1 Hra Mang Kung

1.1 Definícia hry

[1] Slova Mang Kung su čínske a znamenajú slepí ľudia. Je to stará čínska hra, ktorá sa v dnešnej dobe stále hráva v južnej Číne a v Hong Kongu. Počas hry sa bude používať šesť hracích kociek, ktoré sa od klasických líšia len neobvyklým označovaním stien a to takým, že i-tá kocka má na jednej stene hodnotu i a ostatné steny sú prázdne $\forall i = 1, 2, ..., 6$. (Figure 1)

Figure 1: Vzhľad používaných kociek, v hre Mang Kung

Pokiaľ v hre padne na i-tej kocke prázdna stena, počíta sa to ako nulová hodnota pre každé $i = 1, 2, ..., 6$. Najčastejšie sa hry účastnia traja hráči, no však nie je limitovaná ani pre $n > 3$ hráčov, kde súčasne $n \in \mathbb{N}$. Hru si možeme predstaviť tak, že hráči sedia okolo guľatého stolu a tým bude jasné, že po odohraní jedného hráča bude na ťahu hráč naľavo. Na začiatku hry každý z hráčov položí na stôl 7 žetónov rovnakej hodnoty.(V prípade $n > 3$ hráčov každý položí na stôl $\frac{21}{n}$, v ďalšiom prípade ak $\frac{21}{n}$ nie je prirodzené číslo tak, každý hráč prispeje $\min_k\{k\dfrac{21}{n}, k \in \mathbb{N}\}$, teda zvolíme najmenší vhodný k násobok aby výsledný zlomok bol celočíselný). Na začiatku hry je na stole teda 21 žetónov, ktoré budeme označovať symbolom ζ (v prípade $n > 3$ hráčov $\zeta = 21k$ žetónov). ζ sa bude počas hry neustále meniť podľa následujucích pravidiel [1].

1.1.1 Logika hry

Pre 3 hráčov:

(i) Prvú hru začne, náhodne vybraný hráč spomedzi všetkých troch hráčov. Označovať ho budeme H_1. Po H_1 je na rade H_2, po H_2, H_3, po H_3 znova H_1, atď.

$\implies H_i$ možeme označit hráča, ktorý je v poradí na i-tom mieste od začiatku hry $i \in \{1, 2, 3\}$.

(ii) Hráč, ktorý je na rade hodí všetkými šiestimi hracími kockami a zistí ich finálny sučet stien, ktorý budeme označovat F. Je zrejmé, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$

(iii) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F < \zeta \implies H_i$ si zoberie zo stola F žetónov. Na stole ostane $\zeta_n = \zeta_{n-1} - F$ žetónov, kde ζ_n je aktuálny počet žetónov na stole a $zeta_{n-1}$ je predošlý počet žetóonov na stole (Po vykonaní hodu H_1 je na stole ζ_1 žetónov, po H_2 je na stole ζ_2, H_3: ζ_3, znova H_1: ζ_4 ....)

(iv) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F > \zeta \implies H_i$ musí na stôl pridať $F - \zeta$ žetónov. Na stole je $\zeta_n = \zeta_{n-1} + (F - \zeta_{n-1})$

(v) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F = \zeta \implies H_i$ si berie zo stola všetkých ζ žetónov, navyše H_i si zoberie od každého protivníka po F žetónov. H_i sa stáva víťazom tejto hry a ako prvý začína ďalšiu hru.

Pre všeobecný počet hráčov hráčov:

Logika hry pri väčšiom počte hráčov je v podstate rovnaká:

(i) Nech počet hráčov $= n$, kde $n > 3$, tak nastávaju dve možnosti, pre to aký hráč pôjde po H_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$

- Po hráčovi H_i pôjde $H_{i+1} \iff i < n$
- Po hráčovi H_i pôjde $H_1 \iff i = n$

Pravidlá (ii) - (v) budu také isté ako pravidlá pre 3 hráčov.

1.1.2 Objasnenie hry jednoduchou simuláciou

Majme 3 hráčov: Peter, Adam, Gabriel. Všetci traja hráči prišli do hry s 30 žetónmi (s ktorými sú ochotní riskoať, teda aj následne prísť v priebehu hry). Keďže je počet hráčov = 3, počiatočný vklad na stole bude $\zeta = 21$ [1], a teda po vklade má každý hráč mimo základného vkladu 23 žetónov (nazývajme to žetóny v peňaženke). Následne sa spomedzi hráčov vyberie náhodný prvý hráč H_1 (napr. Gabriel), Gabriel hodí všetkými šiestimi kockami a ich súčet $F = 7 \implies F < \zeta$, teda podľa [1] si zo stola Gabriel zoberie $F = 7$ žetónov $\implies$ na stole ich ostane $\zeta = 14$.
Hráč po jeho lavici H_2 je Adam, ktorý po hodení má $F = 10$, čo značí, že si zo stola zoberie $F = 10$ žetónov , na stole sú aktuálne 4 žetóny a následuje hráč po Adamovej lavici.
H_3 (Peter) uskutoční hod, kde $F = 2 \implies$ zoberie si zo stola 2 žetóny a na stole ostávaju $\zeta = 2$ žetóny. Aktuálne prebehlo prvé kolo tj. všetci účastníci hádzali kockami práve jedenkrát.
Začína nové kolo znovu hráčom H_1 (Gabriel) uskutoční hod, kde $F = 5 \implies F > \zeta$, H_1 musí doložiť na stôl rozdiel $F - \zeta = 5 - 2 = 3$ žetóny zo svojej peňaženky a na stole ostáva $\zeta = 5$ žetónov.
Hra bude pokračovať, rovnakým princípom, až pokiaľ jeden z hráčov nehodí presný súčet $F = \zeta$ alebo pokiaľ jeden z hráčov nezbrankrotuje. Ak by nastala možnosť $F = \zeta$ pre $H_i \implies H_i$ si berie zo stola všetky žetóny a zároveň od každého protivníka si zoberie po F žetónov.
Graf nižšie uvádza postupný stav peňaženiek jednotlivých hráčov až pokiaľ v tomto prípade jeden z nich nevyhrá celú hru. Jednotlivé údaje su zaznamenávane vždycky po odohratí jedného kola, tj. keď sa priestredali všetci hráči H_1, H_2, H_3 práve jedenkrát.

