

показана на рис. 2.9. Если в качестве переменных состояния принять переменные, приведенные на рис. 2.9, то уравнения можно записать в виде

$$\dot{x}_1 = x_2 - ax_1; \quad \dot{x}_2 = x_3 - bx_1; \quad \dot{x}_3 = -cx + u_1; \quad y = x_1.$$

Следовательно

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ -c & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

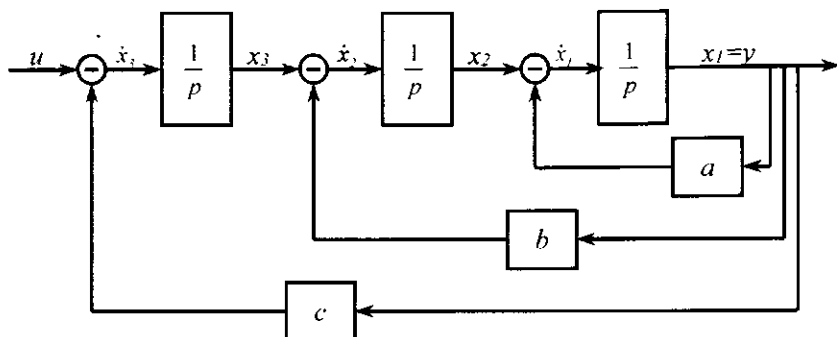


Рис. 2.9. Блок-схема аналогового моделирования объекта, описываемого уравнением (2.20).

### Нормальная форма

Классический подход заключается в том, что в качестве переменных состояния принимаются выходной сигнал и  $n-1$  его производных. Преимущество такого подхода — простота представления результатов, когда собственные значения различны. Кроме того, как мы уже видели ранее, такое представление возможно для нелинейного дифференциального уравнения общего вида. Если  $n=2$ , то выходной сигнал может быть представлен классическим фазовым портретом на фазовой плоскости. Если  $n>2$ , выходной сигнал может быть представлен траекториями в  $n$ -мерном «фазовом пространстве». Выбирая при

$L(p) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} p^i$  в качестве переменных состояния

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{x}_1; \quad x_3 = \dot{x}_2; \quad \dots; \quad x_n = \dot{x}_{n-1},$$

получаем для уравнений состояния следующую матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

В матричном уравнении имеем

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ a_n \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

По Дезоеру, эти переменные называются нормальными переменными состояния.

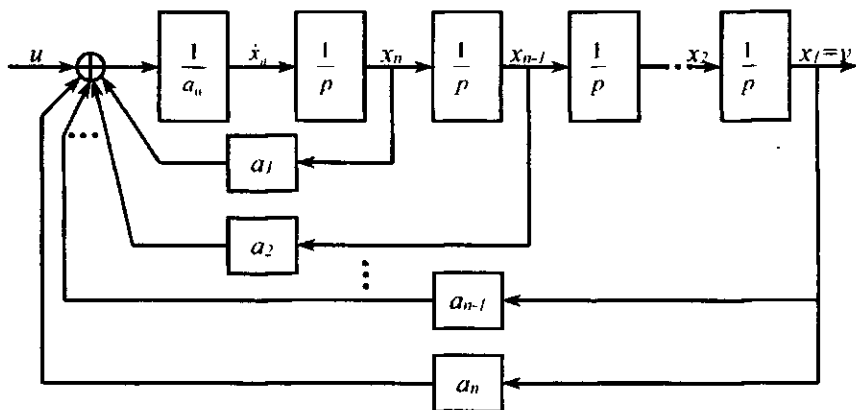


Рис. 2.10. Блок-схема аналогового моделирования объекта, уравнение которого записано в нормальной форме.

При аналоговом моделировании система представляется, как показано на рис. 2.10.

## 2.5. Уравнения состояния линейных стационарных систем с числителем передаточной функции порядка $l$ , где $l \leq n$

Если числитель  $M(p)$  передаточной функции имеет порядок, меньший или равный порядку  $L(p)$ , то система по-прежнему может быть описана уравнениями (2.37), (2.39).

### Метод разложения на простые дроби

В данном случае по сравнению с ранее рассмотренными методами каких-либо существенных отличий не наблюдается, если не считать возможности появления в разложении постоянного члена, когда порядок  $M(p)$  равен порядку  $L(p)$  ( $l = n$ ). Следовательно, имеем

$$y = c^T x + du,$$

где  $d$  — постоянная.

Все остальные величины сохраняют тот же вид, как в предыдущем случае.



## Метод разложения на простые множители

Выражая  $G(p)$  через нули и полюсы, получим

$$G(p) = k \prod_{i=1}^l \frac{(p - \gamma_i)}{(p - \lambda_i)} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(p - \lambda_j)},$$

где  $\gamma_i$  — нули функции  $G(p)$ . Так как  $\frac{p - \gamma_i}{p - \lambda_i} = 1 + \frac{\lambda_i - \gamma_i}{p - \lambda_i}$ , то передаточной функции  $G(p)$  можно поставить в соответствие блок-схему, показанную на

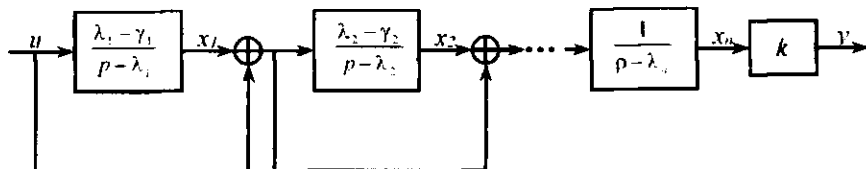


Рис. 2.11. Структурная схема линейного стационарного объекта с разложенной на множители функцией  $G(p)$ , степени числителя и знаменателя которой удовлетворяют условию  $l < n$ .

рис. 2.11. Выбирая в качестве переменных состояния переменные, приведенные на рис. 2.11, имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + (\lambda_1 - \gamma_1) u; \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + (\lambda_2 - \gamma_2) x_1 + (\lambda_2 - \gamma_2) u; \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + x_{n-1}; \\ y &= k x_n, \end{aligned}$$

откуда достаточно просто найти соответствующие матрицы.

## Метод, применяемый при аналоговом моделировании

Нетрудно видеть, что для учета числителя необходимо на схеме рис. 2.10 добавить лишь соответствующие прямые связи.

Например, система

$$\frac{y}{u} = \frac{dp^3 + ep^2 + fp + g}{p^3 + ap^2 + bp + c}$$

реализуется схемой, показанной на рис. 2.12.

Основываясь на этой схеме, можно сразу написать уравнение состояния

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ -c & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -ad \\ f & -bd \\ g & -cd \end{bmatrix} u;$$

$$y = c^T x + du,$$

где

$$c^T = (1 \ 0 \ 0).$$

Заметим, что  $A$  и  $c$  не отличаются от матриц в примере 2.5, в то время как  $b$  претерпевает изменение;  $u$  становится теперь явной функцией от  $u$ .

### Нормальная форма

В данном случае можно избежать использования производных  $y(t)$  и, кроме того, уравнение состояния в нормальной форме можно получить соответствующей заменой переменных.

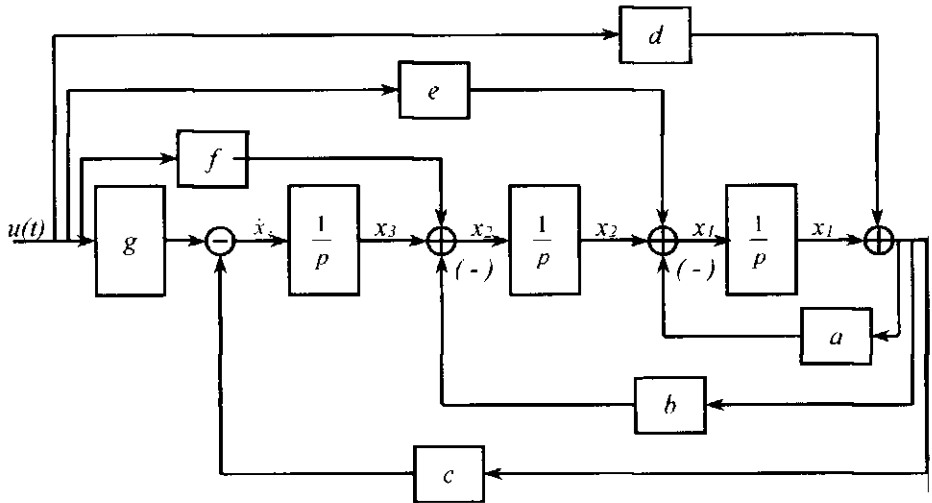


Рис. 2.12. Представление линейного стационарного объекта в виде структурной схемы с прямыми и обратными связями.

**Пример 2.6.** Рассмотрим систему

$$\frac{y}{u} = \frac{p+a}{(p+b)(p+c)}$$

или в другой форме

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (b+c) \frac{dy}{dt} + (bc)y = \frac{du}{dt} + au. \quad (2.52)$$

Вместо обычной замены  $x_1 = y$ ,  $\frac{dx_1}{dt} = x_2$  и т.д. положим

$$y = x_1 + k_0 u; \quad (2.53)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + k_1 u; \quad (2.54)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(b+c)x_2 - (bc)x_1 + k_2 u. \quad (2.55)$$

Из уравнения (2.53) имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + k_0 \frac{du}{dt}. \quad (2.56)$$

Используя уравнение (2.56), находим

$$x_2 = \frac{dy}{dt} - k_0 \frac{du}{dt} - k_1 u. \quad (2.57)$$

Из уравнения (2.56) можно получить

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt} + k_0 \frac{d^2 u}{dt^2} + k_1 \frac{du}{dt}, \quad (2.58)$$

а из уравнений (2.55), (2.57), (2.58) найдем

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - k_0 \frac{d^2 u}{dt^2} - k_1 \frac{du}{dt} = -(b+c) \left[ \frac{du}{dt} - k_0 \frac{du}{dt} - k_1 u \right] - (bc) [y - k_0 u] + k_2 u. \quad (2.59)$$

Приводя подобные члены и сравнивая с уравнением (2.52), определим

$$k_0 = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = a - (b+c).$$

Таким образом, при указанной замене уравнение состояния для системы, описываемой уравнением (2.52), принимает вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -bc & -(b+c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} u.$$

Для общего случая имеем

$$L(p) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} p^i; \quad M(p) = \sum_{j=0}^n b_{n-j} p^j, \quad (2.60)$$

где полином  $L(p)$  снормирован, т.е.  $a_0 = 1$ .

## 2.6. Уравнения состояния линейных стационарных систем с числителем передаточной функции порядка $l > n$

Если степень числителя превосходит степень знаменателя, то уравнения состояния будут содержать производные входного сигнала, так что уравнения состояния примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b_1 u + b_2 \dot{u} + \dots + b_k \frac{d^k u}{dt^k}; \\ y &= c^T x + du. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

В данном случае функцию  $G(p)$  необходимо записать в следующей форме:

$$G(p) = d_0 p^r + \dots + d_r p + \frac{b_0 p^n + \dots + b_n}{a_0 p^n + \dots + a_n}. \quad (2.62)$$

Рациональная часть может быть разложена при использовании какого-либо из рассмотренных методов. Остающаяся часть определяет появление в уравнении (2.61) производных от  $u$ .

## 2.7. Уравнения состояния линейных систем с переменными параметрами

В этом случае система описывается уравнением (2.31). Методы, основанные на использовании разложения на простые дроби, здесь малопригодны. Однако методы, применяемые при моделировании, и метод приведения к нормальной форме могут быть использованы.

Можно показать, что при

$$L(p, t) = \sum_{i=0}^n a_{n-i}(t) p^i,$$

где  $a_n = 1$ , и

$$M(p, t) = \sum_{j=0}^n b_{n-j}(t) p^j,$$

имеем

$$k_0(t) = b_0(t); \quad k_i(t) = b_i(t) - \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{i-m} C_{n+k-i}^{n-i} a_{i-m-k}(t) p^k k_m(t). \quad (2.63)$$

Здесь символ  $C_n^r$  обозначает число сочетаний из  $n$  элементов по  $r$ , т.е.

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (2.64)$$

## 2.8. Уравнения состояния системы для случая нескольких входов и выходов

Принимая во внимание все изложенное выше, нетрудно получить уравнения состояния для системы с несколькими входами и выходами. В данном случае для характеристики системы вместо векторов  $b$  и  $c$  должны использоваться матрицы  $B$  и  $C$ .

