Линейная алгебра. Векторы

Что такое линейная алгебра?

Линейная алгебра — это раздел математики, изучающий векторы, векторные пространства, линейные преобразования и системы линейных уравнений. То есть линейная алгебра — это язык и инструментарий для работы с векторами.

Что такое вектор?

Часто объекты, процессы из материального мира описываются какими-то наборами их числовых характеристик.
Вектор — упорядоченный конечный список чисел. Это любой элемент в пространстве, который мы получаем в виде данных. Например, каждый элемент таблицы удобно представить в виде вектора.

Запись векторов.
Обычно вектор записывается в виде последовательности чисел через запятую, и всё это берётся в круглые скобки. Когда вектор обозначается одной буквой, то над этой буквой ставится чёрточка.
Пример: $x^{-} = (x_1, \ldots, x_n)$
При этом сами числа $x_1, \ldots, x_n$ называются **компонентами** или **координатами вектора**.
Пример вектора:

$$(-1.1, 0.0, 3.6, -7.2)$$

В различных математических статьях можно также увидеть запись в виде так называемого вектора-столбца, когда компоненты вектора записываются по вертикали, и всё это берётся либо в круглые, либо в квадратные скобки.

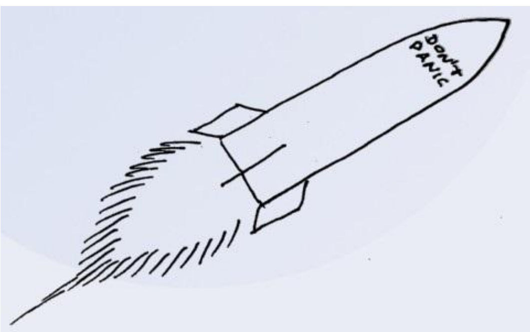
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Пример вектора-столбца: $\begin{bmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{pmatrix}$

Векторы бывают разных размеров: от одномерного, представленного одним числом, до n-мерного.

Пример вектора. Ракета, летящая в космосе.

Ракета, летящая в космосе, описывается своими координатами в пространстве x, y, z и компонентами ее скорости v_x, v_y, v_z
То есть шесть чисел описывают то, как устроена жизнь ракеты сейчас, и что с ней будет дальше.



(x, y, z, v_x, v_y, v_z)
Ракета, летящая в космосе

Пример вектора. Цифровое изображение.

Цифровое изображение состоит из отдельных пикселей, а каждый пиксель задается числом — яркостью в данной точке.

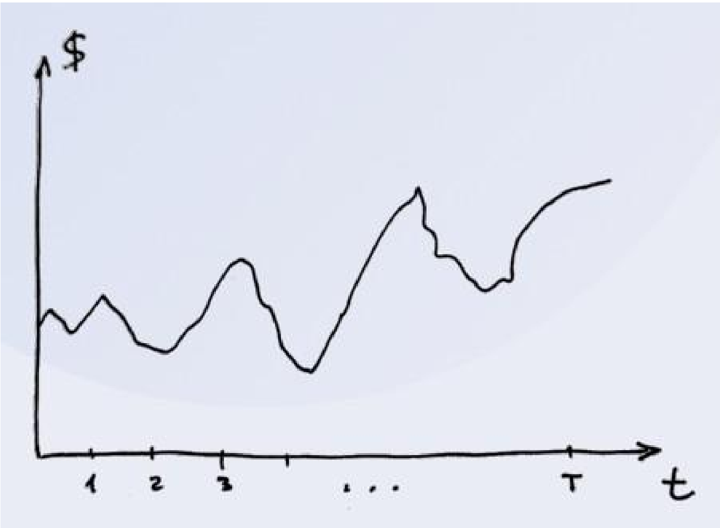
$(x_1, x_2, \ldots, x_{512 \cdot 512})$

Изображение 512x512

Все пиксели можно записать просто в строчку. Их будет довольно много. Если изображение 512x512, то получается ровно 512 умножить на 512 чисел. Они полностью описывают изображение.

Пример вектора. Различные курсы валют, котировки акций и другие временные ряды.

К временным рядам относится также запись звука или отчасти видео. Все эти вещи превращаются в последовательность чисел, так что мы смотрим на их значение в отдельные отсчёты времени — один, два и так далее, T большое. И это становится тоже упорядоченным набором чисел.

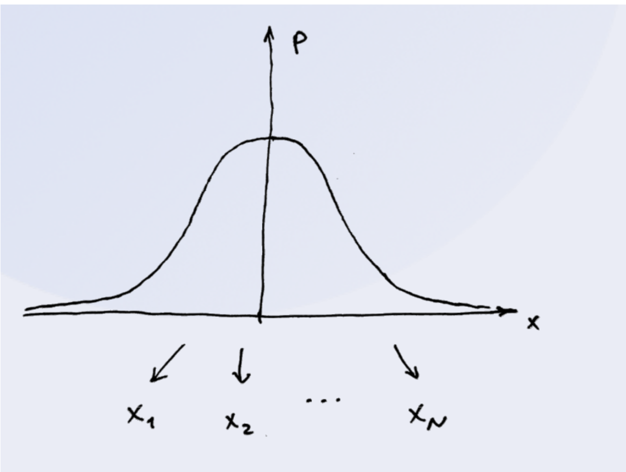


$(x_1, x_2, \ldots, x_T)$

Временной ряд

Пример вектора. Выборка реализации случайной величины.

