

# THỦY LỰC BIỂN

***Đinh Văn Ưu, Nguyễn Thọ Sáo, Phùng Đăng Hiếu***



NXB Đại học Quốc gia Hà Nội 2006

Từ khoá: Hoàn lưu, đại dương, nhiệt động lực học, chính áp, tà áp, địa thế vị, dòng địa chuyển, mô hình hai chiều, mô hình 3D

---

*Tài liệu trong Thư viện điện tử Đại học Khoa học Tự nhiên có thể được sử dụng cho mục đích học tập và nghiên cứu cá nhân. Nghiêm cấm mọi hình thức sao chép, in ấn phục vụ các mục đích khác nếu không được sự chấp thuận của nhà xuất bản và tác giả.*

**ĐINH VĂN ƯU, NGUYỄN THỌ SÁO, PHÙNG ĐĂNG HIẾU**

# **THUYẾT LỰC BIÊN**

**Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội**

*Mục đích của cuốn sách này là cung cấp cho người đọc những kiến thức, nguyên lý cơ bản của thủy động lực học biển ứng dụng trong vùng nước nông ven bờ. Cuốn sách cũng hữu dụng cho các sinh viên chuyên ngành Hải dương học và Thủy văn học, những sinh viên này đòi hỏi là đã được trang bị những kiến thức cơ bản về cơ học chất lỏng, hải dương học đại cương và vật lý biển.*

*Cuốn sách bao gồm sáu chương và một phụ lục bao trùm một số vấn đề của thủy động lực học biển ứng dụng cho vùng ven bờ, bao gồm: những cơ sở nền tảng của thủy lực học, các phương trình cơ bản cho vùng nước nông và các ứng dụng của chúng trong việc nghiên cứu các quá trình động lực như hoàn lưu, sóng, vận chuyển trầm tích và tác động của sóng lên các công trình.*

*The aim of this book is to provide readers with the principles of Marine Hydrodynamics applying to the shallow water areas. The book is also helpful for students who are majoring in Oceanography and Hydrology, and armed with basic knowledge in fluid mechanics, General oceanography and Ocean Physics.*

*The book consists of six chapters and one appendix covering several issues of Hydrodynamics in the near-shore area, including: The principles of Hydraulics, The basic equations for shallow waters and their applications in studying the dynamic processes such as water circulation, wave propagation, sediment transport and wave force on structures.*

## Mục lục

<b>MỞ ĐẦU .....</b>	<b>6</b>
<b>Chương 1. CƠ SỞ THỦY LỰC HỌC .....</b>	<b>7</b>
<b>MỞ ĐẦU .....</b>	<b>7</b>
<b>1.1. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA CHẤT LỎNG .....</b>	<b>8</b>
1.1.1. Đặc tính thứ nhất .....	8
1.1.2. Đặc tính thứ hai .....	9
1.1.3. Đặc tính thứ ba .....	9
1.1.4. Đặc tính thứ tư .....	10
1.1.5. Đặc tính thứ năm .....	11
<b>1.2. CÁC LỰC TÁC ĐỘNG LÊN CHẤT LỎNG .....</b>	<b>13</b>
1.2.1. Trạng thái ứng suất của chất lỏng .....	13
1.2.2. Áp lực thủy tĩnh .....	16
<b>1.3. PHƯƠNG TRÌNH BERNOULLI .....</b>	<b>17</b>
1.3.1. Các khái niệm cơ bản .....	17
1.3.2. Phương trình liên tục của dòng nguyên tố chảy ổn định .....	20
1.3.3. Phương trình liên tục của toàn dòng chảy ổn định .....	21
1.3.4. Phương trình Bernoulli của dòng nguyên tố chảy ổn định .....	22
1.3.5. Phương trình Bernoulli của toàn dòng chảy ổn định .....	25
<b>1.4. CHUYỂN ĐỘNG CHẤT LỎNG TRONG ĐƯỜNG ỐNG CÓ ÁP .....</b>	<b>28</b>
1.4.1. Khái niệm .....	28
1.4.2. Tính toán với đường ống dài .....	29
1.4.3. Tính toán với đường ống ngắn .....	31
<b>1.5. CHUYỂN ĐỘNG CHẤT LỎNG TRONG LÒNG DẪN HỖ .....</b>	<b>31</b>
1.5.1. Dòng chảy đều không áp trong kênh hở .....	32
1.5.2. Dòng chảy ổn định không đều trong kênh hở .....	33
1.5.3. Dòng chảy không ổn định thay đổi chậm trong kênh hở .....	35
<b>1.6. LÝ THUYẾT LỚP BIÊN .....</b>	<b>39</b>
1.6.1. Khái niệm .....	39
1.6.2. Áp suất động lực .....	39
1.6.3. Hệ số kháng .....	40
1.6.4. Đường phân bố vận tốc logarit .....	41
<b>1.7. PHÂN TÍCH THỨ NGUYÊN VÀ ĐỒNG DẠNG THỦY LỰC .....</b>	<b>43</b>
1.7.1. Lý thuyết thứ nguyên (Lý thuyết $\pi$ ) .....	43
1.7.2. Các bước phân tích thứ nguyên .....	50
1.7.3. Đồng dạng thủy lực .....	50
<b>Chương 2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN THỦY ĐỘNG LỰC BIÊN VEN BỜ .....</b>	<b>57</b>
<b>2.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG VÀ LIÊN TỤC ĐỐI VỚI VÙNG BIÊN NÔNG VEN BỜ .....</b>	<b>57</b>
<b>2.2. ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU VÀ ĐIỀU KIỆN BIÊN .....</b>	<b>61</b>
2.2.1. Điều kiện ban đầu .....	61
2.2.2. Điều kiện biên .....	62
<b>2.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI VỚI VẬN TỐC TRUNG BÌNH THEO ĐỘ SÂU .....</b>	<b>67</b>
2.3.1. Những khái niệm chung .....	67
2.3.2. Hiệu ứng của sự phân lớp .....	70

2.3.3. Các thông lượng trao đổi trên mặt biển.....	71
2.3.4. Phương trình trung bình theo độ sâu.....	72
<b>2.4. HỆ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI VỚI QUÁ TRÌNH QUY MÔ VỪA .....</b>	<b>72</b>
2.4.1. Các đặc điểm hệ phương trình hai chiều triều và nước dâng.....	73
2.4.2. Những hướng phát triển của mô hình triều và nước dâng.....	76
<b>Chương 3. HOÀN LƯU BIỂN NÔNG VEN BỜ.....</b>	<b>82</b>
3.1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ HOÀN LƯU DU .....	82
3.2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN.....	85
3.3. BIẾN ĐỔI CỤC BỘ THEO ĐỘ SÂU CỦA VẬN TỐC NGANG.....	88
3.3.1. Phương trình mô tả.....	88
3.3.2. Hàm phân bố vận tốc ngang theo độ sâu.....	91
3.4. THÍ DỤ ÁP DỤNG MÔ HÌNH 2 CHIỀU .....	94
3.5. MÔ HÌNH 3 CHIỀU (3D) HOÀN LƯU BIỂN NÔNG VEN BỜ .....	97
3.5.1. Các khái niệm cơ bản về mô hình 3 chiều địa- thủy động lực tổng quát.....	97
3.5.2. Hệ các phương trình cơ bản .....	98
3.5.3. Sơ đồ khép kín rồi .....	103
3.5.4. Các điều kiện biên.....	106
<b>Chương 4. SÓNG TRONG DẢI VEN BỜ.....</b>	<b>109</b>
4.1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG SÓNG.....	110
4.1.1 Phương trình sóng thế .....	110
4.1.2. Các phương trình trên biên.....	112
4.1.3. Lý thuyết sóng tuyến tính.....	115
4.1.4. Sóng tiến trọng lực có biên độ nhỏ .....	117
4.2. BIẾN DẠNG SÓNG .....	126
4.3. KHÚC XẠ SÓNG .....	129
4.4. TÁN XẠ SÓNG .....	132
4.5. PHẢN XẠ SÓNG.....	133
4.5.1. Sự phản xạ từ tường đứng không thấm .....	134
4.5.2. Sự phản xạ trong vịnh kín .....	136
4.5.3. Phản xạ sóng từ các mặt nghiêng, bãi biển, bờ kè thoải và đê chắn sóng.....	138
4.6. SÓNG ĐỒ VÀ TIÊU TÁN NĂNG LƯỢNG SÓNG.....	141
4.7. DÒNG CHẢY SÓNG .....	143
4.7.1. Giới thiệu.....	143
4.7.2. Tốc độ trung bình của dòng chảy sóng dọc bờ. ....	144
4.7.3. Các đặc trưng của dòng chảy vuông góc với bờ .....	148
4.7.4. Hệ phương trình mô tả dòng chảy sóng trung bình, ứng suất sóng .....	149
4.7.5. Thay đổi mực nước trung bình do tác động của sóng.....	155
4.7.6. Phân bố của dòng chảy sóng dọc bờ .....	157
<b>Chương 5. TÁC ĐỘNG CỦA SÓNG GIÓ LÊN CÔNG TRÌNH.....</b>	<b>164</b>
5.1. ÁP SUẤT SÓNG LÊN TƯỜNG ĐỨNG.....	164
5.1.1. Hiện tượng.....	164
5.1.2. Áp lực gây ra do sóng đứng .....	166
5.1.4. Lực nâng của sóng.....	175
5.2. ÁP LỰC SÓNG LÊN TRÊN CÁC CÔNG TRÌNH.....	176
5.2.1. Tính ổn định của các đụn sỏi, bê tông bề mặt.....	176
5.2.2. Áp lực của sóng lên các cấu trúc ống.....	178
<b>Chương 6. QUÁ TRÌNH VẬN CHUYỂN TRẦM TÍCH .....</b>	<b>182</b>