**Пример 2.7.** Рассмотрим систему с двумя входами и выходами (рис. 2.10). Заметим, что система имеет шестой порядок. Следуя методу нормальных координат, принимаем в качестве переменных состояния

$$x_1 = z_1; \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1; \quad x_3 = z_2; \quad x_4 = z_3; \quad x_5 = z_4; \quad x_6 = \dot{x}_5 = \dot{z}_4.$$

Основываясь на приведенной схеме, получим

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \\ 0 & k_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

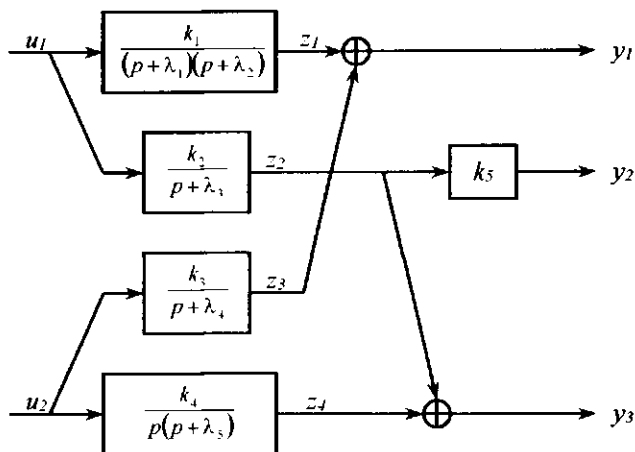


Рис. 2.13. Структурная схема, рассматриваемая в примере 2.7.

## 2.9. Характеристическое уравнение для стационарных систем

Хорошо известно, что для систем вида (2.33) уравнение

$$L(\lambda) = 0, \quad (2.65)$$

где  $\lambda$  — комплексная переменная — является характеристическим уравнением системы, а корни уравнения (2.35) — полюсы системы.

Если система (2.33) описывается уравнением состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.66)$$

то можно показать (упражнение для самостоятельного выполнения), что характеристическое уравнение можно записать в следующей форме:

$$|A - \lambda I| = 0. \quad (2.67)$$

Следовательно,

$$L(\lambda) = |A - \lambda I|.$$

Корни уравнения (2.67) [и, следовательно, полюсы системы (2.53)] известны в матричном исчислении как собственные значения или как характеристические числа матрицы  $A$ . Уравнение (2.37) получается при нахождении такого вектора  $v$  в пространстве состояний, который

преобразуется матрицей  $A$  с точностью до постоянного множителя сам в себя. Другими словами,

$$Av = \lambda v, \quad (2.68)$$

где  $\lambda$ , как и в случае уравнения (2.67), — скалярная комплексная величина. Векторы, удовлетворяющие уравнению (2.68), называются собственными векторами матрицы  $A$ .

## 2.10. Определение переходной матрицы линейной стационарной системы

Для линейных стационарных систем переходная матрица в большинстве случаев легко может быть найдена. В данном случае

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0); \quad \Phi(t_0, t_0) = I, \quad (2.69)$$

где  $A$  — постоянная матрица.

Для линейной стационарной системы первого порядка имеем

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[ \int_{t_0}^t A dt \right] = e^{A(t-t_0)}.$$

Это выражение дает повод искать решение системы уравнений в аналогичной форме, т.е. в виде экспоненциальной функции от матрицы  $A$ .

Определим экспоненциальную функцию матрицы  $A$  и истекшего времени  $t - t_0$  следующим выражением:

$$e^{A(t-t_0)} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}, \quad (2.70)$$

где

$$A^0 = I.$$

Если далее определить производную от матрицы как матрицу производных ее элементов, то станет ясно, что при

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (2.71)$$

уравнение (2.69) удовлетворяется тождественно.

Следовательно, для случая стационарной системы общее решение сводится к виду

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} B(t_1) u(t_1) dt_1, \quad (2.72)$$

а при отсутствии внешнего воздействия  $u(t)$ , т.е. для автономной системы, решение принимает вид

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0). \quad (2.73)$$

Однако мы пока не дали выражения  $e^{A(t-t_0)}$  в замкнутой форме. Чтобы сделать это, мы должны найти элементы  $\Phi_{11}(t-t_0), \Phi_{12}(t-t_0), \dots$  матрицы

$$\Phi(t-t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t-t_0) & \dots & \Phi_{1n}(t-t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1}(t-t_0) & \dots & \Phi_{nn}(t-t_0) \end{bmatrix} = [\Phi_{ij}(t-t_0)].$$

Выражение (2.70) показывает, что теоретически  $\Phi(t-t_0)$  можно определить при помощи бесконечного матричного ряда вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}.$$

Однако в общем случае такой путь практически мало пригоден. Для частных случаев существуют более удобные методы. Рассмотрим некоторые из них.

**Матрица  $A$  — диагональная.** Это, например, имеет место, когда система  $n$ -го порядка состоит из  $n$  не связанных одна с другой систем первого порядка или когда при простых полюсах  $G(p)$  используется разложение на простые дроби. В данном случае  $A = \Lambda$ , где  $\Lambda$  — диагональная матрица, элементами которой служат собственные значения (или полюсы функции  $G(p)$ ). Для этой матрицы можно записать

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n^n \end{bmatrix},$$

и, непосредственно используя выражение (2.70), получим

$$e^{\Lambda(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & 0 \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

Этот результат достаточно ясен, если перейти к системе несвязанных дифференциальных уравнений первого порядка.

**Собственные значения матрицы  $A$  различны, но  $A$  — не диагональная.** Случай 1 наводит на мысль, что когда  $A$  не диагональная, мы должны стараться найти постоянную матрицу  $P$ , которая преобразует матрицу  $A$  в диагональную  $\Lambda$ , т.е.  $\Lambda = P^{-1}AP$ . Отсюда  $P\Lambda P^{-1} = A$ , и поскольку  $A^n = P\Lambda P^{-1}$ , имеем

$$e^{A(t-t_0)} = P e^{\Lambda(t-t_0)} P^{-1}.$$

Это эквивалентно преобразованию

$$\Phi(t, t_0) = P\theta(t, t_0), \quad (2.74)$$

при помощи которого уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi; \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

преобразуется в уравнение

$$P \frac{d\theta}{dt} = AP\theta$$

или

$$\frac{d\theta}{dt} = P^{-1}AP\theta = \Lambda\theta; \quad \theta(t_0, t_0) = P^{-1}. \quad (2.75)$$

Так как теперь матрица  $P^{-1}AP$  диагональная, элементы  $\theta_{ij}$  матрицы  $\theta$ , как в случае 1, легко могут быть найдены. Из соотношения  $\Phi = P\theta$  можно заключить, что каждый элемент  $\Phi_{ij}$  должен быть линейной комбинацией членов  $e^{\lambda_i(t-t_0)}$ .

Простой способ нахождения матрицы  $P$  в данном случае состоит в том, что сначала находятся  $n$  собственных векторов  $v_i$ , удовлетворяющих уравнению

$$Av_i = \lambda_i v_i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.76)$$

а затем формируется матрица  $P$ , столбцами которой служат  $n$  векторов  $v_i$ . Справедливость такого способа становится ясной, если соотношение  $P^{-1}AP = \Lambda$  переписать как

$$AP = P\Lambda. \quad (2.77)$$

Если матрица  $P$  сформирована, как описано выше, то нетрудно видеть, что уравнение (2.77) сводится к уравнениям (2.76).

Если уравнения системы записаны в нормальной форме, то матрица  $A$  принимает вид (2.76). В этом случае матрицей, преобразующей матрицу  $A$  в диагональную матрицу  $\Lambda$ , будет матрица Вандермонда

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Матрицей, преобразующей систему из канонической формы в нормальную, является матрица  $VC$ , где  $C$  — диагональная матрица  $[c_1, \dots, c_n]$ . Чтобы показать это, выпишем выходной сигнал  $y$  и  $n-1$  его производных:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^n c_i x_i; & \frac{dy}{dt} &= \sum_{i=1}^n c_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i x_i, \dots; \\ & & \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} &= \sum_{i=1}^n c_i \frac{d^{n-1} x_i}{dt^{n-1}} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^{n-1} x_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$



Выражая нормальный вектор состояния

$$x_N = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}$$

через канонический вектор состояния

$$x_C = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

получим

$$x_N = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_1 \lambda_1 & c_2 \lambda_2 & \dots & \dots & c_n \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 \lambda_1^{n-1} & c_1 \lambda_2^{n-1} & \dots & \dots & c_1 \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}; \quad x_C = V C x_C.$$

Поскольку  $x_N$  и  $x_C$  — векторы состояния системы соответственно в нормальной и канонической форме, следовательно, мы доказали вторую часть нашего утверждения. Теперь можно записать

$$V C A (V C)^{-1} = V C A C^{-1} V^{-1} = A_N,$$

где  $A_N$  — матрица  $A$  системы, записанной в нормальной форме. Так как  $C A C^{-1} = \Lambda$ , то  $V \Lambda V^{-1} = A_N$ , что доказывает первую часть нашего утверждения.

**Метод преобразования Лапласа.** Этот метод применим как при простых, так и кратных корнях.

Пусть  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ , где  $\mathcal{L}$  — оператор преобразования Лапласа, а  $x(t)$  определена на положительной полуоси, начиная с  $t_0 = 0$ . Тогда уравнение  $\dot{x} = Ax$  при  $x(0) = x_0$  принимает вид

$$sX(s) - x_0 = AX(s), \quad (2.80)$$

откуда находим

$$(sI - A)X(s) = x_0; \quad X(s) = (sI - A)^{-1} x_0.$$

Так как

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

то

$$\mathcal{L}[\Phi(t, 0)] = \mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$$

или

$$\Phi(t, 0) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]. \quad (2.81)$$

Следовательно, для нахождения  $\Phi(t, 0)$  необходимо вычислить матрицу, обратную матрице  $(sI - A)$ , и для каждого элемента этой матрицы осуществить обратное преобразование Лапласа.

**Пример 2.8.** Рассмотрим систему

$$G(p) = \frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)}.$$

При записи ее в нормальной форме получим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha + \beta) \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Матрица Вандермонда имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \alpha^2 & \beta^2 \end{bmatrix},$$

так что

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} & \frac{1}{\alpha\beta} \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)} & \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)} \\ 0 & \frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)} & \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)} \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно найти переходную матрицу  $\Phi(t, 0)$ . Итак,

$$\Phi(t, 0) = Ve^{At}V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha - \beta)} + \frac{\alpha e^{-\beta t}}{\beta(\beta - \alpha)} & \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha - \beta)} + \frac{e^{-\beta t}}{\beta(\beta - \alpha)} \\ 0 & \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} & \frac{e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha} + \frac{e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} \\ 0 & \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} & \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} + \frac{\beta e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Этот же результат мы можем получить, используя преобразования Лапласа. Имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha + \beta) \end{bmatrix}; \quad (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & \alpha\beta & s + (\alpha + \beta) \end{bmatrix};$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s + (\alpha + \beta)}{s} & \frac{1}{s} \\ s & \frac{s(s + \alpha)(s + \beta)}{s + (\alpha + \beta)} & \frac{1}{s + (\alpha + \beta)} \\ 0 & \frac{s + (\alpha + \beta)}{(s + \alpha)(s + \beta)} & \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)} \\ 0 & \frac{-\alpha\beta}{(s + \alpha)(s + \beta)} & \frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \cdot \frac{(\alpha + \beta)/\alpha\beta - \beta/[\alpha(\beta - \alpha)] + \alpha/[\beta(\beta - \alpha)]}{s} + \frac{1/\alpha\beta}{s} + \frac{1/[\alpha(\alpha - \beta)]}{s + \alpha} + \frac{1/[\beta(\beta - \alpha)]}{s + \beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что в результате преобразования  $L^{-1}(sI - A)^{-1}$  приходим к тому же выражению переходной матрицы, т.е. к выражению (2.82).

**Пример 2.9.** Для системы, приведенной на рис. 2.14, найти: а) переходную матрицу; б) переходный процесс по переменным состояния при  $r(t) = 0$  и  $x_1(0) = 4$ ,  $x_2(0) = 2$ ; в) реакцию системы на входной сигнал  $r(t) = \cos 2t$ , прикладываемый в момент  $t = 0$  при начальных условиях  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ .

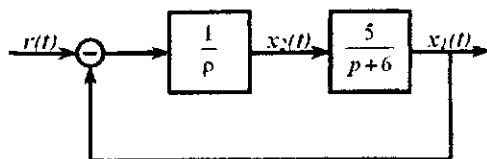


Рис. 2.14. Структурная схема системы, рассматриваемой в примере 2.9.

Уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -6x_1 + 5x_2; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + r(t), \end{aligned}$$

так что

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения системы (полюсы) можно получить, записав определитель

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 5 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 6) + 5 = (\lambda + 1)(\lambda + 5).$$

Следовательно,  $\lambda = -1, -5$ .