Изначально есть какая-то случайная величина, мы делаем какие-то испытания и смотрим на то, что вышло в итоге. Первое испытание, второе испытание и так далее, N-ое испытание. Чтобы сделать какой-то статистический анализ этих чисел, мы их тоже упаковываем в компактный набор, который называется вектор этих чисел.



$(x_1, x_2, \ldots, x_N)$

выборка реализации случайной величины

Можно ли представить слова в виде вектора?

Да, для этого нужно понять, как распарсить слово по буквам и представить вектор в виде букв.

Буквы алфавита занимают определённое место и могут быть обозначены в виде порядкового номера (А-1, Б-2, Я-33). Любое слово можно представить как вектор в 33-мерном пространстве.

Но т.к. встречаются строчные и прописные буквы, то это будет вектор в 66-мерном пространстве.

При работе с текстами можно использовать и другое представление, так называемый “мешок слов”. Сначала мы составляем словарь всех слов, встречающихся в текстах (например в отзывах на фильмы), а затем каждый текст мы кодируем N-мерным вектором **x**, где N - число слов в словаре. Каждая координата этого вектора будет соответствовать индексу слова в словаре. Тогда каждая координата X_i будет показывать сколько раз i-е слово из словаря встретилось в тексте (если слово в тексте не появилось X_i=0)

good movie
not a good movie
did not like

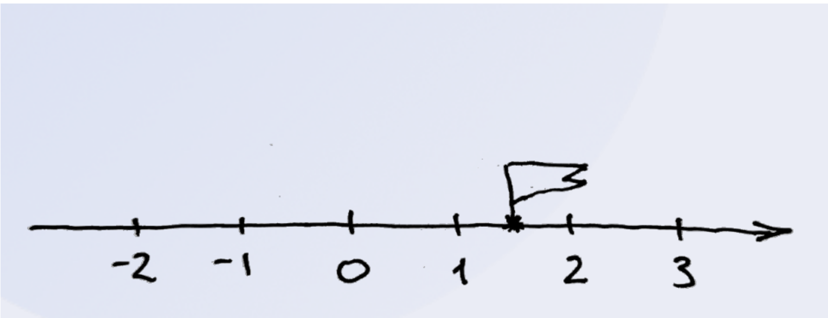
good	movie	not	a	did	like
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1

Геометрическая интерпретация векторов.
Когда есть длинный набор чисел, то с ним удобно делать разные арифметические операции, но не очень удобно представлять, как это выглядит. Для этого мы посмотрим как же устроена геометрическая интерпретация векторов.

Скаляр — это число. Обычно оно может быть натуральным либо действительным или десятичным. По сути вектор – набор из нескольких скаляров

$$s \in \mathbb{N}$$

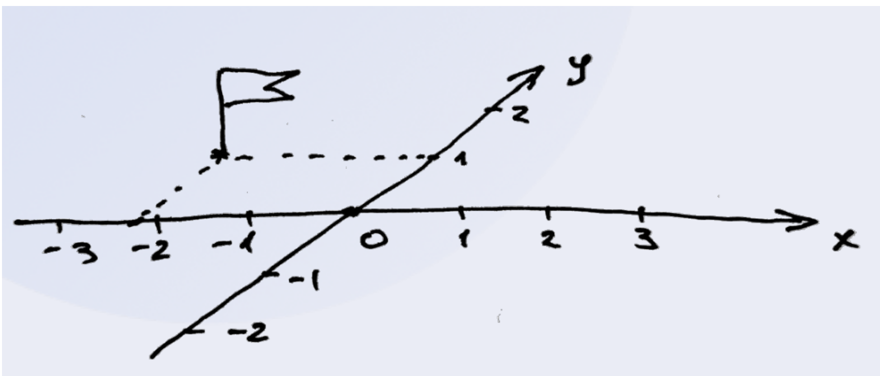
Вектор из одного числа (“скаляр”) - точка на прямой.



Одномерный вектор, который состоит ровно из одного числа. Точка, равная 1.5.

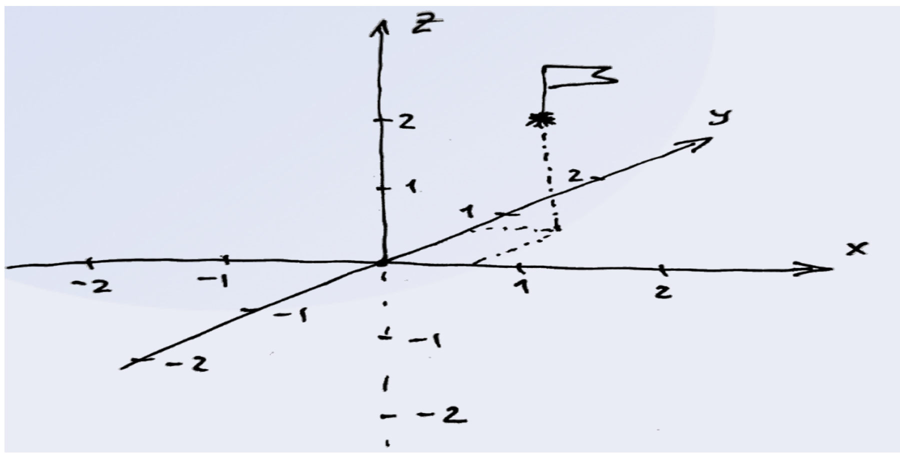
v = (1.5)

Вектор из двух чисел — точка на плоскости
Здесь первая компонента вектора — это координата точки по оси x, а вторая компонента вектора — это координата точки по оси y.



