1 Hra Mang Kung

1.1 Definícia hry

[1] Slova Mang Kung su čínske a znamenajú slepí ľudia. Je to stará čínska hra, ktorá sa v dnešnej dobe stále hráva v južnej Číne a v Hong Kongu. Počas hry sa bude používať šesť hracích kociek, ktoré sa od klasických líšia len neobvyklým označovaním stien a to takým, že i-ta kocka ma na jednej stene hodnotu i a ostatné steny sú prázdne $\forall i = 1, 2, ..., 6$. (Figure 1)

Figure 1: Vzhľad používaných kociek, v hre Mang Kung

Pokiaľ v hre padne na i-tej kocke prázdna stena, počíta sa to ako nulová hodnota pre každé $i = 1, 2, ..., 6$. Najčastejšie sa hry účastnia traja hráči, no však nie je limitovaná ani pre $n > 3$ hráčov, kde súčasne $n \in \mathbb{N}$. Hru si možeme predstaviť tak, že hráči sedia okolo guľatého stolu a tým bude jasné, že po odohraní jedného hráča bude na ťahu hráč naľavo. Na začiatku hry každý z hráčov položí na stôl 7 žetónov rovnakej hodnoty.(V prípade $n > 3$ hráčov každý položí na stôl $\frac{21}{n}$, v ďalšiom prípade ak $\frac{21}{n}$ nie je prirodzené číslo tak, každý hráč prispeje $k\frac{21}{n}, k \in \mathbb{N}$, teda zvolíme najmenší vhodný k násobok aby výsledný zlomok bol celočíselný) Na začiatku hry je na stole teda $\zeta = 21$ žetónov (v prípade $n > 3$ hráčov $\zeta = 21k$ žetónov), ktorých počet sa bude počas hry neustále meniť podľa následujucích [1].

1.1.1 Logika hry

Pre 3 hráčov:

(i) Prvú hru začne, náhodne vybraný hráč spomedzi všetkých troch hráčov. Označovať ho budeme H_1. Po H_1 je na rade H_2, po H_2, H_3, po H_3, H_1, atď.

$\implies H_i$ možeme označit hráča, ktorý je v poradí na i-tom mieste od začiatku hry $i \in \{1, 2, 3\}$.

(ii) Hráč, ktorý je na rade hodí všetkými šiestimi hracími kockami a zistí sučet hodnôt stien, ktorý budeme označovat F. Je zrejmé, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$

(iii) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F < \zeta \implies H_i$ si zoberie zo stola F žetónov.

(iv) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F > \zeta \implies H_i$ musí na stôl pridať $F - \zeta$ žetónov.

(v) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F = \zeta \implies H_i$ si berie zo stola všetkých ζ žetónov, navyše H_i si zoberie od každého protivníka po F žetónov. H_i sa stáva víťazom tejto hry a ako prvý začína ďalšiu hru.

Pre všeobecný počet hráčov hráčov:

Logika hry pri väčšiom počte hráčov je v podstate rovnaká:

(i) Nech počet hráčov $= n$, kde $n > 3$, tak nastávaju dve možnosti, pre to aký hráč pôjde po H_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$

- Po hráčovi H_i pôjde $H_{i+1} \iff i < n$
- Po hráčovi H_i pôjde $H_1 \iff i = n$

Pravidlá (ii) - (v) budu také isté ako pravidlá pre 3 hráčov.

1.1.2 Objasnenie hry jednoduchou simuláciou

Majme 3 hráčov: Peter, Adam, Gabriel. Všetci hráči prišli do hry s 30 žetónmi (o ktoré sú ochotní prísť v priebehu hry). Keďže je počet hráčov = 3, počiatočný vklad na stole bude $\zeta = 21$ [1], a teda po vklade má každý hráč mimo základného vkladu 23 žetónov (nazývajme to žetóny v peňaženke). Následne sa spomedzi hráčov vyberie náhodný prvý hráč H_1 (napr. Gabriel), Gabriel hodí všetkými šiestimi kockami a ich súčet $F = 7 \implies F < \zeta$, teda podľa [1] si zo stola Gabriel zoberie $F = 7$ žetónov $\implies$ na stole ich ostane $\zeta = 14$. Hráč po jeho lavici H_2 je Adam, ktorý po hodení má $F = 10$, čo značí, že si zo stola zoberie $F = 10$ žetónov , na stole sú aktuálne 4 žetóny a následuje hráč po Adamovej lavici.
H_3 (Peter) uskutoční hod, kde $F = 2 \implies$ zoberie si zo stola 2 žetóny a na stole ostávaju $\zeta = 2$ žetóny. Aktálne prebehlo prvé kolo tj. všetci účastníci hadzali kockami práve jedenkrát.
Začína nové kolo znovu hráčom H_1 (Gabriel) uskutoční hod, kde $F = 5 \implies F > \zeta$, H_1 musí doložiť na stôl rozdiel $F - \zeta = 5 - 2 = 3$ žetóny zo svojej peňaženky a na stole ostáva $\zeta = 5$ žetónov.
Hra bude pokračovať, rovnakým princípom,až pokiaľ jeden z hráčov nehodí presný súčet $F = \zeta$ alebo pokiaľ jeden z hráčov nezbrankrotuje. Ak by nastala možnosť $F = \zeta$ pre $H_i \implies H_i$ si berie zo stola všetky žetóny a zároveň od každého protivníka si zoberie po F žetónov.
Graf nižšie uvádza postupný stav peňaženiek jednotlivých hráčov až pokiaľ v tomto prípade jeden z nich nevyhrá celú hru. Jednotlíve údaje su zaznamenávane vždycky po odohratí jedného kola.