Чтобы найти переходную матрицу, сформируем сначала из предварительно найденных собственных векторов преобразующую матрицу  $P$ . Написав соответственно для  $\lambda = -1$  и  $\lambda = -5$  уравнение  $Az = \lambda z$ , находим с точностью до постоянного множителя следующие собственные векторы:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Следовательно,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Путем проверки можно убедиться, что

$$A = P^{-1}AP.$$

Переходную матрицу можно сформировать с помощью следующего преобразования:

$$\Phi(t, 0) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-t} + 5e^{-5t} & 5e^{-t} - 5e^{-5t} \\ -e^{-t} + e^{-5t} & 5e^{-t} - e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Если  $r(t) \equiv 0$ ;  $x_1(0) = 4$  и  $x_2(0) = 2$ , то переходный процесс определяется выражением

$$x(t) = \Phi(t, 0)x(0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-5t} \\ \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

И, наконец, при  $r(t) = \cos 2t$  и  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  реакция системы с момента  $t = 0$  определяется согласно уравнению (2.52) выражением

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \int_0^t \Phi(t, \tau) b(\tau) r(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \int_0^t (5e^{-(t-\tau)} - 5e^{-5(t-\tau)}) \cos 2\tau d\tau \\ \frac{1}{4} \int_0^t (5e^{-(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}) \cos 2\tau d\tau \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{29} \left( 12 \sin 2t + \cos 2t - \frac{29}{4} e^{-t} + \frac{25}{4} e^{-5t} \right) \\ \frac{1}{29} \left( 14 \sin 2t + 6 \cos 2t - \frac{29}{4} e^{-t} + \frac{5}{4} e^{-5t} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Перед тем как закончить этот раздел, заметим, что, поскольку для линейных стационарных систем функция  $\Phi(t, t_0)$  имеет вид  $e^{A(t-t_0)}$ , то эта функция не изменяется при сдвиге во времени. Без потери общности можно считать  $t_0 = 0$ . Поэтому переходную матрицу линейной инвариантой во времени системы будем иногда обозначать как  $\Phi(t)$ .

## 2.11. Передаточные функции линейных стационарных систем

Матричная запись весьма удобна и для представления системы в области изображений по Лапласу. В случае стационарной многомерной системы будем обозначать изображения по Лапласу входных сигналов  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...,  $u_r(t)$  по традиции как  $U_1(s)$ ,  $U_2(s)$ , ...,  $U_r(s)$ . Аналогичным образом вектор состояния можно в области изображений представить  $n$ -мерным вектором  $X(s)$ , а выходные сигналы  $m$ -мерным вектором  $Y(s)$ . Соотношение между этими векторами устанавливается передаточными матрицами  $H(s)$  и  $G(s)$  типа  $n \times r$  и  $m \times n$  согласно следующим уравнениям:

$$X(s) = H(s)U(s); \quad (2.83)$$

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (2.84)$$

Напомним, что передаточная функция, связывающая входной и выходной сигналы, определяется как преобразование Лапласа от реакции системы на входной сигнал в виде единичного импульса при нулевых начальных условиях и при равенстве нулю всех других внешних сигналов. Следовательно, элемент  $h_{ij}(s)$  матрицы  $H(s)$  представляет собой преобразование по Лапласу импульсной переходной функции по  $i$ -й переменной состояния в отношении  $j$ -го входного сигнала при равенстве нулю всех других входных сигналов.

Представляет интерес установить взаимосвязь между матричными передаточными функциями системы  $H(s)$ ,  $G(s)$ , введенными согласно уравнениям (2.83) и (2.84), и матрицами во временной области  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Можно убедиться, что практически все формулы для преобразований по Лапласу при скалярной форме записи справедливы и для случая записи в матричной форме. Рассмотрим, например, систему  $\dot{x} = Ax + Bu$ ;  $y = Cx + Du$ . Преобразуя по Лапласу обе части первого уравнения при нулевых начальных условиях, получим

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

или

$$[sI - A]X(s) = BU(s).$$

Следовательно,

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s). \quad (2.85)$$

Преобразуя по Лапласу обе части уравнения  $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ , получим

$$Y(s) = CX(s) + DU(s), \quad (2.86)$$

так что

$$Y(s) = [C[sI - A]^{-1}B + D]U(s). \quad (2.87)$$

Из уравнений (2.83) - (2.87) найдем

$$H(s) = [sI - A]^{-1}B; \quad (2.88)$$

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D. \quad (2.89)$$

Уравнения (2.88), (2.89) определяют путь получения передаточной функции системы из уравнений, записанных через переменные состояния.

**Пример 2.10.** Для системы, рассмотренной в примере 2.4, имеем

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = c^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]; \quad d = 0.$$

Тогда

$$G(s) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} (s - \lambda_1) & -1 & 0 \\ 0 & (s - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & (s - \lambda_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{(s - \lambda_1)} & \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s - \lambda_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s - \lambda_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{c_1}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_2}{(s - \lambda_1)} + \frac{c_3}{(s - \lambda_2)}.$$

**Пример 2.11.** Рассмотрим теперь систему из примера 2.6. Располагая матрицами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , получим

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 & s + (\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s + \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s + \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s + \lambda_5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s + \lambda_1 + \lambda_2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{s}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s + \lambda_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s + \lambda_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s + \lambda_5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s + \lambda_5} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$H(s) = (sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{k}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & 0 \\ \frac{k_1 s}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & 0 \\ \frac{k_2}{s + \lambda_3} & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{s + \lambda_4} \\ 0 & \frac{k_4}{s(s + \lambda_5)} \\ 0 & \frac{k_4}{s + \lambda_5} \end{bmatrix}$$

и

$$G(s) = C[sI - A]^{-1} B = CH(s) = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{k}{s + \lambda_4} \\ \frac{k_2 k_3}{s + \lambda_3} & 0 \\ \frac{k_2}{s + \lambda_3} & \frac{k_4}{s(s + \lambda_5)} \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $H(s)$  и  $G(s)$  можно также получить непосредственно из схемы приведенной на рис. 2.13.

## 2.12. Применение теории графов

Передаточные функции сложной многоконтурной САР можно определить по структурной схеме без приведения ее к одноконтурной, если использовать метод теории графов.

Структурную схему САР можно рассматривать как один из видов графа, и для определения передаточных функций пользоваться формулой Мезона:

$$W_{zx} = \frac{\sum_{i=1}^r H_i \Phi_i}{\Phi}, \quad (2.90)$$

где  $W_{zx}$  — отношение изображения  $Z$  переменной  $z$  к изображению  $X$  переменной  $x$ ;

$$\Phi = 1 - \sum_{i=1}^{r_1} H_{1i} + \sum_{i=1}^{r_2} H_{2i} - \sum_{i=1}^{r_3} H_{3i} + \dots;$$

$H_i$  — передаточная функция разомкнутой цепи  $i$ -го замкнутого контура структурной схемы;  $r_1$  — число замкнутых контуров в схеме;  $H_{2i}$  — произведение передаточных функций разомкнутых цепей  $i$ -й пары непересекающихся контуров;  $H_{3i}$  — произведение передаточных функций разомкнутых цепей  $i$ -й тройки непересекающихся контуров;  $r_3$  — число троек непересекающихся контуров;  $H_i$  — передаточная функция  $i$ -й прямой цепи от переменной  $x$  к переменной  $z$ ;  $r$  — число прямых цепей от  $x$  к  $z$ ;  $\Phi_i$  — функция  $\Phi$  для той части структурной схемы, которая не соприкасается с  $i$ -й прямой цепью от  $x$  к  $z$ .

Формула (2.90) позволяет без преобразования структурной схемы САР определить любую ее передаточную функцию, т.е. отношение изображения одной из переменных (обобщенных координат) к изображению внешнего воздействия или другой переменной.

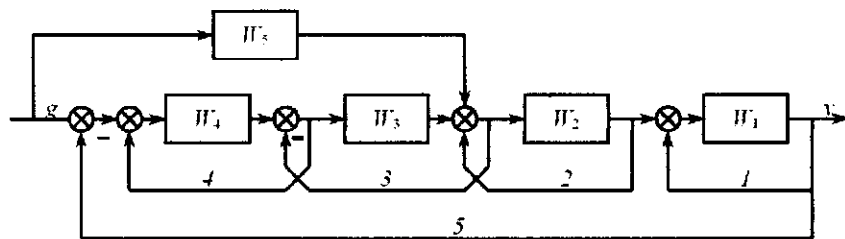


Рис. 2.15. Структурная схема многоконтурной САР с дополнительной связью по задающему воздействию.

Используя формулу (2.90), нужно иметь в виду следующее. Прямые цепи от  $x$  к  $z$  могут частично совпадать одна с другой. При определении передаточной функции разомкнутой цепи каждого из контуров нужно

учитывать знак обратной связи, образующей этот контур. Контурь не соприкасаются один с другим, когда у них нет ни общей координаты (стрелки на структурной схеме), ни общего звена (прямоугольника на структурной схеме). Если в структурной схеме есть более трех несоприкасающихся контуров, то при вычислении функции  $\Phi$  нужно добавить соответствующие суммы. Каждая из функций  $\Phi_i$  вычисляется так же, как и функция  $\Phi$ , но рассматривается лишь та часть структурной схемы, которая не соприкасается с  $i$ -й прямой цепью от  $x$  к  $z$ . Если с  $i$ -й прямой цепью соприкасаются все замкнутые контурь, то  $\Phi_i = 1$ .

**Пример 2.12.** По структурной схеме САР (рис. 2.15) нужно определить ее передаточную функцию относительно задающего воздействия  $g$ . Воспользуемся формулой (2.60) и начнем с вычисления функции  $\Phi$ . В рассматриваемой схеме пять замкнутых контуров; передаточные функции их разомкнутых цепей  $W_1, W_2, -W_3, -W_4, -W_1W_2W_3W_4$ .

Следовательно:

$$\sum_{i=1}^5 H_{1i} = W_1 + W_2 - W_3 - W_4 - W_1W_2W_3W_4.$$

Очевидно, что схема содержит пары из 1-го и 2-го, 1-го и 3-го, 1-го и 4-го, 2-го и 4-го несоприкасающихся контуров, поэтому

$$\sum_{i=1}^4 H_{2i} = W_1W_2 - W_1W_3 - W_1W_4 - W_2W_4.$$

Имеется только одна тройка из несоприкасающихся контуров, и она состоит из 1-го, 2-го и 4-го контуров:

$$H_{31} = -W_1W_2W_4.$$

Четырех несоприкасающихся контуров в системе нет, следовательно, теперь можно определить функцию

$$\Phi = 1 - \sum_{i=1}^5 H_{1i} + \sum_{i=1}^4 H_{2i} - H_{31} = (1 - W_1)[(1 - W_2)(1 + W_4) + W_3] + W_1W_2W_3W_4.$$

От задающего воздействия  $g$  к регулируемой координате  $y$  идут две прямые цепи передачи сигнала. Их передаточные функции

$$H_1 = W_4W_3W_2W_1 \text{ и } H_2 = W_5W_2W_1.$$

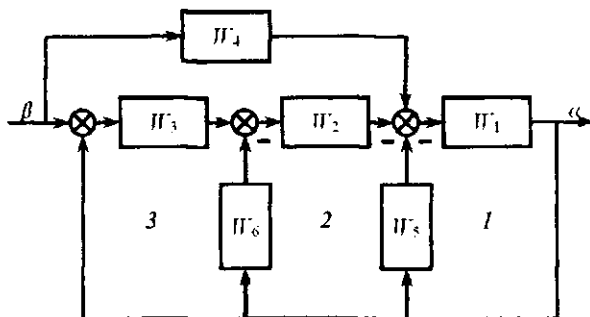


Рис. 2.16. Структурная схема дифференцирующего гироскопа.



С первой прямой цепью соприкасаются все замкнутые контуры, со второй прямой цепью не соприкасается только 4-й контур, следовательно,

$$\Phi_1 = 1 \text{ и } \Phi_2 = 1 + W_4;$$

$$\sum_{i=1}^2 H_i \Phi_i = W_1 W_2 [W_3 W_4 + (1 + W_4) W_5].$$

Теперь можно определить искомую передаточную функцию

$$W_{\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^2 H_i \Phi_i}{\Phi} = \frac{W_1 W_2 [W_3 W_4 + (1 + W_4) W_5]}{(1 - W_1)(1 - W_2)(1 + W_4) + W_3} + W_1 W_2 W_3 W_4.$$

Легко убедиться, что преобразование рассмотренной структурной схемы в эквивалентную одноконтурную имеет более сложный расчет. Использование формулы (2.90) обычно уменьшает трудоемкость определения передаточных функций САР, структурная схема которой имеет несколько взаимосвязанных контуров.

**Пример 2.13.** Составить передаточную функцию  $W_{\alpha\beta}$  дифференцирующего гироскопа (рис. 2.16).

Начнем с вычисления функции  $\Phi$ . В схеме три замкнутых контура ( $r_1 = 3$ ) и все они соприкасаются, так как имеют общее звено  $W_1$ , следовательно,  $r_2 = r_3 = \dots = 0$ . Передаточные функции разомкнутых цепей контуров

$$H_{11} = W_1(-W_5) = -W_1 W_5;$$

$$H_{12} = W_1(-W_6)(-W_2) = W_1 W_2 W_6;$$

$$H_{13} = W_1 W_3(-W_2) = -W_1 W_2 W_3.$$

Определяем функцию

$$\Phi = 1 - (H_{11} + H_{12} + H_{13}) = 1 + W_1 W_5 - W_1 W_2 W_6 + W_1 W_2 W_3.$$

В схеме две прямые цепи от входной величины  $\beta$  к выходной величине  $\alpha$ . Их передаточные функции

$$H_1 = W_3(-W_2)W_1 = -W_1 W_2 W_3 \text{ и } H_2 = W_4 W_1.$$

Обе прямые цепи содержат звено  $W_1$ , которое входит и во все замкнутые контуры системы, т.е. нет замкнутых контуров, не соприкасающихся с прямыми цепями, поэтому  $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$ .

