Annotationes Meae Mathematicae

Gustavo Aragão

Sumário

1 Lógica e Notação . . . **5**
- 1.1 Conectivos . . . 5
- 1.2 Quantificadores . . . 5
- 1.3 Pontuações . . . 5
- 1.4 Alfabeto Grego . . . 7

2 Teoria dos Conjuntos . . . **7**
- 2.1 Conceitos Básicos . . . 7
  - 2.1.1 Definição . . . 7
  - 2.1.2 Tipos . . . 8
  - 2.1.3 Intervalos . . . 8
  - 2.1.4 Pares Ordenados . . . 8
  - 2.1.5 Produto Cartesiano . . . 8
  - 2.1.6 Relação Binária . . . 8
  - 2.1.7 Domínio . . . 8
  - 2.1.8 Contradomínio . . . 8
  - 2.1.9 Imagem . . . 8
  - 2.1.10 Relação Inversa . . . 9
- 2.2 Relações . . . 9
  - 2.2.1 Subconjuntos . . . 9
  - 2.2.2 Igualdade . . . 9
  - 2.2.3 Reunião . . . 9
  - 2.2.4 Interseção . . . 9
  - 2.2.5 Diferença . . . 9
  - 2.2.6 Complementar . . . 9
  - 2.2.7 Propriedades . . . 9
- 2.3 Conjuntos Numéricos . . . 9
  - 2.3.1 Naturais . . . 9
  - 2.3.2 Inteiros . . . 10
  - 2.3.3 Racionais . . . 10
  - 2.3.4 Irracionais . . . 10
  - 2.3.5 Reais . . . 10
  - 2.3.6 Imaginários . . . 10
  - 2.3.7 Complexos . . . 10

3 Aritmética . . . **10**
- 3.1 Soma . . . 10
  - 3.1.1 Definição . . . 10
  - 3.1.2 Propriedades . . . 10
- 3.2 Subtração . . . 10
- 3.3 Multiplicação . . . 11
  - 3.3.1 Definição . . . 11
  - 3.3.2 Propriedades . . . 11
- 3.4 Divisão . . . 11
  - 3.4.1 Definição . . . 11
  - 3.4.2 Divisão Inteira . . . 11
  - 3.4.3 Divisibilidade . . . 11
  - 3.4.4 Propriedades . . . 11
- 3.5 Módulo . . . 11
- 3.6 Números Primos . . . 11
- 3.7 Fatoração . . . 11
  - 3.7.1 Definição . . . 11
  - 3.7.2 MDC . . . 11

3.7.3 MMC . . . 12
3.8 Frações . . . 12
3.8.1 Definição . . . 12
3.8.2 Decimais . . . 12
3.8.3 Propriedades . . . 12
3.8.4 Utilidades . . . 12
3.9 Exponenciação . . . 12
3.9.1 Definição . . . 12
3.9.2 Propriedades . . . 12
3.9.3 Utilidades . . . 12
3.10 Radiciação . . . 12
3.10.1 Definição . . . 12
3.10.2 Propriedades . . . 13
3.10.3 Utilidades . . . 13
3.11 Logaritmação . . . 13
3.11.1 Definição . . . 13
3.11.2 Propriedades . . . 13
3.11.3 Utilidades . . . 13
3.12 Fatorial . . . 13
3.12.1 Definição . . . 13
3.12.2 Para Números Negativos . . . 13
3.12.3 Utilidades . . . 13
3.13 Coeficiente Binomial . . . 13
3.13.1 Definição . . . 13
3.13.2 Relação de Stifel . . . 14
3.14 Somatório . . . 14
3.15 Produtório . . . 14
3.16 Ordem de Operações . . . 14

4 Álgebra Elementar **14**
4.1 Sistema de Coordenadas Cartesiano . . . 14
4.2 Funções . . . 14
4.2.1 Definição . . . 14
4.2.2 Classificação . . . 14
4.2.3 Inversão . . . 15
4.2.4 Composição . . . 15
4.2.5 Categorização . . . 15
4.2.6 Graus de Funções Polinomiais . . . 16
4.3 Interpolação Polinomial . . . 18
4.4 Divisão de Polinômios . . . 18
4.5 Fatoração de Funções Polinomiais . . . 18
4.6 Equações . . . 18
4.6.1 Equação Quadrática . . . 18
4.6.2 Equação Biquadrática . . . 18
4.6.3 Equação Cúbica . . . 18
4.6.4 Equação Circular . . . 18
4.7 Inequações . . . 18
4.7.1 Definição . . . 18
4.7.2 Princípios de Equivalência . . . 19
4.7.3 Simultâneas . . . 19
4.8 Sequências . . . 19
4.8.1 Definição . . . 19
4.8.2 Lei de Formação . . . 19
4.8.3 Progressão Aritmética . . . 19
4.8.4 Progressão Geométrica . . . 20

5 Álgebra Linear **20**
5.1 Matrizes . . . 20
5.1.1 Definição . . . 20
5.1.2 Classificações . . . 20
5.1.3 Adição . . . 21
5.1.4 Multiplicação . . . 21
5.1.5 Transposição . . . 21
5.1.6 Inversão . . . 21
5.2 Determinantes . . . 21
5.2.1 Definição . . . 21
5.2.2 Regra de Sarrus . . . 22
5.2.3 Menor Complementar . . . 22
5.2.4 Complemento Algébrico . . . 22
5.2.5 Determinante por Recorrência . . . 22
5.2.6 Teorema de Laplace . . . 22
5.2.7 Combinação Linear . . . 22
5.2.8 Propriedades . . . 23
5.2.9 Redução da Ordem . . . 24
5.2.10 Regra de Chió . . . 24
5.2.11 Matriz de Vandermonde . . . 24

5.2.12 Matriz Adjunta . . . 25
5.3 Sistemas Lineares . . . 25
5.3.1 Equação Linear . . . 25
5.3.2 Sistema Linear . . . 25
5.3.3 Sistema Linear Homogêneo . . . 25
5.3.4 Teorema de Cramer . . . 26
5.3.5 Sistema Escalonado . . . 26
5.3.6 Escalonamento de um Sistema . . . 26
5.3.7 Teorema de Rouché-Capelli . . . 26
5.4 Vetores . . . 26

6 Geometria Plana **26**
6.1 Definições Primitivas . . . 26
6.1.1 Noções Primitivas . . . 26
6.1.2 Postulados Primitivas . . . 27
6.1.3 Congruência . . . 27
6.2 Conceitos Básicos . . . 27
6.2.1 Pontos Contidos . . . 27
6.2.2 Segmento de Reta . . . 27
6.2.3 Semirreta . . . 28
6.2.4 Região . . . 28
6.2.5 Semiplano . . . 28
6.2.6 Ângulos . . . 29
6.3 Retas no Plano . . . 30
6.3.1 Relações entre Retas . . . 30
6.3.2 Postulados . . . 30
6.3.3 Projeção . . . 30
6.3.4 Teorema de Thales . . . 31
6.3.5 Mediatriz . . . 31
6.4 Polígonos . . . 31
6.4.1 Definição . . . 31
6.4.2 Composição Nominal dos Elementos . . . 31
6.4.3 Nomenclatura . . . 32
6.4.4 Descrição Matemática dos Elementos . . . 32
6.5 Polígonos Regulares . . . 33
6.5.1 Inscrição e Circunscrição . . . 33
6.5.2 Elementos Notáveis . . . 33
6.5.3 Descrição Matemática dos Elementos . . . 33
6.6 Triângulos . . . 34
6.6.1 Descrição Matemática . . . 34
6.6.2 Classificação . . . 34
6.6.3 Congruência . . . 34
6.6.4 . . . 35
6.6.5 . . . 35
6.7 Quadriláteros Notáveis . . . 35
6.8 Circunferências . . . 35

7 Trigonometria **35**

8 Geometria Analítica **35**

9 Geometria Espacial **35**

10 Matemática Discreta **35**
10.1 Combinatória . . . 35
10.1.1 Princípio Fundamental da Contagem . . . 35
10.1.2 Arranjo . . . 35
10.1.3 Permutação . . . 36
10.1.4 Combinação . . . 36
10.2 Probabilidade . . . 36
10.3 Teoria dos Grafos . . . 36
10.4 Otimização . . . 36
10.5 Criptografia . . . 36

11 Matemática Aplicada **36**
11.1 Matemática Financeira . . . 36
11.1.1 Introdução . . . 36
11.1.2 Variação Percentual . . . 37
11.1.3 Inflação e Deflação . . . 37
11.1.4 Regimes de Capitalização . . . 37
11.1.5 Sequência Uniforme de Pagamentos . . . 37
11.1.6 Sequência Uniforme de Depósitos . . . 37
11.2 Estatística . . . 37
11.2.1 Introdução . . . 37
11.2.2 Variáveis . . . 38
11.2.3 Frequência . . . 38
11.2.4 Medidas de Centralidade . . . 38
11.2.5 Medidas de Dispersão . . . 39

11.2.6 Medidas de Posição . . . 39
11.2.7 Inferência Bayesiana . . . 39

12 Cálculo e Análise **39**
12.1 Limite . . . 39
12.2 Derivada . . . 39
12.3 Integral . . . 39

13 Constantes da Matemática **39**
13.1 Raiz Quadrada de Dois . . . 39
13.2 Pi . . . 39
13.3 Proporção Áurea . . . 39
13.4 Unidade Imaginária . . . 39
13.5 Número de Euler . . . 39
13.6 Constante de Euler-Mascheroni . . . 39

14 Funções Definidas **39**
14.1 Série de Taylor . . . 39
14.2 Função Zeta de Riemann . . . 39
14.3 Série de Dirichlet . . . 39
14.4 Função de Gauss . . . 39
14.5 Função Gama . . . 39

1 Lógica e Notação

1.1 Conectivos

$\neg$	Negação
$\vee$	Disjunção
$\wedge$	Conjunção
$\rightarrow$	Implicação; Condicional
$\leftrightarrow$	Bi-implicação; Equivalência

1.2 Quantificadores

$\forall$	Todo; Qualquer
$\exists$	Existe; Pelo menos um; Algum
$\exists!$	Existe exatamente um

1.3 Pontuações

$\pm$	Mais ou menos
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\equiv$	Equivalente; Congruente
$\sim$	Aproximadamente
$\approx$	Aproximadamente igual
$>$	Maior que
$\geq$	Igual ou maior que
$<$	Menor que
$\leq$	Igual ou menor que
$\star$	Igual, maior ou menor que
$\prec$	Sequencialmente precede
$\succ$	Sequencialmente sucede
$\propto$	Proporcional
$\mid$	Tal que
$(), [], \{\}$	Delimitadores
$(\cdots)_p$	Enupla de p elementos
$\{\cdots\}$	Conjunto
$\varnothing, \{\}$	Conjunto vazio
$\#$	Número de elementos contidos
$\nexists$	Não existe
$\ni, \supset$	Contém
$\not\ni, \not\supset$	Não contém

$\in, \subset$	Está contido
$\notin, \not\subset$	Não está contido
$\supset$	É subconjunto
$\subset$	É superconjunto
$\cup$	União
$\cap$	Interseção
$\mathcal{P}$	Propriedade; Lei de aplicação
$\mathcal{D}$	Domínio
$\mathcal{CD}$	Contradomínio
$\mathcal{IM}$	Imagem
$\mathcal{C}_A^B$	Complementar de B em A
A^*	Conjunto dos elementos não nulos de A
A^n	Conjunto dos n primeiros elementos de A
A_+	Conjunto dos elementos positivos de A
A_-	Conjunto dos elementos negatios de A
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathfrak{I}$	Conjunto dos números imaginários
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{U}$	Conjunto universo
$\mapsto$	Função aplicada
$\mathrm{P}(n)$	Polinômio de Grau n
$\therefore$	Portanto
$\because$	Em razão de
∞	Infinito
Δ	Variação
$\lim\limits_{a \to b} f(x)$	Limite
$f', \frac{dy}{dx}$	Derivada
$\frac{\partial y}{\partial x}$	Derivada parcial
$\int_a^b$	Integral
$\oint_a^b$	Integral de linha
∇	Gradiente
$\sum\limits_{i=a}^{b} f(i)$	Somatório
$\prod\limits_{i=a}^{b} f(i)$	Produtório
$A\mathring{P}B$	Ponto P contido entre A e B
$\overline{AB}$	Segmento de reta
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta

