

# 1 Hra Mang Kung

## 1.1 Definícia hry

Slova Mang Kung su čínske a znamenajú slepí ľudia. Je to stará čínska hra, ktorá sa v dnešnej dobe stále hráva v južnej Číne a v Hong Kongu. Počas hry sa bude používať šesť hracích kociek, ktoré sa od klasických líšia len neobvyklým označovaním stien a to takým, že  $i$ -ta kocka má na jednej stene hodnotu  $i$  a ostatné steny sú prázdne  $\forall i = 1, 2, \dots, 6$ . (Figure 1)



Figure 1: Vzhľad používaných kociek, v hre Mang Kung

Pokiaľ v hre padne na  $i$ -tej kocke prázdna stena, počíta sa to ako nulová hodnota  $\forall i = 1, 2, \dots, 6$ .

Najčastejšie sa hry účastnia traja hráči, no však nie je limitovaná ani pre  $n > 3$  hráčov, kde súčasne  $n \in \mathbb{N}$ . Možeme si predstaviť, že hráči sedia okolo guľatého stolu a tým bude jasné, že po odohraní jedného hráča bude na ľahu hráč naľavo. Každý z hráčov položí na stôl 7 žetónov rovnakej hodnoty. (V prípade  $n > 3$  hráčov každý položí na stôl  $\frac{21}{n}$ , v ďalšom prípade ak  $\frac{21}{n}$  nie je prirodzené číslo tak, každý hráč prispeje  $k\frac{21}{n}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , teda zvoline vhodný  $k$  násobok aby nám výsledok dával celé číslo) Na začiatku hry je na stole teda  $\zeta = 21$  žetónov (v prípade  $n > 3$  hráčov  $\zeta = 21k$  žetónov), ktorých počet sa bude počas hry neustále meniť podľa nasledujúcich pravidiel.

### 1.1.1 Logika hry

(i) Prvú hru začne, náhodne vybraný hráč spomedzi všetkých hráčov. Označovať ho budeme  $H_1$ . Po  $H_1$  je na rade  $H_2$ , po  $H_2$ ,  $H_3$ , po  $H_3$ ,  $H_1$ , atď.

Teda, všeobecne ak by bol počet hráčov  $= n$ , tak nastávajú dve možnosti, pre to aký hráč pôjde po  $H_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Po hráčovi  $H_i$  pôjde  $H_{i+1} \iff i < n$
- Po hráčovi  $H_i$  pôjde  $H_1 \iff i = n$

(ii) Hráč, ktorý je na rade hodí všetkými šiestimi hracími kockami a zistí súčet hodnôt stien, ktorý budeme označovať  $F$ . Je zrejmé, že  $F \in \{0, 1, 2, \dots, 21\}$

(iii) Ak pre  $H_i$  je po uskutočnení hodu  $F < \zeta \implies H_i$  si zoberie zo stola  $F$  žetónov.

(iv) Ak pre  $H_i$  je po uskutočnení hodu  $F > \zeta \implies H_i$  musí na stôl pridať  $F - \zeta$  žetónov.

(v) Ak pre  $H_i$  je po uskutočnení hodu  $F = \zeta \implies H_i$  si berie zo stola všetkých  $\zeta$  žetónov, navyše  $H_i$  si zoberie od každého protivníka po  $F$  žetónov.  $H_i$  sa stáva víťazom tejto hry a ako prvý začína ďalšiu hru.

### 1.1.2 Objasnenie hry simuláciou

## 1.2 Úlohy a výpočtové riešenia

(a) Aká je pravdepodobnosť,  $p_i = P(F = i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 21$

(b) Ma každý hráč rovnakú pravdepodobnosť, že vyhrá hru alebo má hráč, ktorý začína hru nejakú výhodu?

(c) Je stredná hodnota výhry rovnaka pre všetkých  $H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

(d) Aka je stredná hodnota dĺžky jednej hry, tj. koľkokrát sa priemerne posunieme o jedného hráča vľavo, než nejaký  $H_i$  vyhrá danú hru.