Теперь по формуле (2.90) определим искомую передаточную функцию:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta} &= \frac{H_1 \Phi_1 + H_2 \Phi_2}{\Phi} = \frac{-W_1 W_2 W_3 + W_4 W_1}{1 + W_1 W_5 - W_1 W_2 W_6 + W_1 W_2 W_3} = \\ &= \frac{W_1 (W_4 - W_2 W_3)}{1 + W_1 [W_5 (W_3 - W_6) W_3]} \end{aligned}$$



$$|A - \lambda E| = 0. \quad (3.6)$$

Здесь и далее  $E$  означает единичную матрицу

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (3.6) называют характеристическим уравнением системы (3.2), а его корни  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются собственными числами (собственными значениями) матрицы  $A$ . Сумма элементов, стоящих на главной диагонали, образует след матрицы  $A$  и обозначается  $\text{Sp}A$ . След матрицы связан с собственными числами соотношением

$$\text{Sp}A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n.$$

Развернув определитель (3.5) по известным правилам, получим характеристическое уравнение  $n$ -й степени относительно  $\lambda$

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (3.7)$$

после чего применяется какой-либо из известных критериев исследования устойчивости или производится непосредственное вычисление корней уравнения численными методами. В такой постановке эта задача обычно и рассматривается.

Однако развертывание на ПЭВМ определителя высокого порядка (3.5) и приведение его к характеристическому полиному связано с серьезными трудностями чисто вычислительного характера.

Рассмотрим кратко существующие методы исследования устойчивости с точки зрения возможности их постановки на ПЭВМ. Известные критерии Рауса – Гурвица, Льенара – Шипара, А.В. Михайлова, Найквиста, Ланцоша и другие были созданы задолго до появления ПЭВМ и поэтому, естественно, не все оказались одинаково удобны для применения на ПЭВМ. В связи с этим возникает задача оценки существующих критериев с точки зрения реализации их на ПЭВМ и видоизменения их применительно к специфике электронных цифровых машин.

**Критерий Рауса – Гурвица.** Для раскрытия определителя Гурвица можно применить метод главных элементов или другие методы (например, приводя его к треугольному виду). Логические условия критерия Гурвица в этом случае совпадают со структурой критерия Рауса.

Составим определитель матрицы Гурвица из коэффициентов характеристического уравнения ( $a_i \neq 0$ );  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Для перехода матрицы Гурвица к правому треугольному виду сделаем следующие элементарные преобразования: из каждого элемента второй строки вычтем стоящий над ним элемент первой строки, предварительно умноженный на  $c_1 = \frac{a_0}{a_1}$ . Вместо строки с эле-

ментами  $a_0 a_2 a_4 a_6$  получим строку со следующими элементами:  $0b_2 b_4 b_6$ , где  $b_2 = a_2 - c_1 a_3$ ;  $b_4 = a_4 - c_1 a_5$ ;  $b_6 = a_6 - c_1 a_7$  и т. д.

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Выполним аналогичные операции в остальных нижележащих строках. Затем вычтем из каждого элемента третьей строки преобразованной матрицы стоящие над ней элементы преобразованной строки, умноженные на  $c_2 = \frac{a_1}{a_2}$ , и повторим аналогичные операции в нижележащих строках. Продолжим процесс по той же схеме до тех пор, пока на  $m$  - м шаге не получим правую треугольную матрицу, эквивалентную исходной.

Таким образом, имеем

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} A_1 & A_{12} & A_{15} & A_{14} & \dots \\ A & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \dots \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots A_{n-1} \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Как известно, определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали. Для того чтобы рассматриваемая система (3.7) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все элементы  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{33}$ , ...,  $A_{n-1, n-1}$ , расположенные на главной диагонали определителя  $\Delta_{n-1}$ , были положительны ( $a_0 > 0$ ). В случае, если хотя бы один из диагональных элементов неположителен, условия Гурвица для устойчивой системы не выполняются. В таком виде вычисления совпадают с расчетной схемой критерия Рауса. Изложенная процедура позволяет анализировать устойчивость линейных систем с помощью ПЭВМ

**Критерий Лъенара – Шипара.** Одна из модификаций критерия Рауса – Гурвица была предложена Лъенаром и Шипаром в 1914 г. Критерий Лъенара – Шипара формулируется следующим образом: для того чтобы исследуемая сис-

тема была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих четырех неравенств:

$$\begin{aligned} a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \\ a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \\ a_n > 0, a_{n-1}, a_{n-3} > 0, \dots, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \\ a_n > 0, a_{n-1}, a_{n-3} > 0, \dots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \end{aligned}$$

где  $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7$  - диагональные миноры матрицы Гурвица.

Принимая во внимание, что  $\Delta_1 = a_1$ , можно приведенные выше условия представить следующим образом:

при нечетном  $n$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} a_1, a_3, a_{n-2}, a_n \\ \Delta_3, \Delta_5, \dots, \Delta_{n-2}, \Delta_n \end{array} \right\} &> 0, \\ \left. \begin{array}{l} a_1, a_3, a_{n-2}, a_n \\ \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{n-3}, \Delta_{n-1} \end{array} \right\} &> 0, \\ \left. \begin{array}{l} a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \\ \Delta_3, \Delta_5, \dots, \Delta_{n-2}, \Delta_n \end{array} \right\} &> 0, \\ \left. \begin{array}{l} a_2, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-1}, a_n \\ \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{n-3}, \Delta_{n-1} \end{array} \right\} &> 0, \end{aligned}$$

при четном  $n$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} a_1, a_2, a_4, \dots, a_{n-2}, a_n \\ \Delta_3, \Delta_5, \dots, \Delta_{n-3}, \Delta_{n-1} \end{array} \right\} &> 0, \\ \left. \begin{array}{l} a_2, a_4, \dots, a_{n-2}, a_n \\ \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{n-2}, \Delta_n \end{array} \right\} &> 0, \\ \left. \begin{array}{l} a_1, a_3, \dots, a_{n-3}, a_{n-1}, a_n \\ \Delta_3, \Delta_5, \dots, \Delta_{n-3}, \Delta_{n-1} \end{array} \right\} &> 0, \\ \left. \begin{array}{l} a_1, a_3, \dots, a_{n-3}, a_{n-1}, a_n \\ \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{n-2}, \Delta_n \end{array} \right\} &> 0. \end{aligned}$$

Критерий Ляпунова – Шипара требует удовлетворения примерно вдвое меньшего количества детерминантных неравенств, чем обычный критерий Гурвица.

**Частотные критерии.** Несмотря на наметившуюся тенденцию широкого внедрения ПЭВМ в область анализа и синтеза автоматических систем, частотные методы применительно к машинной постановке не утратили своего значения. Реализация их на ПЭВМ может иметь как самостоятельное значение, и тогда проектировщик может быстро получить ценную информацию при обследовании большого количества различных сочетаний параметров (можно строить линии равных запасов устойчивости по модулю и по фазе и выводить их на

печать), так и вспомогательное. Так, например, при машинной постановке D – разбиения критерий Михайлова может применяться для выделения областей устойчивости среди нескольких претендентов на нее. Машинная реализация штриховки по Неймарку в том виде, в каком она применяется при ручных вычислениях, требует составления довольно сложной программы.

При постановке на ПЭВМ метода амплитудно – фазовых характеристик, исследование ведется по передаточной функции

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Требуется вычислить  $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ ;  $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$ , а затем построить  $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ ;  $\phi(\omega) = \arctg \left[ \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right]$ , где  $A(\omega)$  – амплитудная характеристика,  $\phi(\omega)$  – фазовая характеристика системы.

Построение на ПЭВМ амплитудно-фазовой характеристики сводится к многократному вычислению передаточной функции при минимом значений аргумента  $s = j\omega$  и последующего построения кривых по модулю и аргументу.

### 3.2. Исследование систем с помощью вычисления корней

Одним из эффективных итерационных способов вычисления корней является метод Ньютона. Как все итерационные методы, он обладает самонаправляемостью результата при случайных сбоях в машине, а информация может быть компактно размещена в запоминающем устройстве. Обычно этот метод применяют для вычисления простых корней.

Рассмотрим постановку этого метода на ПЭВМ для вычисления вещественных и комплексных корней.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$f(\lambda) = 0, \quad (3.9)$$

где  $f(\lambda)$  – вещественная, дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть известно, что внутри некоторого интервала  $[a, b]$  существует только один корень, а производная  $f'(\lambda)$  не имеет корней внутри этого интервала. Выберем некоторую точку  $\lambda_0$ , лежащую внутри интервала, и проведем касательную к кривой  $y = f(\lambda)$  в этой точке. Уравнение касательной

$$y - f(\lambda_0) = f'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0). \quad (3.10)$$

Полагая  $y = 0$  и решая (3.10) относительно  $\lambda$ , получим

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{f(\lambda_0)}{f'(\lambda_0)}.$$

Если теперь взять полученное значение  $\lambda$  в качестве точки  $\lambda_1$  и провести в ней касательную, заменяющую кривую  $y = f(\lambda)$ , и снова решить уравнение, то получим значение  $\lambda_2$ , т. е.

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{f(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)}.$$

Дальнейшие вычисления можно продолжить по рекуррентной формуле

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)},$$

которая с увеличением  $n$  дает все более точное приближение

к истинному значению корня. Как только  $\lambda_{n+1}$  будет отличаться от  $\lambda_n$  на величину, меньшую заранее заданного значения точности  $\varepsilon$ , можно полагать, что корень вычислен с заданной степенью точности и погрешность его по абсолютной величине меньше  $\varepsilon$ .

Вычислительная процедура Ньютона распространяется и на комплексные корни. Пусть задана аналитическая функция  $f(z)$  комплексного переменного  $z$  внутри заданной области  $W$ . Будем считать, что всюду внутри этой области производная  $f'(z) \neq 0$ . Требуется найти корень функции  $f(z)$ , лежащий внутри области  $W$ . Рассмотрим некоторую точку  $z_0 \in W$  и разложим функцию  $f(z)$  в ряд Тейлора в окрестности этой точки, ограничиваясь двумя членами ряда

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z) \quad (3.11)$$

Пренебрегая остаточным членом  $R(z)$  и заменяя функцию  $f(z)$  функцией  $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ , можно перейти от точного уравнения  $f(z) = 0$  к приближенному

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) = 0. \quad (3.12)$$

Решив это уравнение относительно  $z$  и обозначив полученное решение через  $z_1$ , будем иметь  $z_1 = z_0 - \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ . Продолжая этот процесс и принимая каждый раз за центр разложения вновь получающуюся точку  $z_n$ , можно написать рекуррентную формулу

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (3.13)$$

Если начальное приближение взято достаточно близко к искомому корню, то последующие приближения сходятся к корню с квадратичной скоростью.

### 3.3. Построение характеристического полинома на ПЭВМ

Рассмотрим некоторые особенности приведения уравнения (3.5) к виду (3.7), чтобы показать трудности, которые возникают при решении этой задачи на ПЭВМ.

Развернув характеристический определитель  $|A - \lambda E|$ , получим уравнение  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ , т. е.

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

где  $a_1$  - сумма всех диагональных миноров первого порядка, равная следу  $\text{Sp}A$ ;  $a_2$  - сумма всех диагональных миноров второго порядка матрицы  $A$ ;  $a_n$  - определитель матрицы  $A$ .

Число диагональных миноров  $k$  - го порядка матрицы  $A$  равно

$$\Delta_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!},$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, непосредственное развертывание характеристического определителя и приведение его к виду (3.7) эквивалентно вычислению

$$\Delta_n^1 + \Delta_n^2 + \dots + \Delta_n^n = 2^n - 1$$

определителей различных порядков. Для больших значений  $n$  эта задача требует большого объема вычислительной работы. В связи с этим были разработаны специальные методы развертывания характеристического определителя, минуя вычисление многочисленных диагональных миноров (методы А.М. Данилевского, А.Н. Крылова, интерполяции, Леверье - Фаддеева и др.).

Одним из самых экономичных с точки зрения количества операций является метод А.М. Данилевского. Сущность его состоит в приведении определителя

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

к так называемому нормальному виду Фробениуса

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Развертывание определителя, записанного в нормальном виде Фробениуса, не представляет затруднений. Разлагая определитель по элементам первой строки, получим характеристический полином

$$(-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n).$$

Легко убедиться, что элементы первой строки матрицы Фробениуса суть коэффициенты характеристического полинома. Переход от матрицы  $A$  к подобной матрице Фробениуса осуществляется с помощью преобразования подобия

$$A_1 = S^{-1}AS,$$



где  $S$  – неособенная матрица, последовательно преобразующая строки матрицы  $A$ , начиная с последней, в соответствующие строки матрицы  $A_1$ . При вычислении на машине коэффициентов характеристического полинома целесообразно производить частичную проверку правильности вычисленных коэффициентов, контролируя выполнение соотношения

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Sp}A.$$

Метод, предложенный А.Н. Крыловым, заключается в предварительном преобразовании уравнения

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$$

в эквивалентное ему

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} - \lambda^2 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} - \lambda^n & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

развертывание которого по степеням  $\lambda$  осуществляется значительно проще, так как определитель можно разлагать по минорам первого столбца. Метод чувствителен к вырождению определителей и имеет несколько меньшую точность вычисленных коэффициентов.