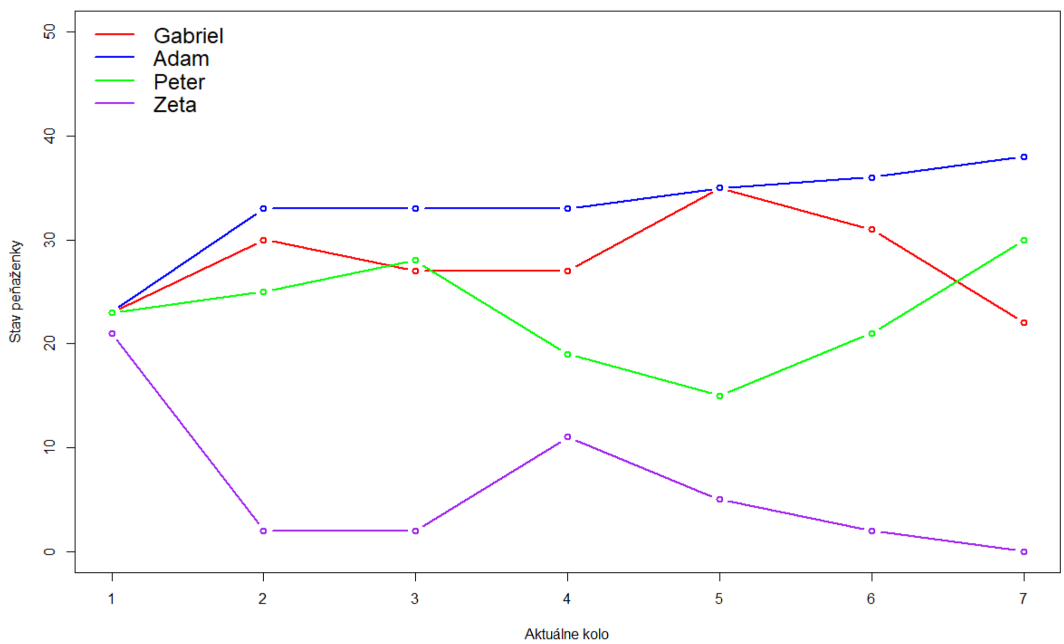

Figure 2: Graf zobrazujúci stav peňaženiek jednotlivých hráčov

Čo z grafu nie je možne tak ľahko vyčítať je posledná hra, teda hra keď niektorý z hráčov vyhral alebo zbankrotoval. Najprv si overíme, ktorá z možností nastala. Môžeme vidieť, že v poslednom kole je $\zeta = 0$, teda pre niektorého z hráčov musela nastať možnosť $F = \zeta$. Je jásné, že Gabriel to nebude, pretože jeho stav peňaženky v 6. kole bol väčší ako v poslednom kole. (Víťaz hry môže byť iba v pluse v porovnaní s predposledným kolom) Keď si rozoberieme posledné kolo dopodrobna, vieme určiť ktorí hráči su H_1, H_2, H_3. H_1 je Gabriel ale o tom vieme, že nie je víťaz, H_2 bol Adam a H_3 bol Peter. Keby vyhral posledné kolo Adam, tak by ukončil hru a Peter by už nemohol uskutočniť ďalší hod po ňom $\implies$ Petrov stav peňaženky v 6. kole by musel byť ostro väčší ako v 7. kole, čo ale v našom prípade nie je pravda.Tým pádom Peter vyhral celú hru, s tým, že pred Petrovým hodom Adam hodil F_A, ktoré si zobral zo stola a Peter po ňom hodil $F_P = \zeta$, Peter si zobral zo stola všetky žetóny a zároveň od každého hráča si zobral po F_P žetónov s tým faktom, že: $F_A - F_P > 0$ preto je Adamov stav peňaženky väčší v 7. kole ako v 6.

1.2 Úlohy a ich riešenia

(a) Aká je pravdepodobnosť, $p_i = P(F = i), \ \ i = 0, 1, 2, ..., 21$ [1]
(b) Ma každý hráč rovnakú pravdepodobnosť, že vyhrá hru alebo má hráč, ktorý začína hru nejakú výhodu? [1](Nadstavba (b) čo ak by sme fixne volili hráča každu novú hru)
(c) Je stredná hodnota výhry rovnaka pre všetkých $H_i, i = 1, 2, ..., n$ [1]
(d) Aka je stredná hodnota dĺžky jednej hry, tj. koľkokrát sa priemerne posunieme o jedného hráča vľavo, než nejaký H_i vyhrá danú hru. [1]
(e) Vie množstvo hráčov ovplyvniť strednú hodnotu dĺžky hry?

Odpovede na otázky

(a) Ako prvé by nám mohlo napadnúť zostrojiť všetky možnosti hodu kociek, ktoré môžu nastať a na základe toho vypočítať jednoducho jednotlivé pravdepodobnosti. Avšak najprv využijeme elegantnejší spôsob riešenia a to je tzv. funkcia generujúca pravdepodobnosť [2], pre diskretnú náhodnú premennú X na nezáporných číslach daná predpisom:

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k)$$

,potom je ľahké dokázať, za predpokladu, že $q_X(t)$ je k-krát differencovateľná:

$$P(X = k) = \frac{\frac{d^k g_X(0)}{dt^k}}{k!}$$

Dôkaz:
Nech $g_X(t)$ je funkcia generujúca ravdepodobnosť, navyše je k-krát differencovateľná. Môžeme si ju prepísať do tvaru:

$$P(X = 0) + P(X = 1)t + P(X = 2)t^2 + \cdots + P(X = i)t^i + P(X = i + 1)t^{i+1} + \cdots + P(X = k)t^k$$

z takto upravenej funkcie je jasné, že keď zoberieme jej i-tú deriváciu podľa premennej t, tak:

- $\forall\, t^j,\ j < i :\ \frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)0 = 0$
- $\forall\, t^j,\ j = i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)j! = P(X = i)i!$
- $\forall\, t^j,\ j > i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)\frac{i!}{(j-i)!}t^{(j-i)}$

$$\frac{d^k g_X(t)}{dt^k} = P(X = 0)0 + P(X = 1)0 + P(X = 2)0 + ... + P(X = i)i! + P(X = i+1)\frac{i!}{(j-i)!}t^{j-i} + P(X = i+2)\frac{i!}{(j+1-i)!}t^{(j+1-i)}$$

$$\frac{d^i g_X(0)}{dt^i} = P(X = i)i!$$

$$P(X = i) = \frac{\frac{d^i g_X(0)}{dt^i}}{i!}$$

□

[1] Následne označme:

$$F = \sum_{k=1}^{6} D_i$$

$D_i,\ i = 1, 2, ..., 6$ predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode.

