1 Hra Mang Kung

1.1 Definícia hry

Slova Mang Kung su čínske a znamenajú slepí ľudia. Je to stará čínska hra, ktorá sa v dnešnej dobe stále hráva v južnej Číne a v Hong Kongu. Počas hry sa bude používať šesť hracích kociek, ktoré sa od klasických líšia len neobvyklým označovaním stien a to takým, že i-ta kocka ma na jednej stene hodnotu i a ostatné steny sú prázdne $\forall i = 1, 2, ..., 6$. (Figure 1)

Figure 1: Vzhľad používaných kociek, v hre Mang Kung

Pokiaľ v hre padne na i-tej kocke prázdna stena, počíta sa to ako nulová hodnota pre každé $i = 1, 2, ..., 6$. Najčastejšie sa hry účastnia traja hráči, no však nie je limitovaná ani pre $n > 3$ hráčov, kde súčasne $n \in \mathbb{N}$. Hru si možeme predstaviť tak, že hráči sedia okolo guľatého stolu a tým bude jasné, že po odohraní jedného hráča bude na ťahu hráč naľavo. Na začiatku hry každý z hráčov položí na stôl 7 žetónov rovnakej hodnoty.(V prípade $n > 3$ hráčov každý položí na stôl $\frac{21}{n}$, v ďalšiom prípade ak $\frac{21}{n}$ nie je prirodzené číslo tak, každý hráč prispeje $k\frac{21}{n}, k \in \mathbb{N}$, teda zvolíme najmenší vhodný k násobok aby výsledný zlomok bol celočíselný) Na začiatku hry je na stole teda $\zeta = 21$ žetónov (v prípade $n > 3$ hráčov $\zeta = 21k$ žetónov), ktorých počet sa bude počas hry neustále meniť podľa následujucích pravidiel.

1.1.1 Logika hry

Pre 3 hráčov:

(i) Prvú hru začne, náhodne vybraný hráč spomedzi všetkých troch hráčov. Označovať ho budeme H_1. Po H_1 je na rade H_2, po H_2, H_3, po H_3, H_1, atď.
$\implies$ H_i možeme označit hráča, ktorý je v poradí na i-tom mieste od začiatku hry $i \in \{1, 2, 3\}$.
(ii) Hráč, ktorý je na rade hodí všetkými šiestimi hracími kockami a zistí súčet hodnôt stien, ktorý budeme označovat F. Je zrejmé, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$
(iii) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F < \zeta \implies H_i$ si zoberie zo stola F žetónov.
(iv) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F > \zeta \implies H_i$ musí na stôl pridať $F - \zeta$ žetónov.
(v) Ak pre H_i je po uskutočnení hodu $F = \zeta \implies H_i$ si berie zo stola všetkých ζ žetónov, navyše H_i si zoberie od každého protivníka po F žetónov. H_i sa stáva víťazom tejto hry a ako prvý začína ďalšiu hru.

Pre všeobecný počet hráčov hráčov:

Logika hry pri väčšiom počte hráčov je v podstate rovnaká:
(i) Nech počet hráčov $= n$, kde $n > 3$, tak nastávaju dve možnosti, pre to aký hráč pôjde po H_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$

- Po hráčovi H_i pôjde $H_{i+1} \iff i < n$
- Po hráčovi H_i pôjde $H_1 \iff i = n$

Pravidlá (ii) - (v) budu také isté ako pravidlá pre 3 hráčov.