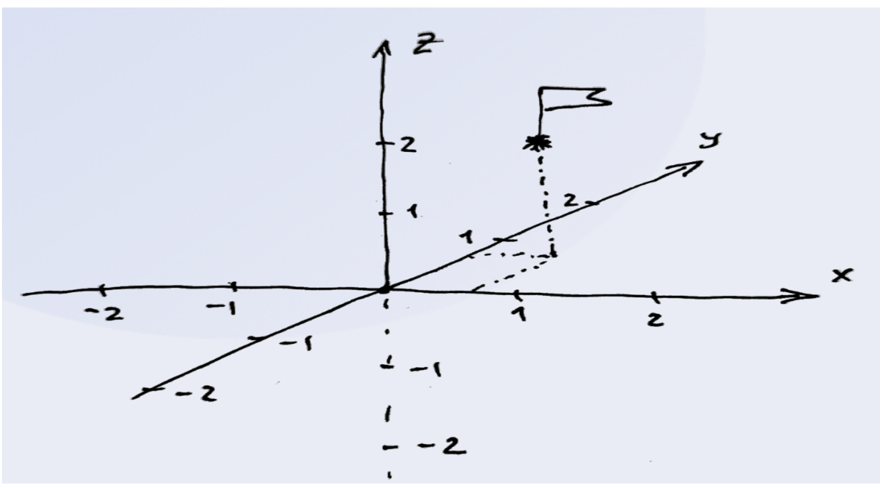
v = (-2.2, 1.0)

Вектор из трёх чисел — точка в трёхмерном пространстве



Здесь изображён вектор с координатами 0.7, 0.7, 1.5.
v = (0.7, 0.7, 1.5)

Вектор из N чисел — точка в N-мерном пространстве
N-мерное пространство можно представить по аналогии с трёхмерным пространством, только с большим количеством координат.



v = (0.7, 0.7, 1.5, ...)

Векторы на Python.

Пример: Создание и вывод 4-мерного вектора

Для работы с векторами на Python мы используем библиотеку numpy. Это довольно стандартная большая библиотека для работы с векторами и матрицами.

В первой строчке мы её импортируем. И дальше мы создаем вектор из четырёх компонент с помощью команды np.array. Это некоторый объект класса array, что переводится как «массив». В третьей строчке мы просим Python вывести нам то, что находится в переменной v. Мы видим, что у нас получился массив из тех самых чисел, которые мы туда передали.

При создании вектора пишем в квадратных скобках, то есть в виде питоновского списка, те числа, из которых мы хотим сделать вектор. Для разнообразия здесь включено стандартное обозначение для числа Пи (np.pi). При выводе результата мы получим число. В четвертой строке мы вызываем очень полезный метод shape, который показывает нам какого размера наш вектор v. Мы видим, что не случилось ничего неожиданного и получился вектор размерности 4.

```
[1]: import numpy as np

[2]: v = np.array([0., 1., 10., -np.pi])

[3]: v

[3]: array([ 0.        ,  1.        , 10.        , -3.14159265])

[4]: v.shape

[4]: (4,)
```

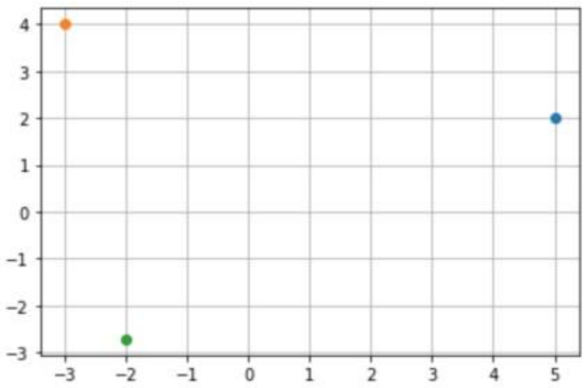
Пример: Создание трёх векторов размерности 2 и их рисование с помощью библиотеки matplotlib

В первой ячейке создаём векторы v1, v2 и v3, соответственно с числами 5 2, -3 4 и -2 e, где e — то самое число — основание натурального логарифма. Далее импортируем библиотеку matplotlib. Затем в нижней строчке мы изображаем наш вектор на плоскости. Обратите внимание как мы обращаемся к компонентам отдельных векторов. Сначала мы обращаемся к нулевой компоненте вектора, потом к первой v1[0], v1[1]. В Python компоненты вектора нумеруются с нуля, соответственно в двумерном векторе есть компоненты номер 0 и номер 1.

```
[5]: v1 = np.array([5., 2.])
     v2 = np.array([-3., 4.])
     v3 = np.array([-2., -np.e])

[9]: import matplotlib.pyplot as plt

[13]: plt.figure()
      plt.plot(v1[0], v1[1], 'o')
      plt.plot(v2[0], v2[1], 'o')
      plt.plot(v3[0], v3[1], 'o')
      plt.grid()
```