$\hat{\alpha}, A\hat{O}B$	Ângulo
$\parallel$	Paralelo
$\nparallel$	Concorrente
$\perp$	Perpendicular
$\triangle ABC$	Triângulo ABC
$\Diamond ABCDE$	Polígono ABCDE

1.4 Alfabeto Grego

α	A	Alfa
β	B	Beta
γ	Γ	Gama
δ	Δ	Delta
ϵ	E	Epsilon
ζ	Z	Zeta
η	H	Eta
θ	Θ	Theta
ι	I	Iota
κ	K	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mu
ν	N	Nu
ξ	Ξ	Xi
o	O	Omicron
π	Π	Pi
ρ	P	Rho
σ	Σ	Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Upsilon
ϕ	Φ	Phi
χ	X	Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega

2 Teoria dos Conjuntos

2.1 Conceitos Básicos

2.1.1 Definição

Conjunto é um agrupamento de elementos, aleatórios ou selecionados criteriosamente por um sistema. Pode ser enumerado ou ter seus critérios descritos em propriedades. *e.g.:*

$$A = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, 13\}; A = \{x \in \mathbb{U} | \mathcal{P}\}$$

2.1.2 Tipos

Conjunto Unitário é aquele que possui um único elemento. *e.g.:* $A = \{7\}$
Conjunto Vazio é aquele que não possui elemento algum. *e.g.:* $A = \{\}; A = \varnothing$
Conjunto Universo é aquele que contém todos os elementos utilizados no assunto tratado

2.1.3 Intervalos

Definido como uma descrição de conjunto que compreende todos os números em determinado espaço da reta numérica (considerado o conjunto universo), podendo ser abertos ou fechados. *e.g.:*

$$(a < b)$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{U} | a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{U} | a \leq x \leq b\}$$

Intervalos possuem uma representação gráfica na reta numérica. *e.g.:*

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

2.1.4 Pares Ordenados

Chama-se par ordenado o conjunto de 2 elementos onde sua ordem importa:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$(a, b) = (c, d) \rightarrow a = c \wedge b = d$$

Muito utilizado para a representação de pontos em um plano cartesiano, indicando sua abscissa e sua ordenada, respectivamente:

$$P \in \alpha = (x_p, y_p)$$

2.1.5 Produto Cartesiano

Considerando os conjuntos não vazios A e B, o produto cartesiano de A por B é o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo a B:

$$(A, B \neq \varnothing)$$

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

2.1.6 Relação Binária

A relação binária é um subconjunto criterioso dos elementos de um produto cartesiano definido por uma lei de aplicação:

$$R_{A \times B} = \{(x, y) \in A \times B | \mathcal{P}\}$$

2.1.7 Domínio

Na relação binária de A em B, o domínio é o subconjunto de todos os elementos de A que tenham uma aplicação em B:

$$x \in \mathcal{D}(R_{A \times B}) \leftrightarrow \exists y \in B | (x, y) \in R_{A \times B}$$

2.1.8 Contradomínio

Na relação binária de A em B, o contradomínio é simplesmente B, sendo o conjunto de chegada da lei de aplicação:

$$\mathcal{CD}(R_{A \times B}) = B$$

2.1.9 Imagem

Na relação binária de A em B, a imagem é o subconjunto do contradomínio formado por todos os elementos que sejam associados ao domínio pela lei de aplicação:

$$y \in \mathcal{IM}(R_{A \times B}) \leftrightarrow \exists x \in A | (x, y) \in R_{A \times B}$$

2.1.10 Relação Inversa

Dada a relação binária de A em B, a sua relação inversa é a aplicação de sua lei no produto cartesiano de B por A:

$$R^{-1}_{A\times B} = \{(y,x) \in B \times A | (x,y) \in R_{A\times B}\}$$

2.2 Relações

2.2.1 Subconjuntos

Um conjunto A é subconjunto de outro conjunto B se todo elemento que pertencente a A também pertence a B:

$$A \subset B \leftrightarrow \forall x \in A, B \ni x$$

2.2.2 Igualdade

Dois conjuntos A e B são classificados como iguais quando todo elemento de A pertence a B, e todo elemento de B pertence a A:

$$A = B \leftrightarrow (\forall x \in A, B \ni x) \wedge (\forall y \in B, A \ni y)$$

2.2.3 Reunião

Chama-se reunião de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

2.2.4 Interseção

Chama-se interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Conjuntos que não possuem elementos em comum são chamados conjuntos distintos.

2.2.5 Diferença

Chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

2.2.6 Complementar

Considerando um conjunto A e seu subconjunto B, chama-se o complementar de B em relação a A o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B:

$$(B \subset A)$$

$$\mathcal{C}^B_A = A - B$$

2.2.7 Propriedades

Considerando A, B e C como conjuntos quaisquer:

$$\begin{array}{ccc}
\varnothing \subset A & A \cup \varnothing = A & (A \subset B) \wedge (A \supset B) \leftrightarrow A = B \\
A \subset A & A \cap \varnothing = A & (A \subset B) \wedge (B \subset C) \rightarrow A \subset C \\
A \cup A = A & A \cup B = B \cup A & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
A \cap A = A & A \cap B = B \cap A & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)
\end{array}$$

Considerando A e seus subconjuntos B e C:

$$(A \supset B, C)$$

$$\mathcal{C}^B_A \cup B = A; \mathcal{C}^B_A \cap B = \varnothing$$

2.3 Conjuntos Numéricos

2.3.1 Naturais

O conjunto dos números naturais define-se em:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

2.3.2 Inteiros

O conjunto dos números inteiros estende o conjunto dos naturais com números negativos:

$$\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, 2, ...\}$$

2.3.3 Racionais

O conjunto dos números racionais estende o conjunto dos inteiros com a representação de componentes fracionários:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

2.3.4 Irracionais

O conjunto dos números irracionais compreende os números da reta numérica que não podem ser representados por frações, sendo dízimas não periódicas sem uma razão numérica:

$$\mathbb{I} = \left\{ x | \frac{p}{q} \neq x \ \forall p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

2.3.5 Reais

O conjunto dos números reais engloba todos os números existentes na reta numérica, sendo a união do conjunto dos racionais com o conjunto dos irracionais:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

2.3.6 Imaginários

O conjunto dos números imaginários traz o conceito de perpendicularidade para a reta numérica:

$$\mathfrak{I} = \left\{ \sqrt[n]{m} | \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{Z}^*_- \right\}$$

2.3.7 Complexos

O conjunto dos números complexos é a conjunção dos números reais e imaginários, transformando a reta numérica em um plano:

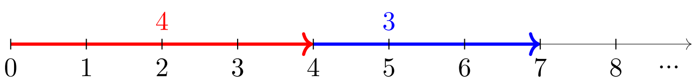
$$\mathbb{C} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathfrak{I}\}$$

3 Aritmética

3.1 Soma

3.1.1 Definição

A soma consiste na combinação de 1 ou mais números (parcelas), em um único valor (total). Pode ser representada como uma movimentação pela reta numérica, se estendendo para a direita com números positivos e para a esquerda com números negativos. *e.g.:*



$$4 + 3 = 7$$

3.1.2 Propriedades

$$a + b = b + a$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$a + 0 = a$$

3.2 Subtração

A subtração encontra o valor (diferença) ao reduzir um número (minuendo) por outro (subtraendo). A subtração é a operação inversa da soma, e pode ser reduzida a soma de números de sinais opostos:

$$a - b = a + (-b)$$

3.3 Multiplicação

3.3.1 Definição

A multiplicação produz o resultado (produto) de uma soma finita de números iguais (coeficientes):

$$x \cdot y = \underbrace{x + x + ... + x}_{\text{y vezes}}$$

3.3.2 Propriedades

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad a \cdot 1 = a \qquad (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad a \cdot 0 = 0 \qquad a \cdot \infty = ?$$

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \qquad 1 \cdot (-1) = (-1) \qquad (a \cdot b) \in \mathbb{R}\ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

3.4 Divisão

3.4.1 Definição

A divisão é a operação inversa a multiplicação, repartindo um valor (dividendo) em determinado número (quociente) de quantitativos iguais (divisor) através de sucessivas subtrações:

$$a \div b = q \mid q \cdot b = a$$

3.4.2 Divisão Inteira

Quando limitada ao conjunto dos números inteiros, a divisão pode ser inexata, resultando num coeficiente para o divisor para que seu produto seja o maior número possível sem ultrapassar o dividendo, tendo como diferença o resto:

$$a \div b = q, r \mid q \cdot b + r = a$$

3.4.3 Divisibilidade

Uma divisão inteira com resto zero estabelece uma relação de divisibilidade, onde o dividendo é dito como divisível pelo divisor.

3.4.4 Propriedades

$$a \div b \neq b \div a \qquad a \div 0 = ?$$

$$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$$

$$(a + b) \div c = a \div c + b \div c \qquad 1 \div (-1) = (-1)$$

$$a \div 1 = a \qquad (-1) \div (-1) = 1$$

3.5 Módulo

Representa o valor absoluto de um número como sua distância até a fonte na reta numérica, independentemente do sentido:

$$|a| = |-a|$$

3.6 Números Primos

Número primo é todo aquele cujo conjunto dos divisores não inversíveis não é vazio, e todos os seus elementos são produtos dele por números inteiros inversíveis. Resumidamente é todo número inteiro cujo conjunto dos divisores naturais é composto apenas por 1 e ele mesmo.

3.7 Fatoração

3.7.1 Definição

A fatoração é a decomposição dos coeficientes primos que iteram determinado elemento como seu produto. *e.g.:*

$$2520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

3.7.2 MDC

O máximo divisor comum de dois elementos pode ser encontrado ao multiplicar seus fatores primos comuns.

3.7.3 MMC

O mínimo múltiplo comum de dois elementos pode ser encontrado ao dividir o produto desses números pelo seu MDC:

$$MMC(a, b) = \frac{a \cdot b}{MDC(a, b)}$$

Alternativamente, o MMC pode ser encontrado ao fatora-los juntos.

