1 Hra Mang Kung

1.1 Definícia hry

Slova Mang Kung su čínske a znamenajú slepí ľudia. Je to stará čínska hra, ktorá sa v dnešnej dobe stále hráva v južnej Číne a v Hong Kongu. Počas hry sa bude používať šesť hracích kociek, ktoré sa od klasických líšia len neobvyklým označovaním stien a to takým, že i-ta kocka ma na jednej stene hodnotu i a ostatné steny sú prázdne $\forall i = 1, 2, ..., 6$. (Figure 1)

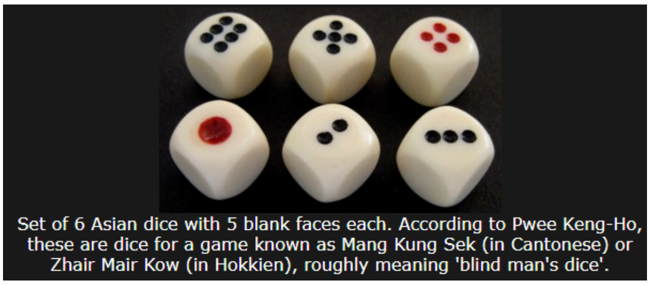

Figure 1: Vzhľad používaných kociek, v hre Mang Kung

Pokiaľ v hre padne na i-tej kocke prázdna stena, počíta sa to ako nulová hodnota $\forall i = 1, 2, ..., 6$.
Najčastejšie sa hry účastnia traja hráči, no však nie je limitovaná ani pre $n > 3$ hráčov, kde súčasne $n \in \mathbb{N}$. Možeme si predstaviť,že hráči sedia okolo guľatého stolu a tým bude jasné, že po odohraní jedného hráča bude na ťahu hráč naľavo. Každý z hráčov položí na stôl 7 žetónov rovnakej hodnoty.(V prípade $n > 3$ hráčov každý položí na stôl $\frac{21}{n}$, v ďalšiom prípade ak $\frac{21}{n}$ nie je prirodzené číslo tak, každý hráč prispeje $k\frac{21}{n}, k \in \mathbb{N}$, teda zvoline vhodný k násobok aby nám výsledok dával celé číslo) Na začiatku hry je na stole teda $\zeta = 21$ žetónov (v prípade $n > 3$ hráčov $\zeta = 21k$ žetónov) , ktorých počet sa bude počas hry neustále meniť podľa následujucích pravidiel.

1.1.1 Logika hry

(i) Prvú hru začne, náhodne vybraný hráč spomedzi všetkých hráčov. Označovať ho budeme H_1. Po H_1 je na rade H_2, po H_2, H_3, po H_3, H_1, atď.
Teda, všeobecne ak by bol počet hráčov $= n$, tak nastávaju dve možnosti, pre to aký hráč pôjde po H_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$

- Po hráčovi H_i pôjde $H_{i+1} \iff i < n$
- Po hráčovi H_i pôjde $H_1 \iff i = n$

(ii) Hráč, ktorý je na rade hodí všetkými šiestimi hracími kockami a zistí sučet hodnôt stien, ktorý budeme označovat F. Je zrejmé, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$
(iii) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F < \zeta \implies H_i$ si zoberie zo stola F žetónov.
(iv) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F > \zeta \implies H_i$ musí na stôl pridať $F - \zeta$ žetónov.
(v) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F = \zeta \implies H_i$ si berie zo stola všetkých ζ žetónov, navyše H_i si zoberie od každého protivníka po F žetónov. H_i sa stáva víťazom tejto hry a ako prvý začína ďalšiu hru.