1.1.2 Objasnenie hry jednoduchou simuláciou

Majme 3 hráčov: Peter, Adam, Gabriel. Všetci hráči prišli do hry s 500 žetónmi(o ktoré sú ochotní prísť v priebehu hry). Keďže je počet hráčov = 3, počiatočný vklad na stole bude $\zeta = 21$, a teda po vklade ma každý hráč mimo stola 493 žetónov. Následne sa spomedzi hráčov vyberie náhodný prvý hráč H_1 (napr. Gabriel), Gabriel hodí všetkými šiestimi kockami a ich súčet $F = 12$, teda zo stola si Gabriel zoberie 12 žetónov $\implies$ na stole ich ostane $\zeta = 9$.
Hráč po jeho lavici H_2 je Adam, ktorý po hodení má $F = 14$, čo značí, že na stôl musí doložiť $F - \zeta = 5$ žetónov , na stole je aktuálne 14 žetónov a následuje hráč po Adamovej lavici.
H_3 (Peter) uskutoční hod, kde $F = 8$, zoberie si 8 žetónov a na stole ostane $\zeta = 6$ žetónov.
Po H_3 následuje opäť H_1, kde $F = 6$, kedže $F = \zeta \implies H_1$ si zo stola zoberie všetky žetóny $\zeta = 6$ a ktomu si od každého hráča zoberie po $F = 6$ žetónov $\implies H_1$ (Gabriel) vyhráva aktuálnu hru.
Tabuľka nižšie ukazuje výsledný stav všetkých hráčov po prvej hre.

Meno	Peter	Adam	Gabriel
Počet žetónov na konci hry	495	482	523

Table 1: Výsledny stav konta hráčov

Pre pokračovanie ďalšej hry je potrebný počiatočný vklad a všetko prebieha analogickým princípom.

1.2 Úlohy a ich riešenia

(a) Aká je pravdepodobnosť, $p_i = P(F = i), \; i = 0, 1, 2, ..., 21$ (ref)
(b) Ma každý hráč rovnakú pravdepodobnosť, že vyhrá hru alebo má hráč, ktorý začína hru nejakú výhodu? (ref)(Nadstavba (b) čo ak by sme fixne volili hráča každu novú hru)
(c) Je stredná hodnota výhry rovnaka pre všetkých $H_i, i = 1, 2, ..., n$ (ref)
(d) Aka je stredná hodnota dĺžky jednej hry, tj. koľkokrát sa priemerne posunieme o jedného hráča vľavo, než nejaký H_i vyhrá danú hru. (ref)
(e) Vie množstvo hráčov ovplyvniť strednú hodnotu dĺžky hry?

Odpovede na otázky

(a) Ako prvé by nám mohlo napadnúť zostrojiť všetky možnosti hodu kociek, ktoré môžu nastať a na základe toho vypočítať jednoducho jednotlivé pravdepodobnosti. Avšak najprv využijeme elegantnejší spôsob riešenia a to je tzv. funkcia generujúca pravdepodobnosť, pre diskretnú náhodnú premennú X na nezáporných číslach daná predpisom:

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k)$$

,potom je ľahké dokázať, za predpokladu, že $q_X(t)$ je k-krát differencovateľná:

$$P(X = k) = \frac{\frac{d^k g_X(0)}{dt^k}}{k!}$$

Dôkaz:
Nech $g_X(t)$ je funkcia generujúca ravdepodobnosť, navyše je k-krát differencovateľná. Môžeme si ju prepísať do tvaru:

$$P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + \cdots + P(X=i)t^i + P(X=i+1)t^{i+1} + \cdots + P(X=k)t^k$$

z takto upravenej funkcie je jasné, že keď zoberieme jej i-tú deriváciu podľa premennej t, tak:

- $\forall\, t^j,\, j < i : \frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X = j)0 = 0$

- $\forall\, t^j,\ j = i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X=j)j! = P(X=i)i!$
- $\forall\, t^j,\ j > i$: $\frac{d^i(t^j)}{d(t^j)^i} = P(X=j)\frac{i!}{(j-i)!}t^{(j-i)}$

$$\frac{d^k g_X(t)}{dt^k} = P(X=0)0 + P(X=1)0 + P(X=2)0 + ... + P(X=i)i! + P(X=i+1)\frac{i!}{(j-i)!}t^{j-i} + P(X=i+2)\frac{i!}{(j+1-i)!}t^{(j+1-i)}$$

$$\frac{d^i g_X(0)}{dt^i} = P(X=i)i!$$

$$P(X=i) = \frac{\frac{d^i g_X(0)}{dt^i}}{i!}$$

□

Následne označme:

$$F = \sum_{k=1}^{6} D_i$$

$D_i,\ i = 1, 2, ..., 6$ predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode.