3.8 Frações

3.8.1 Definição

É a representação de valores através da razão entre 2 números inteiros. Todo número racional possui infinitas frações equivalentes para representá-lo, que podem ser simplificadas até sua forma irredutível. *e.g.:*

$$\frac{256}{128} = \frac{64}{32} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

3.8.2 Decimais

Frações permitem a representação de números decimais e dízimas periódicas através de valores inteiros. *e.g.:*

$$\frac{1}{5} = 0.2 \qquad \frac{1}{3} = 0.\overline{333}$$

3.8.3 Propriedades

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \qquad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \qquad \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$$

3.8.4 Utilidades

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{{}^{a}/_{c} \cdot MMC(c, d) \pm {}^{b}/_{d} \cdot MMC(c, d)}{MMC(c, d)}$$

3.9 Exponenciação

3.9.1 Definição

A exponenciação é definida pela multiplicação de determinado valor (base) por si próprio um determinado número de vezes (expoente). Também pode ser representada como uma função recursiva:

$$(a \in \mathbb{R}^*), (n \in \mathbb{Z}^*)$$

$$a^n = a^{n-1} \cdot a \ \forall n \geq 1 \qquad 0^0 = ? \qquad \infty^0 = ?$$

$$a^0 = 1 \qquad 0^n = 1 \qquad 1^\infty = ?$$

3.9.2 Propriedades

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

3.9.3 Utilidades

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

3.10 Radiciação

3.10.1 Definição

A radiciação é a operação inversa a exponenciação, onde o radicando é igual ao resultado (raiz) elevado a determinado expoente (índice):

$$(a \in \mathbb{R}), (n \in \mathbb{Q}^*)$$

$$\sqrt[n]{a} = b \mid b^n = a$$

3.10.2 Propriedades

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \qquad \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

3.10.3 Utilidades

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \qquad \sqrt{a} \approx \frac{a + b}{2\sqrt{b}}$$

3.11 Logaritmação

3.11.1 Definição

A logaritmação é uma expressão análoga à exponenciação, onde seu resultado representa o expoente (logaritmo) ao qual um determinado número (base) deve ser elevado para resultar em certo valor (logaritmando):

$$(a \in \mathbb{R}^* - 1), (b \in \mathbb{R}^*)$$

$$\log_a b = x \mid a^x = b \qquad \log b = \log_{10} b$$

$$\operatorname{antilog}_a x = b \mid \log_a b = x \qquad \ln b = \log_{\mathrm{e}} b$$

$$\operatorname{colog}_a b = -\log_a b \qquad \lg b = \log_2 b$$

3.11.2 Propriedades

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \qquad \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

$$\log_a(b \div c) = \log_a b - \log_a c \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_c b \cdot \log_a c$$

3.11.3 Utilidades

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

3.12 Fatorial

3.12.1 Definição

O fatorial é uma notação para a multiplicação de um número por todos os seus antecessores inteiros:

$$(n \in \mathbb{N}^*)$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=0}^{n-1} n - i$$

$$0! = 1! = 1$$

3.12.2 Para Números Negativos

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

3.12.3 Utilidades

$$(x+n)! = x! \prod_{k=1}^{n} x + k$$

3.13 Coeficiente Binomial

3.13.1 Definição

É uma notação muito usada em combinatória, matemática diferencial e problemas com funções polinomiais:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3.13.2 Relação de Stifel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

3.14 Somatório

O somatório é uma notação para uma função recursiva de sucessivas somas:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n$$

e.g.:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x!)^{-1} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ...$$

3.15 Produtório

O produtório é uma notação para uma função recursiva de sucessivas multiplicações:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} \cdot x_n$$

e.g.:

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

3.16 Ordem de Operações

Em expressões algébricas, existe uma ordem específica para se efetuar as operações corretamente:

`parênteses` $\prec$ `expoentes` $\prec$ `multiplicações e divisões` $\prec$ `somas e subtrações`

4 Álgebra Elementar

4.1 Sistema de Coordenadas Cartesiano

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.2 Funções

4.2.1 Definição

Uma função é uma relação binária de dois conjuntos não vazios formando pares ordenados. A função definida A com imagem em B se da quando todo elemento de A tem exatamente um correspondente em B que cumpra sua lei de aplicação:

$$f : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{CD} = \mathcal{IM} = \{(x, y) \mid \forall y \in \mathcal{IM} \ \exists! x \in \mathcal{D} \mid f(x) = y\}$$

Duas funções serão iguais se apresentarem iguais domínio, contradomínio, e tiverem a mesma imagem para todo elemento do domínio:

$$f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathcal{CD}_f = g : \mathcal{D}_g \mapsto \mathcal{CD}_g \leftrightarrow (\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g) \wedge (\mathcal{CD}_f = \mathcal{CD}_g) \wedge (f(x) = g(x) \ \forall x \in \mathcal{D})$$

4.2.2 Classificação

Função Sobrejetora é aquela onde todo elemento do contradomínio tem um ou mais relacionais no domínio:

$$\forall y \in \mathcal{CD} \ \exists x \in \mathcal{D} \mid f(x) = y$$

Função Injetora é aquela onde todo elemento do domínio tem um único ou nenhum relacional no contradomínio:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} \mid x_1 \neq x_2$$

Função Bijetora é aquela que simultaneamente se classifica como injetora e sobrejetora, tendo assim, exatamente um relacional no contradomínio para cada elemento do domínio:

$$\forall x \in \mathcal{D} \ \exists! y \in \mathcal{CD} \mid (x, y) \in f$$

Função Simples é aquela que não é nem injetora, nem sobrejetora.

4.2.3 Inversão

Dada uma função bijetora, sua inversa é aquela cuja lei de aplicação inverte as posições de seus pares ordenados, apontando cada elemento da imagem ao seu relacional no domínio. Comumente encontrada pela inversão das operações algébricas da lei de aplicação:

$$f^{-1} : \mathcal{IM} \mapsto \mathcal{D} = \{(y, x) \mid f(x) = y\}$$

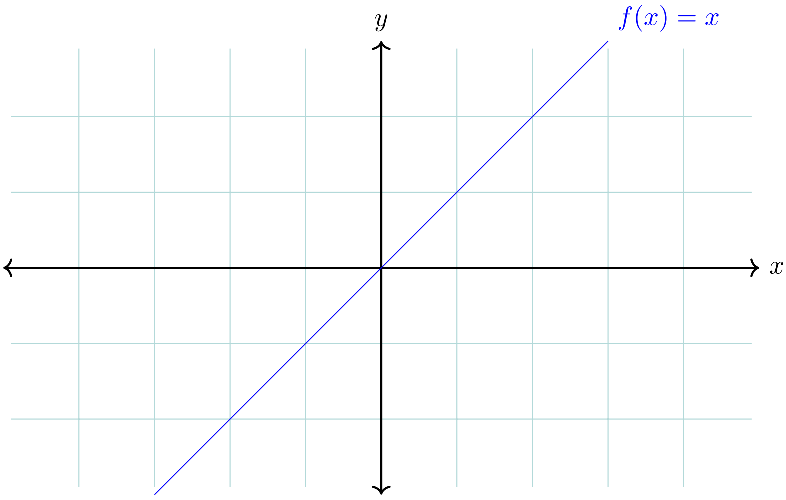
4.2.4 Composição

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.2.5 Categorização

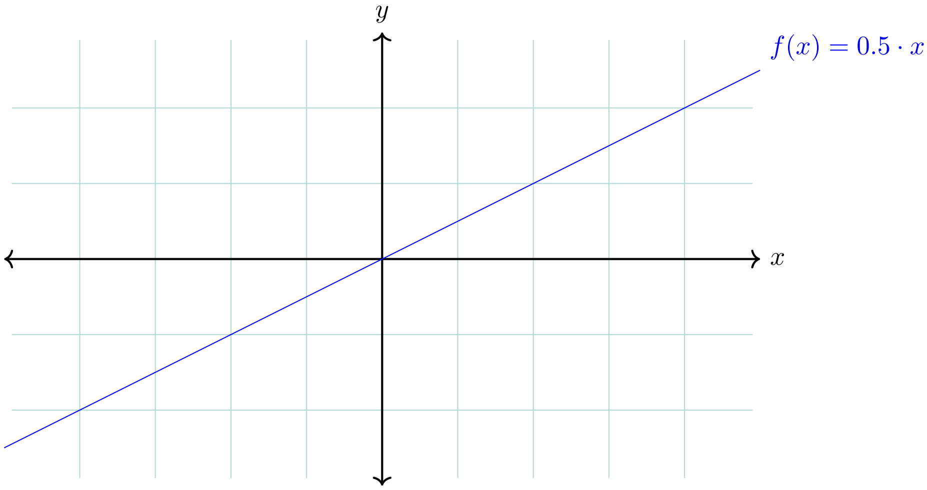
Função Identidade é aquela que quando aplicada a qualquer elemento do domínio resulta nesse mesmo elemento. É graficamente construída como uma reta contendo as bissetrizes do 1° e 3° quadrantes:

$$f(x) = x$$



Função Linear é aquela que quando aplicada a qualquer elemento do domínio, tem como imagem o elemento multiplicado por uma constante (coeficiente angular) diferente de 0. É construída no gráfico como uma reta que passa pela origem:

$$f(x) = ax$$



Função Polinomial é aquela que tem como lei de formação uma expressão algébrica entre monômios. É classificada por grau, este que se define pelo maior expoente de sua variável:

$$(n \in \mathbb{N}^*), (a_n \neq 0)$$

$$\mathrm{P}(n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Função Periódica

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

Função Trigonométrica

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

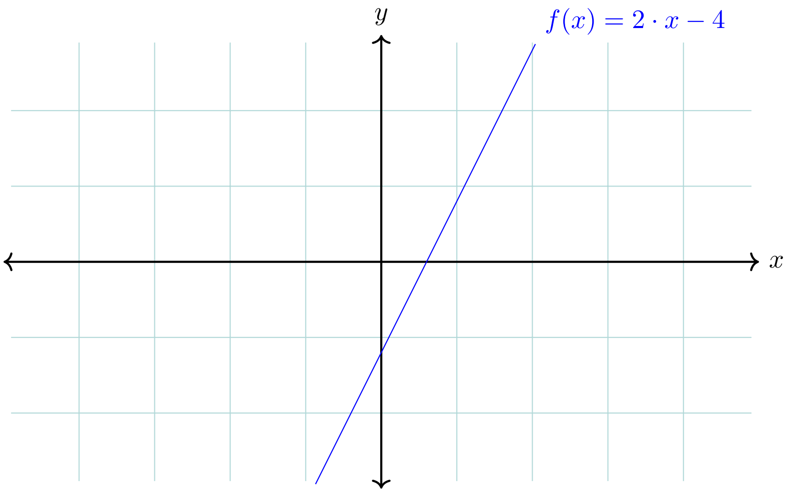
Função Analítica

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

4.2.6 Graus de Funções Polinomiais

Primeiro Grau: chamada função afim, tem sua reta definida pelo coeficiente angular e deslocada pelo coeficiente linear:

$$\mathrm{P}(1) = a_0x^0 + a_1x^1$$
$$f(x) = ax + b$$



É crescente ou decrescente segundo o coeficiente angular:

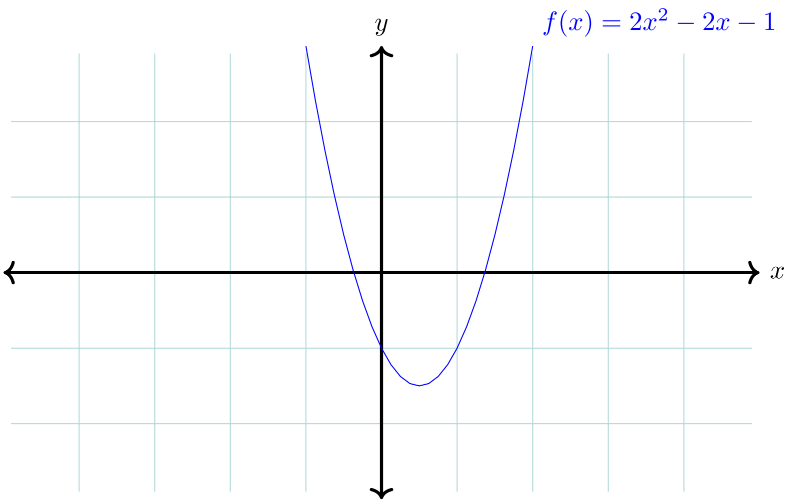
$$(\Uparrow \leftrightarrow a > 0) \therefore (\Downarrow \leftrightarrow a < 0)$$

Tem como ponto notável:

$$\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$$

Segundo Grau: chamada função quadrática, tem seu gráfico construído por uma parábola:

$$\mathrm{P}(2) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Em sua forma canônica, evidencia-se a discriminante do trinômio:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

O número de raízes da função é deduzível a partir da discriminante do trinômio:

$\Delta > 0 \leftrightarrow \#R = 2$ $\qquad$ $\Delta = 0 \leftrightarrow \#R = 1$ $\qquad$ $\Delta < 0 \leftrightarrow \#R = 0$

A direção de abertura de sua concavidade é definida pelo primeiro coeficiente da função:

$$(\Uparrow \leftrightarrow a > 0) \therefore (\Downarrow \leftrightarrow a < 0)$$

