Programação Linear

Características

Técnicas mais utilizadas na abordagem de problemas em PO

Técnica de solução programável em computador facilitam sua aplicação.

Trata com alocação de recursos a atividades em competição, da melhor maneira possível (i.e., ótima).

Requer que todas as funções neste modelo sejam lineares. Esta característica de linearidade é interessante no que se refere à simplificação da estrutura matemática envolvida.

Resolvendo Problemas

Aquilo que se pode controlar e que deseja saber exatamente quanto vale

Quando se quer (maximizar ou minimizar) um determinado objetivo. É expressa em função das variáveis do problema

Limitam as combinações das variáveis a determinados limites

Exemplo 1:

Certa empresa fabrica dois produtos P1 e P2. O Lucro unitário do produto P1 é de 1.000 unidades monetárias e o lucro unitário do produto P2 é de 1.800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P1 e 30 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1.200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P1 e 30 unidades anuais para P2. Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro anual nesses itens?

Solução:

I – Construção do modelo de programação linear:

a) Quais as variáveis de decisão: aqui o trabalho consiste em explicitar as decisões que devem ser tomadas e representar as possíveis decisões. Neste caso, o que deve ser decidido é o plano de produção, i. é, quais as quantidades anuais que devem ser produzidas de P1 e P2.

Portanto, as variáveis de decisão serão x_1 e x_2

x_1 = quantidade anual a produzir de P1

x_2 = quantidade anual a produzir de P2

b) Qual o objetivo: aqui deve-se identificar o objetivo da tomada de decisão. Eles geralmente aparecem na forma de maximização de lucros ou receitas ou minimização de custos, perdas, etc. É a expressão (função) que calcula o valor do objetivo em função das variáveis de decisão. Neste problema o objetivo é maximizar o lucro, que pode ser calculado:

Lucro devido a P1: $1000.x_1$ (lucro por unidade de P1 x a quantidade produzida de P1)

Lucro devido a P2: $1800.x_2$ (lucro por unidade de P2 x a quantidade produzida de P2)

Lucro total: $L = 1000.x_1 + 1800.x_2$

Logo, o objetivo é: Maximizar $L = 1000.x_1 + 1800.x_2$

c) Quais as restrições: Cada restrição imposta na descrição do sistema deve ser expressa como uma relação linear (igualdade ou desigualdade), montadas com as variáveis de decisão. No exemplo 1 as restrições impostas pelo sistema são:

- Disponibilidade (anual) de horas para a produção: 1200 h.

horas necessárias para P1: $20.x_1$ (necessidade unitária x quantidade produzida)

horas necessárias para P2: $30.x_2$ (necessidade unitária x quantidade produzida)

Total de horas necessárias para produção: $20.x_1 + 30.x_2$

Restrição de disponibilidade de horas: $20.x_1 + 30.x_2 \leq 1200$

- Demanda (anual) de mercado para os produtos P1 e P2

Demanda por P1: 40 unidades

Quantidade a produzir de P1: x_1 unidades

Restrição de demanda por P1: $x_1 \leq 40$

Demanda por P2: 30 unidades

Quantidade a produzir de P2: x_2 unidades

Restrição de demanda por P2: $x_2 \leq 30$

Observação: x_1 e x_2 não podem assumir valores negativos, pois não há nenhum sentido nisto. Por esta razão colocam-se mais duas restrições denominadas restrições de não negatividade.

$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

d) Resumo do modelo:

$$\begin{cases} \text{Maximizar: } L = 1000.x_1 + 1800.x_2 \\ \text{Sujeito a: } \begin{cases} 20.x_1 + 30.x_2 \leq 1200 \\ \text{P1: } x_1 \leq 40 \\ \text{P2: } x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

II – Método gráfico para modelos de PL com duas variáveis de decisão:

Esta técnica consiste em representar num sistema de eixos ortogonais o conjunto das possíveis soluções do problema, i. é, o conjunto de pares (x_1,x_2) que obedecem ao grupo de restrições impostas pelo sistema em estudo. O desempenho do modelo é avaliado através da representação gráfica da função objetivo.