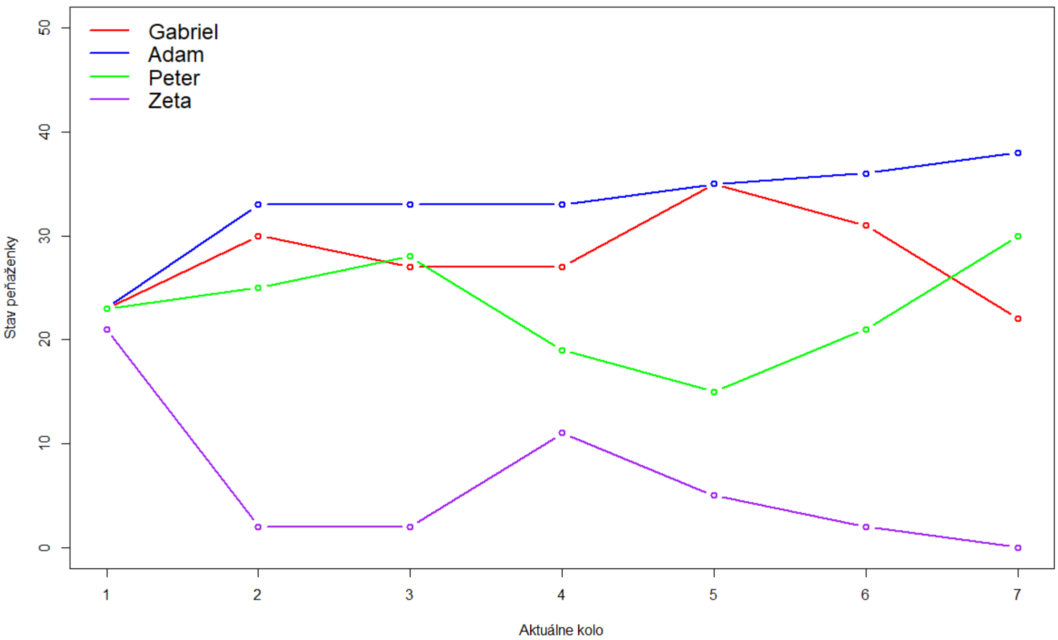

Figure 2: Graf zobrazujúci stav peňaženiek jednotlivých hráčov

Čo z grafu nie je možne tak ľahko vyčítať je posledná hra, teda hra, keď niektorý z hráčov vyhral alebo zbankrotoval. Najprv si overíme, ktorá z možností nastala. Môžeme vidieť, že v poslednom kole je $\zeta = 0$, teda pre niektorého z hráčov musela nastať možnosť $F = \zeta$. Je jásné, že Gabriel to nebude, pretože jeho stav peňaženky v 6. kole bol väčší ako v poslednom kole. (Víťaz hry môže byť iba v pluse v porovnaní s predposledným kolom) Keď si rozoberieme posledné kolo dopodrobna, vieme určiť ktorí hráči su H_1, H_2, H_3. H_1 je Gabriel ale o tom vieme, že nemôže byť víťaz, H_2 bol Adam a H_3 bol Peter. Keby vyhral posledné kolo Adam, tak by ukončil hru a Peter by už nemohol uskutočniť ďalší hod po ňom $\implies$ Petrov stav peňaženky v 6. kole by musel byť ostro väčší ako v 7. kole, čo ale v našom prípade nie je pravda.Tým pádom Peter vyhral celú hru, s tým, že pred Petrovým hodom Adam hodil nejaké F_A, ktoré si zobral zo stola a Peter po ňom hodil $F_P = \zeta$, Peter si zobral zo stola všetky žetóny a zároveň od každého hráča si zobral po F_P žetónov s tým faktom, že: $F_A - F_P > 0$ preto je Adamov stav peňaženky väčší v 7. kole ako v 6. aj napriek jeho prehre v tejto hre.

1.2 Úlohy a ich riešenia

(a) Aká je pravdepodobnosť, $p_i = P(F = i), \;\; i = 0, 1, 2, ..., 21$ [1]
(b) Ma každý hráč rovnakú pravdepodobnosť, že vyhrá hru alebo má hráč, ktorý začína hru nejakú výhodu? [1](Nadstavba (b) čo ak by sme fixne volili hráča každu novú hru)
(c) Je stredná hodnota výhry rovnaka pre všetkých $H_i, i = 1, 2, ..., n$ [1]
(d) Aka je stredná hodnota dĺžky jednej hry, tj. koľkokrát sa priemerne posunieme o jedného hráča vľavo, než nejaký H_i vyhrá danú hru. [1]
(e) Vie množstvo hráčov ovplyvniť strednú hodnotu dĺžky hry?
(f) Vedel by iný počiatočný vklad nejakým spôsobom ovplyvniť základnu myšlienku hry?

Odpovede na otázky

(a) Ako prvé by nám mohlo napadnúť zostrojiť všetky možnosti hodu kociek, ktoré môžu nastať a na základe toho vypočítať jednoducho jednotlivé pravdepodobnosti. Avšak najprv využijeme elegantnejší spôsob riešenia a to je tzv. funkcia generujúca pravdepodobnosť [2], pre diskretnú náhodnú premennú X na nezáporných číslach daná predpisom:

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k)$$

,potom je ľahké dokázať, za predpokladu, že $q_X(t)$ je k-krát diferencovateľná:

$$P(X = k) = \frac{\frac{d^k g_X(0)}{dt^k}}{k!}$$

Dôkaz:
Nech $g_X(t)$ je funkcia generujúca ravdepodobnosť, navyše je k-krát differencovateľná. Môžeme si ju prepísať do tvaru:

$$P(X = 0) + P(X = 1)t + P(X = 2)t^2 + \cdots + P(X = i)t^i + P(X = i + 1)t^{i+1} + \cdots + P(X = k)t^k$$

z takto upravenej funkcie je jasné, že keď zoberieme jej i-tú deriváciu podľa premennej t, tak:

- $\forall\, t^j,\; j < i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)0 = 0$
- $\forall\, t^j,\; j = i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)j! = P(X = i)i!$
- $\forall\, t^j,\; j > i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)\frac{i!}{(j-i)!}t^{(j-i)}$

$$\frac{d^k g_X(t)}{dt^k} = P(X = 0)0 + P(X = 1)0 + P(X = 2)0 + ... + P(X = i)i! + P(X = i+1)\frac{i!}{(j-i)!}t^{j-i} + P(X = i+2)\frac{i!}{(j+1-i)!}t^{(j+1-i)}$$

$$\frac{d^i g_X(0)}{dt^i} = P(X = i)i!$$

$$P(X = i) = \frac{\frac{d^i g_X(0)}{dt^i}}{i!}$$

$\square$

[1] Následne označme:

$$F = \sum_{k=1}^{6} D_i$$

$D_i,\ i = 1, 2, ..., 6$ predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode.

$$g_F(t) = E(t^F) = E(t^{\sum_{i=1}^{6}(D_i)}) = E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i})$$

Tu si musíme uvedomiť, že D_i sú navzájom nezávisle a teda pre nazávisle nahodné premenne X, Y platí: $E(XY) = E(X)E(Y)$, čo vieme využiť aj v našom prípade.

$$E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i}) = \prod_{i=1}^{6} E(t^{D_i})$$

vieme, že $E(t^{D_i}) = \sum_{k=0}^{6} P(D_i = k)t^k$ a teda:

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

,tu si už len musíme uvedomiť pravdepodobnostné rozdelenie D_i

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

$$\prod_{i=1}^{6}(P(D_i = 0)t^0 + P(D_i = i)t^i)$$

$$\prod_{i=1}^{6}(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}t^i)$$

Teraz už len musíme presne vyjadriť čomu sa rovná daný výraz po roznásobeni, na účely derivovania.

