1 Hra Mang Kung

1.1 Definícia hry

[1] Slova Mang Kung su čínske a znamenajú slepí ľudia. Je to stará čínska hra, ktorá sa v dnešnej dobe stále hráva v južnej Číne a v Hong Kongu. Počas hry sa bude používať šesť hracích kociek, ktoré sa od klasických líšia len neobvyklým označovaním stien a to takým, že i-tá kocka má na jednej stene hodnotu i a ostatné steny sú prázdne $\forall i = 1, 2, ..., 6$. (Obr. 1)

Obr. 1: Vzhľad používaných kociek, v hre Mang Kung

Pokiaľ v hre padne na i-tej kocke prázdna stena, počíta sa to ako nulová hodnota pre každé $i = 1, 2, ..., 6$. Najčastejšie sa hry účastnia traja hráči, no však nie je limitovaná ani pre $n > 3$ hráčov, kde súčasne $n \in \mathbb{N}$. Hru si môžeme predstaviť tak, že hráči sedia okolo guľatého stolu a tým bude jasné, že po odohraní jedného hráča bude na ťahu hráč naľavo. Na začiatku hry každý z hráčov položí na stôl 7 žetónov rovnakej hodnoty (v prípade $n > 3$ hráčov každý položí na stôl $\frac{21}{n}$, v ďalšom prípade ak $\frac{21}{n}$ nie je prirodzené číslo tak, každý hráč prispeje $\min_k\{k\frac{21}{n}, k \in \mathbb{N}\}$, teda zvolíme najmenší vhodný k násobok aby výsledný zlomok bol celočíselný). Na začiatku hry je na stole teda 21 žetónov, ktoré budeme označovať symbolom ζ (v prípade $n > 3$ hráčov $\zeta = 21k$ žetónov). Počet žetónov ζ sa bude počas hry neustále meniť podľa nasledujúcich pravidiel [1].

1.1.1 Logika hry

Pre 3 hráčov:

(i) Prvú hru začne, náhodne vybraný hráč spomedzi všetkých troch hráčov. Označovať ho budeme H_1. Po H_1 je na rade H_2, po H_2, H_3, po H_3 znova H_1, atď.
$\implies H_i$ môžeme označiť hráča, ktorý je v poradí na i-tom mieste od začiatku hry $i \in \{1, 2, 3\}$.
(ii) Hráč, ktorý je na rade hodí všetkými šiestimi hracími kockami a zistí ich finálny súčet stien, ktorý budeme označovat F. Je zrejmé, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$
(iii) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F < \zeta \implies H_i$ si zoberie zo stola F žetónov. Na stole ostane $\zeta_n = \zeta_{n-1} - F$ žetónov, kde ζ_n je aktuálny počet žetónov na stole a ζ_{n-1} je predošlý počet žetónov na stole (Po vykonaní hodu H_1 je na stole ζ_1 žetónov, po H_2 je na stole ζ_2, H_3: ζ_3, znova po H_1 je ζ_4 ....)
(iv) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F > \zeta \implies H_i$ musí na stôl pridať $F - \zeta$ žetónov. Na stole je $\zeta_n = \zeta_{n-1} + (F - \zeta_{n-1})$
(v) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F = \zeta \implies H_i$ si berie zo stola všetkých ζ žetónov, navyše H_i si zoberie od každého protivníka po F žetónov. H_i sa stáva víťazom tejto hry a ako prvý začína ďalšiu hru.

Pre všeobecný počet hráčov hráčov:

Logika hry pri väčšom počte hráčov je v podstate rovnaká:

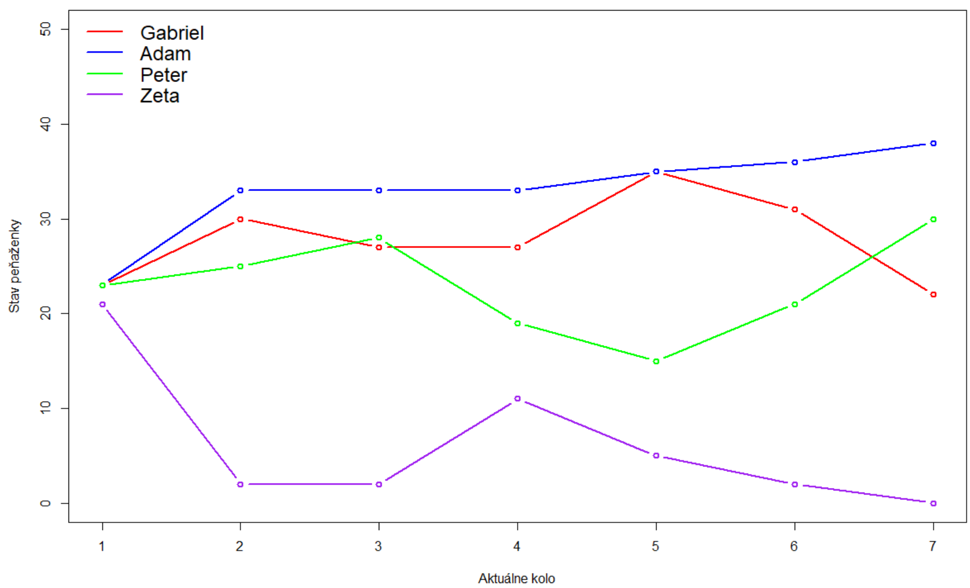
(i) Nech počet hráčov $= n$, kde $n > 3$, tak nastávajú dve možnosti, pre to aký hráč pôjde po H_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$

- Po hráčovi H_i pôjde $H_{i+1} \iff i < n$
- Po hráčovi H_i pôjde $H_1 \iff i = n$

Pravidlá (ii) - (v) budú také isté ako pravidlá pre 3 hráčov.

1.1.2 Objasnenie hry jednoduchou simuláciou

Majme 3 hráčov: Peter, Adam, Gabriel. Všetci traja hráči prišli do hry s 30 žetónmi (s ktorými sú ochotní riskovať, teda akceptujú možnosť o ne prísť v priebehu hry). Keďže je počet hráčov $= 3$, počiatočný vklad na stole bude $\zeta = 21$ [1], a teda po vklade má každý hráč mimo počiatočného vkladu 23 žetónov (nazývajme to žetóny v peňaženke). Následne sa spomedzi hráčov vyberie náhodný prvý hráč H_1 (napr. Gabriel), Gabriel hodí všetkými šiestimi kockami a ich súčet $F = 7 \implies F < \zeta$, teda podľa [1] si zo stola Gabriel zoberie $F = 7$ žetónov $\implies$ na stole ich ostane $\zeta = 14$.
Hráč po jeho lavici H_2 je Adam, ktorý po hodení má $F = 10$, čo značí, že si zo stola zoberie $F = 10$ žetónov , na stole sú aktuálne 4 žetóny a nasleduje hráč po Adamovej lavici.
H_3 (Peter) uskutoční hod, kde $F = 2 \implies$ zoberie si zo stola 2 žetóny a na stole ostávaju $\zeta = 2$ žetóny. Aktuálne prebehlo prvé kolo tj. všetci účastníci hádzali kockami práve jedenkrát.
Začína nové kolo znovu hráčom H_1 (Gabriel) uskutoční hod, kde $F = 5 \implies F > \zeta$, H_1 musí doložiť na stôl rozdiel $F - \zeta = 5 - 2 = 3$ žetóny zo svojej peňaženky a na stole ostáva $\zeta = 5$ žetónov.
Hra bude pokračovať, rovnakým princípom, až pokiaľ jeden z hráčov nehodí presný súčet $F = \zeta$ alebo pokiaľ jeden z hráčov nezbankrotuje. Ak by nastala možnosť $F = \zeta$ pre $H_i \implies H_i$ si berie zo stola všetky žetóny a zároveň od každého protivníka si zoberie po F žetónov.
Graf nižšie uvádza postupný stav peňaženiek jednotlivých hráčov až pokiaľ v tomto prípade jeden z nich nevyhrá celú hru. Jednotlivé údaje sú zaznamenávane vždycky po odohratí jedného kola, tj. keď sa prestriedali všetci hráči H_1, H_2, H_3 práve jedenkrát.



Obr. 2: Graf zobrazujúci stav peňaženiek jednotlivých hráčov

Čo z grafu nie je možne tak ľahko vyčítať je posledná hra, presnejšie, či niektorý z hráčov vyhral alebo zbankrotoval. Najprv si overíme, ktorá z možností nastala. Môžeme vidieť, že v poslednom kole je $\zeta = 0$, teda pre niektorého z hráčov musela nastať možnosť $F = \zeta$. Je jasné, že Gabriel to nebude, pretože jeho stav peňaženky v 6. kole bol väčší ako v poslednom kole. (Víťaz hry môže byť iba v pluse v porovnaní s predposledným kolom) Keď si rozoberieme posledné kolo dopodrobna, vieme určiť ktorí hráči sú H_1, H_2, H_3. H_1 je Gabriel ale o tom vieme, že nemôže byť víťaz, H_2 bol Adam a H_3 bol Peter. Keby vyhral posledné kolo Adam, tak by ukončil hru a Peter by už nemohol uskutočniť ďalší hod po ňom $\implies$ Petrov stav peňaženky v 6. kole by musel byť ostro väčší ako v 7. kole, čo ale v našom prípade nie je pravda. Tým pádom Peter vyhral celú hru, s tým, že pred Petrovým hodom Adam hodil nejaké F_A, ktoré si zobral zo stola a Peter po ňom hodil $F_P = \zeta$, Peter si zobral zo stola všetky žetóny a zároveň od každého hráča si zobral po F_P žetónov s tým faktom, že: $F_A - F_P > 0$ preto je Adamov stav peňaženky väčší v 7. kole ako v 6. aj napriek jeho prehre v tejto hre.