A representação gráfica de uma equação linear com duas variáveis é uma reta. Já a representação gráfica de uma inequação linear com duas variáveis é um dos semiplanos definidos pela reta correspondente à equação e o sinal da desigualdade.

Representação gráfica das restrições:

$$20.x_1 + 30.x_2 \leq 1200$$

O conjunto de pontos do plano que satisfazem a esta restrição é o conjunto dos pontos da reta $20.x_1 + 30.x_2 = 1200$ unido com o conjunto de pontos da correspondente desigualdade $\leq$, que corresponde a um dos 2 semiplanos abertos divididos pela reta.

fazendo-se $x_1 = 0$ teremos: $30.x_2 = 1200 \Rightarrow x_2 = 40$

fazendo-se $x_2 = 0$ teremos: $20.x_1 = 1200 \Rightarrow x_1 = 60$

II – Método gráfico para modelos de PL com duas variáveis de decisão:

Esta técnica consiste em representar num sistema de eixos ortogonais o conjunto das possíveis soluções do problema, i. é, o conjunto de pares (x_1,x_2) que obedecem ao grupo de restrições impostas pelo sistema em estudo. O desempenho do modelo é avaliado através da representação gráfica da função objetivo.

A representação gráfica de uma equação linear com duas variáveis é uma reta. Já a representação gráfica de uma inequação linear com duas variáveis é um dos semiplanos definidos pela reta correspondente à equação e o sinal da desigualdade.

Representação gráfica das restrições:

$$20.X_1 + 30.X_2 \leq 1200$$

O conjunto de pontos do plano que satisfazem a esta restrição é o conjunto dos pontos da reta $20.x_1 + 30.x_2 = 1200$ unido com o conjunto de pontos da correspondente desigualdade $\leq$, que corresponde a um dos 2 semiplanos abertos divididos pela reta.

fazendo-se $x_1 = 0$ teremos: $30.x_2 = 1200 \Rightarrow x_2 = 40$

fazendo-se $x_2 = 0$ teremos: $20.x_1 = 1200 \Rightarrow x_1 = 60$

$$x_1 \leq 40$$

O conjunto de pontos do plano que satisfazem a esta restrição é o conjunto dos pontos da reta $x_1 = 40$ unido com o conjunto de pontos da correspondente desigualdade, $\leqslant$, que corresponde a um dos 2 semiplanos abertos divididos pela reta. Esta reta é perpendicular ao eixo x_1 passando por 40 (ver figura 1).

$$x_2 \leq 30$$

O conjunto de pontos do plano que satisfazem a esta restrição é o conjunto dos pontos da reta $x_2 = 30$ unido com o conjunto de pontos da correspondente desigualdade , $\leqslant$, que corresponde a um dos 2 semiplanos abertos divididos pela reta. Esta reta é perpendicular ao eixo x2 passando por 30 (ver figura 1).

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

O conjunto de pontos do plano que satisfazem a estas restrições é o conjunto de todos os pontos que formam o primeiro quadrante do plano cartesiano x_1 X x_2.

$$x_1 \leq 40$$

O conjunto de pontos do plano que satisfazem a esta restrição é o conjunto dos pontos da reta $x_1 = 40$ unido com o conjunto de pontos da correspondente desigualdade, $\leqslant$, que corresponde a um dos 2 semiplanos abertos divididos pela reta. Esta reta é perpendicular ao eixo x_1 passando por 40 (ver figura 1).