6.1.NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN .....	182
6.1.1. Cơ sở lý thuyết xây dựng các công thức vận chuyển trầm tích .....	183
6.1.2. Những phương hướng giải quyết và khả năng đơn giản hoá bài toán .....	183
6.1.3. Cơ chế của quá trình vận chuyển trầm tích .....	184
6.2. NHỮNG CÔNG THỨC TÍNH TOÁN VẬN CHUYỂN TRẦM TÍCH .....	185
6.2.1. Dòng trầm tích vận chuyển do dòng chảy ổn định.....	186
6.2.2. Công thức vận chuyển trầm tích đáy do sóng .....	190
6.2.3. Công thức vận chuyển trầm tích đáy tổng cộng do sóng và dòng chảy .....	195
6.3. TÁC ĐỘNG CỦA SÓNG LÊN DÒNG VẬT CHẤT LƠ LŨNG VÀ DÒNG TRẦM TÍCH TỔNG CỘNG .....	197
6.3.1. Dòng vật chất lơ lửng.....	197
6.3.2. Dòng trầm tích tổng cộng.....	198
6.3.3. Những hạn chế trong tính toán dòng trầm tích hiện có .....	198
6.4. NHỮNG CÔNG THỨC VÀ MÔ HÌNH THÔNG DỤNG TÍNH TOÁN DÒNG TRẦM TÍCH VÀ BIẾN ĐỔI ĐỊA MẠO .....	199
6.4.1. Những công thức cổ điển tính toán dòng trầm tích.....	199
6.4.2. Công thức tính toán dòng trầm tích đối với vùng bờ có các yếu tố thủy động lực phức tạp .....	200
6.4.3. Cơ sở lý thuyết của các mô hình biến đổi địa mạo .....	201
<b>PHỤ LỤC.....</b>	<b>203</b>
<b>MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ TEN-XƠ VÀ GIẢI TÍCH TEN-XƠ.....</b>	<b>203</b>
1.CÁC KHÁI NIỆM VỀ VÉC TƠ VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI TOẠ ĐỘ .....	203
2.TEN-XƠ VÀ MỘT SỐ PHÉP TÍNH TOÁN TEN-XƠ .....	207
2.1. Định nghĩa về ten-xơ.....	207
2.2. Một số tính chất cơ bản của ten-xơ .....	208
2.3. Một số ten-xơ đặc trưng .....	209
3. MỘT SỐ QUY TẮC VÀ PHÉP TÍNH TEN-XƠ .....	211
3.1. Đạo hàm .....	211
3.2. Một số toán tử đạo hàm ten-xơ .....	211
3.3. Một số thí dụ tính toán ten-xơ trong hệ toạ độ trực giao .....	212

## MỞ ĐẦU

Giáo trình Thủy lực biển cung cấp những kiến thức thủy động lực cơ bản áp dụng cho vùng biển nông ven bờ. Những kiến thức này được trang bị cho sinh viên sau khi đã được học các giáo trình cơ sở như Cơ học chất lỏng, Hải dương học đại cương và Vật lý biển.

Giáo trình gồm có 6 chương và 1 phụ lục hình thành 3 phần cơ bản của thủy động lực học đới bờ: những kiến thức cơ sở thủy lực học, hệ các phương trình cơ bản thủy động lực học nước nông ven bờ và các ứng dụng trong nghiên cứu dòng chảy, sóng, vận chuyển trầm tích và tương tác biển-công trình.

Chương 1 cung cấp những kiến thức cơ sở của thủy lực học do TS. Nguyễn Thọ Sáo viết.

Các chương 2, 3 và 6 liên quan tới hệ các phương trình cơ bản thủy động lực học nước nông ven bờ và các ứng dụng trong nghiên cứu dòng chảy, vận chuyển trầm tích do PGS TS. Đinh Văn Ưu viết.

Các chương 4 và 5 liên quan tới sóng, dòng chảy sóng vùng ven bờ và tác động của sóng lên các công trình biển do ThS. Phùng Đăng Hiếu viết.

Để giúp sinh viên hiểu được các phương pháp khác nhau thể hiện các phương trình thủy động lực học biển, trong phần phụ lục của giáo trình giới thiệu tóm tắt những kiến thức cơ bản về véc tơ, ten-xơ và giải tích ten-xơ.

Đây là một giáo trình lần đầu được xây dựng và tập hợp do nhiều người biên soạn, nên không thể tránh khỏi những thiếu sót nhất định, chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của người đọc và các bạn đồng nghiệp về nội dung cũng như hình thức của cuốn giáo trình này.

Nhóm các tác giả

## Chương 1

# CƠ SỞ THỦY LỰC HỌC

### MỞ ĐẦU

Thủy lực học là một khoa học ứng dụng, nghiên cứu những quy luật cân bằng và chuyển động của chất lỏng; ngoài ra nó còn nghiên cứu các biện pháp ứng dụng các quy luật đó vào thực tiễn.

Thủy lực học còn gọi là cơ chất lỏng ứng dụng hoặc cơ chất lỏng kỹ thuật bởi vì cơ sở môn thủy lực là cơ học chất lỏng lý thuyết và kết quả của nó được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật.

Phương pháp nghiên cứu môn thủy lực là kết hợp phân tích lý luận với phân tích thực nghiệm, trong đó lấy việc sử dụng các biểu thức toán học phức tạp làm công cụ tính toán.

Nội dung nghiên cứu của thủy lực rất đa dạng, bao gồm nhiều lĩnh vực chuyên môn như : đường ống, kênh hở, dòng thấm, chuyển động vật rắn trong môi trường nước, chuyển động nước qua kết cấu rắn, công trình thủy lợi-giao thông-hàng hải... Trong hải dương học, môn thủy lực đặc biệt quan trọng : nhiều hệ phương trình mô tả các quá trình động lực biển, nhiều công thức kinh nghiệm hoặc bán kinh nghiệm được hình thành trên các kết quả nghiên cứu thủy lực. Do mối liên hệ cơ học giữa các phần tử chất lỏng (kể cả chất khí) rất yếu nên chất lỏng có tính chảy, chảy dưới tác động của chính trọng lượng bản thân nó (phụ thuộc vào hình dạng bình chứa) và như vậy chất lỏng là môi trường liên tục. Đồng thời, trong chất lỏng sức dính phân tử lại rất lớn làm cho thể tích chất lỏng hầu như ít biến đổi dưới tác động của áp lực và nhiệt độ nên có thể coi chất lỏng là không nén được. Lịch sử phát triển môn thủy lực gắn liền với tên tuổi các nhà khoa học vĩ đại như: Leonard de Vinci, Newton, Euler, Bernoulli, Chezy, Reynolds, Prandtl...

#### 1. Các hệ đo lường:

- Hệ SI:                    kg, m, s, °K, N
- Hệ CGS:                g, cm, s, °C, dyn
- Hệ BG, hệ EE: -, ft, s, °F, lb



2. Đơn vị thường sử dụng trong thủy lực học:

- Lực: đo bằng Newton (N), kilogram lực (kG), dyn (dyn)

$$1\text{N}=1\text{kg}.1\text{m}/\text{s}^2=1\text{kg}.\text{m}.\text{s}^{-2}$$

$$1\text{kG}=9,81\text{N} \quad 1\text{N}=0.102\text{kG}$$

$$1\text{ dyn}=10^{-5}\text{N}=1,02.10^{-6}\text{kG}$$

- áp suất: đo bằng Pascal (Pa), dyn/cm<sup>2</sup>, kG/cm<sup>2</sup> (atm), atm tuyệt đối, mmHg

$$1\text{Pa}=1\text{N}/\text{m}^2=10\text{dyn}/\text{cm}^2=1,02.10^{-5}\text{kG}/\text{cm}^2$$

$$=9,81.10^{-6}\text{atm} \quad \text{tuyệt đối}=7,5.10^{-3}\text{mmHg}$$

- Công: đo bằng Jun (J), erg

$$1\text{J}=1\text{N}.1\text{m}=1\text{kgm}^2/\text{s}^2=10^7\text{erg}$$

$$1\text{erg}=1\text{dyn}.1\text{cm}$$

- Công suất : oát (W)

$$1\text{W}=1\text{J}/\text{s}=1\text{kgm}^2/\text{s}^3$$

## 1.1. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA CHẤT LỎNG

### 1.1.1. Đặc tính thứ nhất

Đặc tính thứ nhất của chất lỏng như mọi vật thể là có khối lượng. Với chất lỏng đồng chất, có thể biểu diễn khối lượng đơn vị (khối lượng riêng)  $\rho$  bằng tỷ số giữa khối lượng  $M$  đối với thể tích  $W$  của chất lỏng đó :

$$\rho = \frac{M}{W}. \quad (1-1)$$

Trong hải dương học thường sử dụng khái niệm: tỷ trọng, mật độ.

Thứ nguyên của một đại lượng vật lý thường viết trong ngoặc vuông, trong thủy lực thường dùng ký hiệu  $M$  để biểu thị khối lượng,  $L$  để biểu thị độ dài,  $T$  để biểu thị thời gian:

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}.$$

Đơn vị thường dùng là:  $\text{kg/m}^3$ ,  $\text{g/cm}^3$ .

Ví dụ: đối với nước cất ở  $4^\circ\text{C}$  ta có  $\rho=1000\text{kg/m}^3$ .

### 1.1.2. Đặc tính thứ hai

Đặc tính thứ hai của chất lỏng là có trọng lượng. Với chất lỏng đồng chất, có thể biểu diễn trọng lượng đơn vị (trọng lượng riêng)  $\gamma$  bằng tích số của khối lượng đơn vị  $\rho$  với gia tốc rơi tự do :

$$\gamma = \rho g. \quad (1-2)$$

$$[\gamma] = \frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T^2} = \frac{M}{L^2 T^2}.$$

Đơn vị thường dùng là:  $\text{kg/m}^2/\text{s}^2$ ,  $\text{N/m}^3$ .

Đối với nước cất ở  $4^\circ\text{C}$  ta có  $\gamma = 9810\text{kg/m}^3 \cdot \text{m/s}^2 = 9810\text{N/m}^3 = 1000\text{kG/m}^3$ , với thủy ngân ta có  $\gamma = 13660\text{kG/m}^3$ .

### 1.1.3. Đặc tính thứ ba

Tính thay đổi thể tích do thay đổi áp lực hoặc thay đổi nhiệt độ.

- Trong trường hợp thay đổi do áp lực, ta dùng hệ số co thể tích  $\beta_w$  để biểu thị sự giảm tương đối của thể tích chất lỏng  $W$  khi có sự tăng áp suất  $p$  lên một đơn vị áp suất:

$$\beta_w = -\frac{1}{W} \cdot \frac{dW}{dp}. \quad (1-3)$$

Đơn vị thường dùng là:  $\text{m}^2/\text{N}$ ,  $\text{cm}^2/\text{kG}$ .

