TD 2 COUCHE PHYSIQUE

1. PROPAGATION DU SIGNAL

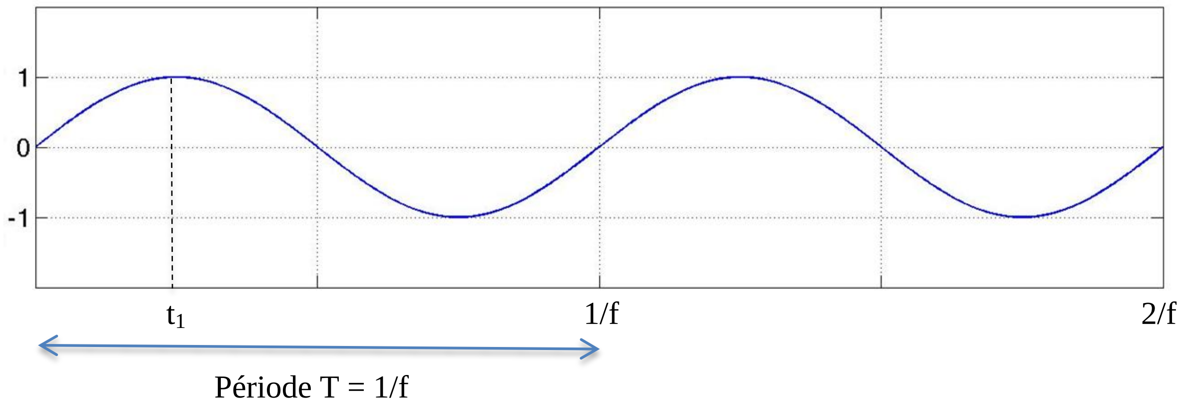
La transmission de données sur un support physique entre un émetteur et un récepteur se fait par propagation d'une onde (électrique ou électromagnétique), variant de façon continue ou discontinue dans le temps. La forme la plus simple d'une onde continue est une fonction sinusoïdale :

$$s(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

caractérisée par trois paramètres :

- l'**amplitude** A qui est la *valeur crête* du signal dans le temps ;
- la **fréquence** f_0 qui est la vitesse à laquelle le signal se répète, exprimée en nombre de cycles par seconde ou en Hertz (Hz). L'inverse de la fréquence est appelé période T du signal et se mesure en secondes : $T = \frac{1}{f_0}$;
- la **phase** ϕ qui est une mesure de la position relative dans le temps à l'intérieur d'une période du signal, exprimée en radians (rad).

Exemple : S(t) = sin(2πf t), A = 1, ϕ = 0.



A l'instant $t_1 = 1/(4f)$: $\sin(2\pi f t) = \sin(2\pi f/(4f)) = \sin(2\pi/4) = \sin(\pi/2) = 1$.

Exercice 1.1 | Signal périodique

1. On considère le signal suivant :

$$\begin{aligned} s(t) &= \sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi f_0 t) \\ &= \sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi(3 f_0)t) \end{aligned}$$

a) De combien de composantes fréquentielles ce signal est-il constitué ? Les représenter et les sommer graphiquement.

b) Le signal $s(t)$ est-il périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

2. DECOMPOSITION EN SERIES DE FOURIER / SPECTRE

Au 19ième siècle, Jean-Baptiste **Fourier** montre que toute **fonction périodique** $g(t)$ de période T peut se décomposer en une somme (éventuellement infinie) de fonctions sinusoïdales ou de manière équivalente de fonctions sinus et cosinus :