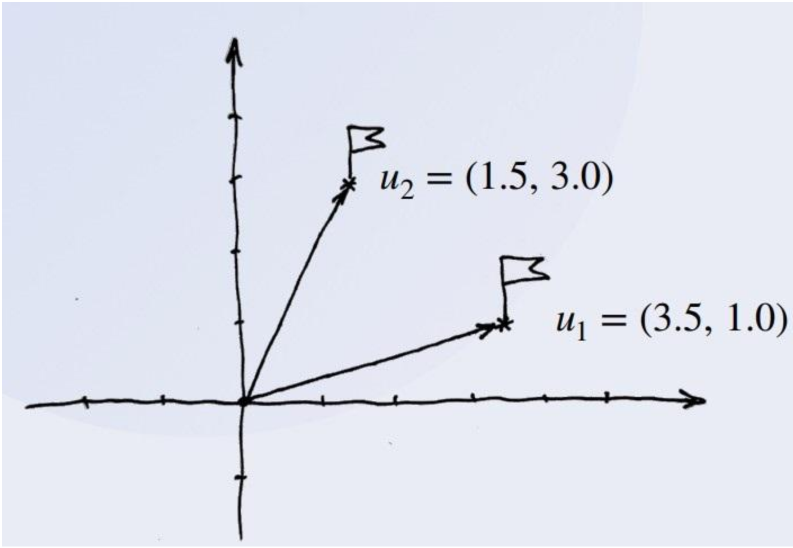
Какие основные операции с вектором?

Сложение и вычитание векторов

Когда у нас есть два вектора одной и той же размерности, то есть одной и той же длины, мы можем их складывать и вычитать поэлементно. Это аналогично тому, как мы в школе учились складывать и вычитать в столбик. Мы как будто бы пишем один вектор под другим, и тогда первая компонента нового вектора равна $a_1 + b_1$, вторая компонента данного вектора - $a_2 + b_2$ и так далее, $a_n + b_n$

$$\begin{array}{r} (a_1, \ldots, a_n) \\ + \; (b_1, \ldots, b_n) \\ \hline (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \end{array}$$

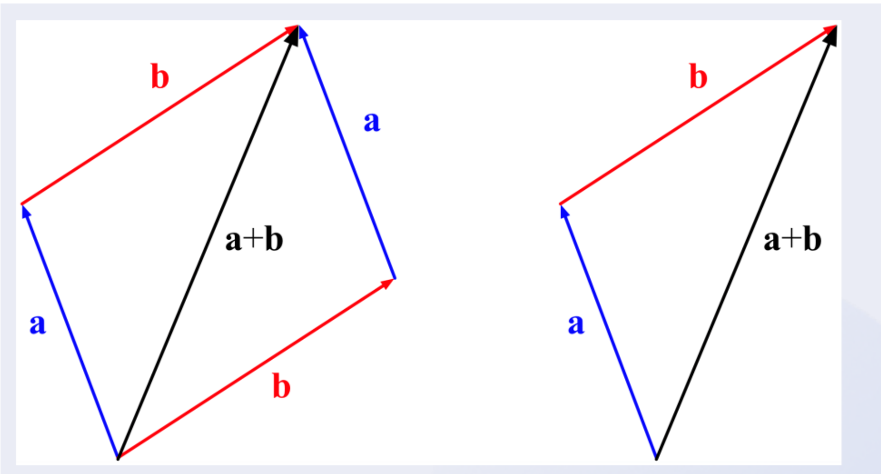
Геометрический смысл сложения векторов



Чтобы его понять, мы вместо точек на плоскости будем представлять вектор стрелку, которая тянется из начала координат в нашу точку. Тогда сложение векторов описывается так: мы берем наш первый вектор a и к нему приставляем второй вектор b, и тогда третья сторона треугольника — это и будет вектор a + b.

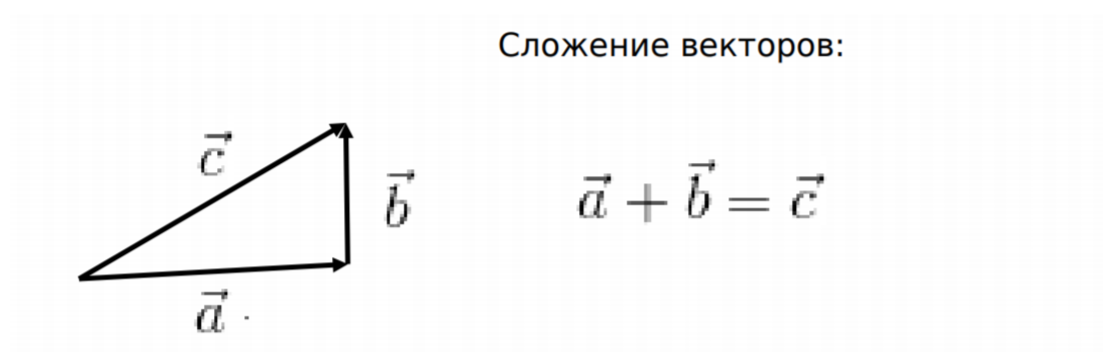
Картинка слева: вместо треугольника можно также нарисовать параллелограмм, достроить его. Получится то же самое. Соответственно диагональ нашего параллелограмма — это и будет сумма векторов a и b.

Два треугольника — слева и справа: мы видим, что a + b = b + a



Сложение на примере 2х векторов в 2х мерном пространстве

Вспомним, как производятся действия с векторами. Сложением будет вектор c, начало которого идет от начала вектора a и конец которого идёт в конец вектора b. Если мы складываем математически, то мы складываем координаты точек A, B и C.