$$g_F(t) = E(t^F) = E(t^{\sum_{i=1}^{6}(D_i)}) = E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i})$$

Tu si musíme uvedomiť, že D_i sú navzájom nezávisle a teda pre nazávisle nahodné premenne X, Y platí: $E(XY) = E(X)E(Y)$, čo vieme využiť aj v našom prípade.

$$E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i}) = \prod_{i=1}^{6}E(t^{D_i})$$

vieme, že $E(t^{D_i}) = \sum_{k=0}^{6} P(D_i = k)t^k$ a teda:

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

,tu si už len musíme uvedomiť pravdepodobnostné rozdelenie D_i

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

$$\prod_{i=1}^{6}(P(D_i = 0)t^0 + P(D_i = i)t^i)$$

$$\prod_{i=1}^{6}(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}t^i)$$

Teraz už len musíme presne vyjadriť čomu sa rovná daný výraz po roznásobeni, na účely derivovania.

$$\implies \frac{1}{46656}(15625 + 3125t + 3125t^2 + 3750t^3 + 3750t^4 + 4375t^5 + 4500t^6 + 2000t^7 + 1500t^8 + 1625t^9 + ...$$

$$+...1025t^{10} + 1025t^{11} + 425t^{12} + 300t^{13} + 200t^{14} + 180t^{15} + 55t^{16} + 30t^{17} + 30t^{18} + 5t^{19} + 5t^{20} + t^{21})$$

Na základe vyjadrenia vieme hneď vyjadriť každú jednu pravdepodobnosť. (Table 3)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{P(F=i)}{46656}$	15625	3125	3125	3750	3750	4375	4500	2000	1500	1625	1025
$\approx$ %	33	6	6	8	8	9	9	4	3	2	2

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\frac{P(F=i)}{46656}$	1025	425	300	200	180	55	30	30	5	5	1
$\approx$ %	2	1	0,6	0,4	0,3	0,1	0,06	0,06	0,01	0,01	0,002

Table 1: Výsledné pravdepodobnostné hodnoty

Výsledky z výpočtu si môžeme overiť aj jednoduchou simuláciou spustením skriptu "kocky.js", kde je možné vidieť, že výsledok simulácie sa naozaj riadi pravdepodobnostným rozdelením, ktoré sme vypočítali. (Table 3)

[4] Teraz danú úlohu môžeme vyriešit intuitivnějším spôsobom. Vieme, že: $F \in \{0, 1, 2, \ldots, 21\}$. Navyše si pripomeňme označenie D_i, ktoré predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode a aj pravdepodobnostné rozdelenie D_i:

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Ak by nastal taký prípad, že $F = 0$, tak vieme s istotou povedať, že nastala jednoznačnosť riešenia $\implies$ na každej kocke musela padnúť prázdna stena a kedže nás zaujíma iba to, či padla prázdna stena a nie to, že ktorá prázdna stena padla na každej kocke, môžeme tvrdiť, že: $P(F = 0) = (\frac{5}{6})^6 \approx 0,33$.
Ak by však napríklad $F = 5$, tak jednoznačnosť riešenia nenastáva, pretože výsledný súčet $F = 5$ nám mohol výjsť rôznymi kombináciami kociek a to napríklad

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet takých simulácií	335223	67059	66647	80337	79899	94090	96484	42947	32008	34891	21750
$\approx$ %	33	7	6	8	8	9	10	4	3	2	2

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
počet takých simulácií	22068	9077	6561	4278	3925	1196	674	678	99	93	16
$\approx$ %	2	1	0,6	0,4	0,4	0,1	0,07	0,07	0,01	0,01	0,002

Table 2: Overenie pravdepodobnostných hodnôt pomocou 10^6 simulácií

- $F = 5 \implies D_5 = 5 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $F = 5 \implies D_1 = 1 \ \wedge \ D_4 = 4 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{2, 3, 5, 6\}$
- $F = 5 \implies D_2 = 2 \ \wedge \ D_3 = 3 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{1, 4, 5, 6\}$

Z toho vyplýva, že výslednú pravdepodobnosť $P(F = 5)$ možno vypočítat ako súčet jednotlivých možnosti(kombináciami kociek). Pre $F = 5$ sme našli 3 rôzne možnosti, označme ich $m_1, m_2, m_3 \implies P(m_i)$ pravdepodobnosť nastatie i-tej možnosti.

$$P(F = 5) = P(m_1) + P(m_2) + P(m_3)$$

$$P(m_1) = \frac{1}{6} \ (\frac{5}{6})^5$$

$$P(m_2) = P(m_3) = (\frac{1}{6})^2 \ (\frac{5}{6})^4$$

$$P(F = 5) = \frac{4375}{46656} \approx 0,09$$

Následne analogickým spôsobom môžeme vypočítat pravdepodobnosti pre ostatné možnosti nastatia hodnôt pre F, z čoho dostávame nasledujúcu tabuľku (Table 4)

F	Možnosti rozkladu					$\approx$ Pravdepodobnosť v %
0						33,4898
1	1					6,6980
2	2					6,6980
3	3	2,1				8,0376
4	4	3,1				8,0376
5	5	4,1	3,2			9,3771
6	6	5,1	4,2	3,2,1		9,6451
7	6,1	5,2	4,3	4,2,1		4,2867
8	6,2	5,4	5,3,1	6,2,1	4,3,2	3,2150
9	6,3	5,4	5,3,1	6,2,1	4,3,2	3,4829
10	6,4	6,3,1	5,4,1	5,3,2	4,1,3,2	2,1969
11	6,5	6,4,1	6,3,2	5,4,2	5,3,2,1	2,1969
12	6,5,1	6,4,2	6,3,2,1	5,4,3	5,4,2,1	0,9109
13	6,5,2	6,4,2,1	6,4,3	5,4,3,1		0,6430
14	6,5,3	6,4,3,1	6,5,2,1	5,4,3,2		0,4287
15	6,5,4	6,4,3,2	6,5,3,1	5,4,3,2,1		0,3858
16	6,5,4,1	6,5,3,2	6,4,3,2,1			0,1179
17	6,5,4,2	6,5,4,2,1				0,0643
18	6,5,4,3	6,5,4,2,1,				0,0643
19	6,5,4,3,1					0,0107
20	6,5,4,3,2					0,0107
21	6,5,4,3,2,1					0,0021