$$\Longrightarrow \frac{1}{46656}(15625 + 3125t + 3125t^2 + 3750t^3 + 3750t^4 + 4375t^5 + 4500t^6 + 2000t^7 + 1500t^8 + 1625t^9 + ...$$

$$+...1025t^{10} + 1025t^{11} + 425t^{12} + 300t^{13} + 200t^{14} + 180t^{15} + 55t^{16} + 30t^{17} + 30t^{18} + 5t^{19} + 5t^{20} + t^{21})$$

Na základe vyjadrenia vieme hneď vyjadriť každú jednu pravdepodobnosť. (Table 1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{P(F=i)}{46656}$	15625	3125	3125	3750	3750	4375	4500	2000	1500	1625	1025
$\approx$ %	33	6	6	8	8	9	9	4	3	2	2

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\frac{P(F=i)}{46656}$	1025	425	300	200	180	55	30	30	5	5	1
$\approx$ %	2	1	0,6	0,4	0,3	0,1	0,06	0,06	0,01	0,01	0,002

Table 1: Výsledné pravdepodobnostné hodnoty

Výsledky z výpočtu si môžeme overiť aj jednoduchou simuláciou spustením skriptu "kocky.js", kde je možné vidieť, že výsledok simulácie sa naozaj riadi pravdepodobnostným rozdelením, ktoré sme vypočítali. (Table 2)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet takých simulácií	335223	67059	66647	80337	79899	94090	96484	42947	32008	34891	21750
≈ %	33	7	6	8	8	9	10	4	3	2	2

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
počet takých simulácií	22068	9077	6561	4278	3925	1196	674	678	99	93	16
≈ %	2	1	0,6	0,4	0,4	0,1	0,07	0,07	0,01	0,01	0,002

Table 2: Overenie pravdepodobnostných hodnôt pomocou 10^6 simulácií

[4] Teraz danú úlohu môžeme vyriešit intuitivnějším spôsobom. Vieme, že: $F \in \{0, 1, 2, \dots, 21\}$. Navyše si pripomeňme označenie D_i, ktoré predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode a aj pravdepodobnostné rozdelenie D_i:

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Ak by nastal taký prípad, že $F = 0$, tak vieme s istotou povedať, že nastala jednoznačnosť riešenia $\implies$ na každej kocke musela padnúť prázdna stena a kedže nás zaujíma iba to, či padla prázdna stena a nie to, že ktorá prázdna stena padla na každej kocke, môžeme tvrdiť, že: $P(F = 0) = (\frac{5}{6})^6 \approx 0,33$.
Ak by však napríklad $F = 5$, tak jednoznačnosť riešenia nenastáva, pretože výsledný súčet $F = 5$ nám mohol výjsť rôznymi kombináciami kociek a to napríklad

- $F = 5 \implies D_5 = 5 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $F = 5 \implies D_1 = 1 \ \wedge \ D_4 = 4 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{2, 3, 5, 6\}$
- $F = 5 \implies D_2 = 2 \ \wedge \ D_3 = 3 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{1, 4, 5, 6\}$

Z toho vyplýva, že výslednú pravdepodobnosť $P(F = 5)$ možno vypočítat ako súčet jednotlivých možnosti(kombináciami kociek). Pre $F = 5$ sme našli 3 rôzne možnosti, označme ich $m_1, m_2, m_3 \implies P(m_i)$ pravdepodobnosť nastatie i-tej možnosti.

$$P(F = 5) = P(m_1) + P(m_2) + P(m_3)$$

$$P(m_1) = \frac{1}{6} \ (\frac{5}{6})^5$$

$$P(m_2) = P(m_3) = (\frac{1}{6})^2 \ (\frac{5}{6})^4$$

$$P(F = 5) = \frac{4375}{46656} \approx 0,09$$

Následne analogickým spôsobom môžeme vypočítat pravdepodobnosti pre ostatné možnosti nastatia hodnôt pre F, z čoho dostávame nasledujúcu tabuľku (Table 3)

F	Možnosti rozkladu F pomocou 6 kociek						$\approx$ pp
F	1 kocka	s 2 kocky	3 kocky	4 kocky	5 kociek	6 kociek	v %
0							33,4898
1	1						6,6980
2	2						6,6980
3	3	(2,1)					8,0376
4	4	(3,1)					8,0376
5	5	(4,1)(3,2)					9,3771
6	6	(5,1)(4,2)	(3,2,1)				9,6451
7		(6,1)(5,2)(4,3)	(4,2,1)				4,2867
8		(6,2)(5,4)	(5,3,1)(6,2,1) (4,3,1)				3,2150
9		(5,4)(6,3)	(5,3,1)(6,2,1) (4,3,2)				3,4829
10		(6,4)	(6,3,1)(5,4,1) (5,3,2)	(4,1,3,2)			2,1969
11		(6,5)	(6,4,1)(6,3,2) (5,4,2)	(5,3,2,1)			2,1969
12			(5,4,3)(6,5,1) (6,4,2)	(6,3,2,1) (5,4,2,1)			0,9109
13			(6,5,2)(6,4,3)	(6,4,2,1) (5,4,3,1)			0,6430
14			(6,5,3)	(6,4,3,1) (5,4,3,2) (6,5,2,1)			0,4287
15			(6,5,4)	(6,4,3,2) (6,5,3,1)	(5,4,3,2,1)		0,3858
16				(6,5,3,2) (6,5,4,1)	(6,4,3,2,1)		0,1179
17				(6,5,4,2) (6,5,4,2)			0,0643
18		,		(6,5,4,3)	(6,5,4,2,1)		0,0643
19					(6,5,4,3,1)		0,0107
20					(6,5,4,3,2)		0,0107
21						(6,5,4,3,2,1)	0,0021
pp.	$x_1 = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^5 n_1$	$x_2 = \frac{1}{6^2}(\frac{5}{6})^4 n_2$	$x_3 = \frac{1}{6^3}(\frac{5}{6})^3 n_3$	$x_4 = \frac{1}{6^4}(\frac{5}{6})^2 n_4$	$x_5 = \frac{1}{6^5}(\frac{5}{6})^4 n_5$	$x_6 = \frac{1}{6^6} n_6$	$\sum_{i=1}^{6} x_i$

Table 3: Výsledne pravdepodobnosti pre jednotlivé F pomocou metódy možného rozloženia