Desenvolvendo sua forma canônica, encontramos formulações para facilitar a determinação das raízes da função:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \{R_1, R_2\} \qquad R_1 + R_2 = \frac{-b}{c} \qquad R_1 \cdot R_2 = \frac{c}{a}$$

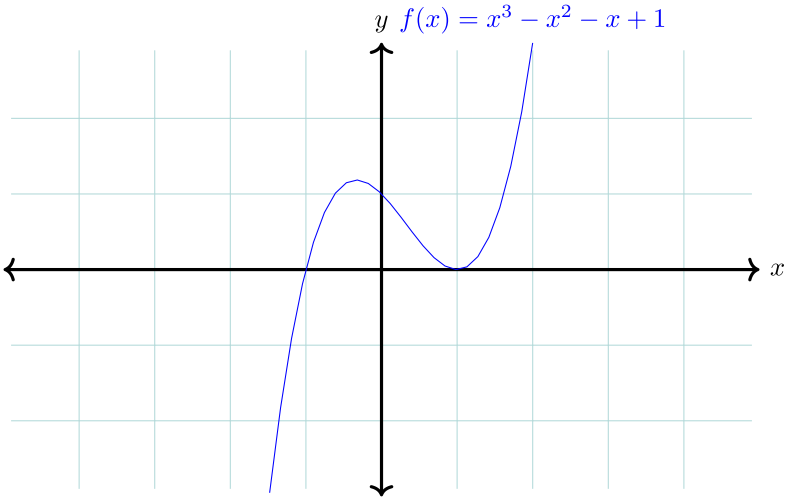
Tem como pontos notáveis:

$$(R_1, 0) \qquad P_i = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \qquad (R_2, 0)$$

Terceiro Grau: chamada função cúbica, tem seu gráfico construído por uma curva de dois pontos de inflexão:

$$\mathrm{P}(3) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



O desenvolvimento do polinômio por meio do método de Cardano-Tartaglia evidencia o discriminante da função:

$$\Delta = \left(\frac{c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b - \frac{a^2}{3}}{3}\right)^3$$

O número de raízes da função é deduzível a partir da discriminante da função:

$$\Delta > 0 \leftrightarrow \{R_i, R_j, R_k\} \mid (R_i \in \mathbb{R}), (R_j, R_k \in \mathbb{C})$$

$$\Delta = 0 \leftrightarrow \{R_i, R_j, R_k\} \mid (R_i, R_j, R_k \in \mathbb{R}), (R_j = R_k)$$

$$\Delta < 0 \leftrightarrow \{R_i, R_j, R_k\} \mid (R_i, R_j, R_k \in \mathbb{R}), (R_i \neq R_j \neq R_k)$$

Usando a solução do método de Cardano-Tartaglia é possível encontrar as raízes da função:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \qquad q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}$$

$$R_1 = \frac{-b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$R_2 = \frac{-b}{3a} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(\frac{-1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$R_2 = \frac{-b}{3a} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(\frac{-1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Para além deste método, há outras ferramentas para facilitar a determinação das raízes:

$\Longrightarrow$ Relações de Girard:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{-b}{a} \qquad R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = \frac{-d}{a}$$

$$R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3 = \frac{c}{a}$$

$\Longrightarrow$ Fatoração da Equação:

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

$\Longrightarrow$ Listagem de Razão Entre Fatores:

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.3 Interpolação Polinomial

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.4 Divisão de Polinômios

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.5 Fatoração de Funções Polinomiais

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.6 Equações

4.6.1 Equação Quadrática

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.6.2 Equação Biquadrática

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.6.3 Equação Cúbica

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.6.4 Equação Circular

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

4.7 Inequações

4.7.1 Definição

Inequações são expressões algébricas de desigualdade, formando-se por sentenças matemáticas que expressam uma relação de não-equivalência entre funções:

$$f \star g$$

O domínio de validade de uma inequação é a interseção dos domínios das funções, e a sua solução é dada pelo conjunto de todos os elementos do domínio de validade que cumpram a sentença de desigualdade:

$$\mathcal{D}_{f\star g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \qquad S_{f\star g} = \{x \in \mathcal{D}_{f\star g} \mid f(x) \star g(x)\}$$

4.7.2 Princípios de Equivalência

Inequações são ditas equivalentes quando possuem iguais conjuntos solução, e na resolução de uma inequação, busca-se a forma mais simples da sentença de desigualdade, tendo como referência os princípios de equivalência:

$$(f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathcal{CD}_f), (g : \mathcal{D}_g \mapsto \mathcal{CD}_g), (h : \mathcal{D}_{f\star g} \mapsto \mathcal{CD}_{f\star g})$$

P-1: em uma inequação, podemos transpor um termo de um membro para outro trocando o sinal do termo considerado:

$$f + h \star g \equiv f \star g - h$$

$$f \star g \equiv f + h \star g + h$$

P-2: em uma inequação, podemos multiplicar os dois membros pela mesma expressão, mantendo ou invertendo o sentido da desigualdade, conforme essa expressão seja positiva ou negativa, respectivamente:

$$f \overrightarrow{\star} g \equiv \begin{cases} f(x) \cdot h(x) \overrightarrow{\star} g(x) \cdot h(x) \leftrightarrow h(x) > 0 \\ f(x) \cdot h(x) \overleftarrow{\star} g(x) \cdot h(x) \leftrightarrow h(x) < 0 \end{cases}$$

4.7.3 Simultâneas

Inequações simultâneas são a conjunção de 2 inequações alinhadas, e portanto, seu conjunto solução será a interseção do conjunto solução das inequações quando decompostas e resolvidas individualmente:

$$f \star g \star h \equiv \begin{cases} f \star g \\ g \star h \end{cases} \rightarrow \ S_{f\star g\star h} = S_{f\star g} \cap S_{g\star h}$$

4.8 Sequências

4.8.1 Definição

Uma sequência é uma função onde o domínio é limitado ao conjunto dos números naturais não-nulos, assim indexando o contradomínio através da lei de aplicação e formando a imagem como uma lista ordenada. Sequências podem ser finitas ou infinitas:

$$f : \mathbb{N}^i \mapsto \mathbb{R} = \{(i, t_i) \forall i \in \mathbb{N}^i\} \qquad\qquad f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} = \{(i, t_i) \forall i \in \mathbb{N}\}$$

4.8.2 Lei de Formação

A lei de formação de uma sequência é sua lei de aplicação, e pode ser apresentada de 3 distintas formas:

Fórmula de Recorrência: define-se o primeiro termo e a regra para encontrar seus subsequentes. *e.g.:*

$$f = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_i = t_{i-1} + t_{i-2} \end{cases} \forall i \in \mathbb{N} \ = \ \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$$

Fórmula Geral: a lei de aplicação expressa cada termo através de seu índice. *e.g.:*

$$b = \{(i, t_i) \mid t_i = 2^i \ \forall i \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...\}$$

Propriedade dos Termos: é descrita uma propriedade que os termos devem cumprir. *e.g.:*

$$p = \text{todos os números primos em ordem crescente} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$$

4.8.3 Progressão Aritmética

Definição: é toda sequência definida por fórmula de recorrência onde todo termo é igual ao seu antecedente somado a uma constante (razão), podendo ser classificada como crescente, decrescente ou constante em função dessa constante:

$$P.A. = \begin{cases} t_1 = n \\ t_i = t_{i-1} + r \end{cases} \rightarrow \ t_i = t_1 + r(i-1)$$

Interpolação Aritmética: é inserir meios aritméticos entre dois extremos definidos, onde a razão será encontrada a partir do número de elementos interpolados:

$$r = \frac{t_i - t_1}{i - 1}$$

Soma dos Termos: fórmula geral para a soma dos termos de uma progressão aritmética:

$$S_i = \frac{i(t_1 + t_i)}{2} \ = \ i \cdot t_1 + r\frac{i(i-1)}{2}$$

4.8.4 Progressão Geométrica

Definição: é toda sequência definida por fórmula de recorrência, onde todo termo é igual ao seu antecedente multiplicado por uma constante (razão), podendo ser classificada como crescente, constante, decrescente, alternante (quando os termos alternam os sinais) ou estacionária (quando a razão é zero):

$$P.G. = \begin{cases} t_1 = n \\ t_i = t_{i-1} \cdot r \end{cases} \rightarrow \ t_i = t_1 \cdot r^{i-1}$$

Interpolação Geométrica: é inserir meios geométricos entre dois extremos definidos, onde a razão será encontrada a partir do número de elementos interpolados:

$$r = \sqrt[i-1]{\frac{t_i}{t_1}}$$

Soma dos Termos: fórmula geral para a soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_i = t_1 \frac{r^i - 1}{r - 1} \ = \ t_i \frac{r - t_1}{r - 1}$$

Produto dos Termos: fórmula geral para o produto dos termos de uma progressão geométrica:

$$P_i = t_1^i \cdot r^{\frac{i(i-1)}{2}} = (t_1 \cdot t_i)^{\frac{i}{2}}$$

5 Álgebra Linear

5.1 Matrizes

5.1.1 Definição

Matriz é toda tabela formada por números reais, caracterizada pelo número de linhas e colunas, respectivamente, contadas de cima para baixo e da esquerda para direita:

$$(x, y, i, j \in \mathbb{N})$$

$$M_{y \times x} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & & a_{1\,x} \\ & \cdots & \\ a_{y\,1} & & a_{y\,x} \end{bmatrix} \mid a_{i\,j} \in \mathbb{R} \ \forall i \in \mathbb{N}^y \wedge \forall j \in \mathbb{N}^x$$

5.1.2 Classificações

Matriz Nula: é toda matriz onde todos os seus elementos são iguais a zero:

$$M_{y \times x} = \{a_{i\,j} = 0 \mid \forall i \in \mathbb{N}^y \wedge \forall j \in \mathbb{N}^x\}$$

Matriz Linha: é toda matriz que composta por uma única linha. *e.g.:*

$$M_{1 \times x} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,x} \end{bmatrix}$$

Matriz Coluna: é toda matriz que composta por uma única coluna. *e.g.:*

$$M_{y \times 1} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} \\ \vdots \\ a_{y\,1} \end{bmatrix}$$

Matriz Quadrada: é toda matriz com o mesmo número de linhas e colunas, onde este número é apontado como o seu grau. *e.g.:*

$$M_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & & a_{1\,n} \\ & \cdots & \\ a_{n\,1} & & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

Na matriz quadrada denota-se a importância de suas duas diagonais, a principal e secundária, respectivamente:

$$a_{i\,j} \in M_{n \times n} \mid i = j \qquad a_{i\,j} \in M_{n \times n} \mid i + j = n + 1$$

Matriz Diagonal: é toda matriz quadrada onde os elementos não pertencentes a diagonal principal são nulos. *e.g.:*

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2\,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3\,3} \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade: é toda matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são iguais a 1, enquanto todos os outros elementos são nulos. *e.g.:*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular: toda matriz quadrada onde os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos:

$$a_{i\,j} = 0 \ \forall i < j \lor j > i$$

5.1.3 Adição

A soma de duas matrizes (necessariamente de mesma dimensão) é feita pela soma de seus respectivos termos:

$$A_{y\times x} + B_{y\times x} = C_{y\times x} \mid c_{i\,j} = b_{i\,j} + a_{i\,j}$$

5.1.4 Multiplicação

Por um Coeficiente: a multiplicação de uma matriz por um número é feita multiplicando cada um de seus elementos pelo coeficiente:

$$A_{y\times x} \cdot k = B_{y\times x} \mid b_{i\,j} = k \cdot a_{i\,j}$$

Por Outra Matrix: a multiplicação de duas matrizes (necessariamente tendo o número de colunas da primeira igual ao número de linhas da segunda) resulta numa matriz contendo a somatório do produto dos elementos ordenados em linha por coluna:

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} \mid c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} \cdot b_{k\,j}$$

Nota-se que: $M_{y\times x} \cdot I_y = I_y \cdot M_{y\times x} = M_{y\times x}$

5.1.5 Transposição

A transposição de uma matriz é seu espelhamento, invertendo a indexação de linhas e colunas de seus elementos:

$$M_{y\times x} = a_{i\,j} \xrightarrow{\text{transposição}} M^t_{x\times y} = a_{j\times i}$$

Frente ao processo de transposição matricial, surgem duas classificações:

Matriz Simétrica: é toda matriz quadrada equivalente a sua transposição.