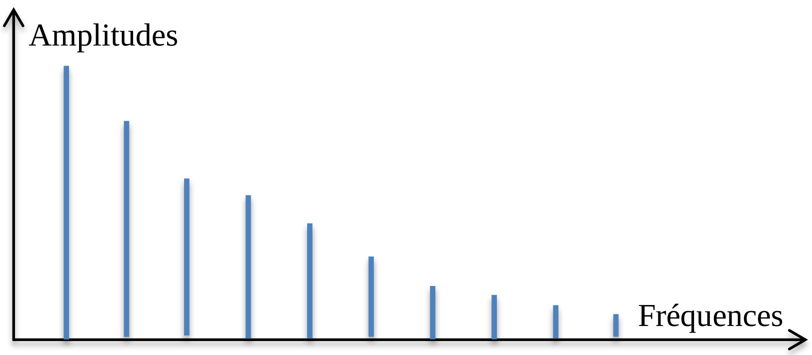
$$g(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(2\pi n f_0 t + \phi_n)$$
$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

$$\begin{pmatrix} c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n = \tan^{-1}(a_n / b_n) \end{pmatrix}$$

où f_0 est la ***fréquence fondamentale*** (inverse de la période T), a_n et b_n sont les amplitudes cosinus et sinus de la ***n**ième* ***harmonique***, c_0 est la composante constante et continue du signal, et c_n sont les amplitudes des harmoniques, appelées aussi amplitudes moyennes. Une telle décomposition est unique et est appelée ***Série de Fourier***.

Le ***spectre fréquentiel*** associé à une fonction périodique $g(t)$ est un ***spectre de raies***, chaque raie correspondant à la fréquence d'un harmonique de la décomposition en séries de Fourier. Dans un **spectre d'amplitude**, la hauteur de chaque raie est égale à $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

La ***largeur spectrale*** ou ***largeur de bande*** d'un signal est la largeur de la plage des fréquences incluses dans le signal (différence entre la plus grande fréquence et la plus petite fréquence ayant une raie non nulle dans le spectre). Exemple :

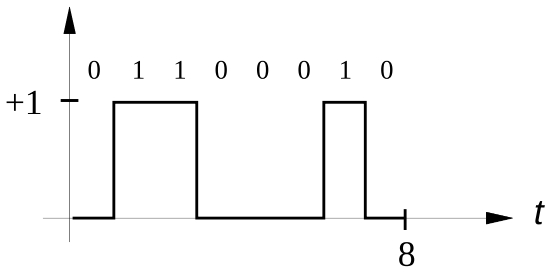


Exercice 2.1 | Décomposition en séries de Fourier

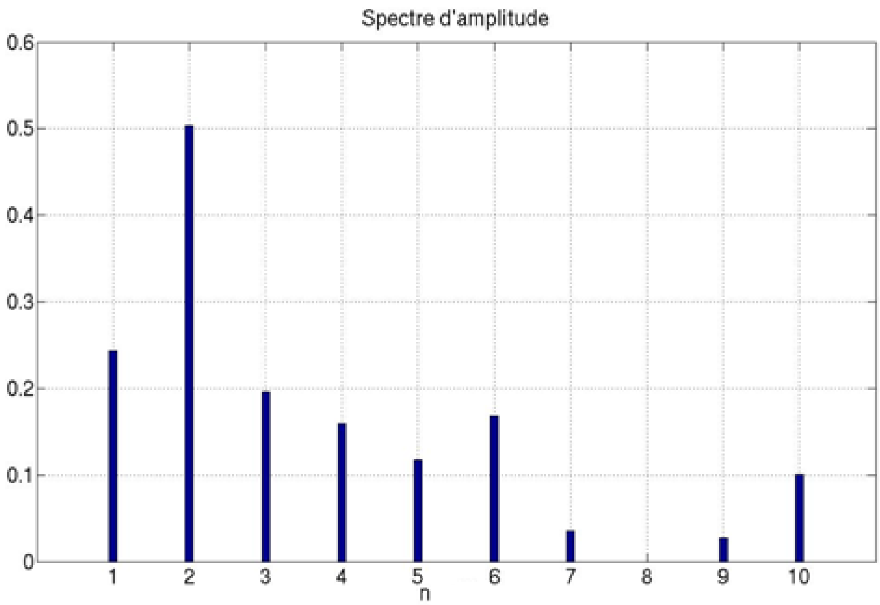
1. Par simple identification, donner les coefficients de la décomposition en séries de Fourier du signal $s(t)$ de l'exercice 1.1.
2. Représenter le spectre d'amplitude associé au signal $s(t)$. Quelle est la largeur spectrale de ce signal ?