Pomocou takto zostrojenej tabuľky bude jednoduché vypočítať pp. nastatia jednotlivých F, použijúc posledného riadku, kde n_i predstavuje počet rôznych možnosti rozkladu pre fixné F. Ako príklad výpočtu zvoľme fixne $F = 14$, pravdepodobnosť nastatia $F = 14$ je: $\sum_{i=1}^{6} x_i$, no však my berieme v úvahu stĺpce, v ktorých je aspoň jedna možnosť rozkladu pre $F = 14$. $F = 14$ sa dá rozložit pomocou 3 kociek alebo 4 kociek, zoberme v úvahu stĺpce s týmito možnosťami rozloženia. V stĺpci s rozložením pomocou 3 kociek sa nachádza 1 možná kombinácia, teda $n_3 = 1 \implies x_3 = 1\frac{1}{6}^3(\frac{5}{6})^3$. Analogicky pre stĺpec možnosti rozkladu pomocou 4 kociek, tam sa nachádzajú 3 možnosti, $n_4 = 3 \implies x_4 = 3\frac{1}{6}^4(\frac{5}{6})^2$ a výsledná pravdepodobnosť je súčet x_3 a x_4. Ten istý postup aplikujeme pre všetky $F, F \in \{0, 1, ..., 21\}$ Týmto riešením dostávame tie isté výsledky ako s využitím funkcie generujúcej pravdepodobnosť, s tým rozdieľom, že pri tejto metóde môžeme lachšie "vycítiť", prečo je napr. $P(F = 10) > P(F = 7) \implies$ pretože možnosti rozloženia pre $F = 10$ je viacej ako pre $F = 7$.

Odpovede na ďalšie otázky su známe len na základe počítačových simulácií.
(b) V tejto časti úlohy je dobrý napád definovať, čo znamená jednodĺžková hra alebo n-dlžková hra.

Pod n-dĺžkovou hrou rozumieme hru takú, že skupina hráčov je ochotná hrať maximálne n hier, po n-tej hre všetci hráči opúšťajú hru a nevrácajú sa k nej. Prípadne n-dĺžková hra môže byť ukončená skorej ak niektorý z H_i zbrankrotuje pred tým ako sa dohrá n-tá hra.

Príklad: 10-jednodĺžkových hier je ekvivalent 10 rôznych skupín hráčov, ktorí budú hrať iba jednú hru a po nej prestávaju hrať. Toto definovanie je veľmi praktické vzhľadom na následujúce simulácie v ktorých sa budeme venovať výsledkom a porovnaniu jednodĺžkových hier a viacejdĺžkových hier.
Pomocou simulácie "mangKung/b.js" dostávame odhad, že náhodný výber hráča H_1 by nemal ovplyvňovať pravdepodobnosť víťazstva H_1, teda všetci hráči majú tú istú pravdepodbnosť výhry, nezávislé od n-dĺžkovej hry, ktorú hraju.
(c) V tejto úlohe sa pred simulovaním môžeme zamyslieť nad tým, čo znamená ísť ako prvý. Keďže $\zeta = 21$ v prípade iného počtu hráčov $\zeta = 21k$ a vieme, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$, s už vyšie vypočítanými pravdepodobnosťami $\implies$ H_1 si zo stola zoberie do svojej peňaženky F žetónov so 100% pravdepodobnosťou. Pravdepodobnosť, že by vyhral hru hneď na začiatku hry je takmer nulová a tak takmer s istotou môžeme predpokladať, že hrou bude pokračovať H_2, ktorý bude mať šancu na výhru celej hry omnoho vyšiu , takisto aj šancu na to, že musí siahnúť po svojich žetonoch v peňažeke na doloženie, ak $F > \zeta$ (analogicky, že si o niečo prilepší). A podobne to bude platiť aj pre následujucích hráčov, s tým, že keď vyhrá $H_i, i \neq 1$, tak si od všetkých protivníkov zoberie po F, žetónov, kde by sme mohli pocítiť nejakú výhodu prvého hráča, ktorý bude vždy prvé kolo v profite, ktorý by mu mohol postačiť na vyplatenie výhry iného hráča.
Najlepšie sa daná výhoda interpretuje pri jednodĺžkovej hre, ktorá trva iba jedno kolo
$H_1 \implies F = 10 \implies \zeta = 11 \implies$ penaženka(H_1)+10
$H_2 \implies F = 4 \implies \zeta = 7 \implies$ peňaženka(H_2)+4
$H_3 \implies F = 7 \implies \zeta = 0 \implies$ peňaženka(H_3)+7+7+7
Pri hre, ktorá trvá jedno kolo má H_1 v prípade prehry takú výhodu, že na zaplatenie víťaznemu hračovi použije aj prostriedky, ktoré si zobral zo stola hneď na začiatku hry, zatiaľ čo H_2 nemal takto istý profit pri jeho ťahu. V prípade výhry hneď v prvom kole je jeho výhoda oproti ostatným, jeho 100% profit na začiatku hry, ktorý ostatní hráči v prípade výhry nemajú. V tomto prípade sme pracovali s tým, že jednoĺžková-hra trvala presne jedno kolo, to ale nie je reálna sitúacia na ktorých by sme spúšťali simulácie. Miesto toho necháme rôzne skupiny hráčov vždy voľne dohrať 10 000 - jednodĺžkových hier a pozrieme sa na ich profit na konci hry a potom ich porovnáme s 10 000 - 50-dĺžkových hier.
5 nezávislých simulácií pre 10 000 - jednodĺžkových hier("mangKung/c.js"). (Table 4)

simulácia$_i$	počet simulácií	počet hier na simuláciu	výhra H_1	výhraH_2	výhra H_3
1	10 000	1	1,4433	-0,083	-1,371
2	10 000	1	1,175	-0,079	-1,117
3	10 000	1	1,052	-0,109	-0,964
4	10 000	1	1,469	0,203	-1,693
5	10 000	1	1,191	0,522	-1,734
$\overline{x}$	10 000	1	1,26606	0,0908	-1,3758

Table 4: Priemerné výhry hráčov zo simulácií v jednodĺžkových hrách

Ak by hráči hrali iba jednodĺžkovú hru, tak by hra značne vykazovala v prospech H_1. Aproximácie stredných hodnôt výhier podľa našich 10^4 simulácií pre jednú hru sú:

$$E(H_1) \approx 1,26606$$

$$E(H_2) \approx 0,0908$$

$$E(H_3) \approx -1,3758$$

Následne 5 nezávislých simulácií pre 10 000 - 50-dĺžkových hier (Table 5)

simulácia$_i$	počet simulácií	počet hier na simuláciu	výhra H_1	výhraH_2	výhra H_3
1	10 000	50	0,943	-6,57	5,606
2	10 000	50	0,37	1,957	-2,348
3	10 000	50	-0,103	3,138	-3,056
4	10 000	50	0,874	-4,412	3,517
5	10 000	50	-3,44	-3,956	7,375
$\overline{x}$	10 000	50	-0,2712	-1,9686	2,2212

Table 5: Priemerné výhry hráčov zo simulácií v 50-dĺžkových hrách

Zatiaľ čo z (Table 4) sa dala vyvodiť nejaká logická spojitosť medzi voľbou H_1 a jeho výhodou výhry v jednodĺžkovej hre, pri viacejdĺžkovej hre stráca význam výhoda H_1 pretože výhry jednotlivých H_i sa pohybujú úplne náhodne a z toho by sme neskôr cheli vytvoriť testovaciu hypotézu že očakavané výhry H_i by mali byť približne rovnaké.

$$E(H_1) \approx E(H_2) \approx E(H_3) = 0$$

Pre dané simulácie si vytvoríme boxploty pre lepšie porovnávacie analýzy. Do boxplotov budeme brať ako hlavne údaje jednotlivé výhry hráčov, vždy po 1-dlžkovej alebo po 50-dĺžkovej hre a navzájom ich porovnáme.