Matriz Antissimétrica: é toda matriz quadrada cuja qual, quando transposta, resulta na sua matriz oposta.

5.1.6 Inversão

Uma matriz quadrada é dita inversível quando existe uma inversa que multiplicada por ela resulta numa matriz identidade de mesma ordem:

$$M_{n\times n} \cdot M^{-1}_{n\times n} = M^{-1}_{n\times n} \cdot M_{n\times n} = I_n$$

5.2 Determinantes

5.2.1 Definição

O determinante é uma função matricial que associa matrizes quadradas a um escalar que a define e mede sua transformação no espaço vetorial, possuindo inúmeras aplicações em campos diversos da matemática e física. Para matrizes de primeira e segunda ordem, o determinante é encontrado da seguinte forma:

$$\det M_{1\times 1} = \begin{vmatrix} a_{1\,1} \end{vmatrix} = a_{1\,1}$$

$$\det M_{2\times 2} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

5.2.2 Regra de Sarrus

Para matrizes de terceira ordem, usamos a seguinte regra:

$$\det M_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

5.2.3 Menor Complementar

Para uma matriz de ordem maior que 2, o complementar algébrico de um elemento é o determinante que se obtém ao suprimir a linha e coluna desse elemento. *e.g.:*

$$M_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} : D_{1\,1} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}; D_{2\,2} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}; D_{3\,3} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

5.2.4 Complemento Algébrico

Para uma matriz de ordem maior que 2, o complemento algébrico (cofator) de um elemento é dado por:

$$A_{i\,j} = (-1)^{i+j} \cdot D_{i\,j}$$

5.2.5 Determinante por Recorrência

A definição da determinante por recorrência (caso geral) é dada pela soma dos produtos dos elementos da primeira coluna por seus complementos algébricos:

$$\det M_{n\times n} = \sum_{i=i}^{n} a_{i\,1} \cdot A_{i\,1}$$

5.2.6 Teorema de Laplace

O teorema de Laplace diz que o determinante de uma matriz de ordem maior que 2 é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer por seus respectivos cofatores, assim a definição do determinante por recorrência não precisa ser aplicado necessariamente à primeira coluna, mas a qualquer linha ou coluna de uma matriz.

5.2.7 Combinação Linear

Define-se pelo conjunto das somas dos produtos dos elementos de determinadas filas por determinadas constantes, ordenadamente:

$$M_{n\times n} = [a_{i\,j}] \qquad s = \{filas\,paralelas\} \qquad p = \#s \qquad c = \{c_1, ..., c_p\}$$

$$\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \mid \alpha_\sigma = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{s_k\,\sigma} \cdot c_k \because s = \{linhas\} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{\sigma\,s_k} \cdot c_k \because s = \{colunas\} \end{cases}$$

e.g.:

$$M_{3\times 3} = [a_{i\,j}]$$

$$s_x = \{2, 3\}, c = \{q, r\} \to \alpha = \begin{cases} \alpha_1 = a_{2\,1} \cdot q + a_{3\,1} \cdot r \\ \alpha_2 = a_{2\,2} \cdot q + a_{3\,2} \cdot r \\ \alpha_3 = a_{2\,3} \cdot q + a_{3\,3} \cdot r \end{cases}$$

$$s_y = \{1, 2, 3\}, c = \{q, r, s\} \to \alpha = \begin{cases} \alpha_1 = a_{1\,1} \cdot q + a_{1\,2} \cdot r + a_{1\,3} \cdot s \\ \alpha_2 = a_{2\,1} \cdot q + a_{2\,2} \cdot r + a_{2\,3} \cdot s \\ \alpha_3 = a_{3\,1} \cdot q + a_{3\,2} \cdot r + a_{3\,3} \cdot s \end{cases}$$

5.2.8 Propriedades

P-1: o determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta:

$$\det M = \det M^t$$

P-2: se os elementos de uma fila qualquer de uma matriz forem todos nulos, então o determinante dessa matriz é zero.

P-3: se multiplicada uma fila qualquer de uma matriz por uma constante, o valor do determinante dessa matriz também é multiplicado pela mesma constante. *e.g.:*

$$k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix}$$

$$\det(k \cdot M_{n\,n}) = k^n \cdot \det M_{n\,n}$$

P-4: se invertidas as posições de 2 filas paralelas de uma matriz, o determinante da nova matriz formada será o oposto do determinante da primeira. *e.g.:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$$

P-5: se uma matriz tem 2 filas paralelas idênticas, por consequência da P-4 o determinante será 0.

P-6: a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos cofatores de uma fila paralela resulta em 0:

$$A_{n\times n} = [a_{i\,j}] \qquad (p \in \mathbb{N}^n - i) \qquad (q \in \mathbb{N}^n - j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} \cdot A_{p\,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} \cdot A_{i\,q} = 0$$

P-7: se duas filas paralelas de uma matriz forem formadas por elementos respectivamente proporcionais, então seu determinante será 0:

$$(A_{n\times n} = [a_{i\,j}]) \qquad (p \in \mathbb{N}^n - i) \qquad (q \in \mathbb{N}^n - i) \qquad (k = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \#k = n\})$$

$$\left.\begin{aligned} a_{i\,j} &= a_{p\,j} \cdot k_j \\ a_{i\,j} &= a_{i\,q} \cdot k_i \end{aligned}\right\} \to \det A = 0$$

P-8: caso tomada uma matriz e decompostos os elementos de uma fila qualquer em uma soma de dois elementos, o determinante dessa matriz será a soma dos determinantes das matrizes formadas pela substituição dessa fila pelas parcelas da soma. *e.g.:*

$$\begin{vmatrix} a & (b_1 + b_2) & c \\ d & (e_1 + e_2) & f \\ g & (h_1 + h_2) & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b_1 & c \\ d & e_1 & f \\ g & h_1 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 & c \\ d & e_2 & f \\ g & h_2 & i \end{vmatrix}$$

P-9: se uma matriz quadrada tiver uma de suas filas como a combinação linear de suas outras filas, então o determinante dessa matriz é 0. *e.g.:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 0 \because \{a_{1\,3}, a_{2\,3}, a_{3\,3}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \mid s_y = \{1, 2\}, c = \{1, 2\}$$

P-10: se uma fila qualquer de uma matriz quadrada for multiplicada por uma constante e somada a outra fila paralela, o determinante se mantém inalterado. *e.g.:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & (b + ka) & c \\ d & (e + kd) & f \\ g & (h + kg) & i \end{vmatrix}$$

P-11: o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. *e.g.:*

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i$$

P-12: dadas duas matrizes quadradas de mesma ordem, o determinante do produto das matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes:

$$A_{n\times n}, B_{n\times n} \leftarrow \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

5.2.9 Redução da Ordem

Usando o teorema de Jacobi (P-10) e o teorema de Laplace, é possível reduzir a ordem de um determinante, desde que o primeiro elemento da primeira coluna da matriz tenha valor 1:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

Soma-se a primeira coluna a cada uma das restantes, multiplicadas pelo oposto de seu respectivo primeiro elemento:

$$B_{n\times n} = [b_{i\,j}] \mid \begin{cases} b_{1\,1} = 1 \\ b_{i\,j} = a_{i\,j} + a_{i\,1} \cdot (-a_{1\,j}) \forall i \in \mathbb{N}^n, j \in \mathbb{N}^n - 1 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & (a_{1\,2} - 1a_{1\,2}) & \cdots & (a_{1\,n} - 1a_{1\,n}) \\ a_{2\,1} & (a_{2\,2} - a_{2\,1} \cdot a_{1\,2}) & \cdots & (a_{2\,n} - a_{2\,1} \cdot a_{1\,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & (a_{n\,2} - a_{n\,1} \cdot a_{1\,2}) & \cdots & (a_{n\,n} - a_{n\,1} \cdot a_{1\,n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2\,1} & b_{2\,2} & \cdots & b_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n\,1} & b_{n\,2} & \cdots & b_{n\,n} \end{bmatrix}$$

Por fim, aplicando o teorema de Laplace:

$$\det A = \det B = \begin{vmatrix} b_{2\,2} & \cdots & b_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2\,n} & \cdots & b_{n\,n} \end{vmatrix}$$

5.2.10 Regra de Chió

Simplificando o processo de redução de ordem de uma matriz, a regra de Chió diz que, sendo o primeiro elemento de uma matriz quadrada igual a 1, encontra-se uma matriz de ordem imediatamente menor com igual determinante suprimindo a primeira linha e coluna da matriz inicial, e em seguida subtraindo cada elemento do produto dos extremos de sua posição:

$$A_{n\times n} = [a_{i\,j}] \mid a_{1\,1} = 1 \qquad B_{n-1\times n-1} = [b_{i\,j}] \mid b_{i\,j} = a_{(i+1)\,(j+1)} - a_{(i+1)\,1} \cdot a_{1\,(j+1)}$$

$$\det A = \det B$$

e.g.:

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (e - bd) & (f - cd) \\ (h - bg) & (i - cg) \end{vmatrix}$$

5.2.11 Matriz de Vandermonde

Também conhecida como matriz das potências, matriz de Vandermonde é toda aquela que se define por filas paralelas de progressões geométrica com seus primeiros elementos iguais a um, e segundos elementos chamados característicos. Essas matrizes têm seu determinante encontrado pelo prodututório do arranjo das diferenças entre os elementos característicos:

$$V_{n\times n} = [v_{i\,j}] \mid \begin{cases} a_{i\,j} = a_{2\,j}^{i-1} \\ a_{i\,j} = a_{i\,2}^{j-1} \end{cases}$$

$$\det V_x = \prod_{1 \le p < q \le n} v_{2\,q} - v_{2\,p} \qquad \det V_y = \prod_{1 \le p < q \le n} v_{q\,2} - v_{p\,2}$$

e.g.:

$$\begin{vmatrix} a^0 & b^0 & c^0 \\ a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b^1 - a^1) \cdot (c^1 - a^1) \cdot (c^1 - b^1)$$

5.2.12 Matriz Adjunta

Chama-se matriz adjunta aquela obtida pela substituição dos elementos da matriz inicial por seus respectivos complementos algébricos, seguida da transposição da matriz:

$$M_{n \times n} = [a_{i\,j}] \qquad \overline{M}_{n \times n} = [A_{j\,i}]$$

Com a aplicação dos teoremas de Laplace e Cauchy, encontra-se uma propriedade sobre o determinante da matriz inicial, e por consequência dessa, é possível calcular a sua inversa:

$$M \cdot \overline{M} = \overline{M} \cdot M = \det M \cdot I_n$$

$$M^{-1} = \overline{M} \cdot \frac{1}{\det M}$$

5.3 Sistemas Lineares

5.3.1 Equação Linear

É uma equação formada pela soma do produto de diferentes incógnitas por seus respectivos coeficientes, resultando no chamado termo independente. Uma ênupla ordenada de números reais é dada como solução de uma equação linear quando esta a satisfaz:

$$(a, b \in \mathbb{R}), (i, n \in \mathbb{N})$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

$$S_\rho = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = b$$

5.3.2 Sistema Linear

É um conjunto de equações lineares nas mesmas incógnitas, tendo uma representação em sua forma matricial. Uma ênupla ordenada só é dada como solução de um sistema linear se for solução de todas as suas equações lineares:

$$P = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Quando a forma matricial só carrega os coeficientes, é chamada de matriz incompleta, e quando a última coluna contém os termos independentes, é a chamada matriz completa:

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} & r_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} & r_m \end{bmatrix}$$

5.3.3 Sistema Linear Homogêneo

É definido como um sistema onde todos os termos independentes são iguais a zero, sendo sempre um sistema possível pela chamada solução nula, onde todos os coeficientes são zero.