Exercice 2.2 | Déformation du signal

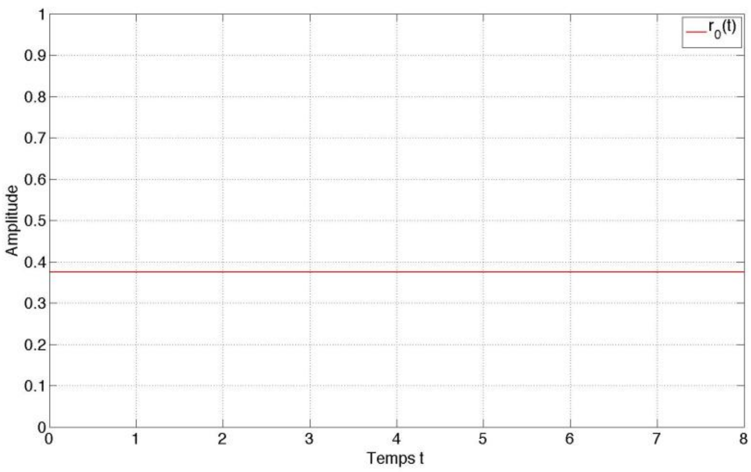
On considère la transmission d'une suite supposée infinie du signal carré suivant permettant de coder la suite binaire 01100010 :



Le spectre d'amplitude associé au signal est le suivant :

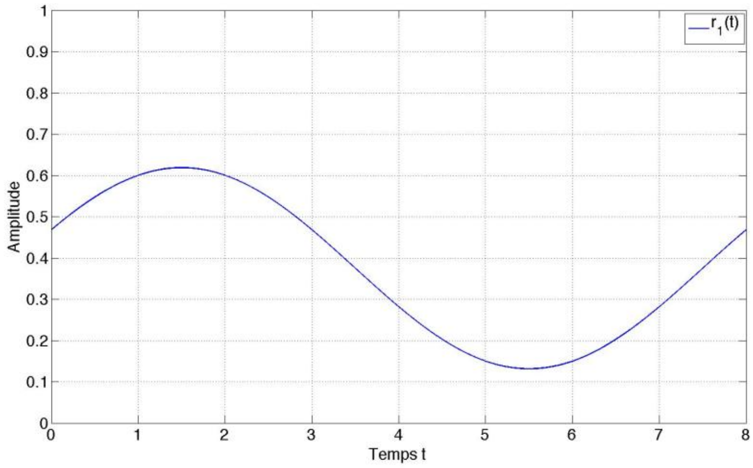


On applique au signal un filtre, appelé filtre passe-bas, laissant passer toutes les fréquences du signal jusqu'à une certaine fréquence f_c appelée fréquence de coupure. La représentation du signal $r_0(t)$ en sortie du filtre est la suivante :



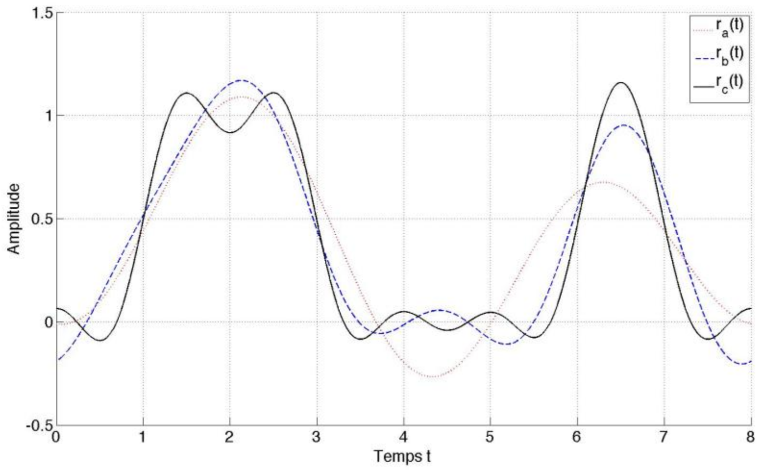
1. A quoi correspond le signal $r_0(t)$? Que peut-on dire de la fréquence de coupure f_c du filtre ?