### 3.4. Матричный метод оценки устойчивости

Рассмотрим систему вида (3.2). Как было выяснено, устойчивость в линейных системах определяется решением однородного уравнения  $\frac{dx}{dt} = Ax$ .

Необходимое и достаточное условие устойчивости состоит в том, чтобы выполнялось неравенство  $\text{Re } \lambda_i < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $\lambda_i$  – решения алгебраического уравнения  $|A - \lambda E| = 0$ .

Рассмотрим несколько иной подход, позволяющий легко оценить устойчивость путем простого возведения в степень некоторой специальной матрицы. В теории аналитических функций широко известно дробно – линейное преобразование

$$\lambda = \frac{(\rho + 1)}{(\rho - 1)}. \quad (3.14)$$

Оно обладает тем свойством, что левая полуплоскость комплексного переменного  $\lambda$  переводится им во внутренность единичного круга с центром в начале координат плоскости комплексного переменного  $\rho$ , при этом мнимая ось, рассматриваемая как окружность бесконечного радиуса, переходит в единичную окружность. Если комплексная переменная  $\lambda$  перемещается вдоль мнимой оси, то комплексная переменная  $\rho$  движется вдоль окружности единичного радиуса.

Каждой точке левой полуплоскости соответствует вполне определенная точка, принадлежащая внутренности единичного круга, и, наоборот, т. е. это соответствие взаимно – однозначно

$$\rho = \frac{(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)}.$$

Подставим значение  $\lambda$  из (3.14) в характеристическое уравнение (3.6), тогда

$$\left| A - \frac{\rho + 1}{\rho - 1} E \right| = 0.$$

После некоторых преобразований получим

$$\left| (-E - A) - \rho(E - A) \right| = 0. \quad (3.15)$$

Умножим уравнение (3.15) на  $(E - A)^{-1}$ .

$$\left| (-E - A)(E - A)^{-1} - \rho E \right| = 0. \quad (3.16)$$

Матрицу  $(-E - A)(E - A)^{-1}$  можно преобразовать

$$(-E - A + E - E)(E - A)^{-1} = [(E - A) - 2E](E - A)^{-1} = E - 2(E - A)^{-1}.$$

Характеристическое уравнение относительно новой переменной  $\rho$  будет иметь вид

$$\left| B - \rho E \right| = 0, \text{ где } B = E - 2(E - A)^{-1}.$$

Критерий формулируется следующим образом: для того чтобы система (3.2) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для матрицы

$$B = E - 2(E - A)^{-1} \quad (3.17)$$

выполнялось условие

$$B^k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

где  $0$  – нулевая матрица.

Вычисления можно ограничить, если абсолютное значение каждого из элементов матрицы  $B^k$  не превышает величины  $\frac{1}{n}$ , т. е. если выполняется неравенство

$$\left| b_{ij}^{(k)} \right| \leq \frac{1}{n}. \quad (3.19)$$

**Пример 3.1.** Пусть автоматическая система описывается дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_1}{dt} = -0,9x_1 + 3,1x_2 - 0,2x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,4x_1 + 2,5x_2 + 3,2x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 1,1x_1 - 1,5x_2 - 3,1x_3.$$

Исходная матрица коэффициентов  $A$  равна

$$A = \begin{bmatrix} -0,9 & 3,1 & -0,2 \\ -0,4 & -2,5 & 3,2 \\ 1,1 & -1,5 & -3,1 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу  $E - A$

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,9 & 3,1 & -0,2 \\ -0,4 & -2,5 & 3,2 \\ 1,1 & -1,5 & -3,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,9 & -3,1 & 0,2 \\ 0,4 & 3,5 & -3,2 \\ -1,1 & 1,5 & 4,1 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу

$$[E - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,60896 & 0,41371 & 0,29319 \\ 0,05978 & 0,25471 & 0,19588 \\ 0,14151 & 0,01781 & 0,25090 \end{bmatrix}.$$

Умножая матрицу  $(E - A)^{-1}$  на два и вычитая полученную матрицу из единичной, окончательно имеем

$$B = E - 2(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} -0,21792 & -0,82742 & -0,58638 \\ -0,11957 & 0,49057 & -0,39177 \\ -0,28302 & -0,03561 & 0,49820 \end{bmatrix}.$$

Условие (3.19) не удовлетворяется. Возведем матрицу  $B$  в степень

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0,31238 & -0,204712 & 0,15981 \\ 0,07828 & 0,35354 & -0,31726 \\ -0,07506 & 0,19896 & 0,42811 \end{bmatrix},$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} 0,06956 & -0,10453 & 0,18328 \\ 0,07594 & 0,04585 & -0,23548 \\ -0,04001 & 0,17088 & 0,10816 \end{bmatrix}.$$

Неравенство (3.19) удовлетворяется на втором шаге

$$|b_{ij}^{(4)}| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{3}.$$

Следовательно, условие устойчивости (3.18) выполняется.

### 3.5. Стандартные численные методы построения переходных процессов

Рассмотрим существующие численные методы построения переходных процессов.

Найдем решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.20)$$

с начальным условием  $y(x_0) = y_0$ .

Разложим решение  $y = y(x)$  этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки  $x$ :

$$y(x+h) = y(x) + \frac{y'(x)}{1!}h + \frac{y''(x)}{2!}h^2 + \dots \quad (3.21)$$

Пользуясь этим рядом и уравнением (3.20), нетрудно получить рекуррентные отношения, по которым можно вычислить приближенные значения  $y_n = y(x_n)$ , где  $x_n = x_0 + nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Если в разложении (3.21) сохранить два первых члена, то получается формула Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (3.22)$$

$y_0$  - известно из условия задачи.

Полагая  $n = 0$ , получим значение  $y_1$ , а затем, полагая  $n = 1$  и используя полученное значение  $y_1$  найдем  $y_2$  и т. д.

Наибольшее распространение получил метод Рунге – Кутты четвертого порядка. Формула для вычисления переходного процесса получается с использованием первых пяти членов ряда Тейлора (3.21), т. е.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3), \\ n &= 0, 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Отметим, что вычисляя первые пять членов ряда Тейлора по формуле разложения, необходимо вычислить значение функции  $f$  и всех ее производных, число которых составляет десять. Между тем по формуле Рунге – Кутты требуется только четырехкратное вычисление функции  $f$ .

Метод Рунге – Кутты получил наибольшее распространение. Он легко реализуется в случае решения системы дифференциальных уравнений первого порядка (нормальная форма Коши), обеспечивает достаточную точность построения переходного процесса, занимает мало места в оперативном запоминающем устройстве, но требует большого объема вычислений.

Метод Рунге – Кутты четвертого порядка, а также метод Адамса применяются достаточно широко и обычно входят в стандартное программное обеспечение ПЭВМ.

### 3.6. Матричный метод построения интегральных кривых

Известно, что общее решение линейной стационарной системы  $\frac{dx}{dt} = Ax$  может быть записано в виде

$$x(t) = e^{\int_0^t A dt} x_0 = e^{A(t-t_0)} x_0. \quad (3.25)$$

При  $t_0 = 0$  имеем  $x(t) = e^{At} x_0$ .

Таким образом, задача интегрирования данной системы дифференциальных уравнений (3.25) сводится к задаче построения интегральной (фундаментальной) матрицы  $e^{At}$ . Укажем возможности относительно простого приближенного построения интегральной матрицы.

Известно, что интегральная матрица  $e^{At}$  может быть представлена в виде разложения в матричный степенной ряд

$$e^{At} = E + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots + \frac{(At)^i}{i!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^m}{m!}. \quad (3.26)$$

Ряд сходится абсолютно для любой квадратной матрицы  $A$  при любых значениях  $t$ . Удерживая в разложении достаточное количество членов, можно вычислить интегральную матрицу с любой степенью точности. Однако для получения надлежащей точности должно быть использовано слишком большое количество членов ряда Тейлора из-за его медленной сходимости.

Полагая в (3.26)  $t = kh$ , ряд можно представить как

$$e^{Akh} = [e^{Ah}]^k = E + (Ah)k + \frac{(Ah)^2 k^2}{2!} + \dots$$

С другой стороны, если сходится ряд (3.26), то сходится и следующий ряд:

$$e^{Ah} = E + Ah + \frac{(Ah)^2}{2!} + \frac{(Ah)^3}{3!} + \dots$$

Рассмотрим последовательные приближения для экспоненциальной матрицы  $e^{Ah}$

$$\begin{aligned} E + Ah &= D_1, \\ E + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} &= D_2, \\ E + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \frac{A^3 h^3}{3!} &= D_3, \\ E + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \frac{A^3 h^3}{3!} + \frac{A^4 h^4}{4!} &= D_4, \\ &\dots \dots \dots \\ E + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \frac{A^3 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^m h^m}{m!} &= D_m. \end{aligned}$$

Можно показать, что при возведении любой из матрицы  $D_1, \dots, D_m$  в степень  $k$  получают различные по точности приближения к интегральной матрице

$e^{At}$ . Построение кривой процесса происходит, если матрица  $D_1^k, \dots, D_m^k$  умножается на вектор начальных условий  $x_0$ .

Алгоритм имеет следующий вид:

$$x_i = D_m^k x_0. \quad (3.27)$$

Можно показать, что использование матрицы  $D_1^k$  в качестве первого приближения матрицы  $e^{At}$  соответствует по точности методу Эйлера, применение матрицы  $D_2^k$  в качестве второго приближения для  $e^{At}$  соответствует по точности усовершенствованному методу Эйлера – Коши. Если использовать матрицу  $D_3^k$ , то вычислительная процедура получения интегральных кривых соответствует по точности методу Рунге третьего порядка. Применение матрицы  $D_4^k$  в качестве четвертого приближения интегральной матрицы соответствует по точности использованию известного метода Рунге – Кутты четвертого порядка.

**Пример 3.2.** Пусть имеется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -3 \cdot x_1 + 2,2 \cdot x_2 + 0,8 \cdot x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0,4 \cdot x_1 - 4,7 \cdot x_2 + 6,8 \cdot x_3 + 0,1 \cdot x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= 0,3 \cdot x_1 - 3,1 \cdot x_2 - 4,4 \cdot x_3 + 0,6 \cdot x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -0,5 \cdot x_1 + 0,8 \cdot x_2 + 1,9 \cdot x_3 - 1,3 \cdot x_4 \end{aligned}$$

и задан вектор начальных условий  $x_0 = [0,5; 0,5; 0,5; 0]^T$ , где штрих означает транспонирование.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2,2 & 0,8 & 0 \\ 0,4 & -4,7 & 6,8 & 0,1 \\ 0,3 & -3,1 & -4,4 & 0,6 \\ -0,5 & 0,8 & 1,9 & -1,3 \end{bmatrix},$$

Построим матрицу  $\bar{B}$  при  $R=10$ :

$$\bar{B} = E + \frac{A}{R} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,22 & 0,08 & 0 \\ 0,04 & 0,53 & 0,68 & 0,01 \\ 0,03 & -0,31 & 0,56 & 0,06 \\ -0,05 & 0,08 & 0,19 & 0,87 \end{bmatrix}.$$

Умножая матрицу  $\bar{B}$  на вектор начальных условий  $x_0 = [0,5; 0,5; 0,5; 0]^T$ , получим:

$$\bar{B} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,22 & 0,08 & 0 \\ 0,04 & 0,53 & 0,68 & 0,01 \\ 0,03 & -0,31 & 0,56 & 0,06 \\ -0,05 & 0,08 & 0,19 & 0,87 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,500 \\ 0,625 \\ 0,140 \\ 0,110 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B}^2 \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,5012 & 0,2458 & 0,2504 & 0,007 \\ 0,0691 & 0,0797 & 0,7463 & 0,0548 \\ 0,0224 & -0,3265 & 0,1166 & 0,0827 \\ -0,0696 & 0,0421 & 0,3221 & 0,7691 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,499 \\ 0,448 \\ -0,094 \\ 0,147 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B}^4 \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,3375 \\ 0,0082 \\ -0,1337 \\ 0,0672 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}^6 \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,1382 \\ -0,0721 \\ -0,0052 \\ -0,0145 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}^8 \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,0501 \\ -0,0008 \\ 0,0248 \\ -0,0255 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B}^{10} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,0310 \\ 0,0205 \\ 0,0022 \\ -0,0151 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}^{12} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,0210 \\ 0,0046 \\ -0,0070 \\ -0,0122 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}^{16} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,0031 \\ -0,0024 \\ 0,00015 \\ -0,0117 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B}^{20} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,0002 \\ -0,0005 \\ -0,0006 \\ -0,0072 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}^{24} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} -0,00048 \\ -0,00076 \\ -0,00026 \\ -0,00464 \end{bmatrix}.$$

### 3.7. Составление матричных уравнений состояния

Математические уравнения, описывающие систему, удобно представить в виде блок-схемы. Такая схема состоит из блоков, внутри которых указывается функция, моделируемая блоком. Наиболее часто в качестве основных элементов используется интегрирующие звенья (интеграторы), усилительные звенья (усилители) и суммирующие звенья (сумматоры).