1.2 Úlohy a ich riešenia

(a) Aká je pravdepodobnosť, $p_i = P(F = i), \;\; i = 0, 1, 2, ..., 21$ [1]
(b) Ma každý hráč rovnakú pravdepodobnosť, že vyhrá hru alebo má hráč, ktorý začína hru nejakú výhodu?[1]
(c) Je stredná hodnota výhry rovnaká pre všetkých $H_i, i = 1, 2, ..., n$ [1]
(d) Aká je stredná hodnota dĺžky jednej hry, tj. koľkokrát sa priemerne posunieme o jedného hráča vľavo, než nejaký H_i vyhrá danú hru. [1]
(e) Vie množstvo hráčov ovplyvniť strednú hodnotu dĺžky hry?
(f) Vedel by iný počiatočný vklad nejakým spôsobom ovplyvniť základnú myšlienku hry?
(g) Aké množstvo žetónov by bolo potrebné na to aby sme s pravdepodobnosťou $= 1 - \alpha$ dohrali práve jednu hru.

Odpovede na otázky

(a) Ako prvé by nám mohlo napadnúť zostrojiť všetky možnosti hodu kociek, ktoré môžu nastať a na základe toho vypočítať jednoducho jednotlivé pravdepodobnosti. Avšak najprv využijeme elegantnejší spôsob riešenia a to je tzv. funkcia generujúca pravdepodobnosť [2], pre diskrétnu náhodnú premennú X na nezáporných číslach daná predpisom:

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k)$$

,potom je ľahké dokázať, za predpokladu, že $q_X(t)$ je k-krát diferencovateľná:

$$P(X = k) = \frac{\frac{d^k g_X(0)}{dt^k}}{k!}$$

Dôkaz:
Nech $g_X(t)$ je funkcia generujúca ravdepodobnosť, navyše je k-krát differencovateľná. Môžeme si ju prepísať do tvaru:

$$P(X = 0) + P(X = 1)t + P(X = 2)t^2 + \cdots + P(X = i)t^i + P(X = i + 1)t^{i+1} + \cdots + P(X = k)t^k$$

z takto upravenej funkcie je jasné, že keď zoberieme jej i-tú deriváciu podľa premennej t, tak:

- $\forall\, t^j,\ j < i : \frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)0 = 0$
- $\forall\, t^j,\ j = i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)j! = P(X = i)i!$
- $\forall\, t^j,\ j > i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)\frac{i!}{(j-i)!}t^{(j-i)}$

$$\frac{d^k g_X(t)}{dt^k} = P(X=0)0 + P(X=1)0 + P(X=2)0 + \dots + P(X=i)i! + P(X=i+1)\frac{i!}{(j-i)!}t^{j-i} + \dots$$

$$\dots + P(X=i+2)\frac{i!}{(j+1-i)!}t^{(j+1-i)}$$

$$\frac{d^i g_X(0)}{dt^i} = P(X=i)i!$$

$$P(X=i) = \frac{\frac{d^i g_X(0)}{dt^i}}{i!}$$

$\square$

[1] Následne označme:

$$F = \sum_{k=1}^{6} D_i$$

$D_i,\ i = 1, 2, ..., 6$ predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode.

$$g_F(t) = E(t^F) = E(t^{\sum_{i=1}^{6}(D_i)}) = E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i})$$

Tu si musíme uvedomiť, že D_i sú navzájom nezávisle a teda pre nezávisle náhodné premenné X, Y platí: $E(XY) = E(X)E(Y)$, čo vieme využiť aj v našom prípade.

$$E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i}) = \prod_{i=1}^{6}E(t^{D_i})$$

vieme, že $E(t^{D_i}) = \sum_{k=0}^{6} P(D_i = k)t^k$ a teda:

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

,tu si už len musíme uvedomiť pravdepodobnostné rozdelenie D_i

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

$$\prod_{i=1}^{6}(P(D_i = 0)t^0 + P(D_i = i)t^i)$$

$$\prod_{i=1}^{6}(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}t^i)$$

Teraz už len musíme presne vyjadriť čomu sa rovná daný výraz po roznásobeni, na účely derivovania.

$$\implies \frac{1}{46656}(15625 + 3125t + 3125t^2 + 3750t^3 + 3750t^4 + 4375t^5 + 4500t^6 + 2000t^7 + 1500t^8 + 1625t^9 + ...$$

$$+...1025t^{10} + 1025t^{11} + 425t^{12} + 300t^{13} + 200t^{14} + 180t^{15} + 55t^{16} + 30t^{17} + 30t^{18} + 5t^{19} + 5t^{20} + t^{21})$$

Na základe vyjadrenia vieme hneď vyjadriť každú jednu pravdepodobnosť. (Tabuľka 1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{P(F=i)}{46656}$	15625	3125	3125	3750	3750	4375	4500	2000	1500	1625	1025
$\approx$ %	33	6	6	8	8	9	9	4	3	2	2

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\frac{P(F=i)}{46656}$	1025	425	300	200	180	55	30	30	5	5	1
$\approx$ %	2	1	0,6	0,4	0,3	0,1	0,06	0,06	0,01	0,01	0,002

Tabuľka 1: Výsledné pravdepodobnostné hodnoty $P(F = i)$

Výsledky z výpočtu si môžeme overiť aj jednoduchou simuláciou spustením skriptu "kocky.js", kde je možné vidieť, že výsledok simulácie sa naozaj riadi pravdepodobnostným rozdelením, ktoré sme vypočítali. (Tabuľka 2)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet takých simulácií	335223	67059	66647	80337	79899	94090	96484	42947	32008	34891
$\approx$ %	33	7	6	8	8	9	10	4	3	2

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
počet takých simulácií	22068	9077	6561	4278	3925	1196	674	678	99	93	16
$\approx$ %	2	1	0,6	0,4	0,4	0,1	0,07	0,07	0,01	0,01	0,002

Tabuľka 2: Overenie pravdepodobnostných hodnôt pomocou 10^6 simulácií hodu kociek

[4] Teraz danú úlohu môžeme vyriešiť intuitívnejším spôsobom. Vieme, že: $F \in \{0, 1, 2, \ldots, 21\}$. Navyše si pripomeňme označenie D_i, ktoré predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode a aj pravdepodobnostné rozdelenie D_i:

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Ak by nastal taký prípad, že $F = 0$, tak vieme s istotou povedať, že nastala jednoznačnosť riešenia $\implies$ na každej kocke musela padnúť prázdna stena a keďže nás zaujíma iba to, či padla prázdna stena a nie to, ktorá prázdna stena padla na každej kocke, môžeme tvrdiť, že: $P(F = 0) = (\frac{5}{6})^6 \approx 0,33$.
Ak by však napríklad $F = 5$, tak jednoznačnosť riešenia nenastáva, pretože výsledný súčet $F = 5$ nám mohol vyjsť rôznymi kombináciami kociek a to napríklad

- $F = 5 \implies D_5 = 5 \;\wedge\; D_i = 0,\;\; \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $F = 5 \implies D_1 = 1 \;\wedge\; D_4 = 4 \;\wedge\; D_i = 0,\;\; \forall i \in \{2, 3, 5, 6\}$
- $F = 5 \implies D_2 = 2 \;\wedge\; D_3 = 3 \;\wedge\; D_i = 0,\;\; \forall i \in \{1, 4, 5, 6\}$

Z toho vyplýva, že výslednú pravdepodobnosť $P(F = 5)$ možno vypočítať ako súčet jednotlivých možnosti (kombináciami kociek). Pre $F = 5$ sme našli 3 rôzne možnosti, označme ich $m_1, m_2, m_3 \implies P(m_i)$ pravdepodobnosť nastátia i-tej možnosti.

$$P(F = 5) = P(m_1) + P(m_2) + P(m_3)$$

$$P(m_1) = \frac{1}{6}\ (\frac{5}{6})^5$$

$$P(m_2) = P(m_3) = (\frac{1}{6})^2 \quad (\frac{5}{6})^4$$

$$P(F = 5) = \frac{4375}{46656} \approx 0,09$$

Následne analogickým spôsobom môžeme vypočítať pravdepodobnosti pre ostatné možnosti nastátia hodnôt pre F, z čoho dostávame nasledujúcu tabuľku (Tabuľka 3)

F	Možnosti rozkladu F pomocou 6 kociek						$\approx$ pp
F	1 kocka	s 2 kocky	3 kocky	4 kocky	5 kociek	6 kociek	v %
0							33,4898
1	1						6,6980
2	2						6,6980
3	3	(2,1)					8,0376
4	4	(3,1)					8,0376
5	5	(4,1)(3,2)					9,3771
6	6	(5,1)(4,2)	(3,2,1)				9,6451
7		(6,1)(5,2)(4,3)	(4,2,1)				4,2867
8		(6,2)(5,3)	(5,2,1)(4,3,1)				3,2150
9		(5,4)(6,3)	(5,3,1)(6,2,1) (4,3,2)				3,4829
10		(6,4)	(6,3,1)(5,4,1) (5,3,2)	(4,1,3,2)			2,1969
11		(6,5)	(6,4,1)(6,3,2) (5,4,2)	(5,3,2,1)			2,1969
12			(5,4,3)(6,5,1) (6,4,2)	(6,3,2,1) (5,4,2,1)			0,9109
13			(6,5,2)(6,4,3)	(6,4,2,1) (5,4,3,1)			0,6430
14			(6,5,3)	(6,4,3,1) (5,4,3,2) (6,5,2,1)			0,4287
15			(6,5,4)	(6,4,3,2) (6,5,3,1)	(5,4,3,2,1)		0,3858
16				(6,5,3,2) (6,5,4,1)	(6,4,3,2,1)		0,1179
17				(6,5,4,2)	(6,5,3,2,1)		0,0643
18		,		(6,5,4,3)	(6,5,4,2,1)		0,0643
19					(6,5,4,3,1)		0,0107
20					(6,5,4,3,2)		0,0107
21						(6,5,4,3,2,1)	0,0021
pp.	$x_1 = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^5 n_1$	$x_2 = \frac{1}{6^2}(\frac{5}{6})^4 n_2$	$x_3 = \frac{1}{6^3}(\frac{5}{6})^3 n_3$	$x_4 = \frac{1}{6^4}(\frac{5}{6})^2 n_4$	$x_5 = \frac{1}{6^5}(\frac{5}{6})^4 n_5$	$x_6 = \frac{1}{6^6} n_6$	$\sum_{i=1}^{6} x_i$