On change la fréquence de coupure du filtre. La représentation du signal $r_1(t)$ en sortie du filtre devient :



2. A quoi correspond le signal $r_1(t)$? Donner son expression en fonction de a_1, b_1 et f_0. Que peut-on dire de la nouvelle fréquence de coupure f_c ?

La figure ci-dessous représente les signaux reçus $r_a(t)$, $r_b(t)$ et $r_c(t)$ lorsque l'on filtre le signal à l'aide de trois fréquences de coupures différentes.



3. A quoi correspondent ces 3 signaux ? Lequel d'entre eux est-il le plus proche du signal carré ?
4. Si la fréquence de coupure est très grande, quelle serait la forme du signale $r_n(t)$. Dessiner-le approximativement.

3. BANDE PASSANTE

Les supports physiques de transmission sont les éléments permettant de faire circuler les informations entre les équipements de transmission. On classe généralement ces supports en trois catégories :

- les **supports métalliques** permettent de faire circuler une grandeur électrique sur un câble généralement métallique ;
- les **supports optiques** permettent d'acheminer des informations sous forme lumineuse ;
- les **supports aériens** désignent l'air ou le vide ; ils permettent la circulation d'ondes électromagnétiques diverses.

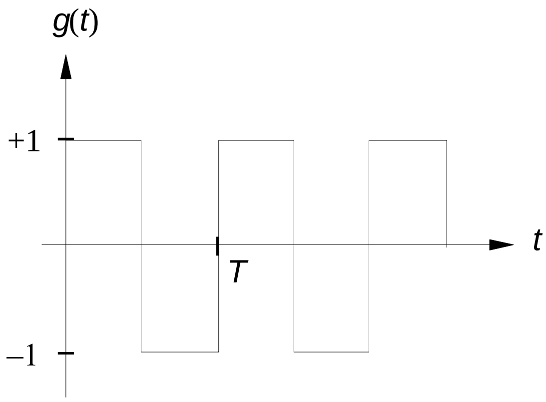
Un support de transmission ne peut transmettre que dans une bande de fréquence limitée. On appelle ***bande passante du support*** la bande de fréquences $[f_1, f_2]$ que le support laisse passer sans (trop de) déformation. La largeur de cette bande passante est généralement notée $B = f_2 - f_1$.

Exercice 3.1 | Bande pasante

On considère la fonction périodique (de période T) suivante :

$g(t) = +1$ pour $0 \leq t < T / 2$

$g(t) = -1$ pour $T / 2 \leq t < T$



Cette fonction représente un signal numérique codé sur deux niveaux : +1 V et –1 V. On suppose qu'une impulsion de +1 V code un « 1 » et qu'une impulsion de –1 V code un « 0 ». Ce type de codage est appelé NRZ (Non Return to Zero).

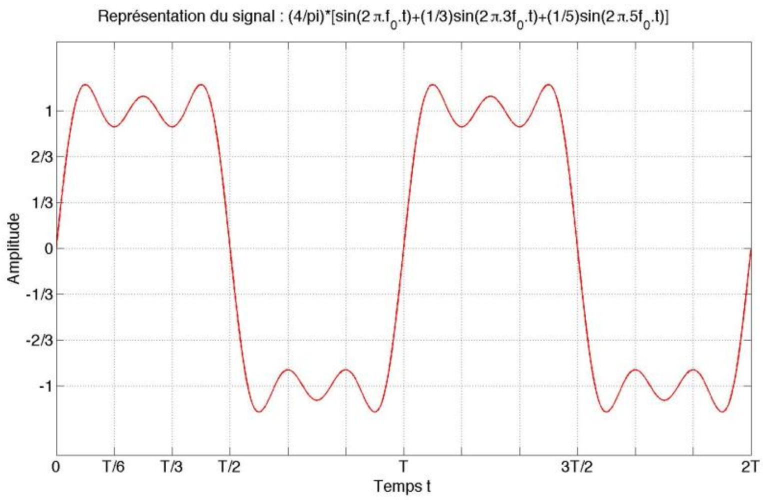
1. On considère que la fréquence (fondamentale) du signal est de 1 MHz. Quel est le débit du signal numérique correspondant (en bits par seconde) ?