Table 3: Výsledne pravdepodobnosti pre jednotlivé F pomocou metódy možného rozloženia

F	Možnosti rozkladu						$\approx$ pp
F	s 1 číslom	s 2 číslami	s 3	so 4	s 5	so 6	v %
0							33,4898
1	1						6,6980
2	2						6,6980
3	3	(2,1)					8,0376
4	4	(3,1)					8,0376
5	5	(4,1)(3,2)					9,3771
6	6	(5,1)(4,2)	(3,2,1)				9,6451
7		(6,1)(5,2)(4,3)	(4,2,1)				4,2867
8		(6,2)(5,4)	(5,3,1)(6,2,1)(4,3,2)				3,2150
9		(5,4)(6,3)	(5,3,1)(6,2,1)(4,3,2)				3,4829
10		(6,4)	(6,3,1)(5,4,1)(5,3,2)	(4,1,3,2)			2,1969
11		(6,5)	(6,4,1)(6,3,2)(5,4,2)	(5,3,2,1)			2,1969
12			(5,4,3)(6,5,1)(6,4,2)	(6,3,2,1)(5,4,2,1)			0,9109
13			(6,5,2)(6,4,3)	(6,4,2,1)(5,4,3,1)			0,6430
14			(6,5,3)	(6,4,3,1)(6,5,2,1) (5,4,3,2)			0,4287
15			(6,5,4)	(6,4,3,2)(6,5,3,1)	(5,4,3,2,1)		0,3858
16				(6,5,3,2)(6,5,4,1)	(6,4,3,2,1)		0,1179
17				(6,5,4,2)(6,5,4,2)			0,0643
18		,		(6,5,4,3)	(6,5,4,2,1)		0,0643
19					(6,5,4,3,1)		0,0107
20					(6,5,4,3,2)		0,0107
21						(6,5,4,3,2,1)	0,0021
pp.	$x_1 = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^5 n_1$	$x_2 = \frac{1}{6^2}(\frac{5}{6})^4 n_2$	$x_3 = \frac{1}{6^3}(\frac{5}{6})^3 n_3$	$x_4 = \frac{1}{6^4}(\frac{5}{6})^2 n_4$	$x_5 = \frac{1}{6^5}(\frac{5}{6})^4 n_5$	$x_6 = \frac{1}{6^6} n_6$	$\sum_{i=1}^{6} x_i$

Table 4: Výsledne pravdepodobnosti pre jednotlivé F pomocou metódy možného rozloženia

(Neviem velmi zostrojit taku velku tabulku) Pomocou spodného riadku sme vypočítali pp. pre všetky F, kde n_i predstavuje počet takých rôznych kombinácií v tabuľke, v danom stĺpci pre dané F, napr. pre $F = 13$ berieme stĺpce x_3 a x_4 a ich príslušné $n_{3/4}$ sú počty rôznych kombinacií v danom stĺpci (počet roznych zátvoriek) teda $n_3 = 2$ a $n_4 = 2$. Týmto riešením dostávame tie isté výsledky ako s využitím funkcie generujúcej pravdepodobnosť, s tým rozdieľom, že pri tejto metóde môžeme lachšie "vycítiť", prečo je napr. $P(F = 10) > P(F = 7) \implies$ pretože možnosti rozloženia pre $F = 10$ je viacej ako pre $F = 7$.

Odpovede na ďalšie otázky su známe len na základe počítačových simulácií.
(b) Pomocou simulácie "mangKung/b.js" dostávame odhad, že náhodný výber hráča H_1 by nemal ovplyvňovať pravdepodobnosť víťazstva H_1, teda všetci hráči majú tú istú pravdepodbnosť výhry či už hráme opakovane jednú hru alebo opakovane viacej hier.
(c) V tejto úlohe sa pred simulovaním môžeme zamysliet nad tým, čo znamená ísť ako prvý. Keďže $\zeta = 21$ v prípade iného počtu hráčov $\zeta = 21k$ a vieme, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$, s už vyšie vypočítanými pravdepodobnosťami $\implies$ H_1 si zo stola zoberie do svojej peňaženky F žetónov so 100% pravdepodobnosťou. Pravdepodobnosť, že by vyhral hru hneď na začiatku hry je takmer nulová a tak takmer s istotou môžeme predpokladať, že hrou bude pokračovať H_2, ktorý bude mať šancu na výhru hry omnoho vyšiu , takisto aj šancu na to, že musí siahnúť po svojich finančných prostriedkoch na doloženie sumy, ak $F > \zeta$ (analogicky, že si o niečo prilepší). A podobne to bude platiť aj pre následujucích hráčov, s tým, že keď vyhrá $H_i, i \neq 1$, tak si od všetkých protivníkov zoberie po F, žetónov, kde by sme mohli pocítiť nejakú výhodu prvého hráča, ktorý

bude vždy prvé kolo v profite, ktorý by mu mohol postačiť na vyplatenie výhry iného hráča.
Najlepšie sa daná výhoda interpretuje pri jednom kole
$H_1 \implies F = 10 \implies \zeta = 11 \implies$ penaženka(H_1)+10
$H_2 \implies F = 4 \implies \zeta = 7 \implies$ peňaženka(H_2)+4
$H_3 \implies F = 7 \implies \zeta = 0 \implies$ peňaženka(H_3)+7+7+7
Pri hre, ktorá trvá jedno kolo má H_1 v prípade prehry takú výhodu, že na zaplatenie víťaznemu hračovi použije aj prostriedky, ktoré výhral na začiatku hry, zatiaľ čo H_2 nemal istý profit pri jeho ťahu. V prípade výhry hneď v prvom kole je jeho výhoda oproti ostatným, jeho 100% profit na začiatku hry, ktorý ostatní hráči v prípade výhry nemajú.
Naozaj to tak aj simulácia ("mangKung/c.js") vykazovala.(Table 5)

simulácia$_i$	počet simulácií	počet hier na simuláciu	výhra H_1	výhraH_2	výhra H_3
1	1000	1	1,4433	-0,083	-1,371
2	1000	1	1,175	-0,079	-1,117
3	1000	1	1,052	-0,109	-0,964
4	1000	1	1,469	0,203	-1,693
5	1000	1	1,191	0,522	-1,734
$\overline{x}$	1000	1	1,26606	0,0908	-1,3758