5.3.4 Teorema de Cramer

Considerando um sistema linear com o número de equações igual ao número de incógnitas, formando assim uma matriz quadrada, o sistema será possível e determinado caso o determinante dessa matriz seja diferente de zero:

$$P_i = [a_{y\ x}] \mid a_{y\ x} = \begin{cases} b_{y\ i} \\ a_{y\ x} \mid x \neq i \end{cases}$$

$$S_P = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \mid \alpha_i = \frac{\det P_i}{\det P} \leftrightarrow \det P \neq 0$$

5.3.5 Sistema Escalonado

Quando um dado sistema tem o número de coeficientes nulos antes do primeiro não nulo aumentando de equação para equação, este é chamado de sistema escalonado. Para tal caso, se sua matriz incompleta for triangular, seu determinante sempre será diferente de zero e assim se aplica o teorema de Cramer, mas caso hajam mais incógnitas do que equações o sistema será possível e indeterminado. *e.g.:*

$$P = \begin{bmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & a_{1\ 3} \\ 0 & a_{2\ 2} & a_{2\ 3} \\ 0 & 0 & a_{3\ 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

5.3.6 Escalonamento de um Sistema

O escalonamento de um sistema se baseia em reduzir as incógnitas linha-a-linha montando sistemas equivalentes com base em operações elementares sobre linhas:

P-1: trocadas as posições de duas equações, o sistema se mantém equivalente;
P-2: multiplicada uma equação de um sistema por uma constante, o sistema se mantém equivalente;
P-3: substituída uma equação pela mesma somada a outra do sistema, este se mantém equivalente.

5.3.7 Teorema de Rouché-Capelli

Um sistema só será possível caso o número de linhas não nulas de sua matriz completa for igual ao de sua matriz completa.

5.4 Vetores

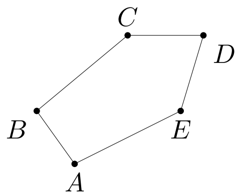
$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

6 Geometria Plana

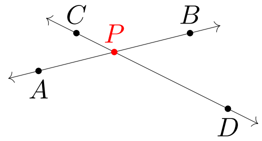
6.1 Definições Primitivas

6.1.1 Noções Primitivas

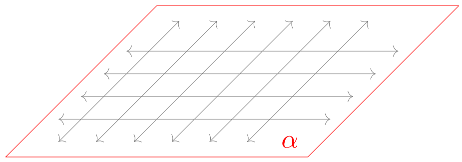
Pontos: São usado para representar localizações no espaço, mas não compreendem forma ou dimensão. Quando contidos numa mesma reta, são colineares, e quando compreendidos num mesmo plano, coplanares. Um conjunto de pontos quaisquer é denominado figura, e se todos os pontos que a formam forem coplanares, a figura é dita plana. *e.g.:*



Retas: São um conjunto de pontos compreendidos numa linha infinita que não faz curvas e existe em uma dimensão. Retas são ditas concorrentes se tiverem um único ponto em comum. *e.g.:*



Planos: São um conjunto de retas paralelas e perpendiculares postas lado a lado, compreendendo uma forma de duas dimensões. *e.g.:*



6.1.2 Postulados Primitivas

Existência: numa reta há infinitos pontos, assim como em um plano;

Determinação da Reta: dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles;

Determinação do Plano: três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles;

Inclusão: se uma reta tem dois pontos distintos contidos num plano, a reta também está contida nesse mesmo plano.

6.1.3 Congruência

É uma noção primitiva e intuitiva que expressa uma ideia de semelhança, equivalência ou proporcionalidade.

6.2 Conceitos Básicos

6.2.1 Pontos Contidos

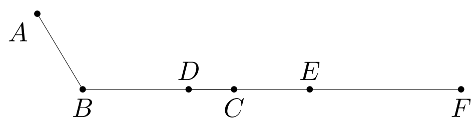
A definição de estar entre dois pontos obedece aos seguintes postulados:

1. Se P está entre A e B, todos são colineares;
2. Se P está entre A e B, todos são distintos dois a dois;
3. Se P está entre A e B, A não está entre P e B, e B não está entre P e A;
4. Dados quaisquer dois pontos distintos, há um ponto entre eles.

6.2.2 Segmento de Reta

Definição: é a reunião de dois pontos distintos com o conjunto dos pontos que estão entre eles:

$$\overline{AB} = \{P | A\mathring{P}B\}$$



Classificação

Consecutivos: compartilhando uma de suas extremidades. *e.g.:* $\overline{AB}, \overline{BC}$;

Colineares: estando contidos numa mesma reta. *e.g.:* $\overline{BC}, \overline{DE}$;

Adjacentes: sendo consecutivos e colineares, mas tendo a extremidade compartilhada como único ponto comum. *e.g.:* $\overline{BC}, \overline{CF}$

Postulados de Congruência

Reflexão: todo segmento é congruente a si mesmo:

$$\overline{AB} \equiv \overline{AB}$$

Simetria: a congruência é estabelecida em ambas as direções de comparação:

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \leftrightarrow \overline{CD} \equiv \overline{AB}$$

Transitividade: se um primeiro segmento é congruente à um segundo, e este segundo é congruente a um terceiro, o terceito também é congruente ao primeiro:

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \wedge \overline{CD} \equiv \overline{EF} \rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{EF}$$

Transporte: dado um segmento contido numa semirreta, há um único ponto que forma com a origem da semirreta um segmento congruente ao primeiro:

$$\overline{XY} \in \overrightarrow{AB}, \exists! Z \in \overrightarrow{AB} | \overline{XY} \equiv \overline{AZ}$$

Medida
A medida de um segmento é um número real positivo que quantifica o seu comprimento:

$$m(\overline{AB}) \in \mathbb{R}_+ | \overline{AB} \equiv \overline{CD} \leftrightarrow m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$$

Ponto Médio
O ponto médio é um ponto único que divide um segmento em dois segmentos congruentes:

$$\exists! M \in \overline{AB} | \overline{AM} \equiv \overline{MB}$$

Comparação de Segmentos
Dado uma semirreta com um ponto qualquer em seu comprimento, ao inserir um segunto ponto qualquer e comparar os segmentos formados da origem até cada um dos pontos, surgem três possíveis estados:

$$\overrightarrow{AX} \ni Y | \begin{cases} A\overset{\circ}{Y}X \rightarrow \overline{AX} > \overline{AY} \leftrightarrow m(\overline{AX}) > m(\overline{AY}) \\ X = Y \rightarrow \overline{AX} \equiv \overline{AY} \\ A\overset{\circ}{X}Y \rightarrow \overline{AX} < \overline{AY} \leftrightarrow m(\overline{AX}) < m(\overline{AY}) \end{cases}$$

Distância Métrica
A distância métrica entre dois pontos é o comprimento do segmento formado por eles expresso em valor numperico, podendo ser 0.
Distância Geométrica
A distância geométrica entre dois pontos é qualquer segmento congruente ao segmento formado por eles, podendo ser nula.
Adição
A adição de dois segmentos de reta, gera um segmento formado por dois adjacentes e congruentes aos somados:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{EF} \leftrightarrow m(\overline{AB}) + m(\overline{CD}) = m(\overline{EF})$$

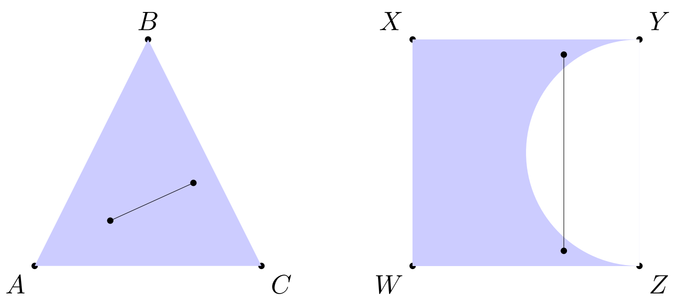
6.2.3 Semirreta

É a reunião de um segmento de reta com o conjunto dos pontos que contém uma das extremidades entre si e a outra extremidade do segmento:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P | A\overset{\circ}{B}P\}$$

6.2.4 Região

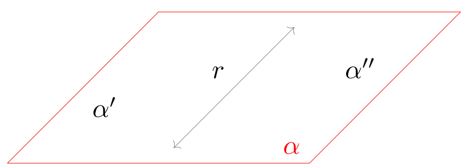
Um conjunto de pontos quaisquer pode ser chamado região ou figura, e será classificado como côncavo ou convexo, sendo côncavo quando não convexo, e convexo quando dois pontos distintos quaisquer são extremidades de um segmento de reta inteiramente contido na região, se for unitário, ou se for vazio. *e.g.:*



6.2.5 Semiplano

Dado um plano qualquer, uma reta (origem) o cortará em dois semiplanos, nessa caso opostos e abertos, tal que:

$$\alpha' \equiv \alpha''$$
$$\alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$$
$$A \in \alpha', B \in \alpha'' \rightarrow \overline{AB} \cup r \neq \varnothing$$



6.2.6 Ângulos

Definição

É a reunião de duas semirretas consecutivas não colineares, onde as semirretas são os lados do ângulo, e a extremidade comum é a origem:

$$\hat{\alpha} = A\hat{O}B = \overline{AO} \cup \overline{OB}$$

Interior

O interior do ângulo é a interseção dos semiplanos abertos com origem nos lados do ângulo. Setor angular é a reunião de um ângulo com seu interior.

Relações

Ângulos são consecutivos se compartilham um lado, e adjacentes são consecutivos que não tem nenhum ponto interior em comum.

Ângulos são ditos opostos pelo vértice quando os lados de um deles são as semirretas opostas aos lados do outro.

Suplementar Adjacente

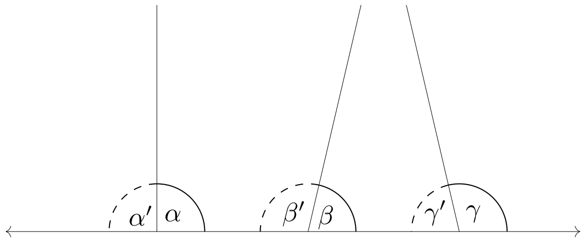
O suplementar adjacente de um ângulo é formado por um de seus lados e a semirreta oposta ao seu outro lado.

Classificação

É chamado ângulo reto aquele que é congruente ao seu suplementar adjacente, e agudo e obtuso são respectivamente menores e maiores que um ângulo reto.

Ângulo Complementar

O complementar de um ângulo é a diferença entre ele e um ângulo reto.



Postulados de Congruência

Reflexão: todo ângulo é congruente a si mesmo:

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\alpha}$$

Simetria: a congruência é estabelecida em ambos os sentidos de comparação:

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \leftrightarrow \hat{\beta} \equiv \hat{\alpha}$$

Transitividade: se um primeiro ângulo é congruente à um segundo, e este segundo é congruente a um terceiro, o terceito também é congruente ao primeiro:

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \wedge \hat{\beta} \equiv \hat{\gamma} \rightarrow \hat{\alpha} \equiv \hat{\gamma}$$

Transporte: dado um ângulo e uma semirreta contida num plano, existe uma única outra semirreta consecutiva que forma um ângulo congruente ao primeiro:

$$A\hat{O}B \in \alpha, \overrightarrow{PC} \in \alpha \rightarrow \exists! \overrightarrow{PD} | A\hat{O}B \equiv C\hat{P}D$$

Bissetriz

A bissetriz de um ângulo é a semirreta interna a ele que o divide em dois ângulos adjacentes e congruentes.