$$g_F(t) = E(t^F) = E(t^{\sum_{i=1}^{6}(D_i)}) = E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i})$$

Tu si musíme uvedomiť, že D_i sú navzájom nezávisle a teda pre nazávisle nahodné premenne X, Y platí: $E(XY) = E(X)E(Y)$, čo vieme využiť aj v našom prípade.

$$E\prod_{i=1}^{6}(t^{D_i}) = \prod_{i=1}^{6}E(t^{D_i})$$

vieme, že $E(t^{D_i}) = \sum_{k=0}^{6}P(D_i = k)t^k$ a teda:

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

,tu si už len musíme uvedomiť pravdepodobnostné rozdelenie D_i

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{6}\sum_{k=0}^{6}(P(D_i = k)t^k)$$

$$\prod_{i=1}^{6}(P(D_i = 0)t^0 + P(D_i = i)t^i)$$

$$\prod_{i=1}^{6}(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}t^i)$$

Teraz už len musíme presne vyjadriť čomu sa rovná daný výraz po roznásobeni, na účely derivovania.

$$\implies \frac{1}{46656}(15625 + 3125t + 3125t^2 + 3750t^3 + 3750t^4 + 4375t^5 + 4500t^6 + 2000t^7 + 1500t^8 + 1625t^9 + ...$$

$$+...1025t^{10} + 1025t^{11} + 425t^{12} + 300t^{13} + 200t^{14} + 180t^{15} + 55t^{16} + 30t^{17} + 30t^{18} + 5t^{19} + 5t^{20} + t^{21})$$

Na základe vyjadrenia vieme hneď vyjadriť každú jednu pravdepodobnosť. (Table 3)

Výsledky z výpočtu si môžeme overiť aj jednoduchou simuláciou spustením skriptu "kocky.js", kde je možné vidieť, že výsledok simulácie sa naozaj riadi pravdepodobnostným rozdelením, ktoré sme vypočítali. (Table 3)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{P(F=i)}{46656}$	15625	3125	3125	3750	3750	4375	4500	2000	1500	1625	1025
$\approx$ %	33	6	6	8	8	9	9	4	3	2	2

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\frac{P(F=i)}{46656}$	1025	425	300	200	180	55	30	30	5	5	1
$\approx$ %	2	1	0,6	0,4	0,3	0,1	0,06	0,06	0,01	0,01	0,002

Table 2: Výsledné pravdepodobnostné hodnoty

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet simulácií	335223	67059	66647	80337	79899	94090	96484	42947	32008	34891	21750
$\approx$ %	33	7	6	8	8	9	10	4	3	2	2

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
počet simulácií	22068	9077	6561	4278	3925	1196	674	678	99	93	16
$\approx$ %	2	1	0,6	0,4	0,4	0,1	0,07	0,07	0,01	0,01	0,002

Table 3: Overenie pravdepodobnostných hodnôt pomocou 10^6 simulácií

Teraz danú úlohu môžeme vyriešit intuitivnějším spôsobom. Vieme, že: $F \in \{0, 1, 2, \ldots, 21\}$. Navyše si pripomeňme označenie D_i, ktoré predstavuje hodnotu i-tej kocky po vykonanom hode a aj pravdepodobnostné rozdelenie D_i:

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou } = \frac{5}{6} \\ i & \text{s pravdepodobnosťou } = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Ak by nastal taký prípad, že $F = 0$, tak vieme s istotou povedať, že nastala jednoznačnosť riešenia $\implies$ na každej kocke musela padnúť prázdna stena a kedže nás zaujíma iba to, či padla prázdna stena a nie to, že ktorá prázdna stena padla na každej kocke, môžeme tvrdiť, že: $P(F = 0) = (\frac{5}{6})^6 \approx 0,33$.
Ak by však napríklad $F = 5$, tak jednoznačnosť riešenia nenastáva, pretože výsledný súčet $F = 5$ nám mohol výjsť rôznými kombináciami kociek a to napríklad

- $F = 5 \implies D_5 = 5 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $F = 5 \implies D_1 = 1 \ \wedge \ D_4 = 4 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{2, 3, 5, 6\}$
- $F = 5 \implies D_2 = 2 \ \wedge \ D_3 = 3 \ \wedge \ D_i = 0, \ \forall i \in \{1, 4, 5, 6\}$

Z toho vyplýva, že výslednú pravdepodobnosť $P(F = 5)$ možno vypočítat ako súčet jednotlivých možnosti(kombináciami kociek). Pre $F = 5$ sme našli 3 rôzne možnosti, označme ich $m_1, m_2, m_3 \implies P(m_i)$ pravdepodobnosť nastatie i-tej možnosti.

$$P(F = 5) = P(m_1) + P(m_2) + P(m_3)$$

$$P(m_1) = \frac{1}{6} \ (\frac{5}{6})^5$$

$$P(m_2) = P(m_3) = (\frac{1}{6})^2 \ (\frac{5}{6})^4$$

$$P(F = 5) = \frac{4375}{46656} \approx 0,09$$

Následne analogickým spôsobom môžeme vypočítat pravdepodobnosti pre ostatné možnosti nastatia hodnôt pre F, z čoho dostávame nasledujúcu tabuľku (Table 4)

F	Možnosti rozkladu					$\approx$ Pravdepodobnosť v %
0						33,4898
1	1					6,6980
2	2					6,6980
3	3	2,1				8,0376
4	4	3,1				8,0376
5	5	4,1	3,2			9,3771
6	6	5,1	4,2	3,2,1		9,6451
7	6,1	5,2	4,3	4,2,1		4,2867
8	6,2	5,4	5,3,1	6,2,1	4,3,2	3,2150
9	6,3	5,4	5,3,1	6,2,1	4,3,2	3,4829
10	6,4	6,3,1	5,4,1	5,3,2	4,1,3,2	2,1969
11	6,5	6,4,1	6,3,2	5,4,2	5,3,2,1	2,1969
12	6,5,1	6,4,2	6,3,2,1	5,4,3	5,4,2,1	0,9109
13	6,5,2	6,4,2,1	6,4,3	5,4,3,1		0,6430
14	6,5,3	6,4,3,1	6,5,2,1	5,4,3,2		0,4287
15	6,5,4	6,4,3,2	6,5,3,1	5,4,3,2,1		0,3858
16	6,5,4,1	6,5,3,2	6,4,3,2,1			0,1179
17	6,5,4,2	6,5,4,2,1				0,0643
18	6,5,4,3	6,5,4,2,1,				0,0643
19	6,5,4,3,1					0,0107
20	6,5,4,3,2					0,0107
21	6,5,4,3,2,1					0,0021

Table 4: Výsledne pravdepodobnosti pre jednotlivé F pomocou metódy možného rozloženia

Týmto riešením dostávame tie isté výsledky ako s využitím funkcie generujúcej pravdepodobnosť, s tým rozdieľom, že pri tejto metóde môžeme lachšie "vycítiť", prečo je napr. $P(F = 10) > P(F = 7) \implies$ pretože možnosti rozloženia pre $F = 10$ je viacej ako pre $F = 7$.