Tabuľka 3: Výsledne pravdepodobnosti pre jednotlivé F pomocou metódy možného rozloženia

Pomocou takto zostrojenej tabuľky bude jednoduché vypočítať pp. nastátia jednotlivých F, použijúc posledného riadku, kde n_i predstavuje počet rôznych možnosti rozkladu pre fixné F. Ako príklad výpočtu zvoľme fixne $F = 14$, pravdepodobnosť nastátia $F = 14$ je: $\sum_{i=1}^{6} x_i$, no však my berieme v úvahu stĺpce, v ktorých je aspoň jedna možnosť rozkladu pre $F = 14$. $F = 14$ sa dá rozložiť pomocou 3 kociek alebo 4 kociek, zoberme v úvahu stĺpce s týmito možnosťami rozloženia. V stĺpci s rozložením pomocou 3 kociek sa nachádza 1 možná kombinácia, teda $n_3 = 1 \implies x_3 = 1\frac{1}{6}^3(\frac{5}{6})^3$. Analogicky pre stĺpec možnosti rozkladu pomocou 4 kociek, tam sa nachádzajú 3 možnosti, $n_4 = 3 \implies x_4 = 3\frac{1}{6}^4(\frac{5}{6})^2$ a výsledná pravdepodobnosť je súčet x_3 a x_4. Ten istý postup aplikujeme pre všetky $F, F \in \{0, 1, ..., 21\}$ Týmto riešením dostávame tie isté výsledky ako s využitím funkcie generujúcej pravdepodobnosť, s tým rozdielom, že pri tejto metóde môžeme ľahšie "vycítiť", prečo je napr. $P(F = 9) > P(F = 8) \implies$ pretože možnosti rozloženia pre $F = 9$ je viacej ako pre $F = 8$.

Odpovede na ďalšie otázky sú známe len na základe počítačových simulácií.
(b) V tejto časti úlohy je dobrý nápad definovať si, čo znamená jednodĺžková hra alebo n-dlžková hra.

Pod n-dĺžkovou hrou rozumieme hru takú, že skupina hráčov bude hrať presne n hier, po n-tej hre všetci hráči opúšťajú hru a nevracajú sa k nej. V tomto prípade neuvažujeme možný bankrot žiadneho spomedzi hráčov. Prípadne ak berieme v úvahu bankrot nejakého H_i a teda možné predčasné ukončenie n-dĺžkovej hry, je potrebné takýto druh hry označovať ako "maximálne n-dĺžková hra".

Príklad: 10 jedno-dĺžkových (alebo 10 1-dĺžkových) hier je ekvivalent 10 rôznych skupín hráčov, ktorí budú hrať iba jednu hru a po nej prestávajú hrať. Toto definovanie je veľmi praktické vzhľadom na nasledujúce simulácie v ktorých sa budeme venovať výsledkom a ich porovnaniu v jednodĺžkových hrách a viacej-dĺžkových hrách.
Pomocou simulácie "mangKung/b.js"dostávame odhad, že náhodný výber hráča H_1 by nemal ovplyvňovať pravdepodobnosť víťazstva H_1, teda náš predpoklad je: všetci hráči majú tú istú pravdepodobnosť výhry, nezávislé od maximálne n-dĺžkovej hry, ktorú hrajú.
Keďže sme dostali takýto simulačný predpoklad, tak ho štatisticky otestujeme pomocou, chí kvadrátu - testu dobrej zhody [7]. Pred začatím si označme $\#(H_i)$ ako počet výhier H_i. Dáta výhercov, na ktorých budeme určovať testovú štatistiku budú pochádzať zo simulácie, kde sa bude hrať 10 000-dĺžková hra(10 000 bolo zvolených, pre potrebu dostatku dát). V úlohe b) sa nás ale pýtajú či majú všetci hráči rovnakú pravdepodobnosť výhry alebo či má výhodu v početnosti výhier hráč H_1. Spomínanej 10 000-dĺžkovej hre teda treba priradiť 2 varianty:

- Fixné volenie H_1 každú hru
- Náhodné volenie H_1 každú hru

Z čoho dostávame výsledky simulácií Pri fixne volenom hráčovi každú hru dostávame výsledky: (Tabuľka 4)

$\#(H_1)$	$\#(H_2)$	$\#(H_3)$
3307	3323	3370

Tabuľka 4: Početnosť výhier hráčov pri fixnom volení H_1 a 10 000-dĺžkovej hre

A pri náhodnom volení H_1 dostávame výsledky: (Tabuľka 5)

$\#(H_1)$	$\#(H_2)$	$\#(H_3)$
3279	3357	3364

Tabuľka 5: Početnosť výhier hráčov pri náhodnom volení H_1 a 10 000-dĺžkovej hre

Testovaná pravdepodobnosť výhier bude pre jednotlivých hráčov je $\frac{1}{3}$.
Zostrojíme hypotézu s označením Hy_0 (kvôli už existujúcemu označovaniu hráčov)

$$Hy_0 : E(\frac{V(H_1)}{n}) = E(\frac{V(H_2)}{n}) = E(\frac{V(H_3)}{n}) = \frac{1}{3}$$

,kde $V(H_i)$ je počet výhier hráča H_i za n-dĺžkovú hru, vs jej alternatíva

$$Hy_1 : E(\frac{V(H_1)}{n}) \neq \frac{1}{3} \vee E(\frac{V(H_1)}{n}) \neq \frac{1}{3} \vee E(\frac{V(H_1)}{n}) \neq \frac{1}{3}$$

Následne si zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0,05$, na ktorej budeme zamietať našu Hy_0 To znamená, že pp. Hy_0 platí aj keď sme ju zamietli = 0,05 . Teraz si zvolíme známu testovú štatistiku chí-kvadrátu χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(U_i - O_i)^2}{O_i}$$

, kde U sú uskutočnenia náhodných premenných (početnosť výhier hráčov zo simulácií) zatiaľ čo O sú očakávane hodnoty náhodných premenných s predpokladom, že Hy_0 platí (očakavaná početnosť výhier pre jednotlivých hráčov). Po dosadení parametrov dostávame.

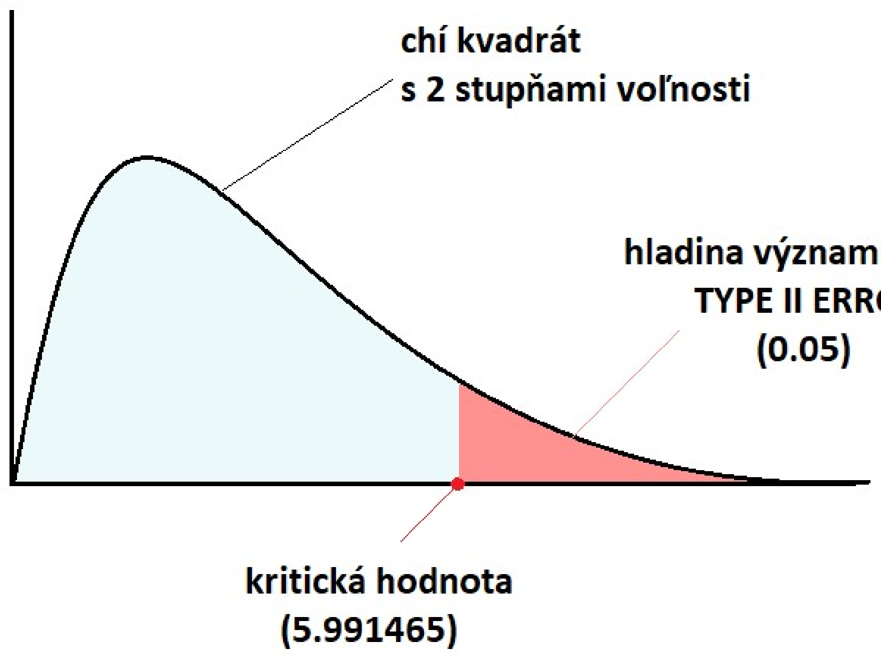
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(\frac{1}{10000}V(H_i) - \frac{1}{3}10000)^2}{\frac{1}{3}10000}$$

Takže pre naše dve varianty dostávame výsledne:

$$\chi^2_{fix} = 0.6434$$

$$\chi^2_{norm} = 1.3358$$

Keďže sme zvolili $\alpha = 0,05$ a počet rôznych kategórií je rovný 3, budeme pracovať s kritickou hodnotou $\chi^2_{3-1}(0,05) = 5.991465$. Grafické riešenie bude nasledovné.



Obr. 3: Chí kvadrát hustota s vyznačenou hladinou významnosti 0,05

Obe testové štatistiky porovnáme s kritickou hodnotou a získavame

$$\chi^2_{fix} \leq \chi^2_2(0,05) \approx 5.991465$$
$$\chi^2_{fix} \leq \chi^2_2(0,05) \approx 5.991465$$

V oboch variantoch H_{y_0} nezamietame na hladine významnosti $\alpha = 0,05 \implies$ Férovú pravidelnosť výhry nezamietame.