$$x_2 \leq 30$$

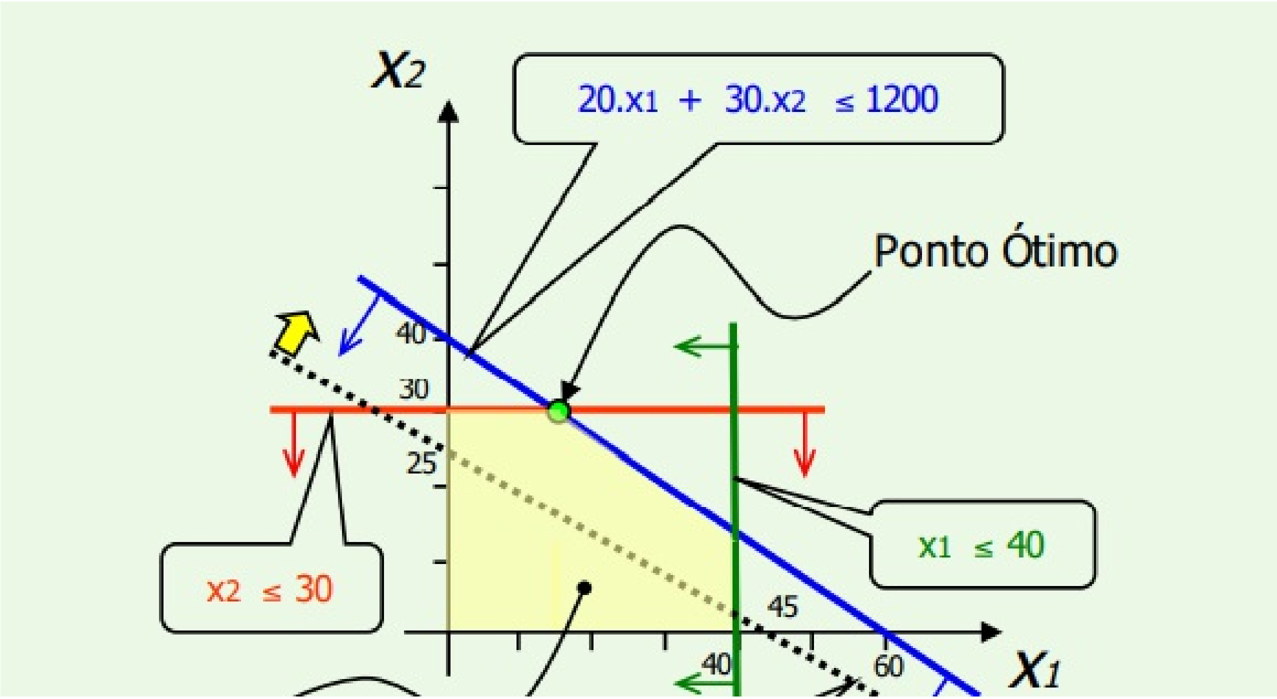
O conjunto de pontos do plano que satisfazem a esta restrição é o conjunto dos pontos da reta $x_2 = 30$ unido com o conjunto de pontos da correspondente desigualdade , $\leqslant$, que corresponde a um dos 2 semiplanos abertos divididos pela reta. Esta reta é perpendicular ao eixo x2 passando por 30 (ver figura 1).

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

O conjunto de pontos do plano que satisfazem a estas restrições é o conjunto de todos os pontos que formam o primeiro quadrante do plano cartesiano x_1 X x_2.

Como deve ser considerado o sistema de restrições simultâneas, o conjunto das soluções compatíveis ao problema de PL, resulta da intersecção destes semiplanos fechados, o que constitui um polígono convexo fechado.

Qualquer ponto deste polígono corresponde a uma solução compatível, i. é, atende a todas restrições. Há infinitos pontos nesse conjunto. Porém, o valor da função objetivo muda de acordo com o ponto. Procura-se, então, aquele ponto (ou aqueles pontos, se mais de um) que maximiza(m) o valor da função objetivo.



X2
20.x1 + 30.x2 ≤ 1200
Ponto Ótimo
40
30
25
x2 ≤ 30
x1 ≤ 40
45
40
60
X1

O Problema do Pintor

Um Pintor faz quadros artesanais para vender numa feira que acontece todo dia à noite. Ele faz quadros grandes e desenhos pequenos, e os vende por R$5,00 e R$3,00, respectivamente. Ele só consegue vender 3 quadros grandes e 4 quadros pequenos por noite. O quadro grande é feito em uma hora (grosseiro) e o pequeno é feito em 1 hora e 48 minutos (detalhado). O desenhista desenha 8 horas por dia antes de ir para a feira. Quantos quadros de cada tipo ele deve pintar para maximizar a sua receita?

A Decisão do Pintor

- O que o desenhista precisa decidir?
- O que ele pode fazer para aumentar ou diminuir a sua receita?

- A decisão dele é como usar as 8 horas diárias.
- Quantos desenhos pequenos e grandes ele deve fazer.