Table 5: Výsledné výhry hráčov zo simulácií v hre, ktorej dĺžka = 1

Ak by hráči hrali iba jednu hru, tak by hra značne vykazovala v prospech prvého hráča. Aproximácie stredných hodnôt výhier podľa naších 10^4 simulácií pre jednú hru sú:

$$E(H_1) \approx 1,26606$$

$$E(H_2) \approx 0,0908$$

$$E(H_3) \approx -1,3758$$

Pri viacerých hrách (Table 6)

simulácia$_i$	počet simulácií	počet hier na simuláciu	výhra H_1	výhraH_2	výhra H_3
1	1000	50	0,943	-6,57	5,606
2	1000	50	0,37	1,957	-2,348
3	1000	50	-0,103	3,138	-3,056
4	1000	50	0,874	-4,412	3,517
5	1000	50	-3,44	-3,956	7,375
$\overline{x}$	1000	50	-0,2712	-1,9686	2,2212

Table 6: Výsledné výhry hráčov zo simulácií v hre, ktorej dĺžka = 50

Zatial čo z (Table 5) sa dala vyvodiť nejaká logická spojitosť medzi voľbou H_1 a jeho výhodou výhry v prvej hre, pri väčšiom množstve to stráca význam pretože výhry jednotlivých H_i sa pohybujú úplne náhodne a z toho by sme neskôr cheli vytvoriť testovaciu hypotézu že očakavané výhry H_i by mali byť približne rovnaké.

$$E(H_1) \approx E(H_2) \approx E(H_3) = 0$$

Zatiaľ si pre dané simulácie môžeme vytvoriť boxsploty pre lepšie porovnanie. Do boxplotov budeme brať ako hlavne údaje jednotlivé výhry hráčov, vždy po 1 alebo po 50 odohraných hrach a navzájom ich porovnáme.

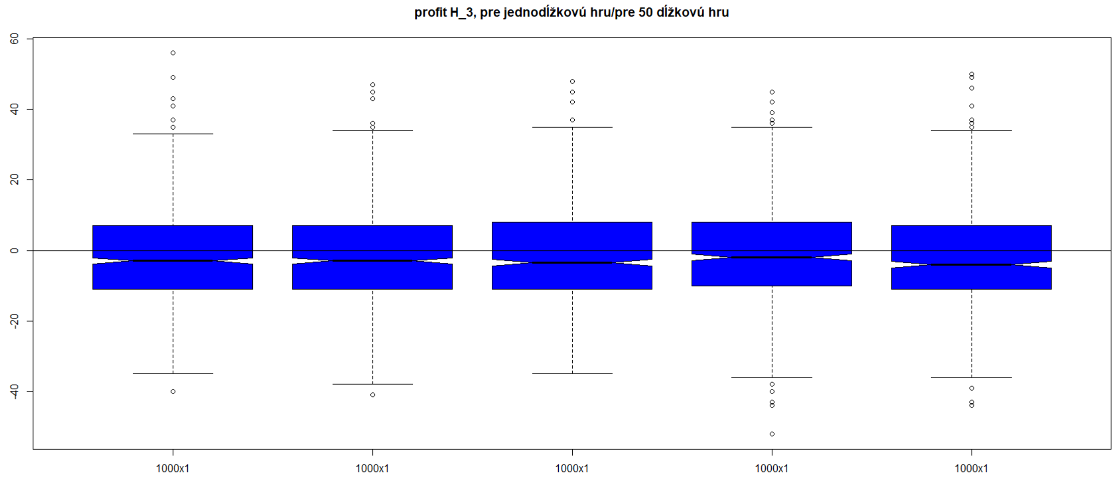

Figure 3: Výhry H_3 v jednotlivých 1000x1

Každý boxplot predstavuje 1000 navzájom nezávislých simulácií, kde jedna simulácia je ekvivalent tomu, že hráči končia hrať po odohraní prvej hry. Inač povedané pozeráme sa na výhry H_3 v 1000x5 jednodlžkových hrách Mang-Kung. Boxplot nám ukazuje približne to čo sme očakávali z (Table 5) a to je, že priemerná výhra H_3 v jednodĺžkových hrách je < 0. Takisto všetky ostatné boxploty pre H_2 a H_1 vykazujú tie isté výsledky. Teraz si môžeme porovnáť priemerné výhry H_i z jednodĺžkových hier a z 50 dĺžkových hier teda 1000x1 a 1000x50 simulácií.

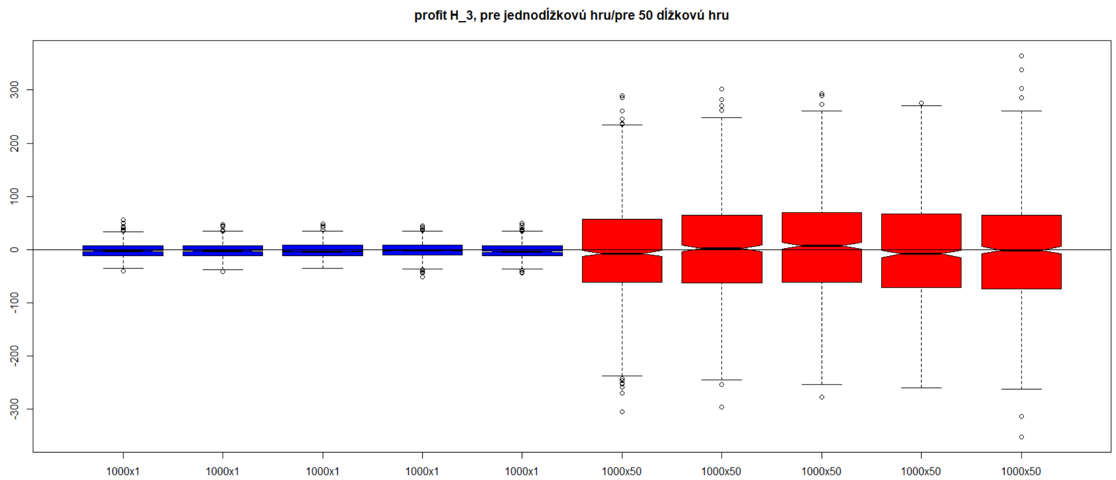

Figure 4: Porovnanie výhier pre H_3 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