Используемый при построении блок-схемы линейного дифференциального уравнения метод состоит в последовательном интегрировании наивысших производных уравнения, получении всех производных низшего порядка и зависимых переменных. Блок-схема составляется из условия удовлетворения данному дифференциальному уравнению, т. е. производные умножаются на соответствующие им коэффициенты и эти члены суммируются, образуя "замкнутую цепь". Поясним этот метод на примерах.

**Пример 3.3.** Описать систему уравнением

$$\dot{y} + a y + b y = u,$$

где  $v(t)$ -входная, а  $y(t)$ -выходная величины, в терминах пространства состояний. Схема моделирования системы показана на рис. 3.1.

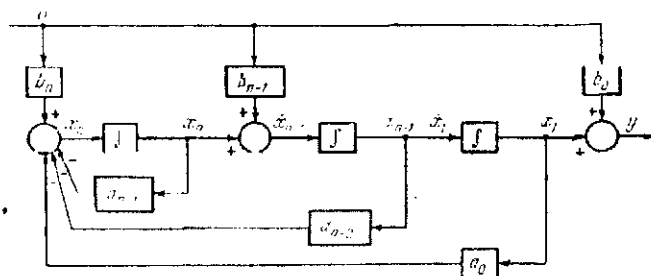


Рис. 3.1. Схема моделирования системы (пример 3.1).

Удобно в качестве переменных состояния выбрать выходы интеграторов, т.е.  $y$  и  $\dot{y}$ . Пусть  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ , откуда

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2 + v.$$

Данная система в векторной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v,$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] v.$$

Следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = [0].$$

Теперь рассмотрим обобщение методики, изложенной в примере на случай линейной системы с постоянными параметрами, одним входом и выходом, описываемой уравнением

$$(p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0)y = (\beta_n p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0)v, \quad (3.28)$$

где  $p = d/dt$ . Схема моделирования этой системы изображена на рис. 3.2. В качестве переменных состояния выбираются выходы интеграторов. Постоянные величины  $a_i$  и  $b_i$  должны быть выражены через  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  из условия удовлетворения схемы уравнению (3.28).



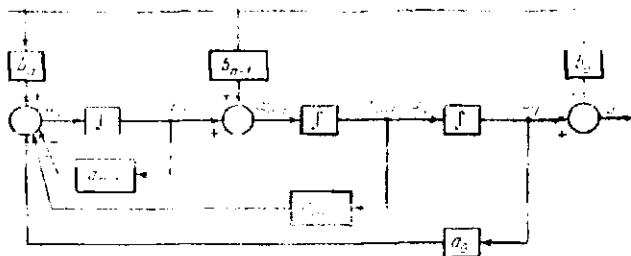


Рис.3.2.К обоснованию методики составления уравнений состояния.

Непосредственно из схемы моделирования следует

$$\begin{aligned} y &= x_1 + b_0 u, \\ x_k - x_{k-1} &+ b_k u, \quad k < n, \\ x_n &= -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_n) + b_n u. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Дифференцируя  $y$ , получим

$$py = x_1 + b_0 u.$$

Последующая подстановка  $x_1$  из уравнения (3.29) даёт

$$py = x_1 + b_1 u + b_0 u. \quad (3.30)$$

Согласно приводимой процедуре вторая и старшие производные  $y$  равны

$$\begin{aligned} p^2 y &= x_2 + b_1 v + b_0 v = x_1 + b_1 v + b_1 v + b_0 v, \\ &\dots \dots \dots \\ p^{n-1} y &= x_n + b_{n-1} v + b_{n-2} pv + \dots + b_1 p^{n-2} v, \\ p^n y &= -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_n) + b_n v + b_{n-1} pv + \dots + b_1 p^{n-1} v. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подставив  $y, py, \dots, p^{n-1}y$  из уравнений (3.29), (3.30) и (3.31) в уравнение (3.28) и сопоставляя результат с выражением для  $p^n y$ , задаваемым уравнением (3.31), получим выражение для  $a_i$  и  $b_i$  в виде

$$a_i = b_i \quad (3.32)$$



Приведённые уравнения состояния соответствуют так называемому стандартному виду системы.

**Пример 3.2.** Привести уравнение

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = 2\dot{v} + 3v + \dot{v} + 2v$$

к стандартному виду.

Из уравнения (3.33) имеем:

$$b_0 = \beta_n = 2,$$

$$b_1 = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}b_0 = 3 - 3(2) = -3,$$

$$b_2 = \beta_{n-2} - \alpha_{n-2}b_1 - \alpha_{n-1}b_0 = 1 - 3(-3) - 4(2) = 2,$$

$$b_3 = \beta_{n-3} - \alpha_{n-3}b_1 - \alpha_{n-2}b_0 - \alpha_{n-1}b_2 = 2 - 3(2) - 4(-3) - 1(2) = 6.$$

Отсюда данная система представляется в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} v.$$

Схема моделирования изображена на рис. 3.3.

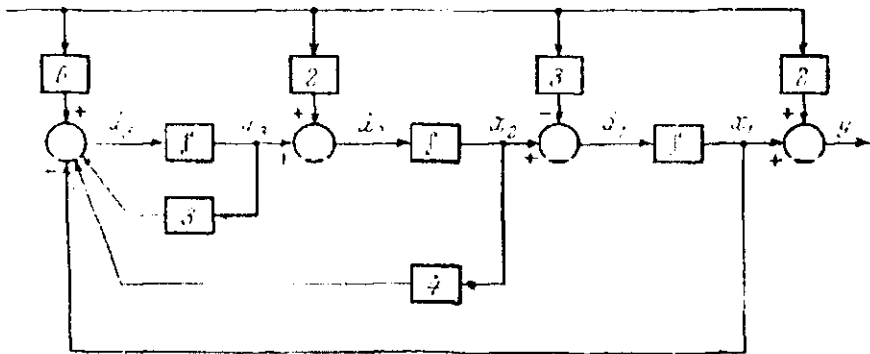


Рис. 3.3. Схема моделирования системы (пример 3.2.).

#### 4. Нестационарный теплообмен в пространстве состояния

Исследование технической системы во временной области с помощью переменных состояния предпочтительнее как по методическим соображениям, так и благодаря удобству обозначений и простоте проведения анализа. Преимущество методических характеристик обуславливается возможностью охарактеризовать систему понятием «состояние системы», которому соответствует точка в определенном евклидовом пространстве. В этом случае поведение системы во времени характеризуется траекторией, описываемой этой точкой. Применение матриц и векторов позволяет записывать в более компактном виде как уравнения системы управления, так и их решение [1].

Если система содержит переменные во времени параметры или нелинейные элементы, то возможность применения хорошо известных частотных методов становится ограниченной. Однако во временной области уравнения могут быть исследованы хотя бы численными методами с использованием ЭВМ. В этом случае представление системы в пространстве состояний оказывается особенно удобным.

Для системы, описываемой системой обыкновенных линейных уравнений, уравнения состояния записываются так [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  являются в общем случае матрицами с изменяющимися во времени элементами, а

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

В общем виде блок схема, соответствующая этим уравнениям, показана на рис.4.1.

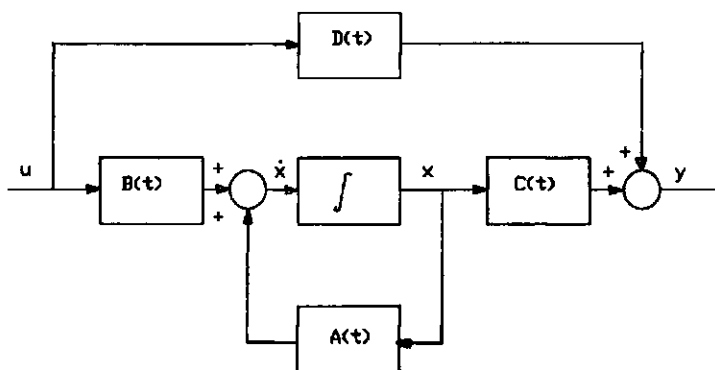


Рис.4.1. Блок-схема, соответствующая линейным уравнениям состояния.

В случае системы с постоянными (неизменными во времени) параметрами матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  постоянны и могут записываться просто как  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .  $A$  – основная матрица системы, так как ее структура определяет характер переходной матрицы состояния. От этой матрицы зависит характер как вынужденного, так и свободного решений. Ее также называют матрицей состояния объекта.  $B$  – матрица связи; структура этой матрицы определяет характер связи входа системы с размытыми переменными состояния. Она также называется матрицей передачи управления.  $C$  – также матрица связи – связи переменных состояния с выходом системы (называется иначе матрицей выхода).  $D$  – снова матрица связи, непосредственно связывающая вектор входа системы с вектором выхода. Структура этой матрицы определяет, каким образом вынуждающие функции на входе воздействуют на различные выходы. Для большинства физических систем  $D$  является нулевой матрицей, так что член  $D \cdot u$  обычно равен нулю;  $x$  – вектор переменных состояния объекта;  $u$  – вектор управляющих воздействий;  $y$  – вектор выходных переменных.

#### 4.1.Обобщение численных методов теорией пространства состояний

Для решения краевых задач, к примеру, нестационарной теплопроводности применяют, в основном, численные методы, из которых можно выделить следующие: метод конечных разностей; вариационно-разностные методы; метод прямых; статистические методы [5]. Наибольшее применение в теории теплопроводности в силу своей универсальности получил метод конечных разностей [5,6]. Среди вариационно-разностных методов, в которых дискретная модель задачи получается с использованием

методов, в которых дискретная модель задачи получается с использованием вариационной формулировки, выделяется метод конечных элементов (к примеру, численные методы на основе метода Галеркина [6]). Каждый из перечисленных методов имеет свои преимущества и недостатки, причем реализация каждого метода требует своего математического обеспечения [5,6].

В связи с этим представляет интерес задача объединения методов решения задач нестационарного теплопереноса (в частности, нестационарной теплопроводности) на основе использования единого математического аппарата. Интересна в этом плане работа [5], где предлагается комбинированный метод расчета температурных полей в конструкции летательных аппаратов, объединяющий достоинства разностно-сеточных и конечно-элементных методов. Однако в обосновании метода сделан основной упор на практическую реализацию: обеспечение безытерационного сращивания решений в подобластях в общее решение всей конструкции и соблюдение условий технологичности реализации метода.

Рассмотрим объединяющие особенности численных методов применительно к расчету нестационарной теплопроводности. К примеру, применение метода прямых основано на замене производных по всем переменным, кроме одной (например, времени), конечными разностями. Это приводит к системе дифференциальных уравнений (в общем случае нелинейных), для численного решения которой можно использовать методы Рунге - Кутты, Адамса и других. Метод конечных разностей и метод конечных элементов также позволяют привести нестационарное уравнение теплопроводности вида (в частности, одномерная задача)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.2)$$

с начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & 0 < x < s, \\ u(0, t) &= \varphi(t), & u(s, t) = \psi(t), \end{aligned}$$

к системе дифференциальных уравнений первого порядка [5].

В качестве единого математического подхода в этом случае может быть принят метод переменных состояния (МПС), основанный на использовании теории матричного исчисления и векторного анализа. Для системы, описываемой совокупностью обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, пространство состояний может быть представлено зависимостями (4.1), а блок-схема в общем виде, соответствующая этим уравнениям, показана на рис.4.1.

Рассмотрим реализацию основных численных методов нестационарной теплопроводности на основе теории пространства состояний. В методе прямых с конечно-разностной аппроксимацией для

задачи (4.2) разобьем интервал  $0 \leq x \leq s$  узлами  $x_i$  с шагом  $h$ . По формуле численного дифференцирования для внутренних линий  $1 \leq i \leq n-1$  получаем систему уравнений метода прямых [5]

$$\frac{du_i}{dt} = m \cdot u_{i-1} - 2m \cdot u_i + m \cdot u_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (4.3)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < s, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t),$$

Система уравнений (4.3) может быть представлена уравнениями состояния в форме (4.1), где

$$A = \begin{bmatrix} -2m & m & \dots & 0 \\ m & -2m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -2m \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = [0].$$

Использование предлагаемого подхода для конечно-элементного способа расчета нестационарной теплопроводности наглядно демонстрируется на примере полудискретного метода Галеркина, в результате применения которого уравнение (4.2) преобразуется к виду [6]

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{du_{i-1}}{dt} + \frac{2}{3} \cdot \frac{du_i}{dt} + \frac{1}{6} \cdot \frac{du_{i+1}}{dt} = m \cdot u_{i-1} - 2m \cdot u_i + m \cdot u_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (3.4)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < s, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t),$$

Уравнения состояния для системы (4.4) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} N \cdot \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t), \end{cases} \text{ где}$$

$$N = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Из вероятностных методов в теории теплопроводности чаще всего используется метод Монте - Карло. Реализацию метода для процесса нестационарной теплопроводности можно осуществить, для примера, моделированием гауссовского процесса с дробно-рациональной спектральной плотностью [5,6]. В этом случае процесс  $y(t)$  получается в виде линейной комбинации функции  $u(t)$  и  $m$  ее производных

$$y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \cdot u(t), \quad (4.5)$$

где  $u(t)$  является решением линейного стохастического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$z(t) = a_n \cdot \frac{d^n u(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \cdot u(t), \quad (4.6)$$

а  $z(t)$  есть гауссовский белый шум.