Сложить два вектора на Python: мы используем значок «+». В первой ячейке мы создали два вектора: a и b. Затем сложили и вычли их. Вычитаем также с помощью обычного «-». В конце показано, что если мы вычтем a из a, то мы получим вектор из одних нулей, так называемый «нулевой» вектор.

```
[2]: a = np.array([0., 1., 10., -np.pi])
     b = np.array([-1., 5., -3., 0.])

[3]: a+b

[3]: array([-1.        ,  6.        ,  7.        , -3.14159265])

[4]: a-b

[4]: array([ 1.        , -4.        , 13.        , -3.14159265])

[5]: a-a

[5]: array([0., 0., 0., 0.])
```

Нулевой вектор

Вычитание 2х векторов в пространстве делается через сложение. Выполняем операцию умножение вектора на скаляр. Складываем вектор a и вектор –b. От начала вектора a строим вектор –b' . Далее у нас идет сложение 2х векторов. Из начала вектора a в конец вектора –b' идет вектор c.

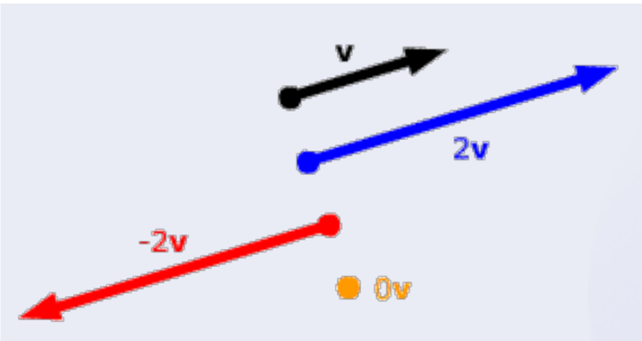
Умножение и деление векторов на числа.

Раз векторы можно складывать, то (по аналогии с обычными числами) мы можем умножить их на числа. Это происходит по тому же принципу, что на примере. У нас было одно яблоко, второе яблоко, третье яблоко — все это означает, что 3 умножить на яблоко.

$a = (a_1, \dots, a_n)$

$a + a + a = 3 \cdot a = (3a_1, \dots, 3a_n)$

Соответственно, вектор a, плюс вектор a, плюс ещё вектор a, это то же самое, что 3 умножить на a. Все это работает так, как интуитивно хочется, по аналогии с этим мы можем определить умножение и деление векторов на любые числа, в том числе отрицательные, в том числе числа меньше единицы. Например на картинке мы изначально берём черный вектор v, тогда вектор 2v — это стрелка вдоль того же направления, только в два раза длиннее, а вектор —2v — это стрелка, направленная в противоположную сторону, и той же длины, что и 2v. 0v — это уже встречавшийся нам нулевой вектор - точка в начале координат.



Если мы захотим два вектора умножить друг на друга, то numpy разрешает нам такое сделать, с помощью операции умножения «*». Тогда наш вектор будет умножен поэлементно, также как в столбик. Даже можно разделить a на b поэлементно. Но если в векторе b у нас были нули, как на примере, то numpy выдаст нам предупреждение, что пришлось разделить на ноль, в результате у нас получится странный символ в четвертой компоненте -inf, что значит «минус бесконечность».

```
[2]: a = np.array([0., 1., 10., -np.pi])
     b = np.array([-1., 5., -3., 0.])

[3]: a*b

[3]: array([ -0.,   5., -30.,  -0.])

[4]: a/b

/Users/1/miniconda3/envs/37/lib/python3.7/site-packages/ipyke
rnel_launcher.py:1: RuntimeWarning: divide by zero encountere
d in true_divide
  """Entry point for launching an IPython kernel.
[4]: array([-0.        ,  0.2       , -3.33333333,        -inf])
```

Результат того, что в векторе b был ноль.

У поэлементного умножения векторов нет геометрического смысла.

В numpy эта операция используется для ускорения вычислений: чтобы одновременно умножить/разделить много пар чисел. Есть у этого некоторые исключения, а именно для размерности 2, 3 и 4. Там есть математически стройные операции умножения. Для размерности два — это комплексные числа, для размерности три - это так называемые векторные умножения (произведения) в трёхмерном пространстве и для размерности четыре — это алгебра кватернионов. Но эти все понятия из области чистой математики, и в Data Science особенно не нужны.

Длина вектора - это длина стрелки с начала уровня координат в ту точку в n-мерном пространстве, которая описывается компонентами вектора. Вычислить длину можно по теореме Пифагора вот по такой формуле:

$|a| = \sqrt{a1^2 + \dots + an^2}$

Подсчёт длины вектора

Длина вектора может быть подсчитана по формуле евклидова расстояния:

$$|x| = \sqrt{\sum_i (|x_i|^2)}$$

где p — размерность вектора.