(c) V tejto úlohe sa pred simulovaním môžeme zamyslieť nad tým, čo znamená ísť ako prvý. Keďže $\zeta = 21$ v prípade iného počtu hráčov $\zeta = 21k$ a vieme, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$, s už vyššie vypočítanými pravdepodobnosťami $\implies H_1$ si zo stola zoberie do svojej peňaženky F žetónov so 100% pravdepodobnosťou. Pravdepodobnosť, že by vyhral hru hneď na začiatku hry je takmer nulová a tak takmer s istotou môžeme predpokladať, že hrou bude pokračovať H_2, ktorý bude mať šancu na výhru celej hry omnoho vyššiu , takisto aj šancu na to, že musí siahnuť po svojich žetónoch v peňaženke na doloženie, ak $F > \zeta$ (analogicky, že si o niečo prilepší). A podobne to bude platiť aj pre následujucich hráčov, s tým, že keď vyhrá $H_i, i \neq 1$, tak si od všetkých protivníkov zoberie po F, žetónov, kde by sme mohli pocítiť nejakú výhodu prvého hráča, ktorý bude vždy prvé kolo v profite, ktorý by mu mohol postačiť na vyplatenie výhry iného hráča.
Najlepšie sa daná výhoda interpretuje pri jedno-dĺžkovej hre, ktorá trvá iba jedno kolo (3 hody)
$H_1 \implies F = 10 \implies \zeta = 11 \implies$ penaženka(H_1)+10
$H_2 \implies F = 4 \implies \zeta = 7 \implies$ peňaženka(H_2)+4
$H_3 \implies F = 7 \implies \zeta = 0 \implies$ peňaženka(H_3)+7+7+7
Pri hre, ktorá trvá jedno kolo má H_1 v prípade prehry takú výhodu, že na zaplatenie víťaznému hráčovi použije žetóny, ktoré si zobral zo stola hneď na začiatku hry, zatiaľ čo H_2 nemal výhodu v podobe 100 % profitu pri jeho ťahu. V prípade výhry $H_i, i \neq 1$ alebo hneď v prvom kole je výhoda H_1 oproti ostatným, jeho 100% profit na začiatku hry, ktorý ostatní hráči nemajú. V tomto prípade sme pracovali s tým, že jedno-dĺžková hra trvala presne jedno kolo, to ale nie je reálna situácia na ktorých by sme spúšťali simulácie. Miesto toho necháme "rôzne skupiny hráčov" vždy dohrať 10 000 rôznych jedno-dĺžkových hier a pozrieme sa na ich priemerný profit na konci hry a potom ich porovnáme s 10 000 simuláciami s 50-dĺžkovými hrami.
5 nezávislých simulácií pre 10 000 jedno-dĺžkových hier("mangKung/c.js"). (Tabuľka 6)

simulácia$_i$	počet simulácií	n-dĺžka hry	výhra H_1	výhraH_2	výhra H_3
1	10 000	1	1,4433	-0,083	-1,371
2	10 000	1	1,175	-0,079	-1,117
3	10 000	1	1,052	-0,109	-0,964
4	10 000	1	1,469	0,203	-1,693
5	10 000	1	1,191	0,522	-1,734
Priemerne	10 000	1	1,26606	0,0908	-1,3758

Tabuľka 6: Priemerné výhry hráčov zo simulácií v jednodĺžkových hrách (s miernym zaokruhlením)

Ak by hráči hrali iba jedno-dĺžkovú hru, tak v priemere by hra značne vykazovala v prospech H_1. Aproximácie stredných hodnôt pomocou bodových odhadov podľa našich 10^4 simulácií pre jednu hru sú:

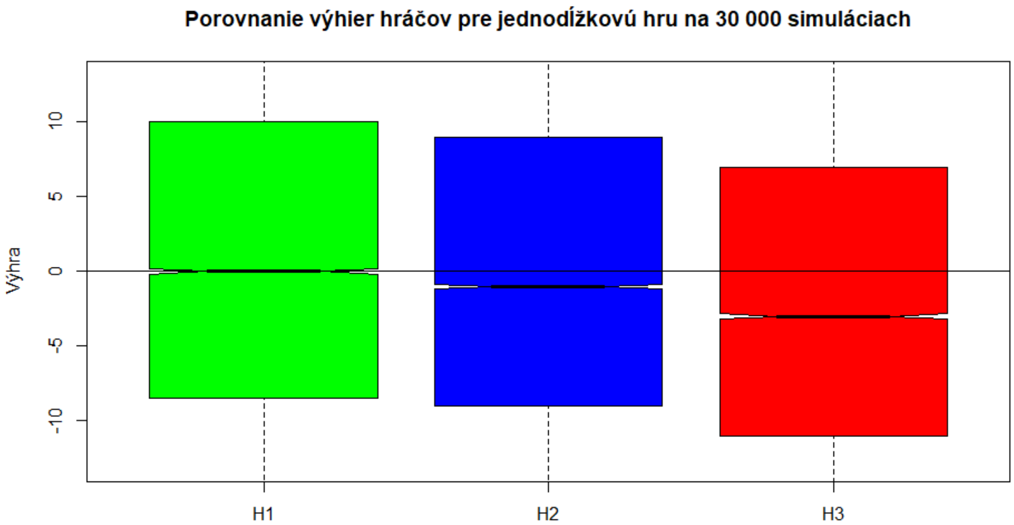
$$E(H_1) \approx 1,26606$$
$$E(H_2) \approx 0,0908$$
$$E(H_3) \approx -1,3758$$

Následne 5 nezávislých simulácií pre 10 000 50-dĺžkových hier (Table 5)

simulácia$_i$	počet simulácií	n-dĺžka hry	výhra H_1	výhraH_2	výhra H_3
1	10 000	50	0,943	-6,57	5,606
2	10 000	50	0,37	1,957	-2,348
3	10 000	50	-0,103	3,138	-3,056
4	10 000	50	0,874	-4,412	3,517
5	10 000	50	-3,44	-3,956	7,375
$\overline{x}$	10 000	50	-0,2712	-1,9686	2,2212

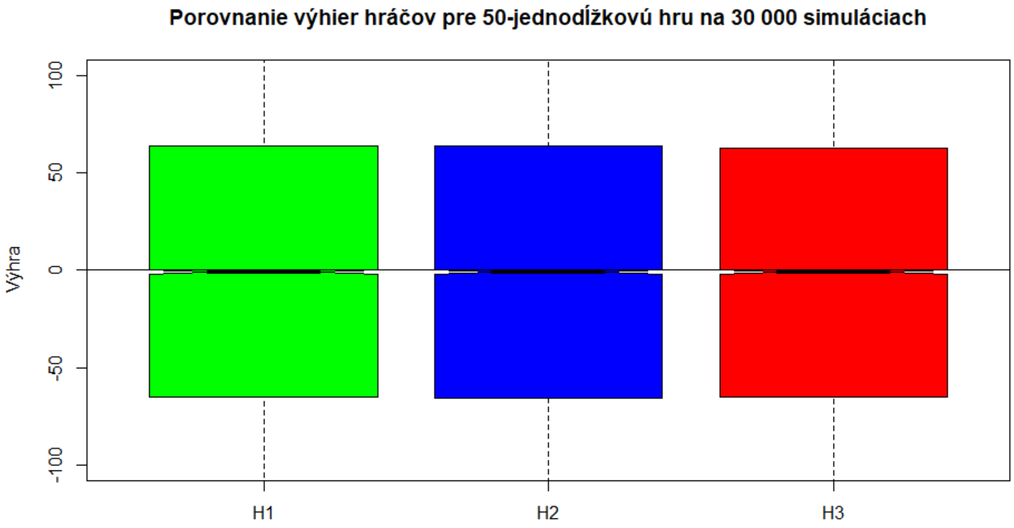
Tabuľka 7: Priemerné výhry hráčov zo simulácií v 50-dĺžkových hrách

Zatiaľ čo z (Tabluľka 6) sa dala vyvodiť nejaká logická spojitosť medzi voľbou H_1 a jeho výhodou výhry v jedno-dĺžkovej hre, pri viacej-dĺžkovej hre stráca význam výhoda H_1, pretože výhry jednotlivých H_i sa pohybujú úplne náhodne.
Zvýšime počet simulácií na 30 000 a vytvoríme si pre ne boxploty na účely lepšej porovnávacej analýzy. Do boxplotov budeme brať ako hlavne údaje jednotlivé výhry hráčov, vždy po 1-dlžkovej alebo po 50-dĺžkovej hre a navzájom ich porovnáme.



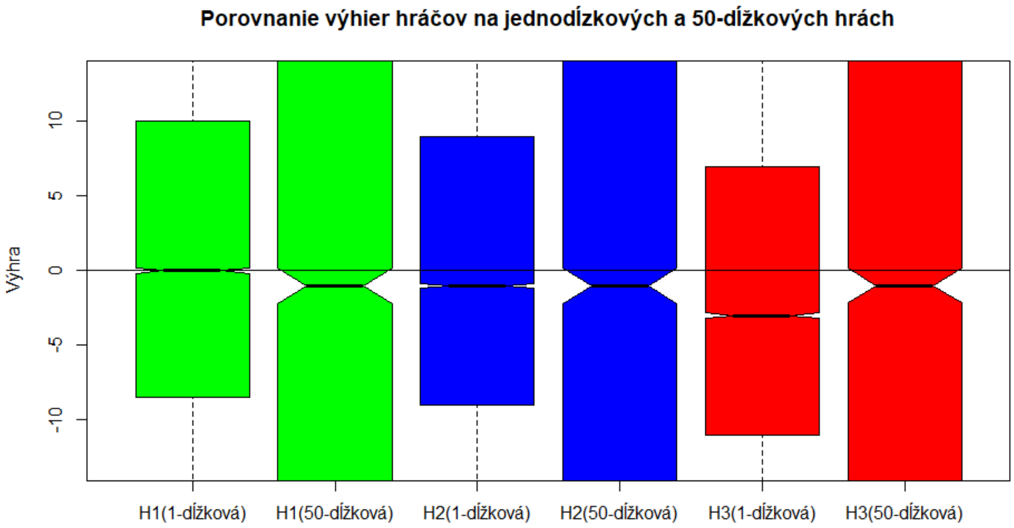
Obr. 4: Výhry H_i v jednotlivých 30 000x1-dĺžkových hrách

Každý boxplot (Obr. 4) predstavuje pre každého H_i 30 000 jedno-dĺžkových simulácií, kde sme zaznamenávali jednotlivé výhry žetónov pre H_i. Keď porovnáme priemerné výhry H_i s tým čo nám poskytuje boxplot, tak nám potvrdzuje to, že H_1 ma výhodu vo výhre nad H_2, H_3 a H_2 má výhodu nad H_3.
Teraz sa môžeme pozrieť ako to vyzerá pri 50-dĺžkových hrách (Obr. 5).