Представим уравнения (4.5) и (4.6) в операторном виде

$$y(p) = [b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0 p] \cdot u(p), \quad (4.7)$$

$$z(p) = [a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 p] \cdot u(p). \quad (4.8)$$

Положим, что  $n \geq m$ . Тогда можно получить правильную (степень полинома числителя меньше или равна степени полинома знаменателя) передаточную функцию процесса

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_m \cdot p^m}{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n} = \frac{y(p)}{z(p)},$$

где  $n$  – размерность модели процесса.

Уравнения переменных состояния в этом случае также записываются совокупностью зависимостей (4.1), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_n}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_1}{a_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 - b_n \cdot \frac{a_n}{a_n} \\ b_1 - b_n \cdot \frac{a_1}{a_n} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} - b_n \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}.$$



#### 4.2. Метод переменных состояния решения задач теплообмена с граничными условиями первого рода

Определим температуру в центре плоской стальной пластины неограниченной протяженности и толщиной  $2\delta = 50$  мм через каждые 30 секунд после начала нагревания. Начальная относительная температура в центре пластины  $\theta_{II} = 0$ , температура на поверхности  $\theta_c = 1$ ,  $\lambda_c = 45,4 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ ,  $c = 502 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$  и  $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Решим поставленную задачу точным аналитическим методом и методом переменных состояния, и сравним полученные результаты. Моделирование на основе метода ПС проводилось совместно с инженером Леонтьевым С.А. при разделении пластины на  $n = 5$  и  $n = 15$  слоев.

**Решение аналитическим методом.** Вычислим относительную температуру  $\theta_{II}$  как функцию числа Фурье по следующей формуле:

$$\theta_{II} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp \left[ - (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} Fo \right]. \quad (4.9)$$

Определяя коэффициент температуропроводности металла, имеем:

$$a = \frac{\lambda_c}{c\rho} = \frac{45,4}{502 \cdot 7800} = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Значение числа Фурье при  $\tau = 30$  секунд:

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{1,16 \cdot 10^{-5} \cdot 30}{0,025^2} = 0,5568.$$

Так как  $Fo = 0,5568 > 0,3$ , то при решении можно ограничиться первым членом ряда (4.9) [5]:

$$\theta_{II} = 1 - \frac{4}{\pi} \cdot \exp \left[ - \frac{\pi^2}{4} \cdot 0,5568 \right] = 0,6777$$

Результаты расчета для остальных чисел Фурье приведены в таблице 4.1.

**Решение методом конечных разностей в ПС.** Для составления математической модели нестационарной теплопроводности с использованием пространства состояний применительно к плоской пластине необходимо перейти от дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)$$

к системе дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши. Потенциальную возможность осуществить подобное преобразование предоставляет метод конечных разностей Шмидта. Разделим пластину на

5 слоев одинаковой толщины  $\Delta x$  (в соответствии с исходными данными  $\Delta x = 0,05/5 = 0,01$  м). В этом случае система дифференциальных уравнений, описывающая процесс нестационарной теплопроводности, может быть представлена следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = m \cdot \theta_0 - 2 \cdot m \cdot \theta_1 + m \cdot \theta_2 + b_1 \\ \dot{\theta}_2 = m \cdot \theta_1 - 2 \cdot m \cdot \theta_2 + m \cdot \theta_3 + b_2 \\ \dot{\theta}_3 = m \cdot \theta_2 - 2 \cdot m \cdot \theta_3 + m \cdot \theta_4 + b_3 \\ \dot{\theta}_4 = m \cdot \theta_3 - 2 \cdot m \cdot \theta_4 + m \cdot \theta_5 + b_4 \\ \dot{\theta}_5 = m \cdot \theta_4 - 2 \cdot m \cdot \theta_5 + m \cdot \theta_6 + b_5 \end{cases}$$

В данной системе уравнений величина

$$m = \frac{a}{(\Delta x)^2},$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности исследуемого материала.

Учитывая, что

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c},$$

а также исходные данные, получаем:

$$m = \frac{\lambda}{\rho \cdot c \cdot (\Delta x)^2} = \frac{45,4}{7800 \cdot 502 \cdot \left(\frac{0,05}{5}\right)^2} = 0,116 \left[\frac{1}{c}\right].$$

Величины  $\theta_0$  и  $\theta_6$  – параметры граничных условий первого рода, причем в соответствии с исходными данными  $\theta_0 = \theta_6 = 1$ . Величины  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  – параметры условий однозначности и представляют собой распределение температур в теле в начальный момент времени, в рассматриваемой задаче  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$ .

Функциональные блоки программы Personal Visual Simulator, из которых построена структурная схема, описывающая процесс нестационарной теплопроводности применительно к плоской стенке, следующие: блок *step* – формирует скачок входного сигнала от нулевого значения до заданного после истечения определенного времени; блок *gain* – блок, умножающий сигнал на заданное число; блок *integrator* – интегрирующий блок; блок *summing* – сумматор; блок *plot* – приемник сигнала, организует вывод выходного сигнала в виде графика.

Математическая модель, построенная на основе системы приведенных выше дифференциальных уравнений, изображена на рис.4.2.

Входной сигнал, сформированный блоком step, проходит последовательно через функциональные блоки моделируемой системы и воспринимается блоком plot, который отображает выходной сигнал в виде графика в системе координат, где по одной из осей откладывается время, а по другой – температура.

Технология моделирования при числе слоев пластины  $n = 15$  аналогична описанной выше, поэтому в таблице 4.1. представлены конечные результаты моделирования, минуя все промежуточные стадии.

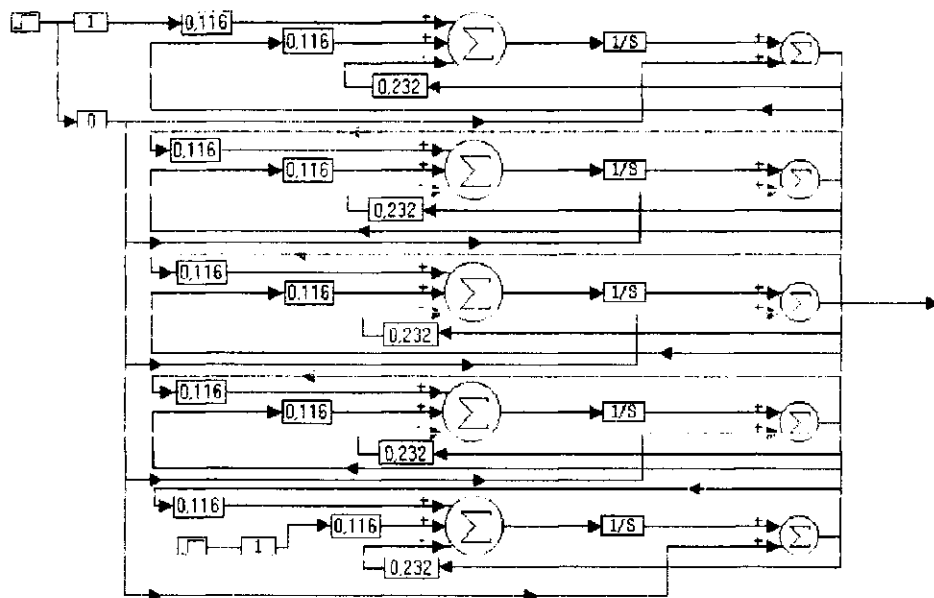


Рис. 4.2. Математическое моделирование нестационарной теплопроводности на основе метода конечных разностей.

Решение методом конечных элементов в ПС. При тех же исходных данных разделим пластину на 5 слоев одинаковой толщины  $\Delta x = 0,01$  м. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающая процесс нестационарной теплопроводности будет иметь вид:

$$\begin{cases} ap\theta_0 + bp\theta_1 + ap\theta_2 = m\theta_0 - 2m\theta_1 + m\theta_2 \\ ap\theta_1 + bp\theta_2 + ap\theta_3 = m\theta_1 - 2m\theta_2 + m\theta_3 \\ ap\theta_2 + bp\theta_3 + ap\theta_4 = m\theta_2 - 2m\theta_3 + m\theta_4 \\ ap\theta_3 + bp\theta_4 + ap\theta_5 = m\theta_3 - 2m\theta_4 + m\theta_5 \\ ap\theta_4 + bp\theta_5 + ap\theta_6 = m\theta_4 - 2m\theta_5 + m\theta_6 \end{cases} \quad (4.10)$$

где:  $a = \frac{1}{6}$ ;  $b = \frac{2}{3}$  - коэффициенты при производных;  $p\theta = \frac{d\theta}{d\tau}$  - производная температуры по времени.

После преобразования системы уравнений (4.10) имеем:

$$\begin{cases} \theta_1 = c_1\dot{\theta}_0 - c_2\dot{\theta}_1 + c_1\dot{\theta}_2 - c_3\theta_0 - c_3\theta_2 + b_1 \\ \theta_2 = c_1\dot{\theta}_1 - c_2\dot{\theta}_2 + c_1\dot{\theta}_3 - c_3\theta_1 - c_3\theta_3 + b_2 \\ \theta_3 = c_1\dot{\theta}_2 - c_2\dot{\theta}_3 + c_1\dot{\theta}_4 - c_3\theta_2 - c_3\theta_4 + b_3 \\ \theta_4 = c_1\dot{\theta}_3 - c_2\dot{\theta}_4 + c_1\dot{\theta}_5 - c_3\theta_3 - c_3\theta_5 + b_4 \\ \theta_5 = c_1\dot{\theta}_4 - c_2\dot{\theta}_5 + c_1\dot{\theta}_6 - c_3\theta_4 - c_3\theta_6 + b_5 \end{cases} \quad (4.11)$$

В данной системе уравнений:

$$c_1 = \frac{m}{b} = \frac{0,116}{2/3} = 0,174; \quad c_2 = \frac{2 \cdot m}{b} = \frac{0,232}{2/3} = 0,348; \quad c_3 = \frac{a}{b} = \frac{1/6}{2/3} = 0,25.$$

Величины  $\theta_0$  и  $\theta_9$  - параметры граничных условий первого рода, в соответствии с исходными данными  $\theta_0 = \theta_9 = 1$ . Величины  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  - параметры условий однозначности; в рассматриваемой задаче  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$ .

Результаты моделирования представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1.

Результаты аналитического моделирования процессов теплообмена.

Время, сек	Решение аналитическим методом		Решение методом конечных разностей в ПС				Решение методом конечных элементов в ПС			
			n = 5		n = 15		n = 5		n = 15	
	$ Fo$	$ \theta$	$ \theta$	$ \Delta \theta, \%$	$ \theta$	$ \Delta \theta, \%$	$ \theta$	$ \Delta \theta, \%$	$ \theta$	$ \Delta \theta, \%$
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00	0,0000	0,00
30	0,5568	0,6777	0,5107	24,64	0,6189	8,67	0,5093	24,84	0,6175	8,88
60	1,1136	0,9184	0,8073	12,10	0,8856	3,57	0,8151	11,25	0,8931	2,75
90	1,6704	0,9793	0,9242	5,63	0,9656	1,37	0,9303	5,00	0,9712	0,83
120	2,2272	0,9948	0,9701	2,48	0,9897	0,51	0,9737	2,12	0,9914	0,34
150	2,7840	0,9987	0,9883	1,04	0,9969	0,18	0,9901	0,86	0,9975	0,12
180	3,3408	0,9997	0,9954	0,43	0,9991	0,06	0,9963	0,34	0,9993	0,04

210	3.8976	0.9999	0.9982	0.17	0.9997	0.02	0.9986	0.13	0.9997	0.02
240	4.4544	1.0000	0.9993	0.07	0.9999	0.01	0.9995	0.05	0.9999	0.01
270	5.0112	1.0000	0.9997	0.03	1.0000	0.00	0.9998	0.02	1.0000	0.00
300	5.5680	1.0000	0.9999	0.01	1.0000	0.00	0.9999	0.01	1.0000	0.00
330	6.1248	1.0000	1.0000	0.00	1.0000	0.00	1.0000	0.00	1.0000	0.00

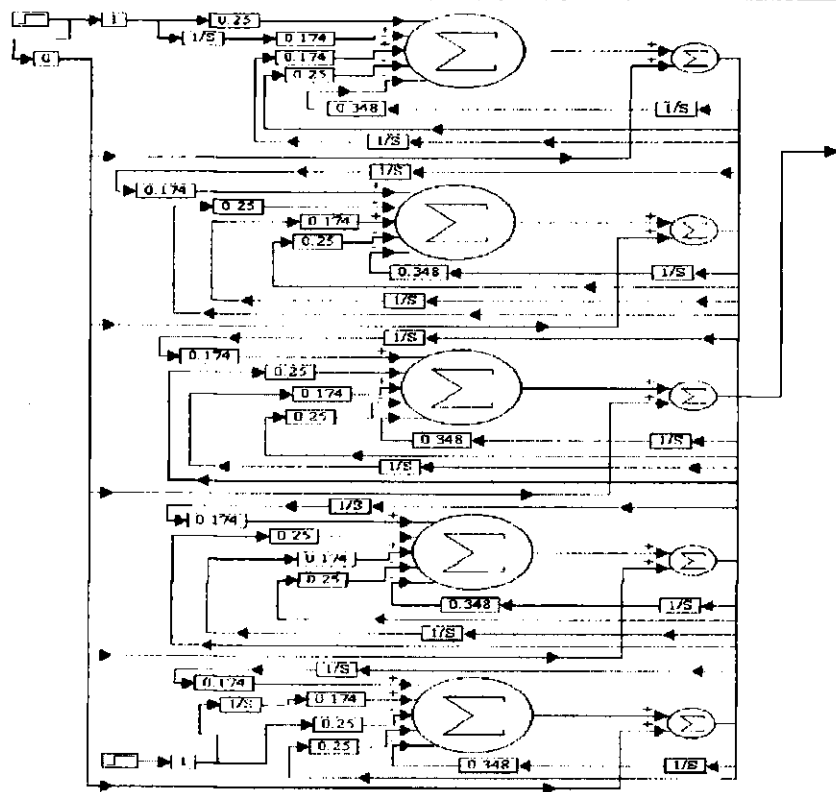


Рис. 4.3. Математическое моделирование нестационарной теплопроводности на основе метода конечных элементов.