Odpovede na ďalšie otázky su známe len na základe počítačových simulácií.
(b) Pomocou simulácie "mangKung/b.js" dostávame odhad, že náhodný výber hráča H_1 by nemal ovplyvňovať pravdepodobnosť víťazstva H_1, teda všetci hráči majú tú istú pravdepodbnosť výhry či už hráme opakovane jednú hru alebo opakovane viacej hier.
(c) V tejto úlohe sa pred simulovaním môžeme zamyslieť nad tým, čo znamená ísť ako prvý. Keďže $\zeta = 21$ v prípade iného počtu hráčov $\zeta = 21k$ a vieme, že $F \in \{0, 1, 2, ..., 21\}$, s už vyšie vypočítanými pravdepodobnosťami $\implies$ H_1 si zo stola zoberie do svojej peňaženky F žetónov so 100% pravdepodobnosťou. Pravdepodobnosť, že by vyhral hru hneď na začiatku hry je takmer nulová a tak takmer s istotou môžeme predpokladať, že hrou bude pokračovať H_2, ktorý bude mať šancu na výhru hry omnoho vyšiu , takisto aj šancu na to, že musí siahnúť po svojich finančných prostriedkoch na doloženie sumy, ak $F > \zeta$ (analogicky, že si o niečo prilepší). A podobne to bude platiť aj pre následujucích hráčov, s tým, že keď vyhrá $H_i, i \neq 1$, tak si od všetkých protivníkov zoberie po F, žetónov, kde by sme mohli pocítiť nejakú výhodu prvého hráča, ktorý bude vždy prvé kolo v profite, ktorý by mu mohol postačiť na vyplatenie výhry iného hráča.
Najlepšie sa daná výhoda interpretuje pri jednom kole
$H_1 \implies F = 10 \implies \zeta = 11 \implies$ penaženka(H_1)+10
$H_2 \implies F = 4 \implies \zeta = 7 \implies$ peňaženka(H_2)+4
$H_3 \implies F = 7 \implies \zeta = 0 \implies$ peňaženka(H_3)+7+7+7
Pri hre, ktorá trvá jedno kolo má H_1 v prípade prehry takú výhodu, že na zaplatenie víťaznemu hračovi použije aj prostriedky, ktoré výhral na začiatku hry, zatiaľ čo H_2 nemal istý profit pri jeho ťahu. V prípade výhry hneď v prvom kole je jeho výhoda oproti ostatným, jeho 100% profit na začiatku hry, ktorý ostatní hráči v

prípade výhry nemajú.
Naozaj to tak aj simulácia ("mangKung/c.js") vykazovala.(Table 5)

simulácia$_i$	počet simulácií	počet hier	výhra H_1	výhraH_2	výhra H_3
1	1000	1	1,4433	-0,083	-1,371
2	1000	1	1,175	-0,079	-1,117
3	1000	1	1,052	-0,109	-0,964
4	1000	1	1,469	0,203	-1,693
5	1000	1	1,191	0,522	-1,734
$\overline{x}$	1000	1	1,26606	0,0908	-1,3758

Table 5: Výsledné výhry hráčov zo simulácií v hre, ktorej dĺžka = 1

Ak by hráči hrali iba jednu hru, tak by hra značne vykazovala v prospech prvého hráča. Aproximácie stredných hodnôt výhier podľa naších 10^4 simulácií pre jednú hru sú:

$$E(H_1) \approx 1,26606$$

$$E(H_2) \approx 0,0908$$

$$E(H_3) \approx -1,3758$$

Pri viacerých hrách (Table 6)

simulácia$_i$	počet simulácií	počet hier	výhra H_1	výhraH_2	výhra H_3
1	1000	50	0,943	-6,57	5,606
2	1000	50	0,37	1,957	-2,348
3	1000	50	-0,103	3,138	-3,056
4	1000	50	0,874	-4,412	3,517
5	1000	50	-3,44	-3,956	7,375
$\overline{x}$	1000	50	-0,2712	-1,9686	2,2212