Amplitude

A amplitude de um ângulo é a medida numérica que o descreve. As principais unidades de medida são o grau (dividido em minutos e segundos), o grado (dividido em centigrado e decimiligrado) e o radiano:

$$m(\hat{\alpha}) \in \mathbb{R}_+ | \hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \leftrightarrow m(\hat{\alpha}) = m(\hat{\beta})$$

$$\gamma = \text{ângulo reto}$$

$$1^\circ = \frac{\gamma}{90}, 1' = \frac{1^\circ}{60}, 1'' = \frac{1'}{60}$$

$$1^g = \frac{\gamma}{100}, 1^{gg} = \frac{1^g}{100}, 1^{ggg} = \frac{1^g g}{100}$$

$$1^{rad} = \frac{2\gamma}{\pi}$$

Comparação
Dados dois ângulos num mesmo semiplano, com o primeiro tendo um lado compreendido em sua origem, podemos movimentar um ponto que forma um ângulo com a origem do primeiro, e a partir de sua comparação, surgem três possíveis estados:

$$\overrightarrow{AB} \in \alpha, A\hat{O}B \in \alpha', A\hat{O}C \in \alpha' | \begin{cases} \overrightarrow{OC} \in A\hat{O}B \to A\hat{O}B > A\hat{O}C \leftrightarrow m(A\hat{O}B) > m(A\hat{O}C) \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \to A\hat{O}B \equiv A\hat{O}C \\ \overrightarrow{OC} \notin A\hat{O}B \to A\hat{O}B < A\hat{O}C \leftrightarrow m(A\hat{O}B) < m(A\hat{O}C) \end{cases}$$

Adição
A adição de dois ângulos, gera um formado por dois adjacentes congruentes aos somados:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\gamma} \leftrightarrow m(\hat{\alpha}) + m(\hat{\beta}) = m(\hat{\gamma})$$

6.3 Retas no Plano

6.3.1 Relações entre Retas

Paralelas
Duas retas são paralelas quando coincidentes ou quando coplanares e sem pontos em comum:

$$r \parallel s \leftrightarrow \begin{cases} r = s \\ \alpha \supset r, s | r \cup s = \emptyset \end{cases}$$

Concorrentes
Duas retas são concorrentes quando coplanares e com exatamente um ponto em comum:

$$r \nparallel s \leftrightarrow \alpha \subset r, s | \exists ! P \in r \cup s$$

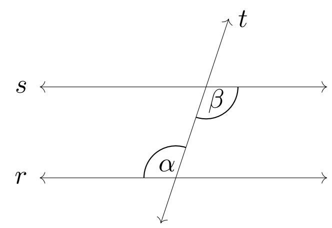
Perpendiculares
Duas retas são perpendiculares quando concorrentes formando um ângulo reto

$$r \perp s \leftrightarrow r \cap s = P \wedge r_1 \hat{P} s_1 = r_2 \hat{P} s_2$$

Oblíquas
Duas retas são oblíquas quando concorrentes e não perpendiculares

6.3.2 Postulados

Existência da Paralela
Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes, então essas duas retas são paralelas. *e.g.:*



$$\alpha \equiv \beta \therefore r \parallel s$$

Unicidade da Paralela
Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada
Existência e Unicidade da Perpendicular
Por um ponto qualquer fora de uma reta dada, existe uma e somente uma reta perpendicular a reta dada

6.3.3 Projeção

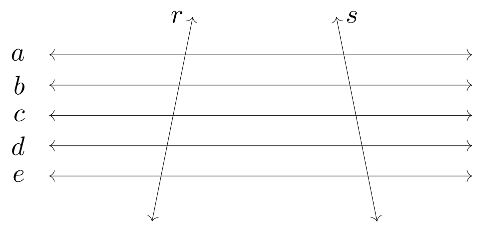
Ortogonal
Chama-se projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta o ponto de interseção da reta com sua perpendicular conduzida ao ponto
Segmento sobre reta
A projeção de um segmento sobre uma reta não perpendicular é o segmento formado pela projeção dos pontos que formam o primeiro segmento

6.3.4 Teorema de Thales

Conceitos Iniciais:

- Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si;
- Uma transversal dos feixes é uma reta transversal a todas as retas do feixe de paralelas;
- Pontos correspondentes são pontos de transversais cortados por uma mesma reta do feixe;
- Segmentos correspondentes são segmentos formados por pontos respectivamente correspondentes.

Teorema:
Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra. *e.g.:*



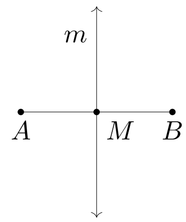
$$A = r \cup a, B = r \cup c, C = r \cup e$$

$$A' = s \cup a, B' = s \cup c, C' = s \cup e$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

6.3.5 Mediatriz

A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio

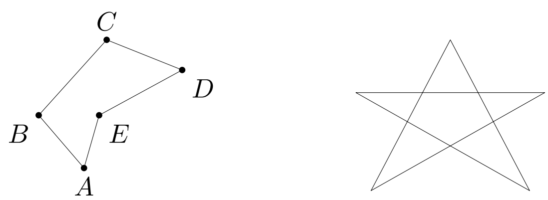


6.4 Polígonos

6.4.1 Definição

Chama-se polígono a reunião dos segmentos formados por três ou mais pontos distintos onde dois consecutivos não são colineares. *e.g.:*:

$$\lozenge ABCDE = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DE} \cup \overline{EA}$$



6.4.2 Composição Nominal dos Elementos

Superfície Poligonal
Superfície Poligonal, também chamada de área ou região poligonal, é a reunião do polígono com seu interior;

Vértices
Vértices são os pontos que formam a região que define o polígono;

Lados
Os lados são os segmentos de reta formados ordenadamente pelos vértices do polígono;

Ângulos
Ângulos internos são aqueles cujo interior coincide com a região do polígono, enquanto os ângulos externos são os suplementares aos internos;

Perímetro
O perímetro é a soma das distâncias métricas dos lados do polígono, enquanto e semiperímetro é a metade do perímetro;

Diagonal
Uma diagonal é um segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

6.4.3 Nomenclatura

Quanto a Forma
Um polígono será classificado como simples ou complexo, e côncavo ou convexo de acordo com a sua forma:

- O polígono simples é aquele cuja interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia, e complexo em caso contrário;
- O polígono é convexo quando a reta determinada por quaisquer dois vértices consecutivos inclui todos os outros no interior do semiplano que ela determina.

Quanto ao Número de Lados
Os polígonos recebem nomes específicos de acordo com o seu número de lados:

3. Triângulo
4. Quadrilátero
5. Pentágono
6. Hexágono
7. Heptágono
8. Octógono
9. Eneágono
10. Decágono
11. Undecágono
12. Dodecágono
13. Tridecágono
14. Tetradecágono
15. Pentadecágono
16. Hexadecágono
17. Heptadecágono
18. Octodecágono
19. Eneadecágono
20. Icoságono
30. Triacontágono
40. Tetracontágono
50. Pentacontágono
60. Hexacontágono
70. Heptacontágono
80. Octacontágono
90. Eneacontágono
100. Hectacontógono

Equanto os demais polígonos com mais de vinte e menos de cem lados tem seus nomes compostos pela seguinte regra:

Dezena		Junção	Unidade		Sufixo
			1	ena	
20	Icosi		**2**	di	
30	Triaconta		**3**	tri	
40	Tetraconta		**4**	tetra	
50	Pentaconta	cai	**5**	penta	gono
60	Hexaconta		**6**	hexa	
70	Heptaconta		**7**	hepta	
80	Octaconta		**8**	octa	
90	Eneaconta		**9**	enea	

Quanto a Congruência de Seus Lados
Um polígono pode ser classificado como equiângulo, quando possui todos os ângulos congruentes, e equilátero, quando possui todos os lados congruentes. Um polígono convexo simultaneamente equilátero e equiângulo é chamado regular.

6.4.4 Descrição Matemática dos Elementos

Diagonais
O número de diagonais de um polígono é proporcional ao seu número de lados:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ângulos Internos
A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é proporcional ao seu número de lados:

$$S_i = (n-2) \cdot \pi^{rad}$$

Ângulos Externos
A soma dos ângulos externos de um polígono tem o valor constante de quatro ângulos retos:

$$S_e = 2\pi^{rad}$$

6.5 Polígonos Regulares

6.5.1 Inscrição e Circunscrição

Ao se dividir uma circunferência em n arcos congruentes, formam-se dois polígonos regulares:

Inscrito: reunindo as cordas determinadas por dois pontos de divisão consecutivos, é desenhado um polígono regular de n lados inscrito na circunferência;
Circunscrito: reunindo as tangentes traçadas aos pontos de divisão, é desenhado um polígono regular de n lados circunstrito à circunferência.

Em decorrência dessa propriedade, denota-se que todo polígono regular é inscritível em exatamente uma circunferência, e é circunscritível a exatamente uma circunferência.

6.5.2 Elementos Notáveis

Centro: é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita;
Raio: é a distância do centro até um vértice, e portanto o raio da circunferência inscrita;
Apótema: é a distância do centro até o ponto médio de um lado, e portanto o raio da circunferência circunscrita;
Diagonal Principal: existente apenas no caso de um número par de lados, é definida pela diagonal que atravessa o centro;
Maior Diagonal: é a maior distância entre dois vértices, sendo a diagonal principal quando aplicável;
Menor Diagonal: é a menor distância entre dois vértices.

6.5.3 Descrição Matemática dos Elementos

Raio

$$R = \frac{l}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

Lado

$$l_{2n} = \sqrt{R\cdot(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2})}$$

$$l_3 = R\sqrt{3} \qquad l_4 = R\sqrt{2} \qquad l_5 = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

Apótema

$$r = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2}}{2} = \frac{l}{2\tan\frac{\pi}{n}} = R\cdot\cos\frac{\pi}{2}$$

$$r_3 = \frac{R}{2} \qquad r_5 = \frac{R + R\sqrt{5}}{4}$$

$$r_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \qquad r_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Número de Diagonais por Vértice

$$d_n = (n-3)$$

Número de Diagonais Únicas

$$dt_n = \frac{n\cdot d_n}{2}$$

Diagonal Principal

$$d_p = 2R$$

Maior Diagonal

$$d_M = \frac{r+R}{\sin\frac{\hat{\alpha}_i(n-1)}{2(n-2)}}|n>3$$

Menor Diagonal

$$d_m = \frac{l\cdot\sin\hat{\alpha}_i}{\sin\frac{\hat{\alpha}_i}{n-2}}|n>3$$

Semiperímetro

$$p = \frac{n\cdot l}{2}$$

Área

$$A = \frac{n \cdot l^2}{4 \tan \frac{\pi}{n}} = p \cdot r$$

Circunferência Inscrita

$$C = \frac{\pi \cdot l}{\tan \frac{\pi}{n}} \qquad A = \frac{\pi \cdot l^2}{4 \tan^2 \frac{\pi}{n}}$$

Circunferência Circunscrita

$$C = \frac{\pi \cdot l}{\sin \frac{\pi}{n}} \qquad A = \frac{\pi \cdot l^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}$$

6.6 Triângulos

6.6.1 Descrição Matemática

Condição de Existência:

Área:

Lados:

Altura:

Mediatriz e Circuncentro:

Mediana e Baricentro:

Bissetriz e Incentro:

Círculo de 9 Pontos e Reta de Euler:

6.6.2 Classificação

Quanto aos lados:

Equilátero: Composto por três lados congruentes;
Isósceles: Composto por exatamente dois lados congruentes;
Escaleno: Composto por três lados não congruentes entre si.

Quanto aos ângulos:

Retângulo: Contêm exatamente um ângulo reto;
Obtusângulo: Contêm exatamente um ângulo obtuso;
Acutângulo: Contêm todos os três ângulos agudos.