On montre que la décomposition de ce signal en série de Fourier est la suivante :

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n f_0 t) .$$

2. Quels sont les coefficients a_n, b_n et c_0 associés à cette décomposition ? En déduire le spectre d'amplitude du signal.

On considère que la transmission des fréquences f_0 à $5f_0$ est nécessaire pour récupérer sans problème le signal au niveau du récepteur. La forme du signal obtenu (tronqué au-delà de la fréquence $5f_0$) est la suivante :



3. Quelle bande passante le support doit-il avoir pour permettre cette transmission ?
4. Que se passe-t-il si la largeur de la bande passante du support est de 2 MHz ?
5. Qu'en est-il si le débit de la transmission est réduit à 1 Mbit/s ?

On suppose maintenant que le signal est codé sur quatre niveaux : +3 V, +1 V, –1 V et –3 V, correspondant respectivement aux codes « 01 », « 00 », « 10 » et « 11 ». On a alors affaire à un signal NRZ quadrivalent.

6. On considère que le signal est toujours représenté par la fonction périodique $g(t)$ et que la fréquence du signal est de 500 kHz. Quels peuvent être les signaux transmis ? Quel est le débit du signal numérique correspondant (en bit/s) ?
7. Toujours avec une fréquence du signal de 500 kHz, quel débit obtient-on si le signal est codé sur $M = 2^r$ niveaux ?

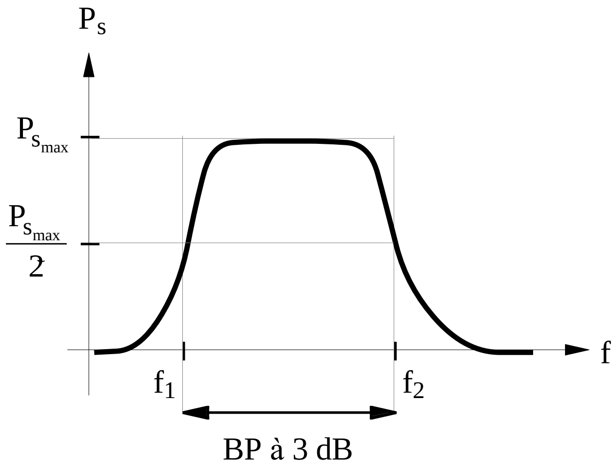
4. BRUIT

La transmission de données ne se fait pas sans altération. Des parasites ou des dégradations du signal peuvent survenir au niveau des composants électroniques utilisés pour la transmission ou au niveau du canal. **Le bruit** est une perturbation aléatoire qui se rajoute au signal sur tout support. Il est généralement caractérisé par un ratio, appelé ***rapport signal-à-bruit***, ou plus couramment en anglais SNR pour Signal-to-Noise Ratio. Ce dernier permet de caractériser l'importance relative du signal par rapport à celle du bruit. Le rapport signal-à-bruit se calcule en faisant le quotient entre la puissance P_S du signal et la puissance P_N du bruit : P_S/P_N. Habituellement il est exprimé en ***décibels*** (dB) :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{P_S}{P_N}\right)$$

Plus le rapport signal-à-bruit est grand, meilleure est la qualité de la transmission.

L'échelle logarithmique des décibels est également utilisée pour caractériser la bande passante. En effet, la bande passante d'une voie de transmission est définie comme l'intervalle $[f_1, f_2]$ de fréquence sur lequel l'affaiblissement en puissance du signal est compris entre l'affaiblissement minimal et l'affaiblissement minimal à laquelle on ajoute une certaine valeur, généralement 3 dB (correspondant donc à un affaiblissement de la puissance du signal de 50 % supplémentaires par rapport au meilleur cas).