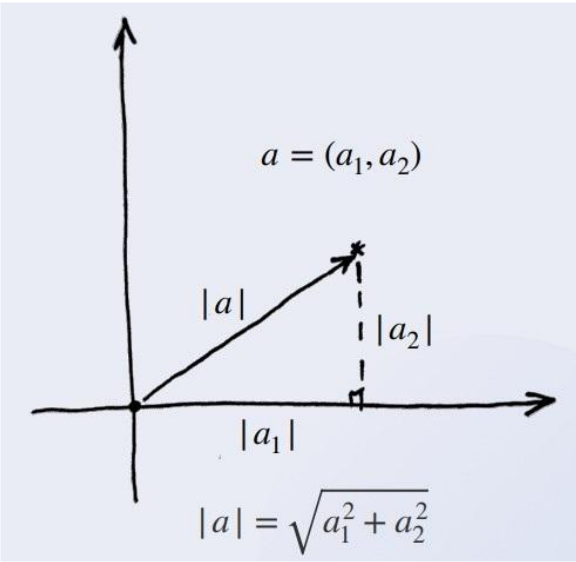
Для двумерного вектора данная формула становится следующего вида и называется L^2 нормой:

$$|a| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

где a — вектор с координатами (x,y).

Пример. Двумерный вектор

У нас есть вектор a, который состоит из двух компонент — a_1 и a_2, тогда его длина — это отрезок из начала координат в точку (a_1, a_2), а компоненты вектора — это соответственно длины двух катетов прямоугольного треугольника. И по формуле мы находим, что длина нашего вектора — это корень из квадратов этих двух катетов. Длина вектора ещё называется Евклидовой нормой или L^2 нормой, это название особенно часто встречается в машинном обучении, когда речь идёт о методах регуляризации.



Скалярное произведение векторов.

Сначала кажется, что это довольно сложная операция, которая определяется так: нам нужно взять два вектора a и b, сначала их покомпонентно умножить $a_i * b_i$, а потом это все просуммировать.

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i * b_i$$

Соответственно в итоге мы получаем некоторое одно число, которое обозначается как (a,b), по английски еще иногда называется как dot product и обозначается либо как a · b, либо как ⟨a, b⟩. На Python эта операция реализована с помощью функции dot. Загружаем библиотеку numpy, в которой есть эта функция, к векторам a и b мы вызываем эту функцию np.dot. Мы видим, что скалярное произведение наших двух векторов равно -25.

```
[1]: import numpy as np

[2]: a = np.array([0., 1., 10., -np.pi])
     b = np.array([-1., 5., -3., 0.])

[3]: np.dot(a, b)

[3]: -25.0
```

Скалярное произведение двух векторов равно -25.

Зачем нужна эта сложная и с ходу какая-то не интуитивная операция? Она оказывается очень полезной для самых различных расчётов с векторами. К тому же в расчётах с матрицами подобные операции встречаются повсеместно.

Несколько полезных свойств скалярного произведения.

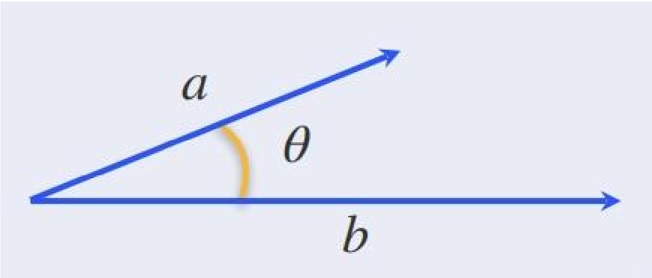
Скалярное произведение вектора на себя есть квадрат длины вектора.

$$(a, a) = \sum_{i=1}^{n} a_i * a_i = |a|^2$$

Мы можем видеть, что если мы умножим a скалярную на a, то это по определению сумма a_i, умноженная на a_i, то есть ровно квадрат его длины. Соответственно скалярное произведение мы можем использовать, чтобы вычислять длину вектора.

Для двух разных векторов a и b скалярное произведение можно использовать, чтобы измерить угол между ними. Для этого используется такое свойство скалярного произведения: скалярное произведение любых a и b равно произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(a,\ b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$$



Соответственно, если мы вычислили скалярное произведение, мы знаем длины векторов a и b, а их мы тоже можем узнать с помощью скалярного произведения, то разделив одно на другое, мы находим косинус угла θ между нашими векторами. Полезное следствие из этого то, что векторы a и b перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 0$$

Потому что косинус равен 0 тогда и только тогда, когда угол равен 90 градусов или -90, что то же самое.
Векторные свойства, которые помогают нам вычислять скалярные произведения. Во-первых скалярное произведение симметрично. Мы можем a и b переставить , получается то же самое.

$$(a, b) = (b, a)$$

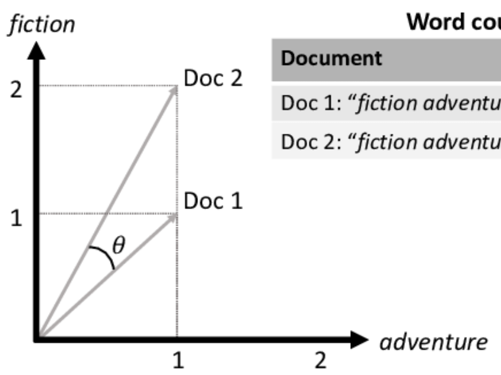
Также оно хорошо ведёт себя со сложением/вычитанием векторов и умножением/делением на скаляры. Когда мы скалярно умножаем вектор $\lambda a + \mu b$ на вектор c, то мы можем раскрыть скобки и вынести скаляры наружу. У нас будет скаляр λ, умноженный на произведение a и c плюс скаляр μ, умноженный на произведение b и c.

$$(\lambda a + \mu b, c) = \lambda(a, c) + \mu(b, c)$$

Все это помогает достаточно гибко раскладывать разные сложные скалярные произведения на маленькие компоненты, которые по отдельности уже легко посчитать.