1.1.2 Objasnenie hry simuláciou

1.2 Úlohy a ich riešenia

(a) Aká je pravdepodobnosť, $p_i = P(F = i)$, $i = 0, 1, 2, ..., 21$
(b) Ma každý hráč rovnakú pravdepodobnosť, že vyhrá hru alebo má hráč, ktorý začína hru nejakú výhodu?
(c) Je stredná hodnota výhry rovnaka pre všetkých $H_i, i = 1, 2, ..., n$
(d) Aka je stredná hodnota dĺžky jednej hry, tj. koľkokrát sa priemerne posunieme o jedného hráča vľavo, než nejaký H_i vyhrá danú hru.

Odpovede na otázky

(a) Ako prvé by nám mohlo napadnúť zostrojiť všetky možnosti hodu kociek, ktoré môžu nastať a na základe toho vypočítať jednoducho jednotlivé pravdepodobnosti. Tu však ale nastáva problém s tým, že päť prázdnych stien na každej kocke nemôžeme brať ako jednú a preto je celkový počet možností hodu kociek $6^6 = 46656$, čo nebude vôbec efektívne. Miesto toho siahneme po lepšiom nástroji a to je tzv. funkcia generujúca pravdepodobnosť, pre diskretnú náhodnu premennú X na nezáporných číslach predpisom:

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k)$$

,potom je ľahké dokázať, ak je $q_X(t)$ k-krát differencovateľná , že:

$$P(X = k) = \frac{\frac{d^k g_X(0)}{dt^k}}{k!}$$

Dôkaz

Nech $g_X(t)$ je funkcia generujúca ravdepodobnosť, navyše je i-krát differencovateľná. Môžeme si ju prepísať do tvaru:

$$P(X = 0) + P(X = 1)t + P(X = 2)t^2 + ...P(X = i)t^i + P(X = i + 1)t^{i+1} + ...$$

z takto upravenej funkcie je jasné, že keď zoberieme jej i-tú deriváciu podľa premennej t, tak:

- $\forall\, t^j,\ j < i :\ \frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)0 = 0$
- $\forall\, t^j,\ j = i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)j! = P(X = i)i!$
- $\forall\, t^j,\ j > i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)\frac{i!}{(j-i)!}t^{(j-i)}$

$$\frac{d^k g_X(t)}{dt^k} = P(X = 0)0+P(X = 1)0+P(X = 2)0+...+P(X = i)i!+P(X = i+1)\frac{i!}{(j-i)!}t^{j-i}+P(X = i+2)\frac{i!}{(j+1-i)!}t^{(j+1-i)}$$

$$\frac{d^i g_X(0)}{dt^i} = P(X = i)i!$$

$$P(X = i) = \frac{\frac{d^i g_X(0)}{dt^i}}{i!}$$

□

Následne označme:

$$F = \sum_{k=1}^{6} D_i$$

$D_i,\ i = 1, 2, ..., 6$ predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode.

$$g_F(t) = E(t^F) = E(t^{\sum_{i=1}^{6}(D_i)}) = E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i})$$

Tu si musíme uvedomiť, že D_i sú navzájom nezávisle a teda pre nazávisle nahodné premenne X, Y platí: $E(XY) = E(X)E(Y)$, čo vieme využiť aj v našom prípade.

$$E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i}) = \prod_{i=1}^{6} E(t^{D_i})$$

vieme, že $E(t^{D_i}) = \sum_{k=0}^{6} P(D_i = k)t^k$ a teda:

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

,tu si už len musíme uvedomiť pravdepodobnostné rozdelenie D_i

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{6} \sum_{k=0}^{6} (P(D_i = k)t^k)$$

$$\prod_{i=1}^{6} (P(D_i = 0)t^0 + P(D_i = i)t^i)$$

$$\prod_{i=1}^{6} (\frac{5}{6} + \frac{1}{6}t^i)$$

Teraz už len musíme presne vyjadriť čomu sa rovná daný výraz po roznásobeni, na účely derivovania.