Exercice 4.1 | Rapport signal-à-bruit

1. A quels nombres de dB correspondent les rapports P_S/P_N : 100 000, 2000, 500 ?
2. A quoi correspondent en grandeur réelle les rapports : 3 dB, 10 dB, 40 dB, 37 dB ?

5. CAPACITE THEORIQUE D'UN CANAL DE TRANSMISSION : LOI DE SHANNON

La loi de Shannon fournit le **débit binaire maximum** auquel on peut théoriquement transmettre sans erreur sur un canal à bande passante limitée sujet à du bruit, encore appelé capacité :

Loi de Shannon

La capacité d'un canal de transmission bruité de largeur de bande B s'exprime de la façon suivante :

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right) \text{ bit/s}$$

où $\frac{P_S}{P_N}$ représente le rapport signal-à-bruit du canal (exprimé en grandeur réelle).

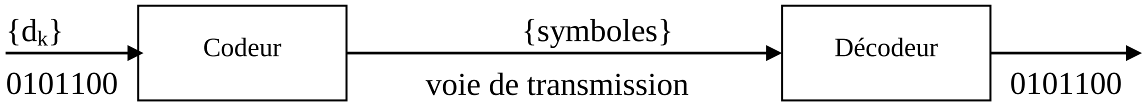
Exercice 5.1 | Loi de Shannon

On désire transmettre de la vidéo numérique ayant les caractéristiques suivantes : une matrice de 480×640 pixels où chaque pixel peut prendre une valeur parmi 32 intensités différentes. La vitesse requise est de 25 images par seconde.

1. Quelle est la vitesse de transmission de l'émetteur en bits par seconde ?
2. Le canal disponible a pour largeur de bande 4,5 MHz et un rapport signal-à-bruit de 35 dB. Peut-on transférer le signal vidéo sur ce canal ?
3. Qu'en est-il si le rapport signal-à-bruit passe à 20 dB ?

6. CODAGE EN LIGNE

Le **codage en ligne** consiste à associer une représentation physique au message numérique, avant d'effectuer une transmission numérique en Bande de Base (BdB) sur un support de longueur limitée.



Le codage en ligne se décompose en deux opérations. La première transforme la suite d'**éléments binaires** $\{d_k\}$ correspondant au message numérique à émettre en une suite de ***symboles***. C'est l'opération de codage binaire à *M*-aire. La seconde opération consiste à associer une forme d'onde à chaque symbole ainsi produit. C'est l'opération de codage *M*-aire à signal.

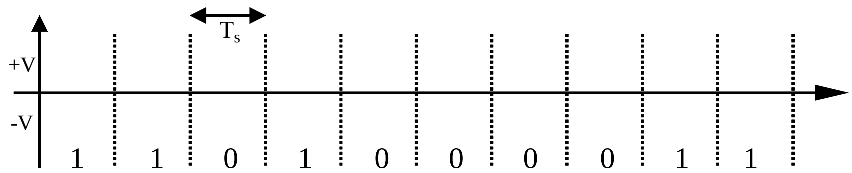
- Lors de l'opération de **codage binaire à *M*-aire**, les éléments binaires (bits) délivrés toutes les T_b secondes (ou encore à un débit $D_b = \frac{1}{T_b}$ bit/s) sont regroupés en symboles. La ***valence** M* du codage correspond à la taille de l'alphabet des symboles (nombre de symboles différents). Si $M = 2^r$, chaque symbole code $r = \log_2 M$ bits.

  Les symboles successifs sont alors transmis régulièrement à raison d'un symbole toutes les T_s secondes. Le nombre de symboles transmis par unité de temps $R_s = \frac{1}{T_s}$ symb/s (ou bauds), encore appelé rapidité de modulation, se relie donc au débit binaire par la relation suivante :

  $$R_s = \frac{D_b}{r} = \frac{D_b}{\log_2 M} \text{ symb/s ou bauds.}$$

- L'opération de **codage *M*-aire à signal** consiste à associer à chaque symbole une forme d'onde unique ou ***élément de signal***. Les formes d'onde utilisées sont de forme « carrée » (de sorte que le spectre du signal ainsi produit est centré autour de la fréquence nulle).