Thí nghiệm chứng tỏ với áp suất từ 1 đến 500atm, nhiệt độ từ 0 đến  $20^\circ\text{C}$  thì đối với nước ta có  $\beta_w = 5 \cdot 10^{-5} \text{cm}^2/\text{kG} \approx 0$ , như vậy trong thực tế có thể coi nước là chất lỏng không nén được. Số nghịch đảo của hệ số co thể tích  $\beta_w$  gọi là modul đàn hồi :

$$k = \frac{1}{\beta_w} = -W \frac{dp}{dW}. \quad (1-4)$$

Đơn vị thường dùng là: Pa.

- Trong trường hợp thay đổi do nhiệt độ, ta dùng hệ số giãn nhiệt  $\beta_t$  để

biểu thị sự biến đổi tương đối của thể tích chất lỏng w khi nhiệt độ tăng  $1^{\circ}\text{C}$ :

$$\beta_t = \frac{1}{W} \cdot \frac{dW}{dt}. \quad (1-5)$$

Đơn vị thường dùng là:  $1/^{\circ}\text{C}$ .

Thí nghiệm chứng tỏ trong điều kiện áp suất không khí, thì đối với nước ứng với nhiệt độ từ  $4$  đến  $10^{\circ}\text{C}$  ta có  $\beta_t = 1,4 \cdot 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ , ứng với nhiệt độ từ  $10$  đến  $20^{\circ}\text{C}$  ta có  $\beta_t = 1,4 \cdot 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ , như vậy có thể coi nước là chất lỏng không co dãn dưới tác dụng nhiệt độ.

Tóm lại dù có sự thay đổi thể tích do có sự thay đổi của áp suất và nhiệt độ nhưng đại lượng này rất nhỏ nên trong thủy lực, chất lỏng thường được coi là không thay đổi về thể tích. Đôi khi tính chất này được thể hiện bằng đặc tính không thay đổi về mật độ, tức là  $\rho = \text{const}$ .

#### 1.1.4. Đặc tính thứ tư

Đặc tính sức căng mặt ngoài, tức khả năng chịu được ứng suất kéo tác dụng lên mặt phân cách chất lỏng-khí hoặc trên mặt tiếp xúc chất lỏng-rắn.

Sức căng mặt ngoài xuất hiện là để cân bằng với sức hút phân tử của chất lỏng gần mặt phân cách. Sức căng mặt ngoài có khuynh hướng giảm nhỏ diện tích mặt tự do và làm cho mặt tự do có độ cong nhất định (do sức căng mặt ngoài mà giọt nước có dạng hình cầu).

Sức căng mặt ngoài đặc trưng bằng hệ số sức căng mặt ngoài  $\sigma$ , thể hiện sức kéo trên một đơn vị độ dài tiếp xúc  $[\text{N/m}]$ , hoặc năng lượng trên một đơn vị bề mặt  $[\text{J/m}^2 = \text{Nm/m}^2 = \text{N/m}]$ ,  $\sigma$  còn phụ thuộc vào loại chất lỏng và nhiệt độ.

$$\sigma = \frac{-F}{l}. \quad (1-6)$$

F- lực căng mặt ngoài  $[\text{N}]$ ,

l- độ dài tiếp xúc  $[\text{m}]$ .

Khi nước tiếp xúc với không khí ở nhiệt độ  $t=20^{\circ}\text{C}$ , ta có  $\sigma=0.0726\text{N/m}=0.0074\text{kG/m}$ .

Nhiệt độ tăng thì  $\sigma$  giảm.  $\sigma_{\text{thủy ngân}} = 7,5 \sigma_{\text{nước}}$ .

Người ta làm thí nghiệm bằng cách cắm một ống có đường kính rất nhỏ vào một chậu có chất lỏng. Trường hợp ống có đường kính khá nhỏ cắm vào

chậu nước, mực nước trong ống cao hơn mực nước trong chậu một khoảng  $h_{H_2O}$ , đối với chậu thủy ngân thì mực thủy ngân trong ống thấp hơn một khoảng  $h_{Hg}$ . Đó là hiện tượng mao dẫn do sức căng mặt ngoài gây nên. Để tính độ dâng cao hoặc hạ thấp đó ở nhiệt độ  $20^0C$  ta có công thức sau,  $h$  và  $d$  tính bằng mm:

$$dh_{H_2O} = 30, \quad (1-7)$$

$$dh_{Hg} = 10,15. \quad (1-8)$$

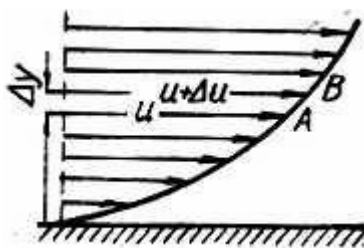
Trong biểu thức trên  $d$  là đường kính ống. Rõ ràng khi  $d$  tăng dần thì  $h$  giảm dần, không có hiện tượng mao dẫn nữa.

Trong đa số hiện tượng có thể bỏ qua sức căng mặt ngoài vì nó nhỏ hơn nhiều so với các lực khác. Trường hợp có hiện tượng mao dẫn, ví dụ dòng thấm trong đất thì cần tính đến.

#### 1.1.5. Đặc tính thứ năm

Đặc tính có độ nhớt. Khi các lớp chất lỏng chuyển động, giữa chúng có lực ma sát làm cho cơ năng chuyển thành nhiệt năng. Sự ma sát này gọi là ma sát nội hoặc ma sát trong vì nó xuất hiện trong nội bộ chất lỏng.

Tính chất này sinh ma sát trong, hay ứng suất tiếp giữa các lớp chất lỏng chuyển động (hình 1.1) gọi là tính chất nhớt. Tính nhớt là tính chất của chất lỏng chống lại sự dịch chuyển. Vì vậy khái niệm tính chất nhớt liên quan đến ma sát trong. Tính chất nhớt biểu hiện sức dính phân tử của chất lỏng. Mọi chất lỏng đều có tính nhớt và điều này rất quan trọng vì độ nhớt là nguyên nhân gây ra sự tổn thất năng lượng khi chất lỏng chuyển động.



Hình 1.1. Phân bố vận tốc trong chuyển động của chất lỏng

Khi nhiệt độ tăng, mỗi phân tử dao động mạnh hơn quanh vị trí trung bình nên sức dính, hay độ nhớt kém đi. Lực ma sát giữa các lớp chất lỏng chuyển động tỷ lệ với diện tích tiếp xúc giữa các lớp đó. Định luật ma sát trong của Newton được viết như sau:

$$F = \mu S \frac{du}{dn}, \quad (1-9)$$

F - lực ma sát giữa hai lớp chất lỏng,

S - diện tích tiếp xúc,

u- vận tốc, du/dn - gradient vận tốc theo phương n,

$\mu$  - hệ số, gọi là hệ số nhớt động lực.

Ứng suất (lực tác động trên một đơn vị diện tích) tiếp tuyến được thể hiện bằng:

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{du}{dn}, \quad (1-10)$$

$$[\mu] = \frac{M}{LT}.$$

Đơn vị sử dụng;  $1 \text{ N.s/m}^2 = 10 \text{ P}$  (poazơ),  $1 \text{ P} = 1 \text{ dyn.s/cm}^2$ .

Hệ số nhớt động học là tỷ số giữa hệ số nhớt động lực và mật độ:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (1-11)$$

$$[\nu] = \frac{M}{LT} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{L^2}{T}.$$

Đơn vị sử dụng:  $\text{m}^2/\text{s}$ ,  $1 \text{ cm}^2/\text{s} = 1 \text{ stoc}$ .

$\nu$  phụ thuộc vào nhiệt độ, ở  $t=20^\circ\text{C}$  ta có  $\nu_{\text{nước}}=0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\mu_{\text{nước}}=0.01 \text{ P}$ ;  $\mu_{\text{glixerin}}=8.7 \text{ P}$ .

Các chất lỏng tuân theo định luật ma sát trong Newton gọi là chất lỏng thực hay chất lỏng Newton. Môn thủy lực mà chúng ta đang xét nghiên cứu chất lỏng Newton. Các chất dẻo, chất lỏng khác như sơn, dầu, hồ.. ta gọi là chất lỏng phi Newton.

Từ đây trở đi ta nghiên cứu chất lỏng lý tưởng: không có ma sát nội khi chuyển động.

Trong hải dương học ta thường chú ý đến các tính chất : khối lượng,

trọng lượng, độ nhớt, còn thường bỏ qua sức căng mặt ngoài và tính thay đổi thể tích.

## 1.2. CÁC LỰC TÁC ĐỘNG LÊN CHẤT LỎNG

Cho một tập hợp các phần tử chất lỏng nằm bên trong một mặt kín  $\omega$ . Các lực tác dụng lên những phần tử bên trong  $\omega$  có thể chia làm 2 loại:

- Nội lực: những phần tử bên trong  $\omega$  tác dụng từng đôi một cân bằng nhau theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng, hệ lực tương đương với 0. Ví dụ: lực do năng lượng nhiệt, do mật độ, độ nhớt, nội ma sát.

- Ngoại lực: gồm lực mặt và lực khối.

- + Lực mặt: những phần tử bên ngoài  $\omega$  tác dụng những lực ngoài lên những phần tử bên trong  $\omega$ . Các lực này hạn chế vào những phần tử sát mặt  $\omega$  nên người ta giả thiết những lực đó chỉ tác dụng lên mặt  $\omega$  và gọi là những lực mặt. Lực mặt tỷ lệ với diện tích. Ví dụ : lực tác động giữa  $\omega$  và môi trường xung quanh như ma sát, gradient áp suất.

- + Lực khối (lực thể tích): những tác dụng lên những phần tử bên trong  $\omega$ , không phụ thuộc vào việc xung quanh  $\omega$  có hay không các lực khác. Lực khối tỷ lệ với các yếu tố thể tích. Ví dụ: từ trường, điện trường, trọng lực, quán tính, lực quay quả đất. Thông thường khi có tác động của ngoại lực thì xuất hiện nội lực tương ứng.