$$\implies \frac{1}{46656}(15625 + 3125t + 3125t^2 + 3750t^3 + 3750t^4 + 4375t^5 + 4500t^6 + 2000t^7 + 1500t^8 + 1625t^9 + ...$$

$$+...1025t^{10} + 1025t^{11} + 425t^{12} + 300t^{13} + 200t^{14} + 180t^{15} + 55t^{16} + 30t^{17} + 30t^{18} + 5t^{19} + 5t^{20} + t^{21})$$

Na základe vyjadrenia vieme hneď vyjadriť každú jednu pravdepodobnosť.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{P(F=i)}{46656}$	15625	3125	3125	3750	3750	4375	4500	2000	1500	1625	1025
$\approx$ %	33	6	6	8	8	9	9	4	3	2	2

Table 1: Výsledné pravdepodobnostné hodnoty časť 1.

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\frac{P(F=i)}{46656}$	1025	425	300	200	180	55	30	30	5	5	1
$\approx$ %	2	1	0,6	0,4	0,3	0,1	0,06	0,06	0,01	0,01	0,002

Table 2: Výsledné pravdepodobnostné hodnoty časť 2.

(index)	Value
0	335223
1	67059
2	66647
3	80337
4	79899
5	94090
6	96484
7	42947
8	32008
9	34891
10	21750
11	22068
12	9077
13	6561
14	4278
15	3925
16	1196
17	674
18	678
19	99
20	93
21	16

Figure 2: Výsledok pre 10^6 simulácií

Úlohu si môžeme overiť aj jednoduchou simuláciou spustením skriptu "kocky.js", kde je možné vidieť, že výsledok simulácie sa naozaj riadi pravdepodobnostným rozdelením, ktoré sme vypočítali.(Prvý stĺpec označuje hodnoty F a druhý stĺpec počet takých simulácií)

Odpovede na ďalšie otázky su známe len na základe počítačových simulácií.
(b) V tejto úlohe sa pred simulovaním môžeme zamyslieť, čo to znamená ísť ako prvý. Keďže $\zeta = 21$ v prípade iného počtu hráčov $\zeta = 21k$ a vieme, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$, s už vyšie vypočítanými pravdepodobnosťami $\implies$ H_1 si zo stola zoberie do svojej peňaženky F žetónov so 100% pravdepodobnosťou. Pravdepodobnosť, že by vyhral hru hneď na začiatku hry je takmer nulová a tak takmer s istotou môžeme predpokladať, že hrou bude pokračovať H_2, ktorý bude mať šancu na výhru hry omnoho vyšiu , takisto aj šancu na to, že musí siahnúť po svojich finančných prostriedkoch na doloženie sumy, ak $F > \zeta$ (analogicky, že si o niečo prilepší). A podobne to bude platiť aj pre následujucích hráčov, s tým, že keď vyhrá $H_i, i \neq 1$, tak si od všetkých protivníkov zoberie po F, žetónov, kde by sme mohli pocítiť nejakú výhodu prvého hráča, ktorý bude vždy prvé kolo v profite, ktorý by mu mohol postačiť na vyplatenie výhry iného hráča.
Najlepšie sa daná výhoda interpretuje pri jednom kole
$H_1 \implies F = 10 \implies \zeta = 11 \implies$ penaženka(H_1)+10
$H_2 \implies F = 4 \implies \zeta = 7 \implies$ peňaženka(H_2)+4
$H_3 \implies F = 7 \implies \zeta = 0 \implies$ peňaženka(H_3)+7+7+7
Pri hre, ktorá trvá jedno kolo má H_1 v prípade prehry takú výhodu, že na zaplatenie víťaznemu hračovi použije aj prostriedky, ktoré výhral na začiatku hry, zatiaľ čo H_2 nemal istý profit pri jeho ťahu. V prípade výhry hneď v prvom kole je jeho výhoda oproti ostatným, jeho 100% profit na začiatku hry, ktorý ostatní hráči v prípade výhry nemajú.

1.3 Vzorce

1.4 Simulácie