Exercice 6.1 | Codages bivalents



Soit la suite de bits : « 1101000011 » à coder en bande de base. Représenter les signaux transmis suivant les différents codes en ligne bivalents (de valence $M = 2$) définis ci-dessous.

1. Code NRZ (Non Return to Zero) binaire :
   $d_k = 0$, le signal vaut $-V$;
   $d_k = 1$, le signal vaut $+V$.
2. Code Manchester (ou biphase) :

d_k = 0, le signal est un front montant au milieu de l'intervalle T_s ;
d_k = 1, le signal est un front descendant au milieu de l'intervalle T_s.

Exercice 6.2 | Codages multivalents

On considère un codage NRZ quadrivalent (de valence $M = 4$) transmettant un élément de signal toutes les 1 ms.

1. Représenter le codage correspondant à la séquence binaire « 00111011000111… ».
2. Quelle est la rapidité de modulation ?
3. Quel est le débit binaire transmis ?

7. MODULATION

La modulation permet la transmission d'un signal numérique sous forme d'un signal analogique. C'est nécessaire lorsque le support physique de transmission ne peut transporter que des signaux analogiques. La modulation est donc utilisée dans la technologie ADSL et Wi-Fi. Dans ce cas, les symboles constituants le signal modulé correspondent à des formes continues et sinusoïdales.

Exercice 7.1 | Modulation quadrivalente

On considère la séquence 00111001. Dessiner le signal transmis par un modem correspondant à cette séquence.

1. en modulation quadrivalente d'amplitude avec une rapidité de modulation de 1000 bauds

2. en modulation quadrivalente de phase avec une rapidité de modulation de 1000 bauds

Remarque : Les différentes techniques de modulation de phase, amplitude et fréquence sont plutôt combinées ensemble pour former une modulation plus robuste. Elles sont utilisées en ADSL, Wi-FI/WiMAX et TNT. Ces modulations sont plus connues sous leur abréviation anglophone telle que QPSK ou QAM utilisées entre autres pour mettre en œuvre les modulations DMT (Discrete MultiTone) sur liaison filaire et OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex) sur liaison sans fil.

Facultatif

8. NUMERISATION

Il s'agit d'une technique qui numérise des données analogiques afin de les traiter par des équipements numériques comme la numérisation de la voix capturée par un micro. *A ne pas confondre avec la démodulation*.

Echantillonnage, quantification et codage sont les trois étapes de la numérisation. **L'échantillonnage** consiste à transformer un signal continu en un signal discret par un prélèvement périodique (période T), à la fréquence d'échantillonnage f_e ($f_e=1/T$), de la valeur du signal analogique. D'après le théorème d'échantillonnage de **Nyquist**, la numérisation d'un signal analogique de fréquence maximum f_{max} est sans perte si $f_e \geq 2 f_{\max}$

La **quantification** représente un échantillon par une valeur numérique appartenant à une échelle de quantification. L'erreur de quantification est d'autant plus importante que le niveau de quantification est faible et que le pas de quantification est grand.

Le **codage** consiste à remplacer la suite des échantillons par une suite binaire.
S'il y a $q=2^n$ niveaux de quantification, un échantillon est codé sur n bits.

Le codage MIC (Modulation par Impulsion et Codage) a 256 (2^8) niveaux de quantification, un échantillon y est codé sur 8 bits.

Exercice 8.1 | Numérisation de la voix

Soit une ligne téléphonique dont la bande passante est 4 kHz.

1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale que l'on doit choisir si l'on veut numériser un signal analogique dont la largeur du spectre est identique à la bande passante du support de transmission ?

2. Quel temps sépare deux échantillons consécutifs du signal ?

3. Quel doit être le débit binaire minimal d'une liaison transmettant le signal numérisé d'une voie téléphonique si l'on utilise la modulation MIC (échantillon codé sur 8 bits) ?