### 1.2.1. Trạng thái ứng suất của chất lỏng

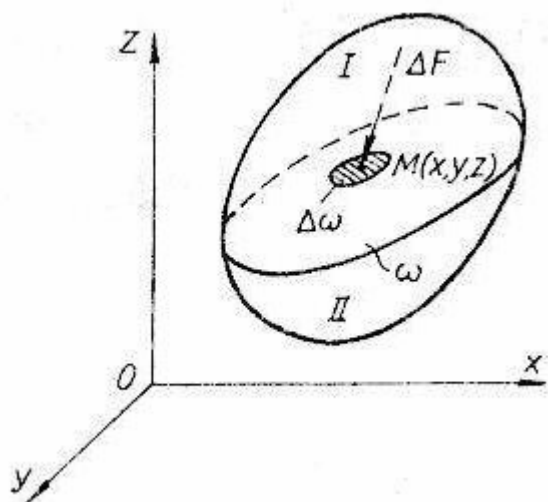
Giả sử có một khối chất lỏng, dùng mặt phẳng tưởng tượng chia khối chất lỏng ra 2 phần I và II. Bỏ phần I, phần II ở trạng thái cân bằng. Như vậy tại tất cả các điểm trên mặt phân cách cân đặt các lực để thay thế cho khối I tác động lên khối II (hình 1.2).

Xét một phân tố diện tích  $d\omega$  bao quanh một điểm I trên một mặt  $\omega$ . Hệ lực mặt tác dụng lên  $d\omega$  thu về một lực duy nhất  $dF$  đặt tại I và một mô men  $dM$ . Có thể coi  $dF$  là vô cùng bé bậc 1 so với  $d\omega$  và  $dM$  là vô cùng bé bậc cao hơn. Khi  $d\omega$  tiến tới 0 xung quanh điểm I,  $dF/d\omega$  tiến tới T gọi là ứng suất tại điểm I trên phân tố  $d\omega$ :

$$\vec{T} = \frac{\vec{dF}}{d\omega}. \quad (1-12)$$

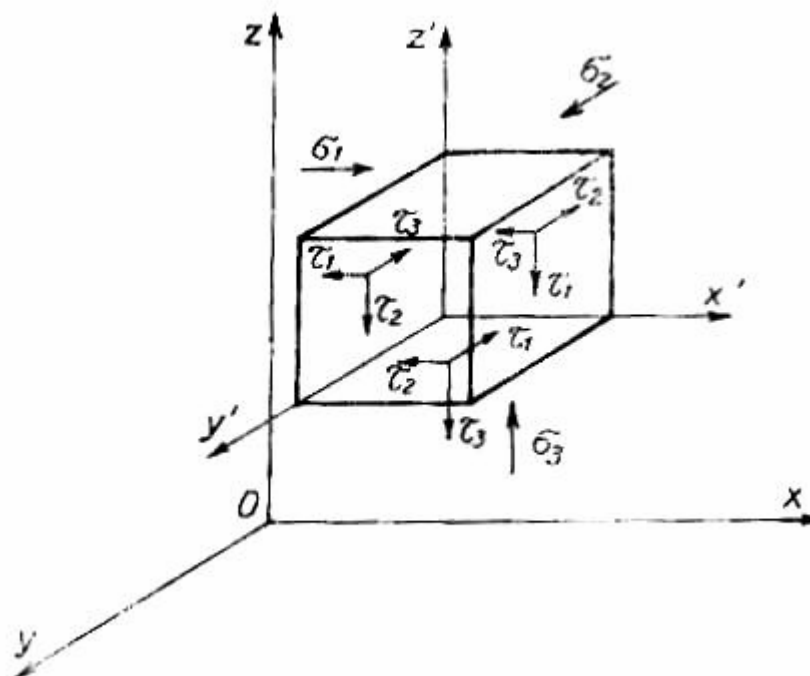
Tương tự, có thể biết ứng suất trên một phân tố diện tích tùy ý bao quanh điểm I trong chất lỏng. Vì chất lỏng là môi trường liên tục, muốn biết ứng suất tại I trên  $d\omega$  chỉ cần biết những ứng suất trên 3 phân tố diện tích vuông góc với

nhau đôi một và đi qua I (hình 1.3).



Hình 1.2. Xác định ứng suất tại 1 điểm

Như vậy ứng suất là lực tác động của các phân tử chất lỏng kề nhau lên một đơn vị bề mặt và ứng suất tại một điểm chất lỏng bất kỳ được xác định bằng tập hợp của các hình chiếu lên trục tọa độ của 3 véc tơ ứng suất tác động lên các mặt phẳng vuông góc với trục tọa độ.



Hình 1.3. Các lực tác động lên một thể tích nguyên tố

Trị số ứng suất tại một điểm tỷ lệ với diện tích đã chọn và có phương lập

với  $\Delta\omega$  một góc nhất định. Xét các ứng suất tác động lên phân tử diện tích vuông góc với trục Oy:

- Thành phần song song với Oy:  $\sigma_{yy} = \sigma_2$ ,
- Thành phần song song với Ox:  $\sigma_{yx} = \tau_3$ ,
- Thành phần song song với Oz:  $\sigma_{yz} = \tau_1$ ,
- Chỉ số thứ nhất chỉ trục mà phân tử vuông góc với nó,
- Chỉ số thứ hai chỉ hướng của thành phần,
- Trị số là dương nếu hướng vào bên trong phân tử.

Tương tự, đối với các ứng suất tác động lên các phân tử diện tích vuông góc với Ox và Oz, ta lập được bảng 1.1.

Người ta đã chứng minh được rằng : các thành phần không nằm trên đường chéo chính là bằng nhau từng đôi một và đối xứng qua đường chéo chính. Tức là:

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}, \quad \sigma_{zy} = \sigma_{yz}. \quad (1-13)$$

Vậy từ 9 thành phần thu lại còn 6, gồm 3 thành phần pháp tuyến gọi là  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ; 3 thành phần tiếp tuyến gọi là  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ . Các thành phần này lập thành một bảng gọi là tenxơ ứng suất:

$$\begin{matrix} \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \end{matrix}$$

Bảng 1.1. Các thành phần ứng suất

Phân tử Trục	Ox	Oy	Oz
Ox	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{xz}$
Oy	$\sigma_{yx} = \tau_3$	$\sigma_{yy} = \sigma_2$	$\sigma_{yz} = \tau_1$
Oz	$\sigma_{zx}$	$\sigma_{zy}$	$\sigma_{zz}$

Ở trạng thái tĩnh, với chất lỏng lý tưởng (không có độ nhớt) ứng suất tiếp tuyến bằng 0, tức là  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ , ứng suất pháp tuyến  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$  (áp suất). Với chất lỏng thực (có nhớt), ứng suất tiếp tuyến bằng ứng suất ma sát, ứng suất pháp tuyến bằng bình quân số học tất cả các ứng suất pháp tuyến có mặt.



### 1.2.2. Áp lực thủy tĩnh

Lấy một khối chất lỏng  $\omega$  ở trạng thái cân bằng, dùng mặt phẳng tưởng tượng chia khối chất lỏng ra 2 phần I và II. Bỏ phần I, muốn phần II ở trạng thái cân bằng ta cần thay thế phần I bằng các lực tác động tương đương (hình 1.4).

Trên mặt phân chia, quanh một điểm tùy ý ta lấy diện tích  $\omega$ , gọi vectơ  $\vec{P}$  là lực của phần I tác dụng lên  $\omega$ . Tỷ số :

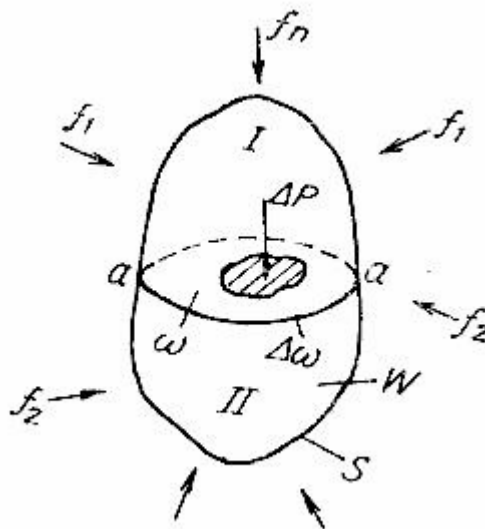
$$\vec{p}_{tb} = \frac{\vec{P}}{\omega}, \quad (1-14)$$

gọi là áp suất thủy tĩnh trung bình.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\vec{P}}{\omega} = \vec{p} \quad (1-15)$$

$\vec{p}$  gọi là áp suất thủy tĩnh tại một điểm hoặc đơn giản là áp suất thủy tĩnh,

$\vec{P}$  gọi là áp lực thủy tĩnh tác dụng lên diện tích  $\omega$ .



Hình 1.4. Xác định áp suất thủy tĩnh

Như vậy theo định nghĩa về ứng suất tại một điểm trong chất lỏng, thì  $p$  chính là ứng suất tác dụng lên phân tố diện tích.

$$[P]=N$$

$$[p]=N/m^2=kg/m/s^2$$

Hai tính chất cơ bản của áp suất thủy tĩnh:

+ Áp suất thủy tĩnh tác dụng thẳng góc với diện tích chịu lực và hướng vào diện tích ấy.

+ Trị số áp suất thủy tĩnh tại một điểm bất kỳ không phụ thuộc vào hướng đặt của diện tích chịu lực tại điểm đó.

Tenxơ áp suất thủy tĩnh có dạng:

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

### 1.3. PHƯƠNG TRÌNH BERNOULLI

#### 1.3.1. Các khái niệm cơ bản

Tất cả các chuyển động của chất lỏng có thể chia thành 2 loại: ổn định và không ổn định.

Chuyển động ổn định là chuyển động mà trong đó các tham số dòng chảy như mực nước, vận tốc chỉ phụ thuộc tọa độ, không phụ thuộc thời gian (chỉ thay đổi theo không gian).

Chuyển động không ổn định là chuyển động mà trong đó các tham số dòng chảy như mực nước, vận tốc không chỉ phụ thuộc tọa độ, mà còn phụ thuộc thời gian (thay đổi theo thời gian và không gian).