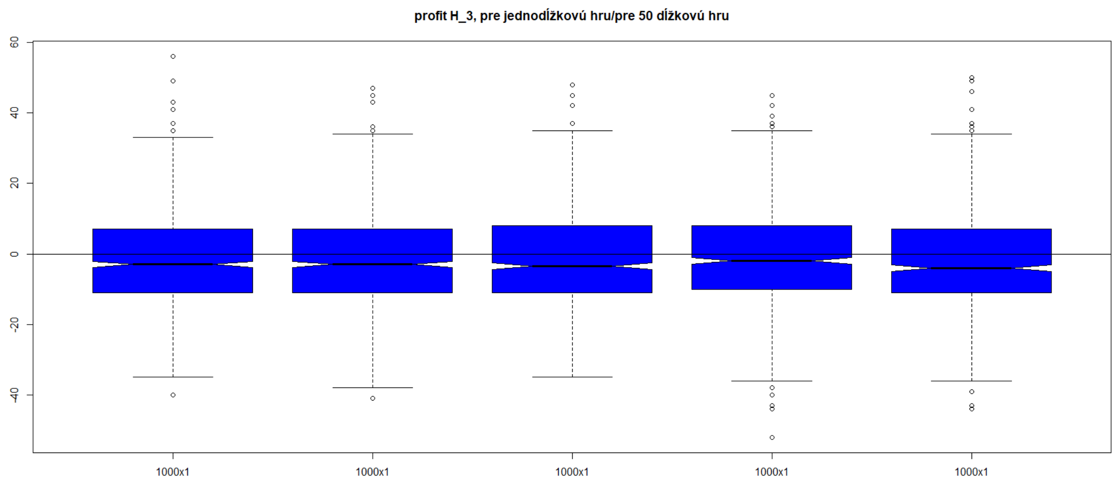

Figure 3: Výhry H_3 v jednotlivých 1000x1-dĺžkových hrách

Každý boxplot predstavuje 1000 navzájom nezávislých simulácií, teda ekvivalent 1000 rôznych skupín hráčov, ktorí prestanú hrať hneď po prvej hre. Pozeráme sa na priemerné výhry H_3. Boxplot nám ukazuje približne to čo sme očakávali z (Table 4) a to je, že priemerná výhra H_3 v jednodĺžkových hrách je: $\approx -1,37 < 0$.
Takisto všetky ostatné boxploty pre H_2 a H_1 vykazujú predpoklady z (Table 4).
Teraz si môžeme porovnát priemerné výhry H_i z jednodĺžkových hier a z 50-dĺžkových hier teda: 1000x1 a 1000x50 simulácií.

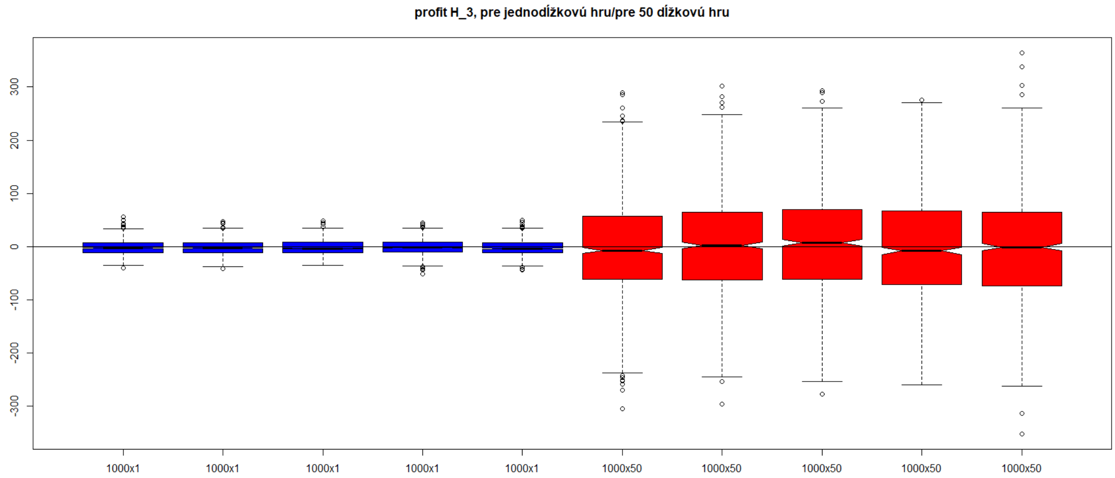

Figure 4: Porovnanie výhier pre H_3 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

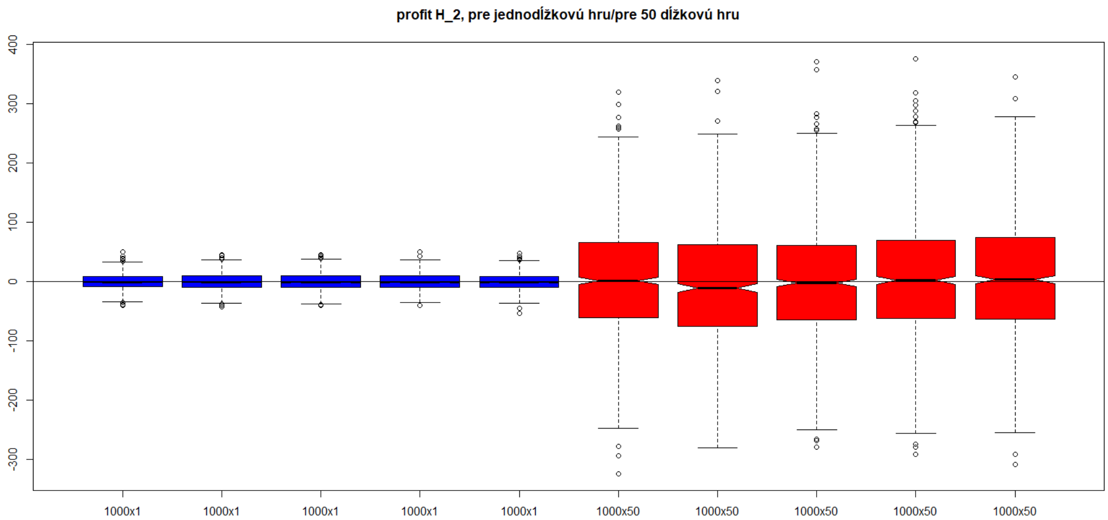

Figure 5: Porovnanie výhier pre H_2 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