## Odpovede na otázky

(a) Ako prvé by nám mohlo napadnúť zostrojiť všetky možnosti hodu kociek, ktoré môžu nastať a na základe toho vypočítať jednoducho jednotlivé pravdepodobnosti. Tu však ale nastáva problém s tým, že päť prázdnych stien na každej kocke nemôžeme brať ako jednu a preto je celkový počet možností hodu kociek  $6^6 = 46656$ , čo nebude vôbec efektívne. Miesto toho siahneme po lepšom nástroji a to je tzv. funkcia generujúca pravdepodobnosť, pre diskretnú náhodnú premennú  $X$  na nezáporných číslach predpisom:

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k)$$

,potom je ľahké dokázať, ak je  $g_X(t)$   $k$ -krát diferencovateľná, že:

$$P(X = k) = \frac{\frac{d^k g_X(0)}{dt^k}}{k!}$$

### Dôkaz

Nech  $g_X(t)$  je funkcia generujúca pravdepodobnosť, navyše je  $i$ -krát diferencovateľná. Môžeme si ju prepísať do tvaru:

$$P(X = 0) + P(X = 1)t + P(X = 2)t^2 + \dots + P(X = i)t^i + P(X = i + 1)t^{i+1} + \dots$$

z takto upravenej funkcie je jasné, že keď zoberieme jej  $i$ -tú deriváciu podľa premennej  $t$ , tak:

- $\forall t^j, j < i : \frac{d^i(t^j)}{dt^i} = P(X = j)0 = 0$
- $\forall t^j, j = i : \frac{d^i(t^j)}{dt^i} = P(X = j)j! = P(X = i)i!$
- $\forall t^j, j > i : \frac{d^i(t^j)}{dt^i} = P(X = j) \frac{i!}{(j-i)!} t^{(j-i)}$

$$\frac{d^i g_X(t)}{dt^i} = P(X = 0)0 + P(X = 1)0 + P(X = 2)0 + \dots + P(X = i)i! + P(X = i+1) \frac{i!}{(j-i)!} t^{j-i} + P(X = i+2) \frac{i!}{(j+1-i)!} t^{(j+1-i)}$$

$$\frac{d^i g_X(0)}{dt^i} = P(X = i)i!$$

$$P(X = i) = \frac{\frac{d^i g_X(0)}{dt^i}}{i!}$$

□

Následne označme:

$$F = \sum_{k=1}^6 D_i$$

$D_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  predstavuje hodnotu  $i$ -tej kocky po vykonanom hode.

$$g_F(t) = E(t^F) = E(t^{\sum_{i=1}^6 D_i}) = E \prod_{i=1}^6 (t^{D_i})$$

Tu si musíme uvedomiť, že  $D_i$  sú navzájom nezávislé a teda pre nezávislé náhodné premenné  $X, Y$  platí:  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , čo vieme využiť aj v našom prípade.

$$E \prod_{i=1}^6 (t^{D_i}) = \prod_{i=1}^6 E(t^{D_i})$$

vieme, že  $E(t^{D_i}) = \sum_{k=0}^6 P(D_i = k)t^k$  a teda:

$$\prod_{i=1}^6 \sum_{k=0}^6 (P(D_i = k)t^k)$$

,tu si už len musíme uvedomiť pravdepodobnostné rozdelenie  $D_i$

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^6 \sum_{k=0}^6 (P(D_i = k)t^k)$$

$$\prod_{i=1}^6 (P(D_i = 0)t^0 + P(D_i = i)t^i)$$

$$\prod_{i=1}^6 \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}t^i\right)$$

Teraz už len musíme presne vyjadriť čomu sa rovná daný výraz po roznásobení, na účely derivovania.

$$\Rightarrow \frac{1}{46656} (15625 + 3125t + 3125t^2 + 3750t^3 + 3750t^4 + 4375t^5 + 4500t^6 + 2000t^7 + 1500t^8 + 1625t^9 + \dots$$

$$+ \dots 1025t^{10} + 1025t^{11} + 425t^{12} + 300t^{13} + 200t^{14} + 180t^{15} + 55t^{16} + 30t^{17} + 30t^{18} + 5t^{19} + 5t^{20} + t^{21})$$

Na základe vyjadrenia vieme hneď vyjadriť každú jednu pravdepodobnosť.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{P(F=i)}{46656}$	15625	3125	3125	3750	3750	4375	4500	2000	1500	1625	1025
$\approx \%$	33	6	6	8	8	9	9	4	3	2	2

**Table 1:** Výsledné pravdepodobnostné hodnoty časť 1.

$i$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\frac{P(F=i)}{46656}$	1025	425	300	200	180	55	30	30	5	5	1
$\approx \%$	2	1	0,6	0,4	0,3	0,1	0,06	0,06	0,01	0,01	0,002

**Table 2:** Výsledné pravdepodobnostné hodnoty časť 2.

### 1.3 Vzorce

### 1.4 Simulácie