А что можно делать на практике со скалярным произведением и косинусом?

Косинус между векторами может быть использован, например, для поиска похожих документов в больших коллекциях текстов:



Word count per document

Document	*fiction*	*adventure*
Doc 1: *"fiction adventure"*	1	1
Doc 2: *"fiction adventure fiction"*	2	1

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{Doc\ 1} \cdot \overrightarrow{Doc\ 2}}{\|\overrightarrow{Doc\ 1}\| \|\overrightarrow{Doc\ 2}\|} = \frac{(1*2) + (1*1)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}} = 0.95$$

Если мы закодируем каждый документ в виде мешка слов, то мы можем посчитать косинус угла между векторами документов. Если значение косинуса будет близко к 1, это значит, что угол между ними небольшой, векторы сонаправлены, а значит документы друг на друга похожи (простой пример с расчётом косинуса для документов с двумя уникальными словами на картинке выше). Если же представить ситуацию, что у двух документов нет общих слов, то можно посчитать, что косинус между их векторами будет равен 0. Т.е. эти вектора будут ортогональными (перпендикулярными), а значит очень непохожими.

Таким образом простое кодирование документов в виде мешка слов, и применение операции подсчёта косинуса между ними может быть использовано для поиска похожих текстов и элементарной рекомендательной системы.

Линейная зависимость векторов

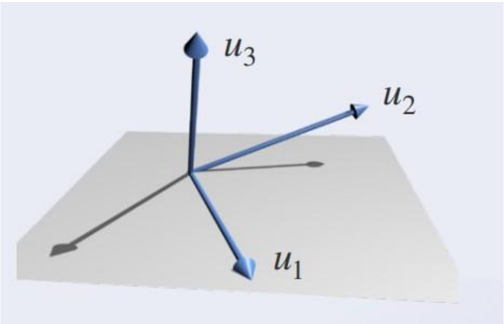
Линейная комбинация векторов.

Вектор v есть линейная комбинация векторов $u_1, \ldots, u_k$, если существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$
То есть вектор v — это сумма векторов u_i с коэффициентами α_i. То есть мы можем умножить вектора u_i на некие числа и складывать их между собой, чтобы получить вектор v.
Геометрически, если вектор v есть линейная комбинация векторов $u_1, \ldots, u_k$, это означает, что вектор v лежит в гиперплоскости, натянутой на векторы $u_1, \ldots, u_k$. Это можно представить, глядя на картинки ниже:

Картинка слева. Вектор v лежит в плоскости, натянутой на векторы u_1 и u_2, из этого мы делаем вывод, что вектор v — это сумма u_1 и u_2 с какими-то численным коэффициентами.
Картинка справа. Вектор v пропорционален вектору u_2, то есть v есть какое-то число, умноженное на u_2 и соответственно его можно представить как сумму u_1 и u_2 с какими-то числами, при этом u_1 будет входить с нулевым коэффициентом, что тоже считается.

Линейная независимость.
Векторы u1, ..., uk линейно независимы, если единственный способ сделать нулевую линейную комбинацию из них - это взять все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ равными нулю.
$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = 0$
То есть иными словами как только какое-то число от 0 отличается, то мы никогда не получим 0 справа, там будет какой-то ненулевой вектор.
Например возьмем векторы:
$u_1 = (1,0,0)$
$u_2 = (0,1,0)$
$u_3 = (0,0,1)$
Можно показать, что какие бы мы ни брали ненулевые коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и не складывали наши вектора с этими коэффициентами u_i, мы никогда не получим 0.

Геометрическое представление:



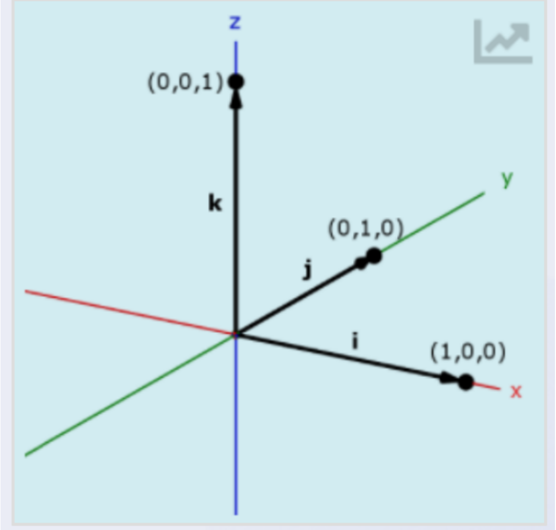
У нас есть векторы u_1, u_2, u_3 и они все линейно независимы. Мы видим на этой картинке, что ни один из этих векторов не лежит в плоскости, натянутой на два других. Действительно, есть математическое утверждение, которое говорит нам о том, что векторы $\mathbf{u_1, \ldots, u_k}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда ни один из них не есть линейная комбинация других.

Базис - набор линейно независимых векторов. К нему нельзя добавить ещё один вектор и остаться линейно независимыми. Иными словами это такой максимальный набор линейно независимых векторов.
Вектора, записанные слева — это базис. Сами векторы u_1, u_2, u_3 линейно независимы. К ним нельзя добавить ещё один, чтобы вся система осталась линейно независимой.
Справа у нас не базис. Хотя эти векторы тоже линейно независимы, но к ним можно добавить ещё один вектор.