6.6.3 Congruência

Definição

Um triângulo é congruente a outro quando é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que, seus lados e seus ângulos sejam ordenadamente congruentes:

$$\triangle ABC \equiv \triangle XYZ \leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{XY} & A\hat{B}C \equiv X\hat{Y}Z \\ \overline{BC} \equiv \overline{YZ} \quad \wedge & B\hat{C}A \equiv Y\hat{Z}X \\ \overline{AC} \equiv \overline{XZ} & C\hat{A}B \equiv Z\hat{X}Y \end{cases}$$

Casos de Congruência

LAL : Ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles;
ALA : Ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes;
LLL : Ordenadamente congruentes os três lados;
LAAo : Ordenadamente congruentes um lado, seu ângulo oposto e um ângulo congruente.

6.6.4

6.6.5

6.7 Quadriláteros Notáveis

6.8 Circunferências

7 Trigonometria

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

8 Geometria Analítica

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

9 Geometria Espacial

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

10 Matemática Discreta

10.1 Combinatória

10.1.1 Princípio Fundamental da Contagem

Teoremas Auxiliares: Considerando dois conjuntos quaisquer, o número de possíveis pares ordenados formados por elementos dos 2 conjuntos é determinado pelo produto do número de elementos dos conjuntos:

$$(\{a_1, \cdots, a_m\}), (\{b_1, \cdots, b_n\})$$

$$\#\{(a_i, b_j) \mid i \in \mathbb{N}^m, j \in \mathbb{N}^n\} = m \cdot n$$

O número de possíveis pares ordenados formados por elementos de um mesmo conjunto é determinado pelo número de elementos do conjunto:

$$\#\{(a_i, a_j) \mid (i \neq j \leftrightarrow a_i \neq a_j)\ \forall i, j \in \mathbb{N}^m\} = m \cdot (m-1)$$

Princípio: Considerando um conjunto qualquer, o número de ênuplas ordenadas de um mesmo tamanho formadas por elementos distintos é definida pelo seu número de elementos e o número de elementos do conjunto:

$$(\{a_1, \cdots, a_n\}), (Z = \{(a_i, \cdots)_P \mid (i \neq j \leftrightarrow a_i \neq a_j)\ \forall i, j \in \mathbb{N}^n\})$$

$$\#Z = \prod_{k=0}^{p-1} n - k = n \cdot (n-1) \cdots (n - (p-1))$$

10.1.2 Arranjo

Arranjo Simples: É toda enupla de elementos distintos de um conjunto, onde o número de enuplas possíveis é determinado por:

$$(\{a_1, \cdots, a_n\}), (A_{n,p} = \{(a_i, \cdots)_p \mid (i \neq j \leftrightarrow a_i \neq a_j)\ \forall i, j \in \mathbb{N}^n\})$$

$$\#A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arranjo com Repetição: É toda enupla de elementos não necessariamente distintos de um conjunto, onde o número de enuplas possíveis é determinado por:

$$(\{a_1, \cdots, a_n\}), (A^R_{n,p} = \{(a_i, \cdots)_p\})$$

$$\#A^R_{n,p} = n^p$$

10.1.3 Permutação

Permutação Simples: É um arranjo simples onde o número de elementos escolhidos é o número de elementos do conjunto, e o número de permutações possíveis é determinado por:

$$(\{a_1, \cdots, a_n\}), (P_n = A_{n,n}\{(a_i, \cdots)_n \mid (i \neq j \leftrightarrow a_i \neq a_j)\ \forall i, j \in \mathbb{N}^n\})$$

$$\#P_n = n!$$

Permutação com Repetição: Quando existem elementos repetidos no conjunto a ser permutado, o número de permutações possíveis é determinado por:

$$(\{a_1, \cdots, a_n\}), (n_i = \#\{a_j \mid a_j = a_i\})$$

$$\#P_n^{n_i} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} n_i!}$$

10.1.4 Combinação

Combinação Simples: É todo subconjunto de tamanho determinado com elementos distintos, onde o número de combinações possíveis é determinado por:

$$(A = \{a_1, \cdots, a_n\}), (C_{n,p} = \{\cdots, a_p\} \mid C \in A \wedge (i \neq j \leftrightarrow a_i \neq a_j)\ \forall a_i, a_j \in C)$$

$$\#C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Combinação com Repetição: É todo subconjunto de tamanho determinado com elementos não necessariamente distintos, onde o número de combinações possíveis é determinado por:

$$(A = \{a_1, \cdots, a_n\}), (C_{n,p} = \{\cdots, a_p\} \mid C \in A$$

$$\#C_{n,p} = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p! \cdot (n-1)!}$$

10.2 Probabilidade

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

10.3 Teoria dos Grafos

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

10.4 Otimização

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

10.5 Criptografia

$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$

11 Matemática Aplicada

11.1 Matemática Financeira

11.1.1 Introdução

Ao lidar com expressões monetárias, o valor a ser tratado é chamado de capital; A correção do capital para o caso de investimento ou empréstimo é chamado juros; A correção do capital expressa em porcentagem sobre determinado período de tempo é chamada taxa de juros; O valor do capital em determinado tempo após aplicados os juros é chamado montante:

$$J = C \cdot i$$

$$M = C + J$$

11.1.2 Variação Percentual

Para o caso de uma mudança sobre uma determinada grandeza em um espaço de tempo, a variação percentual é a razão entre a diferença e o valor inicial expressa em porcentagem:

$$\Delta V = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_t}{V_0} - 1$$

Quando consideradas mudanças sucessivas em determinados espaços de tempo, o cálculo da variação percentual acumulada é feito da seguinte forma:

$$\Delta V_n = \frac{V_n - V_{n-1}}{V_{n-1}}$$

$$V_n = V_0 \prod_{i=0}^{n} 1 + \Delta V_i$$

11.1.3 Inflação e Deflação

A inflação e a deflação são sentidos opostos do movimento sobre o valor real de uma moeda em relação a determinado padrão, sendo respectivamente a desvalorização e a valorização da moeda.

11.1.4 Regimes de Capitalização

Capitalização Simples: No regime de capitalização simples, os juros incidem sobre as parcelas com sua taxa aplicada sobre o capital inicial:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Capitalização Composta: No regime de capitalização composta, os juros incidem sobre as parcelas com sua taxa aplicada sobre o montante de cada parcela:

$$M_t = C \cdot \prod_{n=1}^{t} 1 + i_n = C \cdot (1 + i_1) \cdots (1 + i_t)$$

Considerando que a taxa de juros se mantenha inalterada com o passar do tempo:

$$M_t = C \cdot (1 + i)^t$$

Quando necessário calcular o valor atual a partir do valor futuro, basta inverter os juros de volta:

$$C = \frac{M_t}{(1 + i)^t}$$

11.1.5 Sequência Uniforme de Pagamentos

Dado um valor financiado em parcelas iguais sob um regime de capitalização composta com taxa de juros fixa, a sequência das parcelas forma uma progressão geométrica. O valor atual do financiamento é dado pela soma dos valores atuais das parcelas:

$$C = \sum_{n=1}^{t} \frac{V_p}{(1 + i)^n} = V_p \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{(1 + i)^t \cdot i}$$

11.1.6 Sequência Uniforme de Depósitos

Considerando uma sequência de depósitos iguais sob um regime de capitalização composta com taxa de juros fixa, a sequência dos depósitos forma uma progressão geométrica. O montante depositado em dado momento é dado pela soma dos valores atuais dos depósitos:

$$C = \sum_{n=1}^{t-1} V_d \cdot (1 + i)^n = V_d \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i}$$

11.2 Estatística

11.2.1 Introdução

Estatística é a aplicação da probabilística para explicar a frequência de eventos em situações observacionais e modelar a incerteza para prever eventos futuros. Divide-se em:

Amostragem: a população é o conjunto de objetos que interessam ao estudo e uma amostra é um subconjunto da população formado por um procedimento definido, os elementos desse subconjunto são os pontos amostrais;

Estatística Descritiva: é a técnica de organização e descrição dos dados coletados do espaço amostral;

Estatística Inferencial: é a realização de inferências ou modelagens a partir dos dados do espaço amostral.

11.2.2 Variáveis

São características dos elementos do espaço amostral que adquirem determinado valor, sendo classificadas em:

Qualitativas: são atributos ou aspectos nominais, não podendo ser numericamente mensurados. e.g.: gênero, estado civil, religião;
Quantitativas: são valores numericamente mensuráveis, divididas em:

discretas - são obtidas por contagem e representadas como elementos de um conjunto finito e mensurável. *e.g.:* frequência semanal;
contínuas - são obtidas por mensuração, se expressando por valores pertencentes a um intervalo real. *e.g.:* idade, renda familiar;

11.2.3 Frequência

Para cada variável estudada, conta-se o número de ocorrências total de cada valor para se obter a frequência absoluta, e ao dividir o número de ocorrências de um determinado valor pela frequência absoluta, obtém-se a frequência relativa daquela ocorrência. *e.g.:*

$$x_1 = 16, x_2 = 14, x_3 = 9$$

$$f_x = 39, f_{x_1} = \frac{16}{39}$$

11.2.4 Medidas de Centralidade

Média Aritmética Simples: Definida pelo somatório dos valores assumidos pela variável dividido pelo número de valores:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n^{-1} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Média Aritmética Ponderada: Definida pelo somatório dos produtos dos valores assumidos pela varíavel por seus respectivos pesos (comunmente sua frequência relativa) divido pelo somatório dos pesos:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{x_1 \cdot p_1 \cdots x_n \cdot p_n}{p_1 + \cdot + p_n}$$

Média Geométrica: Definida pela raiz do produto dos valores assumidos pela variável:

$$G_x = \left(\prod_{i=1}^{n} x_n \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

Média Harmônica: Definida pelo inverso da média aritmética dos inversos dos valores assumidos pela variável:

$$H_x = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{-1}}{n} \right)^{-1} = \left(\frac{x_1^{-1} + \cdots + x_n^{-1}}{n} \right)^{-1}$$

Mediana: É o valor que separa as metades maior e menor dos valores assumidos por uma variável quando em ordem crescente, sendo o termo do meio em um número ímpar de valores ou a média dos 2 termos do meio:

$$x = \{x_i \mid x_i \leq x_{i+1} \ \forall i \in \mathbb{N}^n\}$$

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} \rightarrow \frac{n}{2} \notin \mathbb{N} \\ \overline{x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}+1}} \rightarrow \frac{n}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Moda: É o valor com a maior frequência relativa dentre os possíveis valores da variável:

$$Moda_x = x_i \mid f_{x_i} \geq f_{x_j} \ \forall j \in \mathbb{N}^n - i$$

11.2.5 Medidas de Dispersão

Amplitude: É a diferença entre o maior e o menor valor de uma variável,

Variância: Indica a distância de cada valor da média dos valores possíveis da variável. É definida pela média dos quadrados das diferenças entre cada valor e a média aritmética da variável:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot n^{-1}$$

Desvio Padrão: Definido pela raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Desvio Médio: Definido pela média dos módulos das diferenças entre cada valor e a média aritmética da variável:

$$Dm_x = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| \cdot n^{-1}$$

11.2.6 Medidas de Posição

Quartis: divide os valores assumidos pela variável em 4 setores iguais;
Decis: divide os valores assumidos pela variável em 10 setores iguais;
Percentis: aponta o limiar que separa os valores assumidos pela variável na porcentagem indicada, onde tal porcentagem dos valores são menores ou iguais a ele.

11.2.7 Inferência Bayesiana

$$\Upsilon\pi o\mu o\nu\eta$$

12 Cálculo e Análise

12.1 Limite

12.2 Derivada

12.3 Integral

13 Constantes da Matemática

13.1 Raiz Quadrada de Dois

13.2 Pi

13.3 Proporção Áurea

13.4 Unidade Imaginária

13.5 Número de Euler

13.6 Constante de Euler-Mascheroni

14 Funções Definidas

14.1 Série de Taylor

14.2 Função Zeta de Riemann

14.3 Série de Dirichlet

14.4 Função de Gauss

14.5 Função Gama