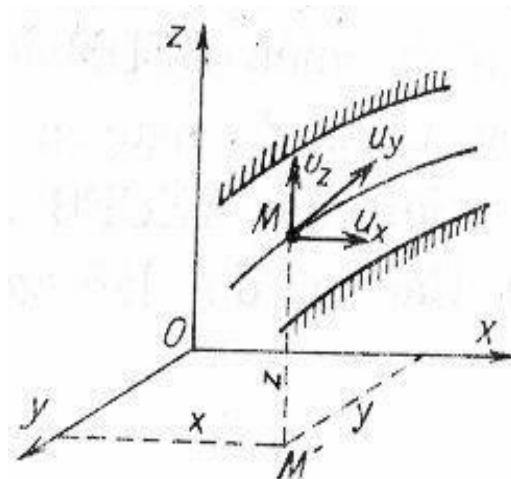
Các chuyển động của chất lỏng còn có thể chia thành 2 loại: đều và không đều.

Trong chuyển động đều, các đặc trưng dòng chảy không phụ thuộc tọa độ. Ví dụ trong kênh có mặt cắt không đổi, với vận tốc không đổi thì độ sâu cũng không đổi.

Trong chuyển động không đều, các đặc trưng dòng chảy phụ thuộc tọa độ. Ví dụ trong đường ống có mặt cắt thay đổi, vận tốc thay đổi theo mặt cắt.

Các chuyển động đều và không đều thuộc loại chuyển động ổn định, có nghĩa là không biến đổi theo thời gian.

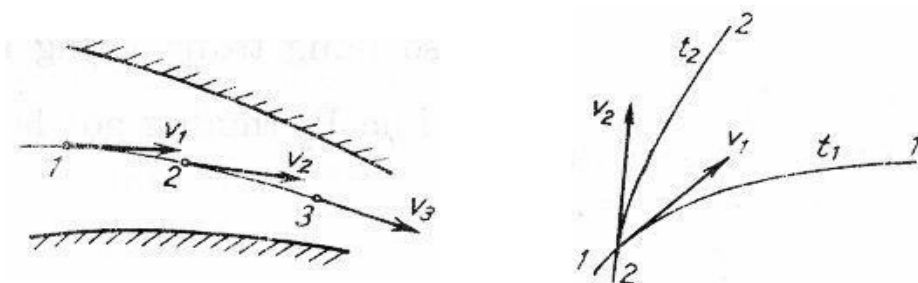
Quỹ đạo: đường đi của một phần tử chất lỏng trong không gian (hình 1.5).



Hình 1.5. Quỹ đạo chuyển động của phần tử M

Đường dòng: đường cong vẽ qua các điểm tiếp tuyến của các vectơ vận tốc dòng chất lỏng (hình 1.6). Nếu chuyển động là không ổn định thì tại một điểm cho trước, vận tốc thay đổi theo thời gian nên tại một điểm ta có các đường dòng khác nhau đi qua trong những thời điểm khác nhau.

- Các yếu tố thủy lực của dòng chảy:



Hình 1.6. Đường dòng (a), thay đổi hướng dòng trong chuyển động không ổn định

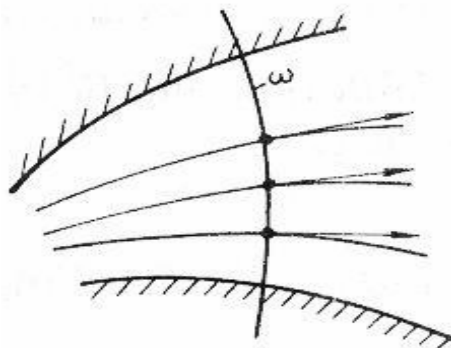
+ Mặt cắt ướt : là mặt cắt vuông góc với tất cả các đường dòng (hình 1.7). Mặt cắt ướt có thể là phẳng khi các đường dòng song song, có thể là cong khi các đường dòng không song song. Diện tích mặt cắt ướt thường ký hiệu là  $\omega$ , khi diện tích mặt cắt ướt vô cùng bé, ta ký hiệu là  $d\omega$  và dòng chảy gọi là dòng nguyên tố.

+ Chu vi ướt: là phần chu vi mà theo đó chất lỏng tiếp xúc với thành rắn, thường ký hiệu là  $\chi$ .

+ Bán kính thủy lực: là tỷ số giữa diện tích mặt cắt ướt và chu vi ướt, thường ký hiệu là  $R$ .

$$R = \frac{\omega}{\chi} \quad (1-16)$$

Trong sông, do chu vi ướt xấp xỉ bề rộng, người ta thường lấy  $R \approx h$ , tức bán kính thủy lực bằng độ sâu.



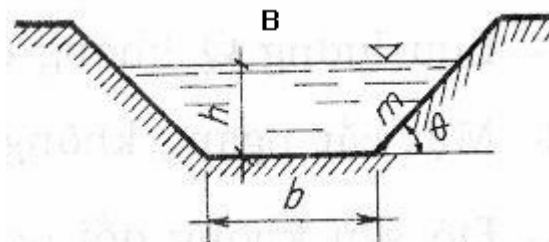
Hình 1.7. Mặt cắt ướt dòng chảy

+ Lưu lượng: là thể tích chất lỏng đi qua mặt cắt ướt nào đó trong một đơn vị thời gian, thường ký hiệu là  $Q$ . Có thể coi lưu lượng là tổng số lưu lượng của các dòng nguyên tố.

$$Q = \int_{\omega} u d\omega, \quad (1-17)$$

$u$ - vận tốc dòng nguyên tố.

+ Vận tốc (lưu tốc) trung bình của dòng chảy là tỷ số giữa lưu lượng và diện tích mặt cắt ướt của dòng chảy. Trong thủy lực người ta ít khi dùng vận tốc dòng nguyên tố  $u$  mà thường dùng vận tốc trung bình mặt cắt ướt và ký hiệu



Hình 1.8. Mặt cắt hình thang

là v. 
$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int u d\omega}{\omega} \quad (1-18)$$

+ Các yếu tố thủy lực của mặt cắt ướt có dạng hình thang (hình 1.8) :

B- bề rộng mặt nước,

b- bề rộng đáy,

h- độ sâu,

m - độ dốc mái kênh,  $m = \text{ctg}\theta$ ,  $\theta$ - góc nghiêng giữa mái kênh và mặt nằm ngang,

$$B = b + 2mh$$

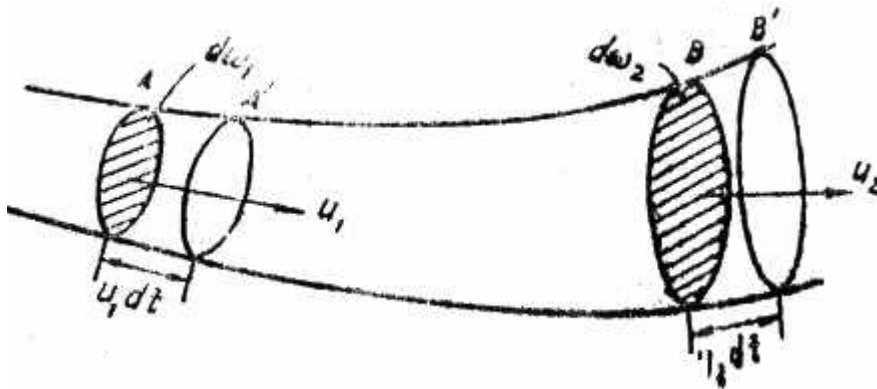
$$\omega = (b + mh)h$$

$$\chi = b + 2h(1 + m)^{1/2}.$$

Với mặt cắt chữ nhật  $m = \text{ctg}90^\circ = 0$ ,  $B = b$ ; với mặt cắt tam giác  $b = 0$ .

### 1.3.2. Phương trình liên tục của dòng nguyên tố chảy ổn định

Chất lỏng là môi trường liên tục chuyển động một cách liên tục, nghĩa là trong môi trường chất lỏng chuyển động không hình thành những vùng không gian trống không chứa chất lỏng. Tính liên tục này có thể biểu thị bằng biểu thức toán học gọi là phương trình liên tục.



Hình 1.9. Chuyển động chất lỏng trong dòng nguyên tố chảy ổn định

Để xác lập phương trình liên tục của dòng nguyên tố chảy ổn định (hình 1.9) , trên một dòng nguyên tố (vô cùng bé) ta lấy 2 mặt cắt A và B, có

diện tích tương ứng là  $d\omega_1$  và  $d\omega_2$ , lưu tốc tương ứng  $u_1, u_2$ . Sau một thời gian  $dt$ , thể tích chất lỏng trong dòng nguyên tố giới hạn bởi 2 mặt cắt A và B có vị trí mới là dòng nguyên tố giới hạn bởi 2 mặt cắt A' và B'. Quãng đường dịch chuyển là  $u_1dt$  và  $u_2dt$ . Trong chuyển động ổn định, hình dạng của dòng nguyên tố không thay đổi theo thời gian, cũng không có dòng xuyên qua ống đi vào - ra dòng nguyên tố.

Vì vậy, để trong dòng nguyên tố không có chỗ trống, đối với chất lỏng không nén được thì thể tích chất lỏng trong dòng nguyên tố giới hạn bởi 2 mặt cắt A và B và thể tích chất lỏng trong dòng nguyên tố giới hạn bởi 2 mặt cắt A' và B' phải là trị số không đổi. Vì thể tích khối giới hạn bởi các mặt cắt A và B' là chung nên thể tích khối giới hạn bởi A và A' bằng thể tích khối giới hạn bởi B và B'.

Vậy:

$$u_1d\omega_1dt = u_2d\omega_2dt,$$

hay:

$$u_1d\omega_1 = u_2d\omega_2. \quad (1-19)$$

Phương trình này gọi là phương trình liên tục của dòng nguyên tố.

Vì  $u d\omega = dQ$  nên có thể biểu diễn dưới dạng lưu lượng:

$$dQ_1 = dQ_2 = \text{const}. \quad (1-20)$$

Phương trình (1.20) đúng cho cả chất lỏng lý tưởng và chất lỏng thực.