Obr. 5: Výhry H_i v jednotlivých 30 000x50-dĺžkových hrách

A aj grafické porovnanie výhier hráčov pri 1-dĺžkových hrách a 50-dĺžkových hrách (Obr. 6).



Obr. 6: Porovnanie výhier H_i v jednotlivých 30 000xjednod´žkových a 30 000x50-dĺžkových hrách

Hneď z prvého pohľadu je ľahko vidieť veľký simulačný rozdiel v rozptyle výhier (Obr. 6) pre každého H_i medzi 1-dĺžkovými a 50-dĺžkovými hrami. Zatiaľ čo v 1-dlžkových 30 000 simuláciach (alebo 30 000 x 1 simuláciach) sa medián nachádzal približne tam, kde sme ho podľa (Tabľka 6) očakávali zároveň s úzkym, podľa R-ka s približne 95% intervalom spoľahlivosti, tak pre 30 000 x 50-dĺžkových hier simulácie vykazujú medián, ktorý sa u všetkých H_i nachádza pod 0 osou, zároveň s omnoho širším, podľa R-ka 95% intervalom spoľahlivosti. Z tohoto všetkého by sme mohli zatiaľ usúdiť, že: H_1 má istú výhodu pri 1-dĺžkovej hre ale ako sa začína hrať viacej-dĺžková hra, tak sa s tým stráca jeho výhoda a výhodu preberá pravdepodobnosť.
Pri 50-dĺžkovej hre v (Tabuľka 7) sme si všimli, že priemerne výhry H_i sa správajú úplne náhodne, občas sú záporne a inokedy kladné no však v (Obr. 5) a (Obr 6.) sme si mohli všimnúť, že ich rozp-

tyl je takmer identický a medián takisto, z čoho by nám mohla evokovať idea, že priemerné výhry hráčov, pri n-dĺžkových hrách, kde $n >> 1$ by mali byť rovnaké a taktiež nulové.
Na to aplikujeme štatistický test. Najprv si ale pripravíme vhodné nástroje, ktoré budeme používať. Ako prvé n-dĺžkovú hru budeme musieť fixnúť na nejaké rozumné číslo, čo sme zatiaľ zistili je, že pri 1-dĺžkovej hre by mal mať H_1 najväčšie očakávané výhry ale s nárastom n-dĺžkovej hry ,kde $n >> 1$ stráca túto výhodu, takisto ako H_3 stráca svoju nevýhodu, presne preto zvolíme n-dĺžkovú hru na 1000-dĺžkovú aby sme si boli takmer istí, že nejaká výhoda v očakávanej výhre je takmer stratená ale aj na to aby číslo nebolo priveľké na účely simulovania. [5] Nech výhry jednotlivých hráčov po 1000-dĺžkových hrách sú zapísane v danej matici:

$$K = \begin{pmatrix} V(H_1)_1 & V(H_2)_1 & V(H_3)_1 \\ V(H_1)_2 & V(H_2)_2 & V(H_3)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V(H_1)_n & V(H_2)_n & V(H_3)_n \end{pmatrix}_{n,3}$$

kde i-ty riadok:

$$\begin{pmatrix} V(H_1)_i & V(H_2)_i & V(H_3)_i \end{pmatrix}_{1,3}$$

predstavuje výhry žetónov hráčov H_1, H_2, H_3 pre i-tú simuláciu, kde sa hrala 1000-dĺžková hra. Pre každý i-ty riadok matice platí: $\sum_{k=1}^{3} V(H_k)_i = 0,\ \ i = 1, 2, \dots, n$ (kladné aj záporné výhry (výhry/ prehry) v jednej simulácií kolujú len medzi hráčmi) čo nám indikuje istú závislosť medzi náhodnými premennými $V(H_1)_i, V(H_2)_i, V(H_3)_i$. Ak by sme zobrali hocijaký j-ty $j \in \{1, 2, 3\}$ stĺpec matice K tj. $V(H_j)$, tak v ňom vidíme jednotlivé výhry H_j počas všetkých 1000-dĺžkových hier, ktoré odohral. Teraz zostavme nulovú hypotézu: (Keďže označenie H_i patrí i-tému hračovi v poradí hrania, tak nulová hypotéza bude označovaná - Hy_0 a jej alternatíva - Hy_1)

$$Hy_0 : \begin{pmatrix} E(V(H_1)) & E(V(H_2)) & E(V(H_3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a k nej alternatívu:

$$Hy_1 : E(V(H_1)) \neq 0 \ \ \vee \ \ E(V(H_2)) \neq 0 \ \ \vee \ \ E(V(H_3)) \neq 0$$

Ak budeme testovať takúto hypotézu, je zrejme, že presnejší výsledok nám vyjde z väčšieho počtu simulácií tj. riadkov matice K, ktorý nastavíme pre náš prípad na $n = 10000$. Nastavenie takého čísla má aj iné opodstatnenie a to také aby nenastala možnosť, že test sa bude "báť"zamietnuť Hy_0 na základe malého počtu dát. V takom prípade by sme Hy_0 nemohli prijať. Keď bude dát veľké množstvo a test nezamietne Hy_0, tak v dôsledku veľkého počtu dát test pokladá Hy_0 za pravdivé s 95% pp.
Ďalej si vytvoríme vektor $\overline{K} = \begin{pmatrix} \overline{V}(H_1) & \overline{V}(H_2) & \overline{V}(H_3) \end{pmatrix}$, ktorý bude predstavovať výsledný priemer každého $V(H_i)$. Následne si vytvoríme vhodnú testovú štatistiku T, ktorá berie ako parametre dva ľubovoľné vektory s rozmermi $1, m$. Bude slúžiť na meranie, ako ďaleko je vzdialený $\overline{K}$ od nulovej hypotézy $(0, 0, 0)$.

$$T(\overline{K}, Hy_0) = \|\overline{K} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\|_2^2 = \overline{V}(H_1)^2 + \overline{V}(H_2)^2 + \overline{V}(H_3)^2.$$

(a) Následne v každom riadku matice K náhodne medzi sebou prepermutujeme členy:

$$V(H_1)_i, V(H_2)_i, V(H_3)_i, i = 1, 2 \dots, n$$

Z čoho môžeme ako príklad dostať novú maticu: $\begin{pmatrix} V(H_3)_1 & V(H_1)_1 & V(H_2)_1 \\ V(H_2)_2 & V(H_1)_2 & V(H_3)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V(H_1)_n & V(H_3)_n & V(H_2)_n \end{pmatrix}_{n,3}$

Krok (a) zopakujeme 10 000 krát a každú výsledne prepermutovanú maticu priradíme premenným v presnom poradí $K_1, K_2, \ldots, K_{10000}$.
Analogickým spôsobom ako sme vytvorili $\overline{K}$ vytvoríme aj $\overline{K}_i$ z už spomínaných prepemutovaných matíc.
Pre výpočet P = p-value využijeme vektor $\overline{K}$ z pôvodnej matice K, z originálnych 10000x1000-dĺzkových hier a použijeme aj spomínane vektory $\overline{K}_i$. Na všetky tieto vektory aplikujeme testovú štatistiku T, tak že:

$$T_o = T(\overline{K}, Hy_0)$$

$$T_i = T(\overline{K}_i, Hy_0), i = 1, 2, \ldots, 10000$$

$$P = \frac{\#(T_o > T_i)}{10^4}, i = 1, 2, \ldots, 10000$$

alebo:

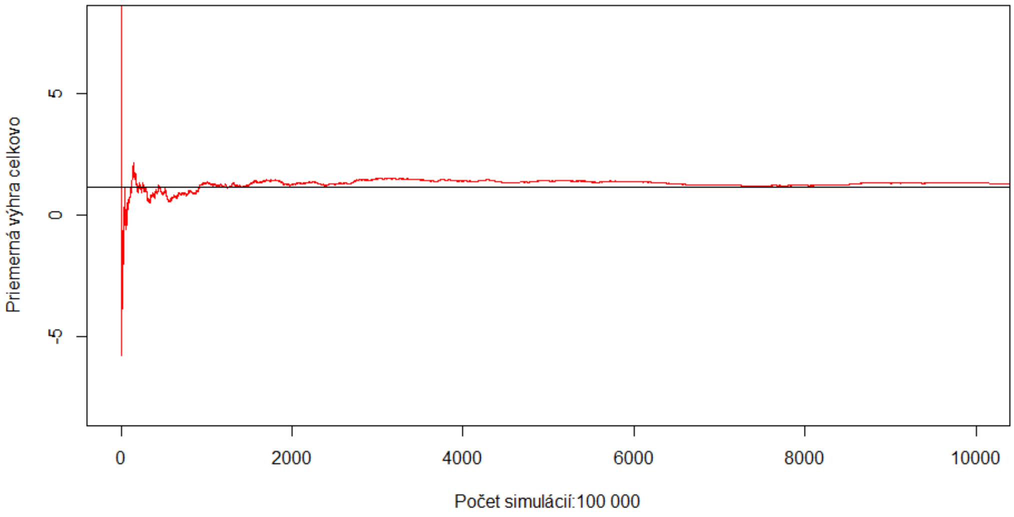
$$P = \frac{\sum_{T_o > T_i} 1}{10^4}$$

Z takto poskladanej testovej štatistiky sme dostali p-value $P = 0.3971$, čo nám hovorí, že približne 39,71 % dát sa riadi nulovou hypotézou, teda Hy_0 nezamietame na hladine $\alpha = 0.05 \implies$ Test vyhlásil, že fixne volený hráč H_1 na začiatku n-dĺžkovej hry, kde $n = 1000$, nemá štatisticky významný vplyv na očakávanú výhru jednotlivých H_i. Teraz aplikujeme analogický postup pre test aj na menej n-dĺžkové hry a budeme sledovať ako sa v závislosti od zmeny n mení p-value nášho testu , kedže podľa simulácií nám vychádza, že pre 1-dĺžkovú hru má značnú výhodu vo výhre H_1, predpokladáme, že p-value bude pri 1-dĺžkovej hre veľmi malá. Nižšie uvádzame tradeoff graf medzi n: dĺžkou hry a p-value: P.