Это — базис:	Это — не базис:
$u_1 = (1,0,0)$	$u_1 = (1,0,0,0)$
$u_2 = (0,1,0)$	$u_2 = (0,1,0,0)$
$u_3 = (0,0,1)$	$u_3 = (0,0,1,0)$

Таблица слева ещё называется стандартным базисом, потому что вектор u_1 — это единичный вектор по оси x, вектор u_2 — это единичный вектор по оси y и вектор u_3 — это единичный вектор по оси z.

Стандартный базис



Разложение по базису.

Базис по сути — это система координат в векторном пространстве. Разберём это подробнее.

Если векторы u1, ..., uk образуют базис, то, добавив к ним любой другой вектор v, получаем линейно зависимый набор векторов. Это значит, что тот новый вектор v есть линейная комбинация векторов u1, ..., uk :

$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$$

То есть вектор v можно представить как сумму векторов базиса с какими-то численными коэффициентами. Тогда числа α1, ..., αk называются координатами вектора v в базисе u1, ..., uk. Например, просто стандартные компоненты вектора, которые у нас были всегда (числа в строку, которые образуют вектор) — это на самом деле координаты вектора в стандартном базисе. Как же найти координаты вектора в каком-нибудь нестандартном базисе? Это не слишком сложная и не слишком простая задача, но её особенно удобно и просто решать, когда у нас хороший базис. Например, когда векторы базиса взаимно ортогональны и все имеют единичную длину. Это так называемый **ортонормированный** базис.

Если все векторы базиса $\mathbf{u_1, \ldots, u_k}$ взаимно ортогональны и длины 1,

то $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ можно найти так: $\alpha_i = (v, u_i)$

αi равно скалярному произведению вектора v на ui вектор базиса.

Замена координат.

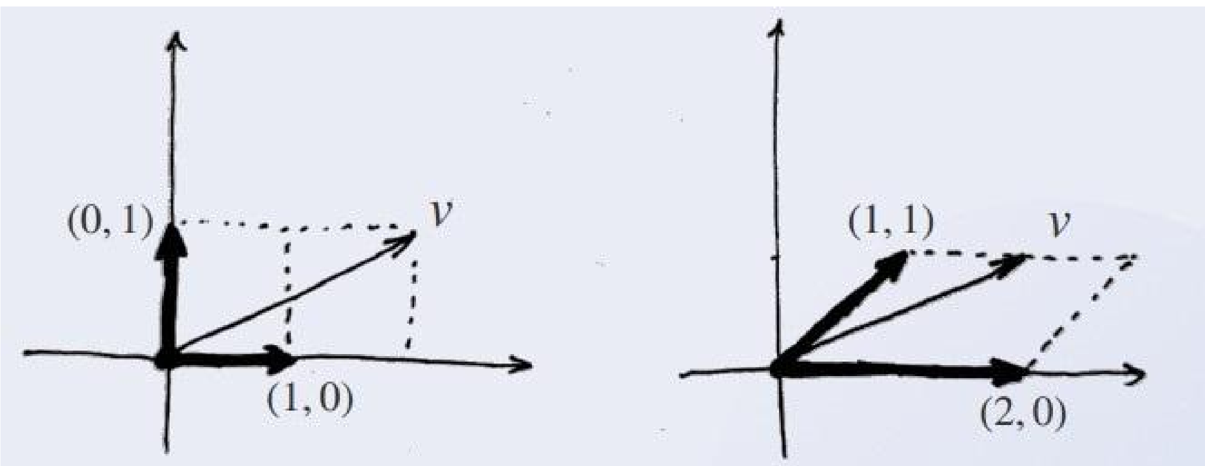
Базис задаёт нам некоторую систему координат в пространстве векторов. И на самом деле для разных задач могут быть удобны разные базисы. У нас есть какое-то изначальное написание вектора в стандартном базисе, но может так оказаться, что есть какой-то более удобный базис, в котором например вектор записывается более компактно, у него большая часть компонент оказывается нулями, и на самом деле он живёт не в каком-то огромном пространстве, как например было наше пространство картинок, а в каком-то пространстве меньшей размерности. И с помощью такого представления можно сжимать изображение, и у этого есть ещё разные полезные применения.

Переход от представления вектора в одних координатах к представлению в других называется заменой координат. Сами векторы при этом не меняются, меняется только базис.

Слева изображён вектор, который в стандартном базисе имеет запись (2,1), что означает, что нам нужно 2 умножить на первый вектор стандартного базиса и 1 умножить на второй вектор стандартного базиса. v = 2 · (1,0) + 1 · (0,1).

А теперь мы попытаемся записать тот же самый вектор v, но в другом базисе, который состоит из векторов (2,0) и (1,1). Легко видеть, что в этом базисе вектор v имеет координаты ½ и 1. То есть нам нужно умножить первый вектор (2,0) на ½ и добавить 1 умножить на (1,1), чтобы получить тот же самый вектор v. Это пример как один и тот же вектор v может быть записан в двух разных системах координат.

Сейчас мы сделали замену координат вручную, однако замены координат удобно задавать матрицами.




```
v = 2 · (1,0) + 1 · (0,1)          v = 0.5 · (2,0) + 1 · (1,1)
```