### 1.3.3. Phương trình liên tục của toàn dòng chảy ổn định

Lấy tích phân (1.19) theo  $\omega$  ta được phương trình liên tục cho dòng chảy ổn định của toàn dòng:

$$\int_{\omega_1} u_1 d\omega_1 = \int_{\omega_2} u_2 d\omega_2. \quad (1-21)$$

Hoặc là :  $Q_1 = Q_2 = \text{const}.$

Bằng lưu tốc trung bình mặt cắt ta viết được:

$$v_1\omega_1 = v_2\omega_2. \quad (1-22)$$

Dưới dạng khác:

$$v_1/v_2 = \omega_2/\omega_1. \quad (1-22')$$

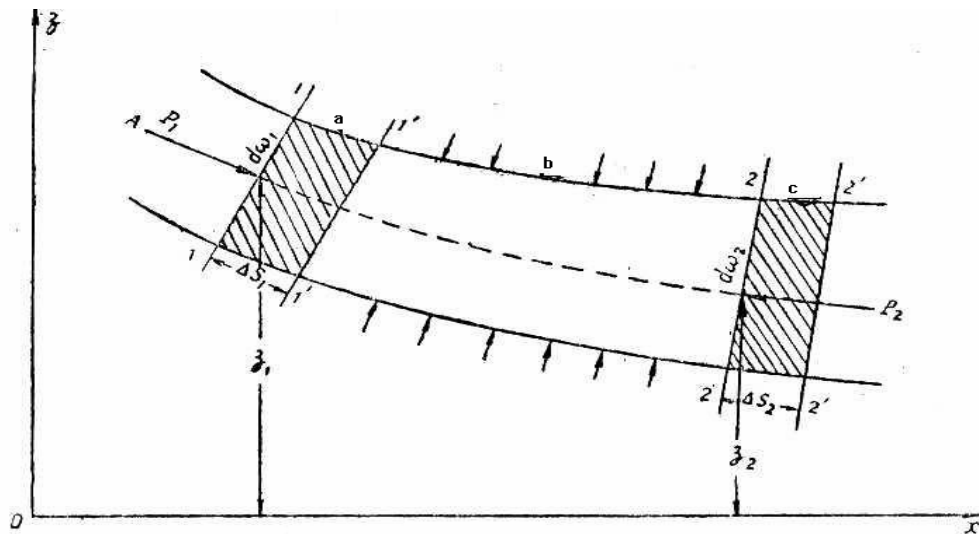
Điều đó có nghĩa là trong dòng chảy ổn định, lưu lượng qua các mặt cắt đều bằng nhau, còn lưu tốc trung bình tỷ lệ nghịch với diện tích mặt cắt ướt.

### 1.3.4. Phương trình Bernoulli của dòng nguyên tố chảy ổn định

a) Chất lỏng lý tưởng. Theo định luật động năng thì: "Sự biến thiên động năng của một khối lượng nhất định khi nó di động trên một quãng đường, bằng công của các lực tác dụng lên khối lượng đó cũng trên quãng đường đó".

Trên một dòng nguyên tố ta lấy 2 mặt cắt 1-1 và 2-2 (hình 1.10), có diện tích tương ứng là  $d\omega_1$  và  $d\omega_2$ . Lấy một mặt phẳng chuẩn nằm ngang  $Ox$ , mặt cắt 1-1 có trọng tâm ở độ cao  $z_1$  so với mặt chuẩn, áp suất thủy động lên mặt cắt đó là  $p_1$ , lưu tốc là  $u_1$ ; tương ứng đối với mặt cắt 2-2 là  $z_2$ ,  $p_2$ ,  $u_2$ .

Giả thiết các mặt cắt vô cùng bé nên  $p_1$ ,  $u_1$  và  $p_2$ ,  $u_2$  không đổi trong phạm vi các mặt cắt tương ứng. Sau một thời gian  $dt$  các phần tử chất lỏng của mặt cắt 1-1 di chuyển đến vị trí 1'-1' với quãng đường  $ds_1 = u_1 dt$ . Đồng thời sau thời gian  $dt$  các phần tử chất lỏng của mặt cắt 2-2 di chuyển đến vị trí 2'-2' với quãng đường  $ds_2 = u_2 dt$ . Lưu lượng đi qua 1-1 và 2-2 là:



Hình 1.10. Mô tả dòng chảy ổn định theo Bernoulli

$$Q_1 = u_1 d\omega_1 = dQ_2 = u_2 d\omega_2.$$

Không gian giữa 1-1 và 2'-2' có thể chia làm 3 vùng a, b, c. Vì động năng trong khu b

không đổi nên sự biến thiên động năng của dòng nguyên tố đang xét sẽ bằng hiệu số động năng của khu c và khu a:

$$\text{Biến đổi động năng} = \rho dQ \Delta t u_2^2 / 2 - \rho dQ \Delta t u_1^2 / 2 = \rho dQ \Delta t (u_2^2 - u_1^2) / 2 = \gamma dQ \Delta t (u_2^2 - u_1^2) / 2g,$$

$\gamma$  - trọng lượng riêng.

Các lực ngoài gồm: trọng lực và áp lực thủy động. Công của các lực ngoài tác động lên khối lượng của đoạn dòng nguyên tố đang xét sẽ gồm công sinh ra bởi trọng lực và công bởi áp lực.

+ Công sinh ra bởi trọng lực  $C_{tl}$  của đoạn dòng nguyên tố đang xét bằng công của trọng lực khối chất lỏng khu a, di chuyển từ độ cao  $z_1$  đến khu c với độ cao  $z_2$ :

$$C_{tl} = \gamma d\omega_1 \Delta s_1 (z_1 - z_2) = \gamma dQ \Delta t (z_1 - z_2). \quad (1-23)$$

+ Công do áp lực  $P_1 = p_1 d\omega_1$  và  $P_2 = p_2 d\omega_2$  sẽ bằng:

$$C_{al} = P_1 \Delta s_1 - P_2 \Delta s_2 = p_1 d\omega_1 \Delta s_1 - p_2 d\omega_2 \Delta s_2 = dQ \Delta t (p_1 - p_2). \quad (1-24)$$

Theo định luật động năng : Bđ đn =  $C_{tl} + C_{al}$  nên ta có:

$$\gamma dQ \Delta t (u_2^2 - u_1^2) / 2g = \gamma dQ \Delta t (z_1 - z_2) + dQ \Delta t (p_1 - p_2)$$

Chia 2 vế cho  $\gamma dQ \Delta t$  ta có phương trình động năng cho một đơn vị trọng lượng chất lỏng:

$$u_2^2 / 2g - u_1^2 / 2g = z_1 - z_2 + p_1 / \gamma - p_2 / \gamma.$$

Hay ta có:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (1-25)$$

Vì 1, 2 là tùy chọn nên có thể viết:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}. \quad (1-26)$$

Phương trình này gọi là phương trình Bernoulli của dòng nguyên tố đối với chất lỏng lý tưởng chuyển động ổn định. Phương trình Bernoulli là phương trình cơ bản, rất quan trọng trong thủy lực.



b) Chất lỏng thực. Chất lỏng thực có độ nhớt, do đó khi nó chuyển động thì sinh ra ma sát trong làm cản trở chuyển động. Để khắc phục sức cản, chất lỏng phải tiêu hao một phần cơ năng, phần cơ năng này biến thành nhiệt năng mất đi không lấy lại được. Vì vậy giá trị

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \neq \text{const}, \quad (1-27)$$

và giảm dọc chiều chảy của chất lỏng.

Hoặc:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_w \quad (1-28)$$

$h'_w$  - tổn thất năng lượng đơn vị, thường gọi là tổn thất cột nước của dòng nguyên tố.

Có thể viết :

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + h'_w = \text{const} = H \quad (1-29)$$

Phương trình trên gọi là phương trình Bernoulli của dòng nguyên tố đối với chất lỏng thực.

Đường đi qua các đỉnh của đoạn  $(z + p/\gamma)$  của các mặt cắt gọi là đường cột nước đo áp hoặc đường thế năng (hình 1.11). Đường đi qua các đỉnh của đoạn  $(z + p/\gamma + u^2/2g)$  của các mặt cắt gọi là đường tổng cột nước hoặc đường năng.

Độ dốc thủy lực là tỷ số hạ thấp của đường tổng cột nước đối với độ dài của đoạn dòng nguyên tố hạ thấp đó, ký hiệu là  $J'$ :

$$J' = -\frac{d}{dl} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = \frac{dh'_w}{dl}$$

Độ dốc đo áp là tỷ số hạ thấp hoặc dâng cao của đường cột nước đo áp đối với độ dài của đoạn dòng nguyên tố hạ thấp đó, ký hiệu là  $J'_p$ :

$$J'_p = \pm \frac{d}{dl} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right)$$

Khi  $\omega$  không đổi dọc dòng chảy, tức  $u$  không đổi, ta có  $J'=J_p$  tức độ dốc thủy lực và độ dốc đo áp bằng nhau.

c) ý nghĩa của phương trình Bernoulli

- ý nghĩa năng lượng:

+  $z$  : gọi là vị năng đơn vị, hoặc cột nước vị thế,

+  $p/\gamma$  : gọi là áp năng đơn vị, hoặc cột nước áp suất,

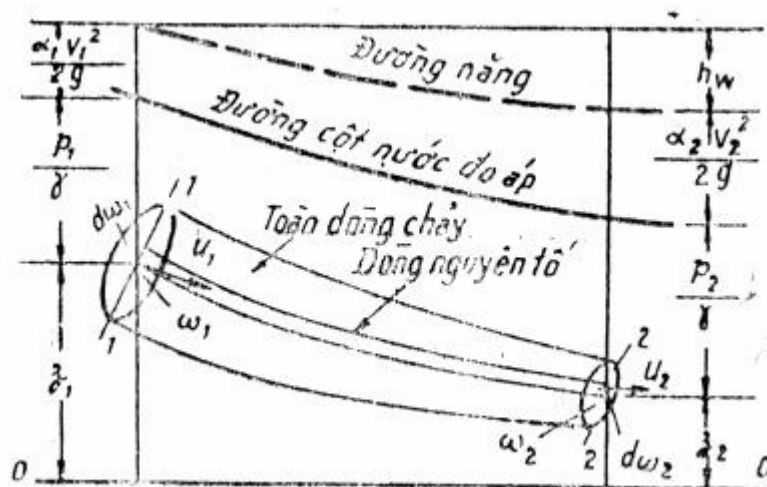
+  $u^2/2g$  : gọi là động năng đơn vị, hoặc cột nước lưu tốc.