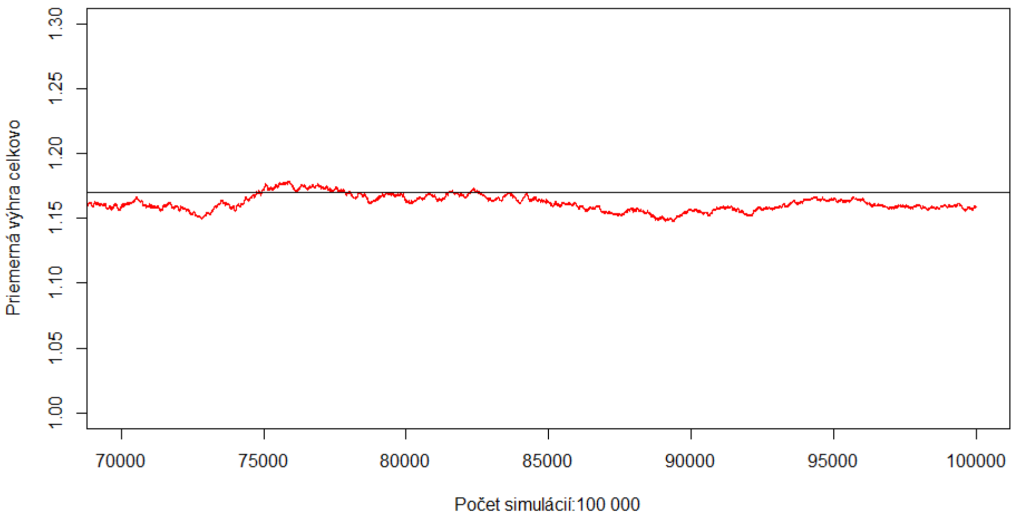
Pre 1-dĺžkovú hru sme zostrojili simuláciu pre H_1, kde sledujeme možnú konvergenciu priemeru výhry tj. pokúsime sa zistiť aká by mohla byť finálna priemerná výhra H_1 v 1-dĺžkových hrách. Zostrojme vektor $\vec{v}_n$, ktorého j-tá zložka bude predstavovať:

$$\vec{v}_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} V(H_1)_i}{j}, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

, kde $V(H_1)_i$ je výhra H_1 po ukončení i-tej 1-dĺžkovej simulácie. V našom prípade sme n nadstavili na 100 000 a znázornime jeho graf konvergencie v dvoch častiach. Prvá časť bude pre prvých 10 000 simulácií (Obr. cislo) a druhý graf bude pre posledných 30 000 simulácií.



Obr. 7: Konvergencia priemernej výhry H_1 pre prvých 10 000 simulácií z celkových 100 000x1 simulácií



Obr. 8: Konvergencia priemernej výhry H_1 pre posledných 30 000 simulácií z celkových 100 000x1 simulácií

Konvergenciu vo (Obr. cislo) a (Obr. cislo) porovnávame s konštantnou funkciou $f(x) = 1.17$, ktorá bola zadaná v [1] ako približný výsledok priemernej výhry H_1 pri 1-dĺžkovej hre. Konvergencia v (Obr. cislo) približne zodpovedá výsledku zo zdroja ale čo vieme je, že $f(x)$ bolo získané taktiež simulačnými experimentami ale nevieme akým počtom alebo ako veľmi spoľahlivým spôsobom.

(d) Pomocou spustenia skriptu "mangKung/mangKung.js" sme zístli, že priemerná dĺžka hry je približne 20 hodov, teda 20 vystriedaní rôznych hráčov. (Z čoho môže vyplývať klamlivo intuitívny predpoklad, že hru vyhráva spravidla H_3, keďže je ako 20. v poradí hrania čo ale nie je pravda pretože vieme, z úlohy b), že všetci hráči majú pri viacej-dĺžkových hrách výhry rozdelené približne náhodne.)

(e) Ďalšia otázka je či by počiatočný počet hráčov mohol nejakým spôsobom ovplyvňovať dĺžku hry, najprv sa zamyslíme nad úlohou bez výpočtu alebo simulácie. Vieme, že hra nie je nijak limitovaná pre počiatočný počet hráčov, jediné čo by sa s odlišným počtom hráčov menilo je počiatočný vklad, ktorý je všeobecne daný ako: $\min_k\{k\frac{21}{n}, k \in \mathbb{N}\}$, z čoho neskôr zostrojíme tabuľku rôznych počiatočných vkladov, pre odlišný počet hráčov. Je teda jasné, že vklad na stole nemusí byť vždycky nutne 21 ale môže byť aj väčší. Ako vymyslené dva príklady na porovnanie uveďme najprv počiatočný vklad $\zeta = 21$ pri 7 hráčoch. Bez hlbokého zamýšľania nám môže napadnúť, že dĺžka hry by mala byť stále približne okolo 20 hodov ako pri 3 hráčoch z čoho môžeme predpokladať, že počet hráčov nijak neovplyvňuje dĺžku hry a bude trvať ten istý počet hodov kociek, čo je aj za nejakú konkrétnu podmienku pravdivý výrok a tou podmienkou je: $\zeta = 21$, ak by ζ nebola 21 tak priemerná dĺžka hry je odlišná. Uveďme ďalší príklad: $\zeta = 200$ so 4 rôznymi hráčmi. V takomto prípade by bola priemerná dĺžka hry > 20 a to kvôli tomu, že $F \leq 21$ a so 100 % istotou môžeme povedať, že minimálne pri prvých 9 hodoch bude nastávať možnosť $F < \zeta$ a zo stola si budú hráči neustále ťahať žetóny rovno do peňaženky, pokiaľ na stole nenastane stav $\zeta \leq 21$, od tohoto stavu by hra trvala priemerne ≤ 20 hodov. Celková dĺžka hry by pri hocijakom vklade ζ trvala teda priemerný počet hodov na dostanie sa pod hranicu $\zeta \leq 21$ + následných priemerných 20 hodov odhadnutých pomocou simulácií z časti d).
Z tohoto celého by vyplývalo, že s narastajúcou ζ narastá aj priemerná dĺžka hry a zároveň, že ζ je ovplyvňovaná počtom hráčov, teda áno rôzny počet hráčov bude ovplyvňovať priemernú dĺžku hry. Pre rôzny počet hráčov sme zostrojili tabuľku počiatočných vkladov. (Tabuľka 8).

# Hráčov	1	2	3	4	5	6	7	8	...	21	22	23	...	99	100
ζ	NA	42	21	84	105	42	21	168	...	21	462	483	...	693	2100
$\approx E(dĺžkahry)$	NA	26	20	38	43	26	20	62	...	20	145	151	...	211	613

Tabuľka 8: Priemerná dĺžka hry v závislosti od počtu hráčov

Z (Tabuľka 8) je ľahko vidieť, akú dĺžku hry môžeme približne očakávať v závislosti od počtu hráčov, ak sa hra má hrať presne podľa pravidiel.

(f) Prečo je vlastne počiatočný vklad nastavený týmto spôsobom, čo by sa napr. stalo ak by sa všetci hráči skladali vždy po inom fixnom počte na počiatočný vklad, zmenilo by to logiku hry alebo mal by nejaký hráč menšiu/ väčšiu výhodu ako pred tým?
Ako vieme, počiatočný vklad je všeobecne zadaný na: $\min_k\{k\frac{21}{n}, k \in \mathbb{N}\}$. Z úlohy (e) sme zistili, že keď je na stole viacej žetónov ako 21, tak priemerná dĺžka hry narastá, teraz sa pozrieme na to ako by to vyzeralo keby H_i dávali počiatočný vklad $i, i = 1, 2, \ldots, 6$, pre 3 hráčov a n-dĺžkovú hru nadstavenú na 1000, kde počiatočný počet žetónov pre každého H_i postačí na dohranie 1000-dlžkovej hry sú takéto simulačné výsledky. (Tabuľka 9)

Vklad na hráča	7 (podľa pravidiel)	1
E(dĺžka jednej hry v kolách)	19.929	15.731
E(žetónov na stole)	7.03	5.1
Rozloženie výhercov	H_1 (31,6%) H_2 (33,3 %) H_3 (33,6 %)	H_1 (33,7%) H_2 (33,9%) H_3 (32,4%)
Najčastejšíe 3 počty žetónov na stole	6 (10,2%), 5(9,2%) 4(8.6 %)	3 (11,9 %), 6(11,7 %) 5(11,3 %)
3 najčastejšie výšky prehier	12 (7,6 %), 11 (7,3 %), 10(6,2 %)	4 (14,7 %), 10 (8 %), 8(6,8 %)