- Precisamos traduzir a decisão do Pintor em um modelo de programação linear para resolvê-lo;

- Chamemos de x_1 e x_2 as quantidades de quadros grandes e pequenos que ele faz por dia, respectivamente.

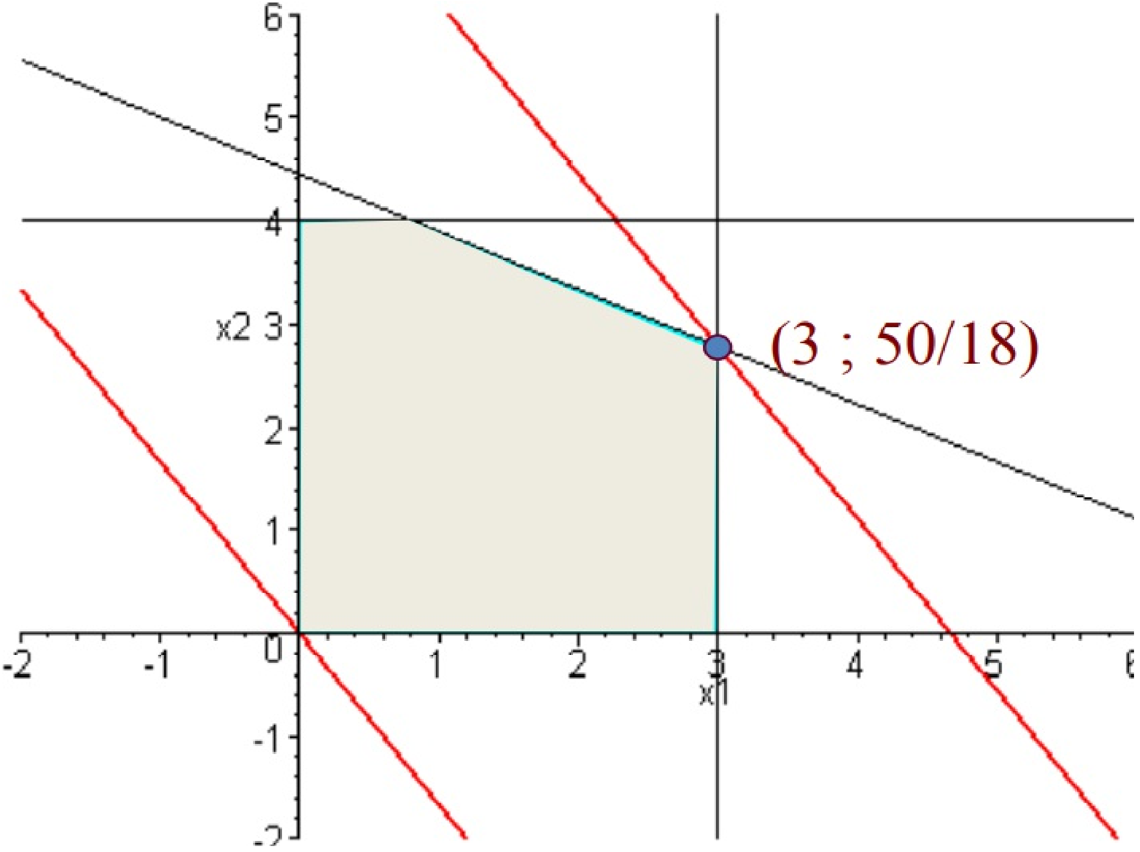
- O Objetivo do Pintor é aumentar sua receita ao máximo.

Modelo para decisão do pintor

- Função-objetivo
  - Maximizar a receita

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

- Restrição de vendas de quadros grandes $\quad x_1 \leq 3$
- Restrição de vendas de quadros pequenos $\quad x_2 \leq 4$
- Restrição de tempo $\quad x_1 + 1{,}8x_2 \leq 8$
- Não negatividade $\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



(3 ; 50/18)
x2
x1
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
1
2
3
4
5

Construir o modelo matemático de programação linear dos sistemas descritos a seguir:

1) Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de $5,00 e o do cinto é de $2,00, pede-se: o modelo do sistema de produção do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro por hora.