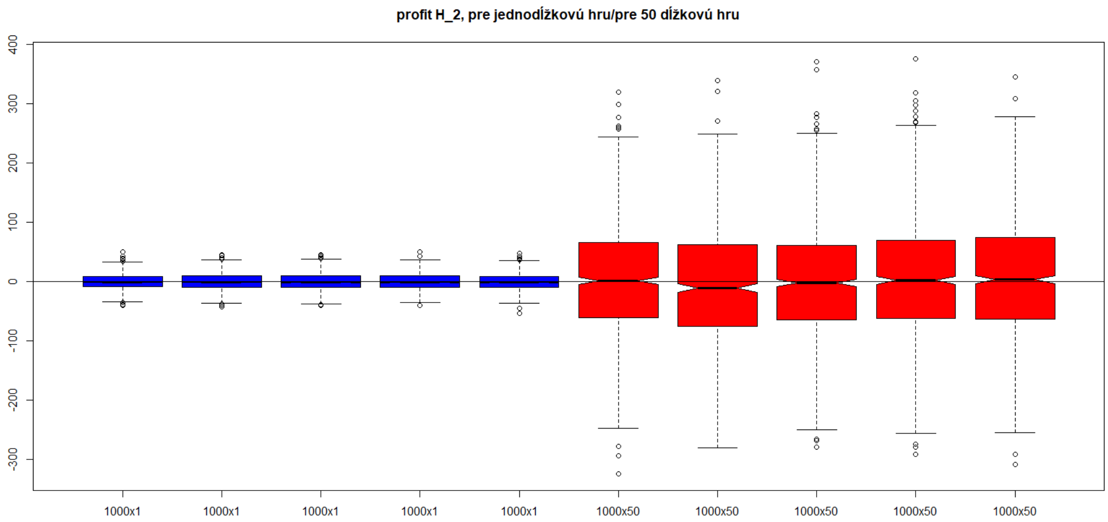

Figure 5: Porovnanie výhier pre H_2 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

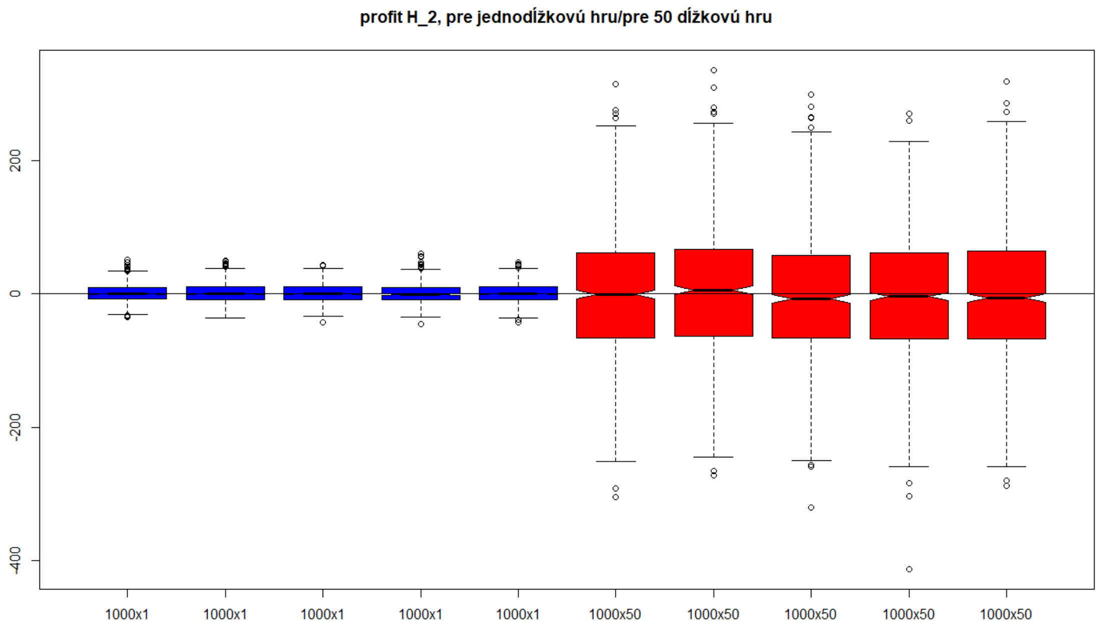

Figure 6: Porovnanie výhier pre H_1 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

Hneď z prvého pohľadu je ľahko vidieť veľký simulačný rozdiel v rozptyle pre každého H_i, takisto zatiaľ čo v jednodlžkových 1000x1 simuláciach sa medián nachádzal aspoň nad/pod 0 osou, tam kde sme ho podľa (Table 5) očakávali zároveň s úzkym intervalom 95% spoľahlivosti, tak 1000x50 simulácie vykazúju median, ktorý náhodne preskakuje nad a pod 0-ovú os, zároveň s omnoho širším intervalom 95% spolahlivosti. Z tohoto všetkého by sme mohli zatiaľ usúdiť, že: H_1 má istú výhodu pri jednodĺžkovej hre ale ako sa začína hrať väčší počet hier, tak sa s tým stráca jeho výhoda a výhodu preberá pravdepodobnosť.
Pre jednnodĺžkovú hru sme zostrojili simuláciu pre H_1, kde sledujeme konvergenciu priemeru výhry tj. zostrojíme vektor $\vec{v}_n$, kde jeho j-ta zložka bude predstavovať:

$$\vec{v}_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} x_i}{j}, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

, kde x_i je výhra H_1 po ukončení jednej jednodĺžkovej simulácie. V našom prípade sme n nadstavili na 15 000 a dostali sme približný graf konvergencie.