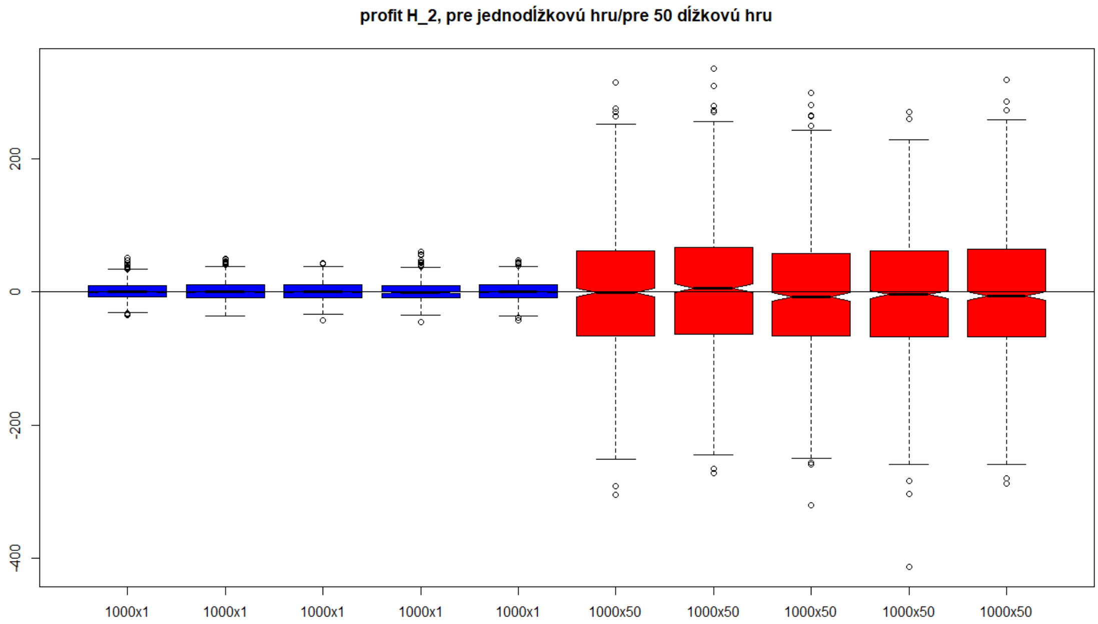

Figure 6: Porovnanie výhier pre H_1 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

Hneď z prvého pohľadu je ľahko vidieť veľký simulačný rozdiel v rozptyle pre každého H_i v medzi jednodĺžkovými a 50-dĺžkovými hrami. Zatiaľ čo v jednodlžkových 1000x1 simuláciach sa medián nachádzal priblížne tam, kde sme ho podľa (Table 4) očakávali zároveň s úzkym intervalom 95% spoľahlivosti, tak 1000x50 simulácie vykazujú medián, ktorý náhodne preskakuje nad a pod 0-ovú os, zároveň s omnoho širším intervalom 95% spolahlivosti. Z tohoto všetkého by sme mohli zatiaľ usúdiť, že: H_1 má istú výhodu pri jednodĺžkovej hre ale ako sa začína hrať viacejdĺžková hra, tak sa s tým stráca jeho výhoda a výhodu preberá pravdepodobnosť.
Pre jednnodĺžkovú hru sme zostrojili simuláciu pre H_1, kde sledujeme konvergenciu priemeru výhry tj. zostrojíme vektor $\vec{v}_n$, ktorého j-tá zložka bude predstavovať:

$$\vec{v}_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} x_i}{j}, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

, kde x_i je výhra H_1 po ukončení jednej jednodĺžkovej simulácie. V našom prípade sme n nadstavili na 15 000 a dostali sme približný graf konvergencie.

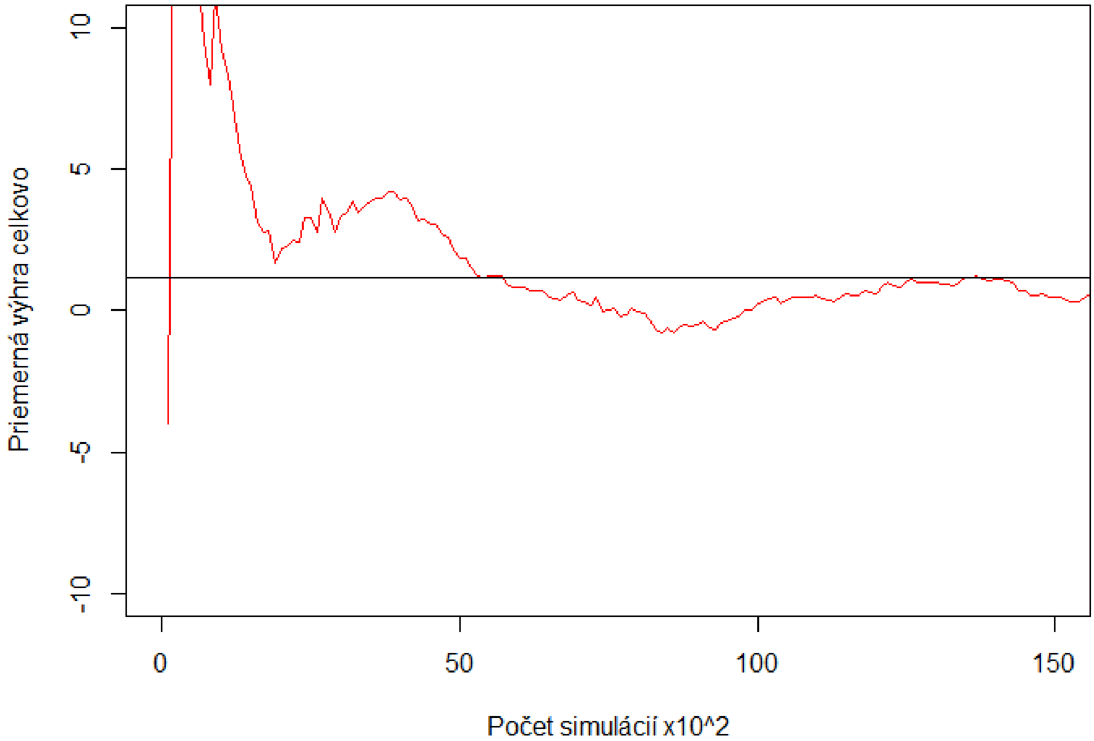

Figure 7: Porovnanie výhier pre H_1 v jednotlivých 1000x1/1000x50 simuláciach

Konvergenciu vo (Figure 7) porovnávame s konštantnou funkciou $f(x) = 1.17$, ktorá bola zadaná v [1] ako približný výsledok $E(H_1)$ pre jednodĺžkovú hru. Z jedneho grafu to nemusi byť hneď jasné tak to ešte skusíme pre viacej grafov či majú podobnú tendenciu konvergencie.