Математическая модель, построенная на основе системы уравнений (4.11) в Personal Visual Simulator, изображена на рис.4.3.

Из рассмотрения таблицы 4.1 видно, что результаты моделирования при числе слоев  $n=5$  существенно отличаются от результатов расчета по точной формуле (4.9) при числах  $Fo < 2,7840$ .

Однако точность результатов моделирования заметно повышается, если пластину разделить на большее количество слоев ( $n=15$ ). Например, при расчете методом конечных разностей, для момента времени  $\tau = 30$  секунд

погрешность  $\Delta\theta$  снижается с 24,64 % до 8,67 %. Это позволяет сделать вывод о том, что при разделении пластины на большое количество слоев (например, 150) погрешность результатов моделирования будет менее 1 %. Также из рассмотрения таблицы 4.1 видно, что результаты расчета методами конечных разностей и конечных элементов практически совпадают.

#### 4.3. Метод переменных состояния решения задач теплообмена с граничными условиями третьего рода

Представляется возможным применить описанную выше методику расчета нестационарной теплопроводности с использованием теории пространства состояний для решения задач нестационарного теплообмена с граничными условиями третьего рода. Граничные условия третьего рода являются типичными для теплообмена во многих технологических процессах, в различных режимах технологических систем, в характерных процессах теплопередачи энергетических установок и теплообменных аппаратов.

Рассмотрим конкретную задачу о нагревании стальной плиты неограниченной протяженности в воздушной среде. Разделим плиту на 7 слоев одинаковой толщины. Система дифференциальных уравнений, описывающих процесс нестационарного теплообмена, будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt_1}{d\tau} = m_1 t_0 + m_2 t_2 - (m_2 + m_1) t_1 \\ \frac{dt_2}{d\tau} = m_2 t_1 + m_2 t_3 - 2m_2 t_2 \\ \frac{dt_3}{d\tau} = m_2 t_2 + m_2 t_4 - 2 \frac{\lambda F}{\delta c} t_3 \\ \frac{dt_4}{d\tau} = m_2 t_3 + m_2 t_5 - 2 \frac{\lambda F}{\delta c} t_4 \\ \frac{dt_5}{d\tau} = m_2 t_4 + m_2 t_6 - 2 \frac{\lambda F}{\delta c} t_5 \\ \frac{dt_6}{d\tau} = m_2 t_5 + m_2 t_7 - 2 \frac{\lambda F}{\delta c} t_6 \\ \frac{dt_7}{d\tau} = m_2 t_6 + m_1 t_8 - (m_2 + m_1) t_7 \end{array} \right.$$

Данная система, в свою очередь, может быть представлена в матричной форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

где  $u = [t_0]$  - вектор управляющих воздействий;

$$x = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\alpha F}{c} + b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ \frac{\alpha F}{c} + b_7 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2) & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & -2m_2 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & -2m_2 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & -2m_2 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & -2m_2 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & -2m_2 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & -(m_1 + m_2) \end{bmatrix}.$$

Вычислим значения коэффициентов дифференциальных уравнений. Допустим, что толщина вышеупомянутой стальной плиты неограниченной протяженности  $2\delta = 70$  мм, она равномерно прогрета до температуры  $t_0 = 15^\circ\text{C}$  и помещена в воздушную среду с температурой  $t_\infty = 25^\circ\text{C}$ ; коэффициент теплоотдачи на поверхностях плиты  $\alpha = 15 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$ . Сталь 20 обладает следующими физическими свойствами:

$$\rho = 7830 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \lambda = 51 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}; c = 494 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; a = 1,32 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Тогда:

$$m_1 = \frac{\alpha F}{c} = \frac{\alpha F}{c \rho F \delta} = \frac{\alpha}{c \rho \delta} = \frac{15}{494 \cdot 7830 \cdot 0,01} = 3,878 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{с}},$$

$$m_2 = \frac{\lambda F}{c \delta} = \frac{\lambda F}{c \rho F \delta^2} = \frac{\lambda}{c \rho \delta^2} = \frac{51}{494 \cdot 7830 \cdot 0,01^2} = 0,13185 \frac{1}{\text{с}}.$$

Для подтверждения полученных в ходе математического моделирования с помощью Personal Visual Simulator результатов (см. табл. 4.2) решим поставленную задачу аналитическим методом, для чего при тех же исходных данных определим температуру в центре пластины через каждые  $\Delta \tau = 40$  мин. после начала нагревания.

Для заданных условий и  $\tau = 40$  мин. рассчитываем определяющие критерии:

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{15 \cdot 0,035}{51} = 0,0103, \quad Fo = \frac{\alpha \tau}{\delta^2} = \frac{1,32 \cdot 10^{-5} \cdot 2400}{0,035^2} = 25,8612$$

Относительная температура в плоской стенке определяется уравнением (4.9). Так как  $Fo = 25,8612 > 0,3$ , то при решении можно ограничиться первым членом ряда (4.9). Значения  $N_1 = 2 \sin \mu_1 / (\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1)$  и  $\mu_1$  в зависимости от критерия  $Bi$  определяем из таблицы, приведенной в [7]:  $N_1 = 1,0017$ ,  $\mu_1 = 0,1011$ . Тогда:

$$\theta = 1,0017 \cos \left( 0,1011 \frac{0}{0,035} \right) \exp(-0,1011^2 \cdot 25,8612) = 0,7690.$$

Температура в центре плиты через заданный интервал времени  $\tau$ :

$$t_{x=0} = t_s - \theta_{x=0}(t_s - t_0) = 25 - 0,7690 \cdot (25 - 15) = 17,3098^\circ\text{C}.$$

Результаты расчета аналитическим методом для остальных значений  $\tau$  сведены в таблицу 4.2.

Таблица 4.2.

Результаты аналитического моделирования процессов теплообмена.

Время, сек	Решение аналитическим методом в ПС			Решение методом конечных разностей в ПС			
				n = 7		n = 15	
$\tau$	$Fo$	$\theta$	$t, ^\circ\text{C}$	$t, ^\circ\text{C}$	$\Delta t, \%$	$t, ^\circ\text{C}$	$\Delta t, \%$
0	0	1,0000	15,0000	15,0000	0,0000	15,0000	0,0000
2400	25,8612	0,7690	17,3098	17,3178	0,0462	17,3163	0,0375
4800	51,7224	0,5904	19,0961	19,1083	0,0639	19,1060	0,0518
7200	77,5837	0,4533	20,4675	20,4814	0,0679	20,4789	0,0557
9600	103,4449	0,3480	21,5203	21,5346	0,0664	21,5320	0,0544
12000	129,3061	0,2671	22,3268	22,3422	0,0690	22,3398	0,0582
14400	155,1673	0,2051	22,9491	22,9617	0,0549	22,9595	0,0453
16800	181,0286	0,1575	23,4255	23,4367	0,0478	23,4348	0,0397
19200	206,8898	0,1209	23,7912	23,8011	0,0416	23,7994	0,0345
21600	232,7510	0,0928	24,0720	24,0805	0,0353	24,0790	0,0291
24000	258,6122	0,0712	24,2876	24,2948	0,0296	24,2936	0,0247
26400	284,4735	0,0547	24,4530	24,4592	0,0253	24,4581	0,0208
28800	310,3347	0,0420	24,5801	24,5852	0,0207	24,5843	0,0171
31200	336,1959	0,0322	24,6776	24,6819	0,0174	24,6812	0,0146
33600	362,0571	0,0247	24,7525	24,7560	0,0141	24,7554	0,0117
36000	387,9184	0,0190	24,8100	24,8129	0,0117	24,8124	0,0097

Данные, представленные в таблице 4.2, свидетельствуют о хорошей сходимости результатов, полученных в ходе математического моделирования. Параллельно проведенные аналитические исследования нестационарного теплообмена с использованием теории подобия и расчетных графиков [7] подтвердили работоспособность предложенной математической модели.



Предпочтительно применение ТПС в решении инженерных задач с граничными условиями третьего рода, когда погрешность вычислений не превышает 0,06%, а число исходных дифференциальных уравнений сравнительно невелико.

### Список литературы

1. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления.- М.: Мир, 1970.- 343с.
2. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. Пер. с англ. Бочкова В.С.-М.:Машиностроение, 1972. -544с.
3. Директор С. Введение в теорию систем. Пер. с англ. Бусленко В.Н.- М.:Мир, 1974.-454с.
4. Теория автоматического управления. Ч.1 /Бабаков Н.А. и др. Под ред. Воронова А.А.- М.:Высшая школа, 1977.- 303с
5. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. Ч.1. -М.: Высшая школа, 1982. - 327с.
6. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена.- М.: Мир, 1988. - 544с.
7. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. - М.: Энергоиздат, 1988.- 304с.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Матрицы</b>	<b>4</b>
1.1.Основные понятия	4
1.2.Основные операции над матрицами	5
1.3.Матричная запись системы линейных уравнений	6
1.4.Определитель	7
1.5.Обращение матриц	10
1.6. Решение нормальной однородной системы	10
1.7. Определение фундаментальной матрицы	11
1.8. Определение характеристического полинома	13
1.9.Экспоненциальная функция от матрицы	14
1.10.Формула Коши для уравнения $n$ -го порядка	16
1.11.Приведение системы уравнений к нормальной форме	17
<b>2. Метод переменных состояния</b>	<b>19</b>
1.1.Переменные и уравнения состояния динамической системы	19
1.2.Матричная передаточная функция	26
1.3.Управляемость и наблюдаемость	28
1.4.Операторная форма записи линейных систем	33
1.5.Уравнения состояния систем, если порядок $k < n$	41
1.6. Уравнения состояния систем, если порядок $k > n$	44
1.7. Уравнения состояния систем с переменными параметрами	45
1.8. Уравнения состояния системы с несколькими входами и выходами	45
1.9.Характеристическое уравнение для стационарных систем	46
1.10.Определение переходной матрицы линейной стационарной системы	47
1.11.Передаточные функции линейных стационарных систем	53
1.12.Применение теории графов	56
<b>3.Оценка устойчивости в качестве процесса управления</b>	<b>59</b>
3.1.Существующие методы оценки устойчивости	59
3.2.Исследование систем с помощью вычисления корней	63
3.3.Построение характеристического полинома на ПЭВМ	64

	Стр.
3.4. Матричный метод оценки устойчивости	66
3.5. Стандартные численные методы построения переходных процессов	68
3.6. Матричный метод построения интегральных кривых	70
3.7. Составление матричных уравнений состояния	72
<b>4. Нестационарный теплообмен в пространстве состояния</b>	<b>77</b>
4.1. Обобщение численных методов теорией пространства состояний	78
4.2. МПС решения задач теплообмена с граничными условиями первого рода	82
4.3. МПС решения задач теплообмена с ГУ третьего рода	87
<b>Список литературы</b>	<b>90</b>

**Стенин Валерий Александрович**  
**Пространство состояний в задачах**  
**автоматизации СЭУ**  
**Учебное пособие**

Компьютерный набор и верстка автора  
Подготовка к печати О.А. Мартиросян

Сдано в производство 22.10.07 г. Подписано в печать 21.01.2008 г.  
Уч.-изд. л. 2,44. Формат 84х108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл.-печ. л. 5,75.  
Изд. № 1352. Заказ № 1426.

Центр научно-технической информации, технических средств обучения и  
вычислительной техники  
164500, г. Северодвинск, ул. Воронина, 6.