Đại lượng  $(z+p/\gamma)$  gọi là thế năng đơn vị, như vậy cơ năng bằng tổng động năng đơn vị và thế năng đơn vị. Vậy trên tất cả các mặt cắt ướt của dòng nguyên tố của chất lỏng lý tưởng: cơ năng đơn vị là hằng số, còn đối với chất lỏng thực: cơ năng đơn vị giảm dọc hướng chảy và biểu đạt định luật bảo toàn năng lượng.

- Ý nghĩa thủy lực : do các số hạng trong phương trình có thứ nguyên là  $[L]$ , nên có thể nói: đối với mỗi đơn vị trọng lượng của dòng nguyên tố của chất lỏng lý tưởng thì tổng của cột nước vị thế, cột nước áp suất và cột nước lưu tốc là hằng số; với chất lỏng thực thì tổng các cột nước giảm dần.

- Với chất lỏng lý tưởng, nếu cột nước nằm ngang ( $z=\text{const}$ ), ta có  $p_1/\gamma + u_1^2/2g = p_2/\gamma + u_2^2/2g$  và như vậy: khi lưu tốc nhỏ thì áp suất thủy động lớn và ngược lại khi lưu tốc lớn thì áp suất thủy động nhỏ.

### 1.3.5. Phương trình Bernoulli của toàn dòng chảy ổn định



Hình 1.11. Mô tả dòng chảy trong chất lỏng thực

Vì trên thực tế, tại mặt cắt  $\omega$  nào đó, giá trị  $u, p$  thường phân bố khác nhau, do đó muốn có phương trình Bernoulli cho toàn dòng cần phải giả thiết dòng chảy thay đổi dần chứ không đột ngột, các đường dòng gần như thẳng và song song với nhau, mặt cắt ướt có thể coi là mặt phẳng. Vì lưu lượng dòng nguyên tố là  $dQ$ , trọng lượng tương ứng là  $\gamma dQ$ . Ta dùng (1-28) để viết biểu thức năng lượng cho toàn dòng, muốn vậy cần nhân tất cả các số hạng của (1-28) với  $\gamma dQ$ .

Có thể tích phân phương trình Bernoulli theo  $\omega_1$  và  $\omega_2$ :

$$\int_{\omega_1} (z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) \gamma dQ + \int_{\omega_1} \frac{u_1^2}{2g} \gamma dQ = \int_{\omega_2} (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) \gamma dQ + \int_{\omega_2} \frac{u_2^2}{2g} \gamma dQ + \int_{\omega_2} h_w' \gamma dQ \quad (1-30)$$

Khi dòng chảy thay đổi dần tại mặt cắt đang xét,  $(z+p/\gamma)$  là hằng số và tổng thế năng của chất lỏng tại mặt cắt ướt:

$$\int_{\omega} (z + \frac{p}{\gamma}) \gamma dQ = (z + p/\gamma) \gamma Q. \quad (1-31)$$

Coi lưu tốc trung bình mặt cắt ướt là  $v$ , lưu tốc điểm  $u$  quan hệ với lưu tốc trung bình  $v$  bởi biểu thức  $u=v \pm \Delta u$  và ta có tổng động năng của chất lỏng tại mặt cắt ướt:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \gamma dQ &= \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} u^2 u d\omega = \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} (v \pm \Delta u)^3 d\omega \\ &= \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} (v^3 \pm 3v^2 \Delta u + 3v(\Delta u)^2 \pm (\Delta u)^3) d\omega \end{aligned}$$

Khi đánh giá bậc đại lượng các thành phần trong biểu thức trên, đại lượng vô cùng bé nào có bậc cao hơn so với các đại lượng vô cùng bé có bậc thấp hơn thì có thể bỏ, ở đây ta có thể bỏ  $\int_{\omega} \pm (\Delta u)^3 d\omega$ . Ngoài ra ta lại có:

$$Q = \int_{\omega} u d\omega = \int_{\omega} (v \pm \Delta u) d\omega = \int_{\omega} v d\omega + \int_{\omega} (\pm \Delta u) d\omega = Q + \int_{\omega} (\pm \Delta u) d\omega$$

Có nghĩa là  $\int_{\omega} \pm (\Delta u) d\omega = 0$ , do đó:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \gamma dQ &= \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} (v^3 + 3v(\Delta u)^2) d\omega = \frac{\gamma}{2g} v^3 \int_{\omega} d\omega + \frac{\gamma}{2g} 3v \int_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega \\ &= \frac{\gamma}{2g} v^3 \omega (1 + \frac{3 \int_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega}{v^2 \omega}) \approx \alpha \gamma v^2 \frac{Q}{2g} \end{aligned} \quad (1-32)$$

Trong đó:

$$\alpha = 1 + \frac{3 \int (\Delta u)^2 d\omega}{v^2 \omega}$$

gọi là hệ số hiệu chỉnh động năng, hoặc hệ số cột nước lưu tốc, hoặc hệ số Coriolis,  $\alpha=1.05-1.10$ .

Tổng số tổn thất năng lượng của các dòng nguyên tố trong toàn bộ dòng chảy:

$$\int_{\omega} h_w' \gamma dQ = \gamma Q h_w \quad (1-33)$$

$h_w$  - năng lượng của một đơn vị trọng lượng chất lỏng bị tổn thất để khắc phục sức cản của dòng chảy trong đoạn đang xét, gọi là tổn thất cột nước trong đoạn đó mà ma sát là nguyên nhân chính.

Vì vậy:

$$\gamma Q \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) + \gamma Q \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \gamma Q \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) + \gamma Q \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \gamma Q h_w \quad (1-30')$$

Cuối cùng:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \quad (1-34)$$

Phương trình này gọi là phương trình Bernoulli của toàn dòng chảy ổn định đối với chất lỏng thực.

Độ dốc thủy lực:

$$J = -\frac{d}{dl} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = \frac{dh_w}{dl}$$

Độ dốc đo áp:

$$J_p = \pm \frac{d}{dl} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right)$$

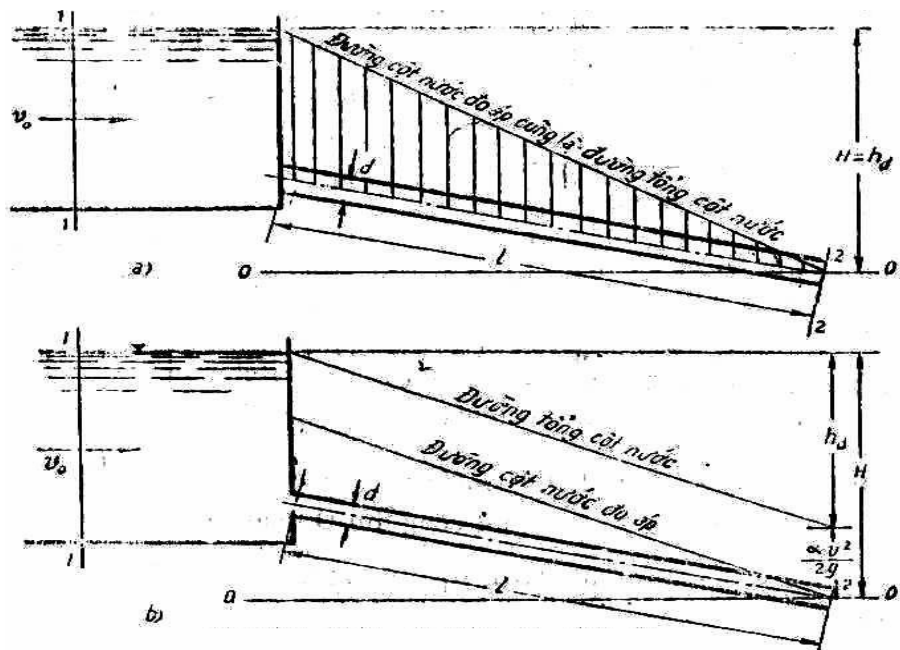
## 1.4. CHUYỂN ĐỘNG CHẤT LỎNG TRONG ĐƯỜNG ỐNG CÓ ÁP

### 1.4.1. Khái niệm

Đường ống rất thông dụng trong kỹ thuật: đường ống cấp nước sinh hoạt, ống dẫn dầu, khí đốt, xiphông qua núi.

Trong nghiên cứu thuỷ lực đang trình bày ở mục này dòng chảy trong ống cần thoả mãn các điều kiện:

- chảy ổn định,
- chảy có áp (chất lỏng tiếp xúc hoàn toàn với thành ống),
- chảy rối.



Hình 1.12. Chuyển động của chất lỏng trong đường ống

Các phương trình cần dùng là: phương trình liên tục, phương trình Bernoulli, phương trình xác định tổn thất cột nước. Phương trình liên tục và phương trình Bernoulli đã nói ở trên, ta cần có phương trình xác định tổn thất cột nước  $h_w$ . Tổn thất cột nước bao gồm tổng đại số của tất cả các tổn thất dọc đường  $h_d$  và tất cả các tổn thất cục bộ  $h_c$ :

$$h_w = \sum h_d + \sum h_c \quad (1-35)$$

Tổn thất dọc đường là tổn thất sinh ra trên toàn bộ chiều dài dòng chảy đều hoặc không đều:

$$h_d = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}, \quad (1-36)$$

trong đó :  $\lambda$  - hệ số tổn thất dọc đường,

$R$  - bán kính thủy lực,

$l$  - chiều dài ống,

$v$  - vận tốc dòng chảy trong ống;

- - Tổn thất cục bộ là tổn thất phát sinh tại những nơi dòng chảy bị biến đổi đột ngột như đoạn co hẹp, đoạn cong, vòi khoá mở nước, được tính bằng:

$$h_c = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (1-37)$$

trong đó :  $\zeta$  - hệ số tổn thất cục bộ.