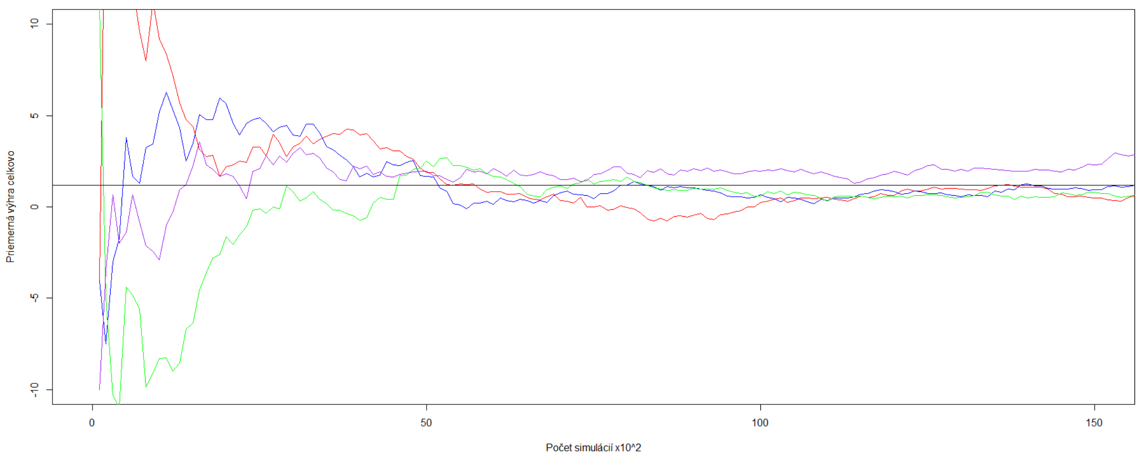

Figure 8: Porovnanie konvergencie priemernej výhry H_1 pre 15000 simulácií

Jednotlíve grafy sú pod a nad $f(x)$ a lajdskym okom vidíme, že sa jednotlivé funkcie pri vysokom počte simulácií blížia alebo aspoň sú v blízkom okolí funkcie $f(x)$.
(d) Pomocou spustenia skriptu "mangKung/mangKung.js" sme zistli, že priemerná dĺžka hry je približne 20 hodov, teda 20 vystriedani rôzných hráčov. (Z čoho môže vyplývať klamlivo intuitívný predpoklad, že hru vyhráva spravidla H_3, čo ale nie je pravda pretože vieme, z úlohy b) , že všetči hráči majú pri viacejdĺžkových

hrách výhry náhodne.)
(e) Ďalšia otázka je či by počiatočný počet hráčov mohol nejakým spôsobom ovplyvňovať dĺžku hry, najprv sa zamyslíme nad úlohou bez výpočtu alebo simulácie. Vieme, že hra nie je nijak limitovaná pre počiatočný počet hráčov, jediné čo by sa s odlišným počtom hráčov menilo je počiatočný vklad, ktorý je všeobecne daný ako: $\min_k\{k\frac{21}{n}, k \in \mathbb{N}\}$, z čoho neskôr zostrojíme tabuľku rôznych počiatočných vkladov, pre odlišný počet hráčov. Je teda jasné, že vklad na stole nemusí byť vždycky nutne 21 ale môže byť aj väčší. Ako vymyslené dva príklady na porovnanie uveďme najprv počiatočný vklad $\zeta = 21$ pri 7 hráčoch. Bez hlbokého zamýšlania nám môže napadnúť, že dĺžka hry by mala byť stále približne okolo 20 hodov ako pri 3 hráčoch z čoho môžeme predpokladať, že počet hráčov nijak neovplyvňuje dĺžku hry a bude trvať ten istý počet hodov kociek, čo je aj za nejakú konkrétnu podmienku pravdivý výrok a tou podmienkou je $\zeta = 21$, ak by ζ nebola 21 tak priemerná dĺžka hry je odlišná. Uveďme ďalší príklad: $\zeta = 200$ so 4 rôznymi hráčami. V takomto prípade by bola priemerná dĺžka hry > 20 a to kvôli tomu, že $F \leq 21$ a so 100 % istotou môžeme povedať, že minimálne pri prvých 9 hodoch bude nastávať možnosť $F < \zeta$ a zo stola si budú hráči neustále ťahať žetóny rovno do peňaženky, pokiaľ na stole nenastane stav $\zeta \leq 21$, od tohoto stavu by hra trvala priemerne ≤ 20 hodov, podľa toho aká je ζ, ak by bola rovná 21, tak dĺžka hry by v tomto stave trvala priemerne 20 hodov a celková dĺžka hry by trvala teda priemerný počet hodov na dostanie sa pod hranicu $\zeta \leq 21$ + následných priemerných 20 hodov vypočítaných z časti
Z tohoto celého by vyplývalo, že s narastújucou ζ narastá aj priemerná dĺžka hry a zároveň, že ζ je ovplyvňovaná počtom hráčov, teda áno rôzny počet hráčov bude ovplyvňovať priemernú dĺžku hry. Pre rôzny počet hráčov sme zostrojili tabuľku počiatočných vkladov. (Table 6).

# Hráčov	1	2	3	4	5	6	7	8	...	21	22	23	...	99	100
ζ	NA	42	21	84	105	42	21	168	...	21	462	483	...	693	2100
$\approx E(dĺžkahry)$	NA	26	20	38	43	26	20	62	...	20	145	151	...	211	613

Table 6: Priemerná dĺžka hry vzavislosti od počtu hráčov

(Mohol by sa tu aplikovat linearny regresny model pre odhad dlzky hry vzavislosti od poctu hracov ak by dat bolo dostatok vela? ci by tomu vadili vychylky typu, pocet hracov = 7, 21 ?) Z (Table 6) je vidieť, kvázi priamoúmerný nárast priemerného počtu kôl spolu s nárástom počtu hráčov.
(f) Prečo je vlastne počiatočný vklad nadstavený týmto spôsobom, čo by sa napr. stalo ak by sa všetci hráči skládali vždy po inom fixnom počte na počiatočný vklad, zmenilo by to logiku hry alebo mal by nejaký hráč menšiu/ väčšiu výhodu ako pred tým? Nad týmito otázkami sa budeme zamýšlať v tejto podúlohe.

1.3 Nadstavba

Aká by mala byť hodnota, ktorá by nám, takmer určite vystačila na dohranie celej jednej hry, teda aby sa počas hry nestalo, že by sme nemali dostatok žetónov na doloženie, keď $F > \zeta$.
Označme $p(H_i)_j$ - stav penaženky i-teho hráča po j-tej hre , kde $i \in \{1, 2, ..., n\}$ & $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Každú hru sme vyberali spomedzi 3 hráčov najväčšiu stratu žetónov, ktoré sme si následne úkladali do vektora $\vec{v}_{m-1}$ pre ďalšie účely.
Ďalej označme $r(H_i)_j$ ako rozdiel stavu peňaženky pred (po j-1 kole) a po j-tom kole pre i-teho hráča , teda pre:

$$r(H_i)_j = P(H_i)_{j-1} - P(H_i)_j$$

Je zjavné:

- $r(H_i)_j > 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v mínuse
- $r(H_i)_j < 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v profite
- $r(H_i)_j = 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v neutralite