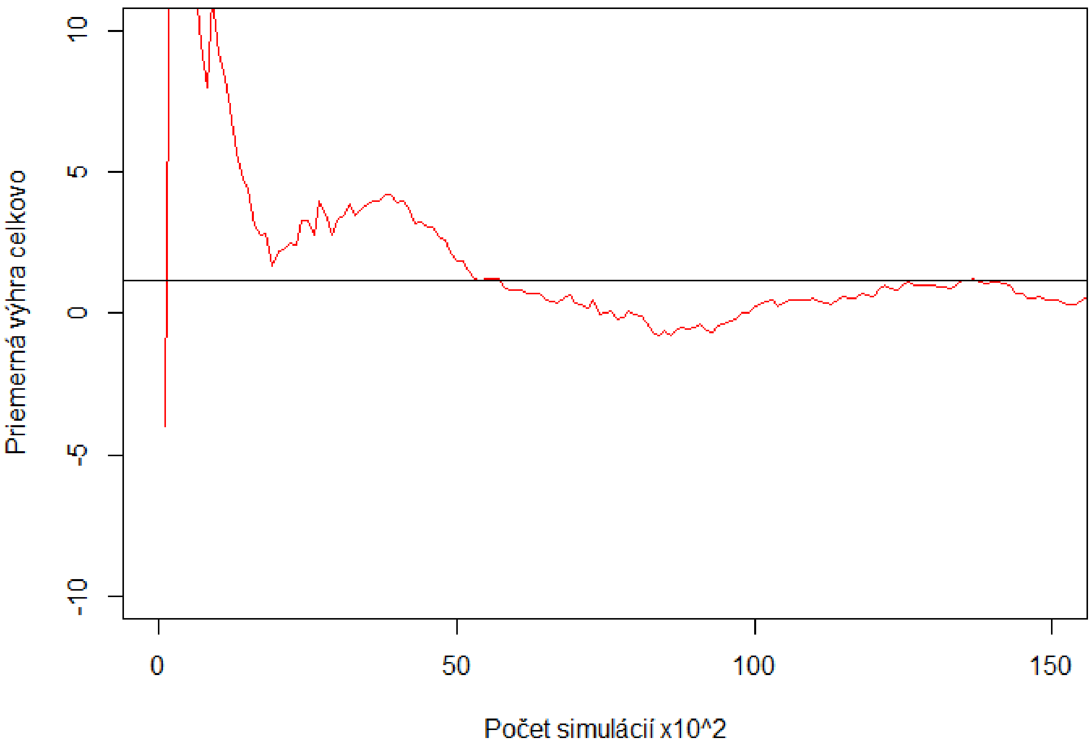

Figure 7: Porovnanie výhier pre H_1 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

Konvergenciu porovnávame s konštantou funkciou $f(x) = 1.17$, ktorá bola zadaná v [1] ako približný výsledok H_1 pre jednodĺžkovú hru. Z jedneho grafu to nemusi byť hneď jasné tak to ešte skusíme pre viacej grafov či majú podobnú tendenciu.

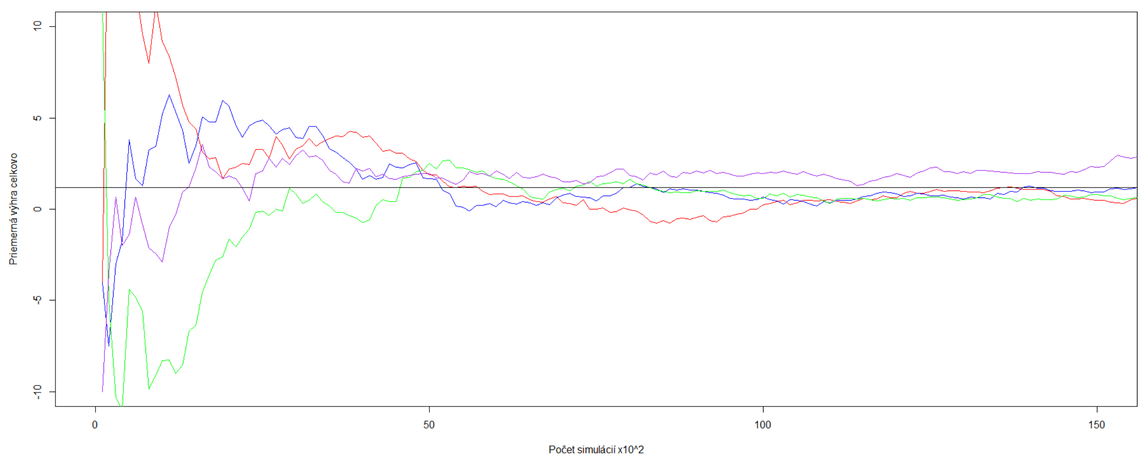

Figure 8: Porovnanie výhier pre H_1 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

Tu to vyzerá už priaznivejšie.
Tu sa môžeme pozrieť po koľkej hre sa začne napĺňať približne náš predpoklad $E(H_i) \approx= 0$ (d) Zistili sme, že priemerná dĺžka hry je približne 20 kôl/ hodov kociek. (V pripade viacerych hracov napr n=21 je priemerna

dlzka takisto 20 kol ale ak pocet hracov je taky ze sa musi zvolit nejaky nasobok 21k/n pociatocnych penazi na stole, tak sa dlzka hry zvacsuje, mohlo by sa urcit ze pre aky pocet hracov je dlzka hry najdlhsia? Napr pri 4 to je cca 38 hodov , 5=> 43 , 6=> 24, 7=> 20. Vyzera to tak ze cim vacsi pocet na stole je tym dlhsie trva koniec hry. Napr pre 20 hracov (cca 120 hodov) je pociatocny vklad na stole = 420 a prve hody budu len na to urcene aby sa z 420 dostali pod 21ku a potom sa to uz riadi normalnymi 20 kolami)