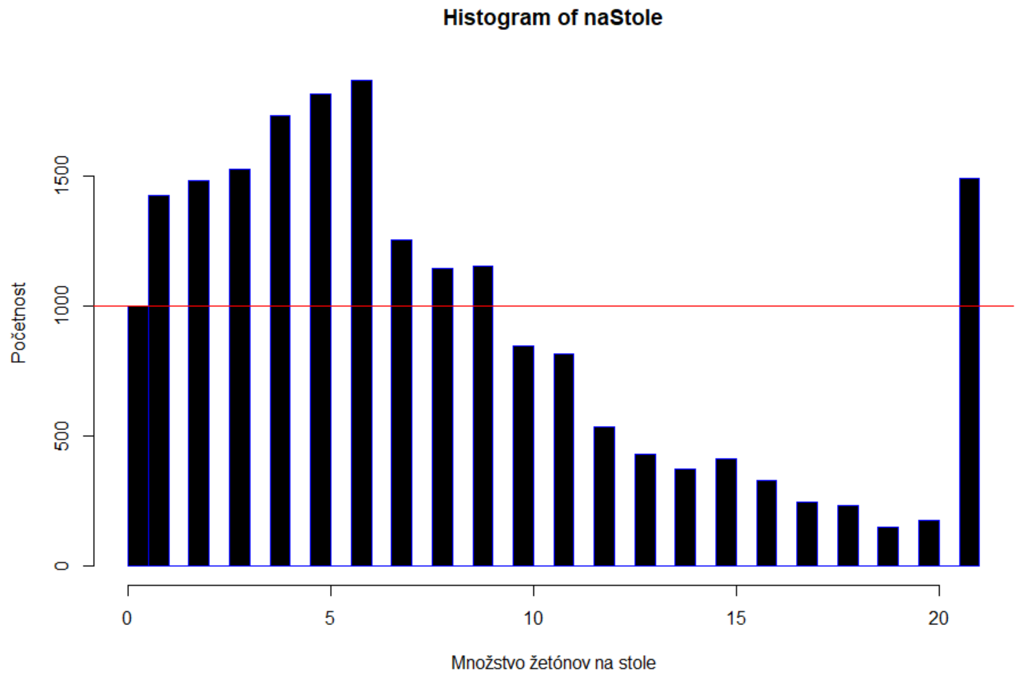
Vklad na hráča	2	3
E(dĺžka jednej hry v kolách)	15.281	16.266
E(žetónov na stole)	5.19	5.39
Rozloženie výhercov	H_1 (33,2 %) H_2 (33,4 %) H_3 (33,4 %)	H_1 (32,4 %) H_2 (35,5 %) H_3 (32,1 %)
Najčastejšíe 3 počty žetónov na stole	6 (13,7 %), 5(10 %), 2(9,9 %)	5 (11,4 %), 6(11,1 %), 4(10,2 %)
3 najčastejšie výšky prehier	8 (19,2 %), 7 (7,2 %), 5(6,3 %)	12 (10,5 %), 7(8 %), 6(5,3 %)

Vklad na hráča	4	5
E(dĺžka jednej hry v kolách)	16.999	17.143
E(žetónov na stole)	5.56	6.01
Rozloženie výhercov	H_1 (30,5 %),H_2 (35,7 %) H_3 (33,8 %)	H_1 (35,3 %),H_2 (34,4 %) H_3 (30,3 %)
Najčastejšíe 3 počty žetónov na stole	6 (12 %), 5(10,2 %), 4(9,7 %)	5 (10,6 %), 6(10,6 %), 4(9,1 %)
3 najčastejšie výšky prehier	10 (8,6 %), 9 (8,1 %), 8(8,1 %)	8 (8 %), 10 (7,6 %), 7(6,5 %)

Vklad na hráča	6
E(dĺžka jednej hry v kolách)	19.089
E(žetónov na stole)	6.47
Rozloženie výhercov	H_1 (33,8 %), H_2 (32,9 %), H_3 (33,3 %)
Najčastejšíe 3 počty žetónov na stole	6 (10,4 %), 5(9,7 %), 4(8,5 %)
3 najčastejšie výšky prehier	11 (8,1 %), 9 (6,7 %), 12(6,3 %)

Tabuľka 9: Základne štatistiky pre 1000-dĺžkovú hru podľa veľkosti vkladu pre každého hráča, získane spustením skriptu "mangKung/mangKung.js"funkcie "simulate(...)"

Z (Tabuľka 9) je nám jasné, že menší počiatočný vklad analogicky implikuje kratšiu očakávanú hru a aj nárast priemerného počtu peňazí na stole. Rozloženie výhercov je približne také isté, najčastejšie 3 počty žetónov na stole nevykazuje veľké zmeny. Čo je dobré si všimnúť je zmena hodnôt najčastejších 3 prehier. Zatiaľ čo pri malom vklade vykazovala veľká špicatosť histogramu dá, s väčším počiatočným vkladom sa jeho špicatosť zmenšuje.
To, že rozloženie výhercov, pri rôznych vkladoch je približne také isté, sa dá takisto otestovať veľmi podobným princípom ako v úlohe b). Ale môžeme to vydedukovať aj iným spôsobom.
K daným simuláciam prikladáme ešte histogram žetónov na stole pri hre bez akéhokoľvek modifikovania napr. fixovanie poradia hráčov, kde vklad na hráča je rovný 7.

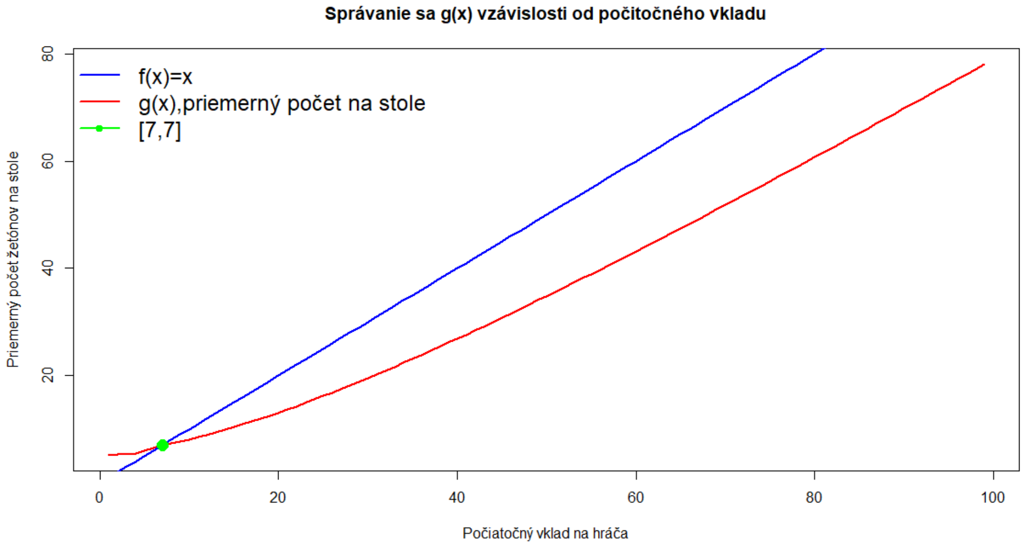


Obr. 9: Početnosť množstva žetónov na stole počas 1000-dĺžkovej hry

Je zjavné, že pri 1000-dĺžkovej hre musela nastať situácia $\zeta = 0$ práve 1000 krát. Veľmi podobne pre $\zeta = 21$ s tým rozdielom, že tam nastáva daná možnosť minimálne 1000 krát, prirátava sa tam započatie každej hry a nastátie udalosti $F = 0$, hneď po začatí hry. Teda je zjavné, že najčastejšie počty žetónov bez hraničných (0 a 21) na stole sa pohybujú v rozmedzí 4 až 6 žetónov.

Otázka môže byť prečo autor hry zaumienil držania sa násobku $21k$ pri počiatočnom vklade? Tu je viacero ideí:

- Autor chcel aby H_1 na výhru hneď z prvého hodu mal čo najmenšiu šancu, takpovediac pri menších počiatočných vkladoch sa jeho šanca na výhru hneď z prvého kola zvyšuje. Netreba zabudnúť ani na výhodu H_1 v 1-dĺžkovej hre, kde pri menších vkladoch už nebude mať 100% profit z prvého hodu ale ak by bol počiatočný vklad blízko 7, napr. 6, tak vieme, podľa (Tabuľka 3), že pravdepodobnosť, že bude niečo doplácať na stôl = $\sum_{i=19}^{21} P(F = i) \approx 0,022\%$ ale pravdepodobnosť, že výhra hneď v prvom kole je $\approx 0,0643$, teda pp. že výhra hneď prvý hod je väčšia ako to, že bude nieco doplácať na stôl. Pre počiatočný vklad 5 žetónov: $\sum_{i=16}^{21} P(F = i) \approx 0,27\%$ a pp. toho, že výhra hneď z prvého hodu je $\approx 0,4287$, opäť viacej ako to, že bude niečo doplácať na stôl. Pre počiatočný vklad 4 žetónov: $\sum_{i=13}^{21} P(F = i) \approx 1,7275\%$, pp. toho , že vyhrá hneď z prvého hodu je $\approx 0,91$ čo pre tento prípad je už menej ako pp. toho, že hodí väčšie číslo ako je na stole. Z toho celého vyplýva, že $P(F > \zeta) \leq P(F = \zeta) \leq P(F < \zeta)$, pre počiatočné vklady po 5 alebo 6 žetónov, teda H_1 by mal pri tomto počte pri 1-dĺžkovej hre možno ešte väčšiu výhodu ako pri pôvodnom počiatočnom vklade podľa pravidiel.
- Autor chcel docieliť, aby priemerný počet žetónov na stole celkovo je vlastne počet žetónov, po ktorom sa skladajú 3 hráči



Obr. 10: Najdenie spoločného prieniku

Pre modrý graf v (Obr. cislo) interpretuje x-ová a y-ová os aký je počiatočný vklad na hráča a pre červený graf interpretuje y-ová os aký je priemerný počet žetónov na stole a x-ová aký je na to potrebný počiatočný vklad žetónov na hráča.
Môžeme vidieť, že dané grafy sa pretli v bode $[7, 7]$, ktorý interpretuje na podľa červeného grafu to, že pri počiatočnom vklade 7 žetónov na hráča, pri 3 hráčoch je priemerný počet žetónov na stole za celé hru ≈ 7.