Potom:

$$v_1 = \max\{\ r(H_1)_2,\ r(H_2)_2,\ r(H_3)_2\ \}$$
$$v_2 = \max\{\ r(H_1)_3,\ r(H_2)_3,\ r(H_3)_3\ \}$$
$$\vdots$$
$$v_{m-1} = \max\{\ r(H_1)_m,\ r(H_2)_m,\ r(H_3)_m\ \}$$

Týmto sposôbom bude prebiehať naša simulácia, kde keď daný vektor znazorníme graficky, tak dostávame následovné:

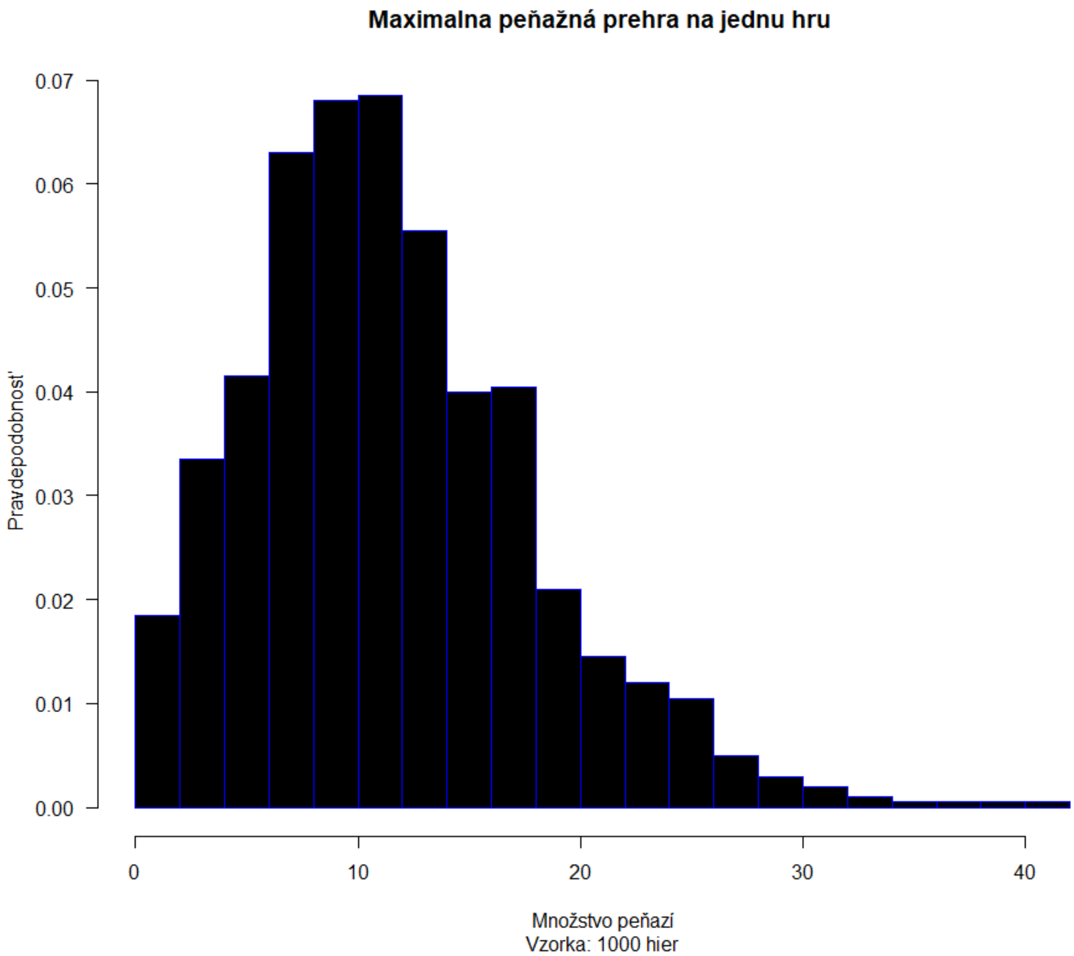

Figure 9: Histogram maximálnej prehry žetónov, za jednu hru

Dostali sme grafické riešenie koľkokrát pomedzi 1000 hier stačilo aké množstvo žetónov na dokonšenie hry, kde maximalny outlier = 41. Ak by sme chceli na základe dát mať 50% pravdepodobnosť na dohranie hry, potrebovali by sme na začiatok 11 žetónov, na 99% dohranie hry 29 žetónov.

2 Piata hra v Squid Game

2.1 Úvod hry

Koncom jesene 2021 otriasla svetom veľkolepá séria Squid Game natočená podľa knižnej predlohy. Hra sa sklada zo 6 náročných úloh, ktoré museli súťažiaci splníť. Jednou z nich bola už spomínana piata hra spočinájuca v tom, že súťažiaci sa museli dostať z jednej strany mostu na druhú. Je zrejme, že cesta bude v niečom obtiažná, no to sa ďalej dozvieme v definícií hry.

2.2 Definícia hry

Definíciu hry budeme najprv implementovať presne podľa toho ako to bolo v seriály a nesôr a následne hru definujeme všobecne.

2.2.1 Podľa seriálu

Majme 16 hráčov, ktorým náhodne pridelíme čisla od 1 po 16 a označíme. Číslo, ktoré bolo pridelené jednotlivým hráčom bude určovať ich poradie, v ktorom budú prechádzať cez most. Hráča, ktorému bolo pridelené číslo $i, i \in \{1, 2, ..., 16\}$ označíme H_i. Je zrejmé, že H_1 bude prechádzať cez most ako prvý a $H_1 6$ ako posledný.
Teraz je nutné definovať ako bude prechádzať H_1 cez most. Aby sa H_1 dostal na druhú stranu mostu musí prejsť 15 políčkami, ktoré má pred sebou. Problém je to, že každé políčko sa skladá z polovice z jedneho tenkého skla a z druhej polovice z jedného hrubého skla.Ak H_i skočí na tenke sklo, tak sa rozbije a hráč padá na zem a je vyradený. Ak ale H_i skočí na hrubé sklo, tak H_i unesie a H_i môže postupovať na ďalšie políčko. Na jednom políčku je medzi sklami dostatočný priestor na to aby H_i nemohol stáť na oboch sklách súčasne.

3 Referencie

References

[1] Jiři Anděl, Matematika Náhody, matfyzpress vydavatelsví matematicko-fyzikalni fakulty univerzity karlovy, Praha, 2000

[2] Teória pravdepodobnosti, slajdy z prednášok, Katedra Matematických metód Fakulta Riadenia a Informatiky Žilinská Univerzita v Žiline, Žilina, 2014,dostupne na internete(23.10.2021): https://frcatel.fri.uniza.sk/users/alesko/PaS/prednaska5.pdf

[3] Wai-Sum Chan, Stochastik in der Schule, 1997, hmm co tady

[4] JAN-JÜRGEN MENGE,Das Mang-Kung-Spiel (2), working paper, Rotenburg,Rotenburg,2008, dostupné na internete(23.10.2021): https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang28-2008/Heft1/2008-1_menge.pdf