1.3 Nadstavba

Aká by mala byť hodnota, ktorá by nám, takmer určite vystačila na dohranie celej jednej hry, teda aby sa počas hry nestalo, že by sme nemali dostatok žetónov na doloženie, keď $F > \zeta$.
Označme $p(H_i)_j$ - stav penaženky i-teho hráča po j-tej hre , kde $i \in \{1, 2, ..., n\}$ & $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Každú hru sme vyberali spomedzi 3 hráčov najväčšiu stratu žetónov, ktoré sme si následne úkladali do vektora $\vec{v}_{m-1}$ pre ďalšie účely.
Ďalej označme $r(H_i)_j$ ako rozdiel stavu peňaženky pred (po j-1 kole) a po j-tom kole pre i-teho hráča , teda pre:

$$r(H_i)_j = P(H_i)_{j-1} - P(H_i)_j$$

Je zjavné:

- $r(H_i)_j > 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v mínuse
- $r(H_i)_j < 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v profite
- $r(H_i)_j = 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v neutralite

Potom:

$$\begin{gathered} v_1 = \max\{\ r(H_1)_2,\ r(H_2)_2,\ r(H_3)_2\ \} \\ v_2 = \max\{\ r(H_1)_3,\ r(H_2)_3,\ r(H_3)_3\ \} \\ \vdots \\ v_{m-1} = \max\{\ r(H_1)_m,\ r(H_2)_m,\ r(H_3)_m\ \} \end{gathered}$$

Týmto sposôbom bude prebiehať naša simulácia, kde keď daný vektor znazorníme graficky, tak dostávame následovné:

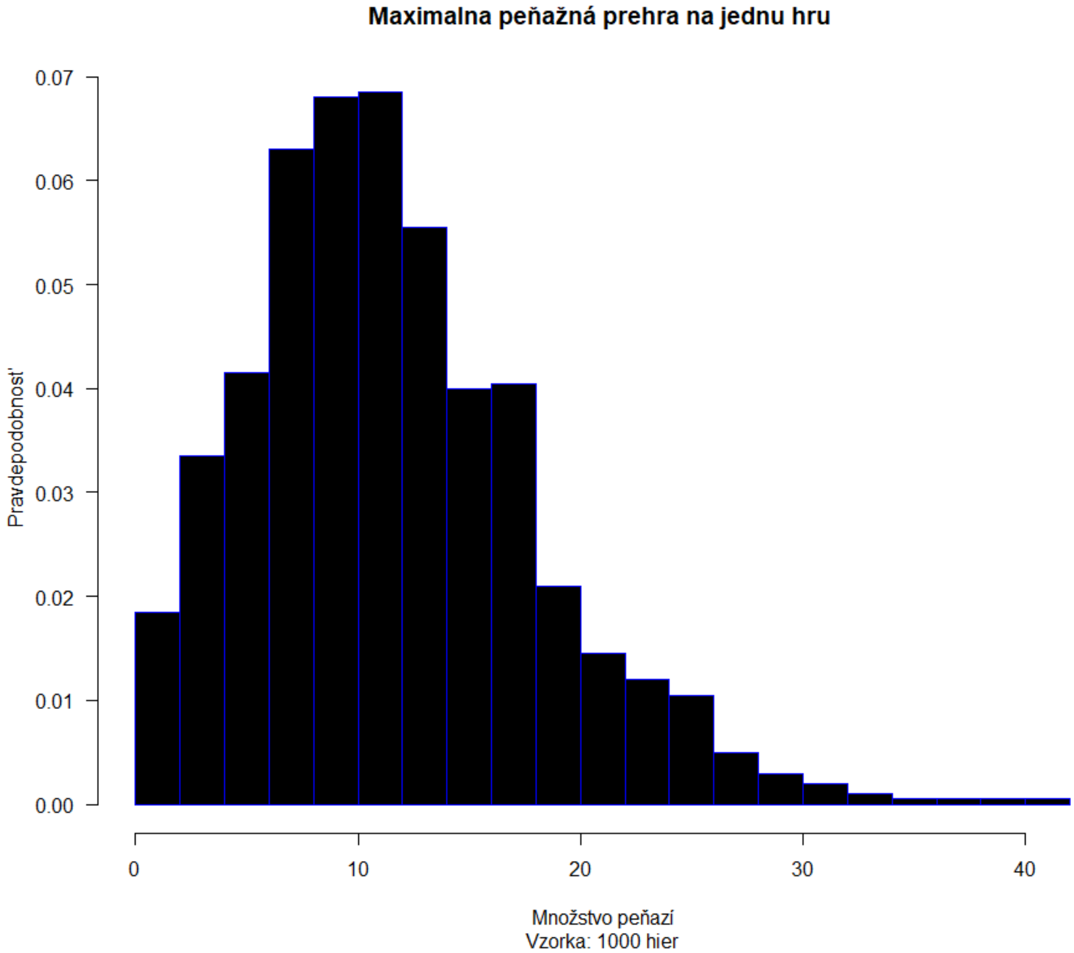

Figure 9: Histogram maximálnej prehry žetónov, za jednu hru

Dostali sme grafické riešenie koľkokrát pomedzi 1000 hier stačilo aké množstvo žetónov na dokonšenie hry, kde maximalny outlier = 41. Ak by sme chceli na základe dát mať 50% pravdepodobnosť na dohranie hry, potrebovali by sme na začiatok 11 žetónov, na 99% dohranie hry 29 žetónov.

2 Referencie

References

[1] Jiři Anděl, Matematika Náhody, matfyzpress vydavatelsví matematicko-fyzikalni fakulty univerzity karlovy, Praha, 2000

[2] Teória pravdepodobnosti, slajdy z prednášok, Katedra Matematických metód Fakulta Riadenia a Informatiky Žilinská Univerzita v Žiline, Žilina, 2014,dostupne na internete(23.10.2021): https://frcatel.fri.uniza.sk/users/alesko/PaS/prednaska5.pdf

[3] Wai-Sum Chan, Stochastik in der Schule, 1997, hmm co tady

[4] JAN-JÜRGEN MENGE,Das Mang-Kung-Spiel (2), working paper, Rotenburg,Rotenburg,2008, dostupné na internete(23.10.2021): https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang28-2008/Heft1/2008-1_menge.pdf