Table 6: Výsledné výhry hráčov zo simulácií v hre, ktorej dĺžka = 50

Zatial čo z (Table 5) sa dala vyvodiť nejaká logická spojitosť medzi voľbou H_1 a jeho výhodou výhry v prvej hre, pri väčšiom množstve to stráca význam pretože výhry jednotlivých H_i sa pohybujú úplne náhodne a z toho by sme usúdili že očakavané výhry H_i by mali byť približne rovnaké.

$$E(H_1) \approx E(H_2) \approx E(H_3) = 0$$

(d) Zistili sme, že priemerná dľžka hry je približne 20 kôl/ hodov kociek. (V pripade viacerych hracov napr n=21 je priemerna dlzka takisto 20 kol ale ak pocet hracov je taky ze sa musi zvolit nejaky nasobok 21k/n pociatocnych penazi na stole, tak sa dlzka hry zvacsuje, mohlo by sa urcit ze pre aky pocet hracov je dlzka hry najdlhsia? Napr pri 4 to je cca 38 hodov , 5=> 43 , 6=> 24, 7=> 20. Vyzera to tak ze cim vacsi pocet na stole je tym dlhsie trva koniec hry. Napr pre 20 hracov (cca 120 hodov) je pociatocny vklad na stole = 420 a prve hody budu len na to urcene aby sa z 420 dostali pod 21ku a potom sa to uz riadi normalnymi 20 kolami)

1.3 Nadstavba

Aká by mala byť hodnota, ktorá by nám, takmer určite vystačila na dohranie celej jednej hry, teda aby sa počas hry nestalo, že by sme nemali dostatok žetónov na doloženie, keď $F > \zeta$.

Označme $p(H_i)_j$ - stav penaženky i-teho hráča po j-tej hre , kde $i \in \{1, 2, ..., n\}$ & $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Každú hru sme vyberali spomedzi 3 hráčov najväčšiu stratu žetónov, ktoré sme si následne úkladali do vektora $\vec{v}_{m-1}$ pre ďalšie účely.
Ďalej označme $r(H_i)_j$ ako rozdiel stavu peňaženky pred (po j-1 kole) a po j-tom kole pre i-teho hráča , teda pre:

$$r(H_i)_j = P(H_i)_{j-1} - P(H_i)_j$$

Je zjavné:

- $r(H_i)_j > 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v mínuse
- $r(H_i)_j < 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v profite
- $r(H_i)_j = 0 \implies H_i$ je po j-tom kole v neutralite

Potom:

$$v_1 = \max\{\ r(H_1)_2,\ r(H_2)_2,\ r(H_3)_2\ \}$$
$$v_2 = \max\{\ r(H_1)_3,\ r(H_2)_3,\ r(H_3)_3\ \}$$
$$\vdots$$
$$v_{m-1} = \max\{\ r(H_1)_m,\ r(H_2)_m,\ r(H_3)_m\ \}$$

Týmto sposôbom bude prebiehať naša simulácia, kde keď daný vektor znazorníme graficky, tak dostávame následovné:

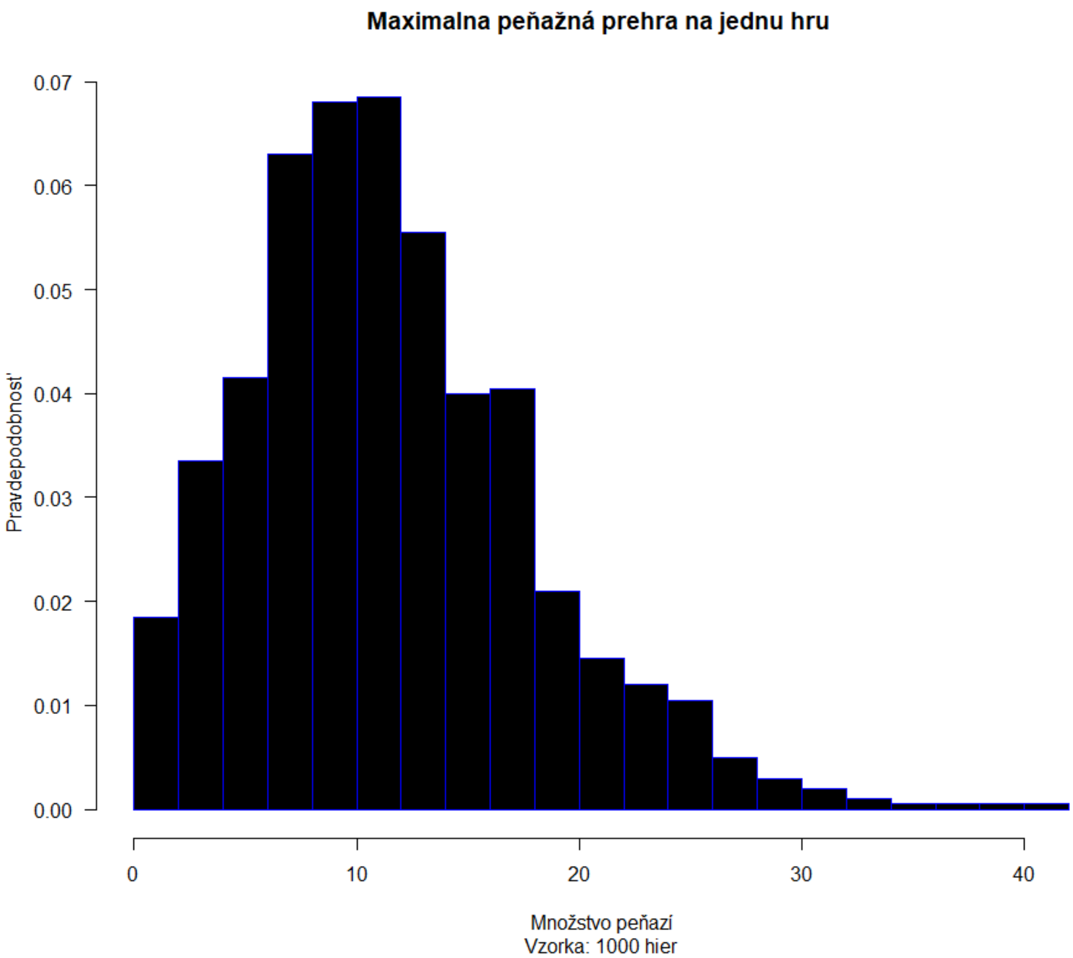

Figure 2: Histogram maximálnej prehry žetónov, za jednu hru

Dostali sme grafické riešenie koľkokrát pomedzi 1000 hier stačilo aké množstvo žetónov na dokonšenie hry, kde maximalny outlier = 41. Ak by sme chceli na základe dát mať 50% pravdepodobnosť na dohranie hry, potrebovali by sme na začiatok 11 žetónov, na 99% dohranie hry 29 žetónov.

2 Referencie

References

[1] Jiři Anděl, Matematika Náhody, matfyzpress vydavatelsví matematicko-fyzikalni fakulty univerzity karlovy, Praha, 2000

[2] Teória pravdepodobnosti, slajdy z prednášok, Katedra Matematických metód Fakulta Riadenia a Informatiky Žilinská Univerzita v Žiline, Žilina, 2014,dostupne na internete(23.10.2021): https://frcatel.fri.uniza.sk/users/alesko/PaS/prednaska5.pdf

[3] Wai-Sum Chan, Stochastik in der Schule, 1997, hmm co tady

[4] JAN-JÜRGEN MENGE,Das Mang-Kung-Spiel (2), working paper, Rotenburg,Rotenburg,2008, dostupné na internete(23.10.2021): https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang28-2008/Heft1/2008-1_menge.pdf