- Autor chcel rozptýliť špicatosť najčastejších prehier pri n-dĺžkových hrách, kde $n >> 1$ (Tabuľka 9)

(g) Aká by mala byť hodnota, ktorá by nám, takmer určite vystačila na dohranie celej jednej hry, teda aby sa počas hry nestalo, že by sme nemali dostatok žetónov na doloženie, keď $F > \zeta$.
Označme $p(H_i)_j$ - celkový počet žetónov, ktoré vlastní i-ty hráč po j-tej hre , kde $i \in \{1, 2, ..., n\} \wedge j \in \{1, 2, ..., m\}$. Ďalej označme $r(H_i)_j$ ako rozdiel celkového počtu žetónov pred (po j-1 kole) a po j-tom kole pre i-teho hráča , teda pre:

$$r(H_i)_j = p(H_i)_{j-1} - p(H_i)_j$$

Z toho je zjavné:

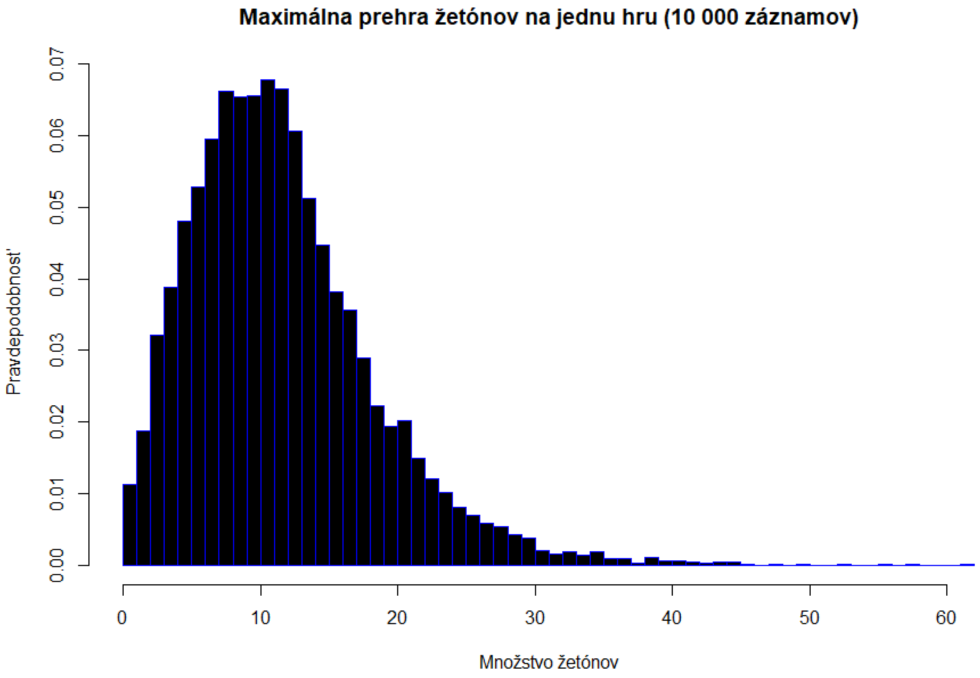
- $r(H_i)_j > 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v mínuse
- $r(H_i)_j < 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v profite
- $r(H_i)_j = 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v neutralite

Každú hru budeme vyberať spomedzi 3 hráčov najväčšiu stratu žetónov, ktoré si následne uložíme do vektora $\vec{v}_{m-1}$ pre ďalšie štatistické účely.
Potom:

$$v_1 = \max\{\ r(H_1)_2,\ r(H_2)_2,\ r(H_3)_2\ \}$$
$$v_2 = \max\{\ r(H_1)_3,\ r(H_2)_3,\ r(H_3)_3\ \}$$
$$\vdots$$

$$v_{m-1} = \max\{\ r(H_1)_m,\ r(H_2)_m,\ r(H_3)_m\ \}$$

Týmto spôsobom bude prebiehať naša simulácia, kde keď daný vektor znázorníme histrogramom, tak dostávame nasledovné (Obr. cislo):



Obr. 11: Histogram maximálnej prehry žetónov, za jednu hru

Dostali sme grafické riešenie koľkokrát spomedzi 10 000 hier stačilo aké množstvo žetónov na dokončenie hry. Pre predstavu maximálny outlier je rovný 62. Ak by sme chceli na základe dát mať 50% pravdepodobnosť na dohranie hry bez bankrotu, potrebovali by sme na začiatok 11 žetónov, na 99% dohranie hry bez bankrotu je potrebných 33 žetónov.

Výpočty sú dané len na základe bodových odhadov z výsledkov simulácie. Pokúsime sa ošetriť rôzne kvantily a strednú hodnotu štatistikou a určiť im obojstranné intervaly spoľahlivosti. Ak si označíme maximálnu prehru ako náhodnú premennú $X \sim f(x)$, kde $f(x)$ je pre nás neznáma hustota. Takisto je pre nás neznáma stredná hodnota $E(X)$ a aj kvantily $q_1, q_2, \dots, q_n$, pre ktoré platí: $P(X \leq q_i) = 1 - \alpha$, kde α je pravdepodobnosť TYPE II ERROR. Chceli by sme urobiť interval spoľahlivosti pre už spomínane parametre, pri tom nám môžu pomôcť uskutočnenia našej náhodnej premennej X, kde jej výsledky sú v tvare: $x_1, x_2, \dots, x_{10000}$, ktoré definujú vyššie spomínaný histogram (Obr. 11).

Predstavíme si bootstrap metódu, ktorá je vhodná pre ktorýkoľvek dataset vytvorený z náhodnej premennej a aj s neznámou hustotou. Metóda je praktická v tom, že dokáže určiť intervalový odhad pre parameter z s chybovosťou $\alpha, \alpha \in (0,1)$ s predpokladom, že je možné určiť bodový odhad pre z na základe počiatočných : $x_1, x_2, \dots, x_{10000}$. Keďže bodový odhad pre strednú hodnotu a rôzne kvantily vieme vytvoriť z nášho datasetu, je možne aplikovať bootstrap metódu, ktorá spočíva v 4 krokoch.

Predpokladajme, že chceme $1 - \alpha$ obojstranný interval spoľahlivosti pre z, keď vieme, že z sa dá aproximovať bodovým odhadom $\overline{z}$ pomocou pôvodného datasetu

- Z datasetu: $x_1, x_2, \dots, x_n$ budeme n-krát náhodne vyberať člen $x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ s návratom a následne ukladať do vektoru $\vec{y}$. Je dôležite spomenúť, že pri vyberaní môžeme vytiahnuť aj viackrát to isté dáto x_i , teda vektor $\vec{y}$ môže kľudne vyzerať aj ako $\vec{y} = (x_i, x_j, x_1, x_o, x_i, \dots, x_1)_{1,n}$
- Vypočítame bodový odhad $\overline{z}$ pomocou dát, ktoré sú uložené vo vektore $\vec{y}$

- Bodový odhad $\overline{z}$ uložíme do výsledného vektora $\vec{T}$
- Bod 2. a 3. zopakujeme veľakrát, spravidla (200+).

Teda každú iteráciu pretvoríme náš vektor $\vec{y}$ novými náhodnými výbermi x_i "s návratom", pomocou ktorého vypočítame bodový odhad $\overline{z}$, ktorý sa na konci jednotlivej iterácie uloží do vektora $\vec{T}$. Výsledný vektor $\vec{T}$ bude na konci metódy obsahovať 1000 bodových odhadov pre z na základe, ktorých sa bude dať určiť $(1-\alpha)$ interval spoľahlivosti. Pre $(1-\alpha)$ obojstranný interval spoľahlivosti pre z pomocou bootstrap metódy, bude platiť:

$$z \in [quantile(\frac{\alpha}{2}), quantile(1-\frac{\alpha}{2})]$$

2 Piata hra v Squid Game

2.1 Úvod hry

Koncom jesene 2021 otriasla svetom veľkolepá séria Squid Game natočená podľa knižnej predlohy. Hra sa sklada zo 6 náročných úloh, ktoré museli súťažiaci splniť. Jednou z nich bola už spomínana piata hra spočinájuca v tom, že súťažiaci sa museli dostať z jednej strany mostu na druhú. Je zrejme, že cesta bude v niečom obťiažná, no to sa ďalej dozvieme v definícií hry.

2.2 Definícia hry

Definíciu hry budeme najprv implementovať presne podľa toho ako to bolo v seriály a nesôr a následne hru definujeme všobecne.

2.2.1 Podľa seriálu

Majme 16 hráčov, ktorým náhodne pridelíme čisla od 1 po 16 a označíme. Číslo, ktoré bolo pridelené jednotlivým hráčom bude určovať ich poradie, v ktorom budú prechádzať cez most. Hráča, ktorému bolo pridelené číslo $i, i \in \{1, 2, ..., 16\}$ označíme H_i. Je zrejmé, že H_1 bude prechádzať cez most ako prvý a H_16 ako posledný.
Teraz je nutné definovať ako bude prechádzať H_1 cez most. Aby sa H_1 dostal na druhú stranu mostu musí prejsť 15 políčkami, ktoré má pred sebou. Problém je to, že každé políčko sa skladá z polovice z jedneho tenkého skla a z druhej polovice z jedného hrubého skla.Ak H_i skočí na tenke sklo, tak sa rozbije a hráč padá na zem a je vyradený. Ak ale H_i skočí na hrubé sklo, tak H_i unesie a H_i môže postupovať na ďalšie políčko. Na jednom políčku je medzi sklami dostatočný priestor na to aby H_i nemohol stáť na oboch sklách súčasne.

3 Referencie

Literatúra

[1] Jiři Anděl: Matematika Náhody, matfyzpress vydavatelsví matematicko-fyzikalni fakulty univerzity karlovy, Praha, 2000

[2] Teória pravdepodobnosti, slajdy z prednášok, Katedra Matematických metód Fakulta Riadenia a Informatiky Žilinská Univerzita v Žiline, Žilina, 2014,dostupne na internete(23.10.2021): https://frcatel.fri.uniza.sk/users/alesko/PaS/prednaska5.pdf

[3] Wai-Sum Chan, Stochastik in der Schule, 1997, hmm co tady

[4] JAN-JÜRGEN MENGE,Das Mang-Kung-Spiel (2), working paper, Rotenburg,Rotenburg,2008, dostupné na internete(23.10.2021): https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang28-2008/Heft1/2008-1_menge.pdf

[5] Ján Somorčík: osobná komunikácia, FMFI UK, Bratislava 2021

[6] Katarína Janková, Andrej Pázman: Pravdepodobnosť a štatistika, Univerzita Komenského Bratislava, Bratislava, 2012