Cần phân biệt 2 loại ống là:

- ống dài: tổn thất cột nước dọc đường là chủ yếu, tổn thất cột nước cục bộ và cột nước lưu tốc có thể bỏ qua.
- ống ngắn: tổn thất cột nước cục bộ và cột nước lưu tốc có tác dụng quan trọng như tổn thất cột nước dọc đường.

Sự phân biệt này không theo hình dạng ống mà theo tình trạng tổn thất cột nước.

#### 1.4.2. Tính toán với đường ống dài

(Tổn thất cột nước coi như tổn thất dọc đường)

$$h_w \approx h_d \approx J l. \quad (1-38)$$

với  $l$ - chiều dài ống,  $J$ - độ dốc thủy lực. Từ (1-36) ta có:

$$v = \sqrt{\frac{h_d}{l}} \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} = \sqrt{J} \cdot \sqrt{R} \cdot C,$$

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \text{ - hệ số Chezy.}$$

Công thức Chezy để tính toán lưu tốc trung bình của dòng chảy đều có dạng:

$$v = C\sqrt{RJ}, \quad (1-39)$$

với R- bán kính thủy lực, C- hệ số Chezy biểu thị qua hệ số nhám Manning:

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}. \quad (1-40)$$

Lưu lượng được tính theo:

$$Q = \omega v = \omega C \sqrt{RJ}. \quad (1-41)$$

Môđun lưu lượng K liên hệ với lưu lượng Q bằng biểu thức:

$$Q = K\sqrt{J}, \quad (1-42)$$

hay:

$$J = Q^2 / K^2$$

$$\text{Do đó :} \quad K = \omega C \sqrt{R}, \quad (1-43)$$

và có thể nhận được tổn thất dọc đường ở dạng:

$$h_d = \frac{Q^2}{K^2} l. \quad (1-44)$$

(1-44) là công thức cơ bản tính tổn thất cột nước trong ống dài. K có thể tra theo bảng lập sẵn, hoặc tính theo n và R.

Ví dụ: Tìm tổn thất cột nước trong trường hợp: đường kính d=150mm, chiều dài l=25m, lưu lượng Q=40l/s, ống gang sạch.

Giải: Với ống gang sạch, d=150mm, tra bảng ta có: K=180.2 l/s.

$$h_d = \frac{Q^2}{K^2} l = \frac{0.040^2}{0.1802^2} .25 = 1.2m$$

### 1.4.3. Tính toán với đường ống ngắn

(Tổn thất cột nước bao gồm cả tổn thất dọc đường và tổn thất cục bộ)

- Tổn thất dọc đường biểu thị qua cột nước lưu tốc bằng công thức Darcy:

$$h_d = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (1-45)$$

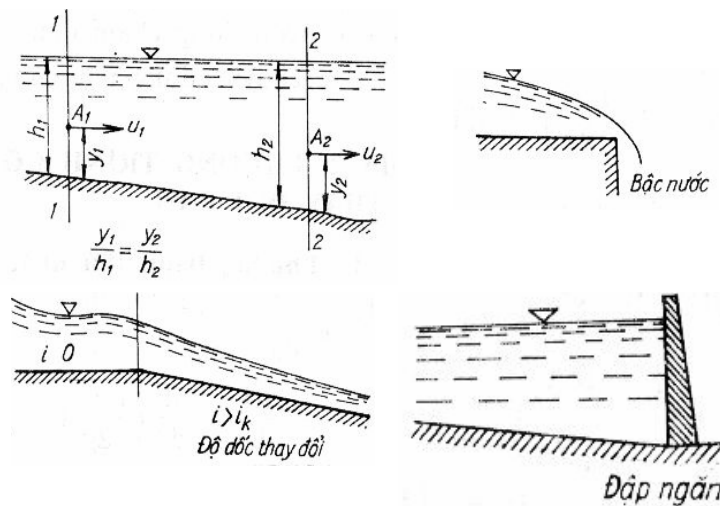
$\lambda$  - hệ số ma sát, phụ thuộc loại vật liệu như gang, thép, gạch.

- Tổn thất cục bộ biểu thị bằng công thức Weisbach:

$$h_c = \zeta \frac{v^2}{2g}. \quad (1-46)$$

Các hệ số  $\lambda$ ,  $\zeta$  đều có thể tra theo bảng có sẵn.

### 1.5. CHUYỂN ĐỘNG CHẤT LỎNG TRONG LÒNG DẪN HỖ



Hình 1.13. Các dạng chuyển động

Dòng chảy không áp là dòng chảy có mặt thoáng trên, áp suất trên mặt thoáng thường bằng áp suất khí quyển. Dòng chảy trong ống thường là có áp, trong kênh hở thường là không áp. Các dạng chuyển động của chất lỏng trong kênh hở thường đa dạng (hình 1.13), thường gặp nhất là: dòng chảy trong sông hoặc kênh thiên nhiên hoặc nhân tạo có mặt cắt ngang thay đổi, hoặc có độ dốc đáy thay đổi; dòng chảy bị ảnh hưởng bởi các công trình nhân tạo như bậc nước, đập ngăn.



### 1.5.1. Dòng chảy đều không áp trong kênh hở

Dòng chảy đều không áp là dòng chảy ổn định, có  $Q$ ,  $\omega$ ,  $v$  không đổi dọc theo dòng chảy. Khi một yếu tố thủy lực biến đổi, ví dụ  $Q$  thì các giá trị  $R$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  biến đổi theo.

Để có dòng chảy đều không áp trong kênh, cần có các điều kiện:

- $Q = \text{const}$  dọc dòng chảy và theo thời gian,
- Mặt cắt ướt không thay đổi về hình dạng và diện tích,
- Độ dốc đáy không đổi  $i = \text{const}$ ,
- Độ sâu không thay đổi  $h = \text{const}$ ,
- Độ nhám không đổi  $n = \text{const}$ .

Nếu một trong các điều kiện nói trên không thoả mãn, dòng chảy là không đều. Công thức cơ bản để tính dòng chảy đều vẫn là công thức Chezy:

$$v = C\sqrt{RJ}$$

Trong dòng chảy đều  $i = J = J_p$  ( $J$ -độ dốc thủy lực) nên ta có:

$$v = C\sqrt{Ri}$$

Và cuối cùng:

$$Q = K\sqrt{i}. \quad (1-47)$$

Các mặt cắt thường sử dụng:

- Kênh gạch, bê tông: chữ nhật, hình thang, tam giác, parabol,
- Kênh đất: hình thang, parabol.

Mặt cắt có lợi nhất về thủy lực là mặt cắt tải được lưu lượng lớn nhất trong cùng một điều kiện về đáy kênh, độ nhám, diện tích mặt cắt ướt như nhau, và như vậy là mặt cắt có  $R$  lớn nhất tức là  $\chi$  nhỏ nhất.

Ví dụ: Cho kênh hình thang có  $b=12\text{m}$ ,  $h=3\text{m}$ ,  $m=1.5$ ,  $n=0.025$ ,  $i=0.0002$ . Tính  $Q$ ?

Tính toán:

$$\omega = (b + mh)h = (12 + 1.5 \cdot 3) \cdot 3 = 49.5 \text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2h(1 + m)^{1/2} = 22.8 \text{ m}$$

$$R = \omega / \chi = 2.171 \text{ m}$$

$$C = 1/nR^{1/6} = 44.68 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

$$K = \omega CR^{1/2} = 3404 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = Ki^{1/2} = 48.13 \text{ m}^3/\text{s}$$

### 1.5.2. Dòng chảy ổn định không đều trong kênh hở

Như phần 1.5.1. đã trình bày, khi một trong 4 điều kiện không thỏa mãn ta có dòng chảy ổn định không đều.

Trên thực tế, trừ những kênh nhân tạo làm việc trong những điều kiện nhất định mới có chuyển động đều của dòng chảy, còn lại hầu hết là dòng không đều hoặc dòng không ổn định.

Khi nghiên cứu dòng chảy không đều, điều quan trọng nhất cần chú ý là quy luật thay đổi độ sâu dọc theo dòng chảy  $h=h(l)$ , từ đó suy ra sự thay đổi các yếu tố khác như  $\omega$ ,  $v$ ..

Xét dòng chảy thay đổi dần, ổn định, không áp, cần tìm quy luật biến đổi cao độ mặt nước và độ sâu dọc kênh. Năng lượng đơn vị của mặt cắt là năng lượng của một đơn vị trọng lượng chất lỏng của dòng chảy tại một mặt cắt đối với mặt chuẩn nằm ngang đi qua điểm thấp nhất, biểu thị bằng  $\mathfrak{e}$  :

$$\mathfrak{e} = p/\gamma + \alpha v^2/2g \quad (1-48)$$

$\mathfrak{e}$  gọi là năng lượng đơn vị của mặt cắt hoặc tỷ năng.

$$E = \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right) = a + h + \frac{\alpha v^2}{2g} = a + \mathfrak{e} \quad (1-49)$$

ở đây  $a$ - cao độ đáy,  $h$ - độ sâu dòng chảy.

Đạo hàm  $E$  theo  $l$  chính là độ dốc thủy lực, ta có:

$$\frac{dE}{dl} = \frac{d\mathfrak{e}}{dl} + \frac{da}{dl} = -J \quad (1-50)$$

Đạo hàm  $a$  theo  $l$  chính là độ dốc đáy:

$$\frac{da}{dl} = -i \quad (1-51)$$

Vì vậy:

$$\frac{d\vartheta}{dl} = i - J \quad (1-52)$$

Mặt khác:

$$\frac{d\vartheta}{dl} = \frac{\partial \vartheta}{\partial l} + \frac{\partial \vartheta}{\partial h} \frac{dh}{dl} = i - J \quad (1-53)$$

Các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( h + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left( h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial h} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B \quad (1-54)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left( h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial l} \quad (1-55)$$

Vì ta coi dòng chảy thay đổi dần nên  $J=Q^2/K^2$ . Thay các đại lượng vào (1-53) và rút gọn ta có:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2} + \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial l}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B} \quad (1-56)$$

Phương trình này cho ta quy luật biến đổi độ sâu dọc theo dòng chảy đối với mọi loại kênh. Nếu kênh có mặt cắt là lăng trụ,  $\omega=\omega(h)$ ,  $\partial\omega/\partial l=0$  ta có:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B} = \frac{1 - J}{1 - Fr} \quad (1-57)$$

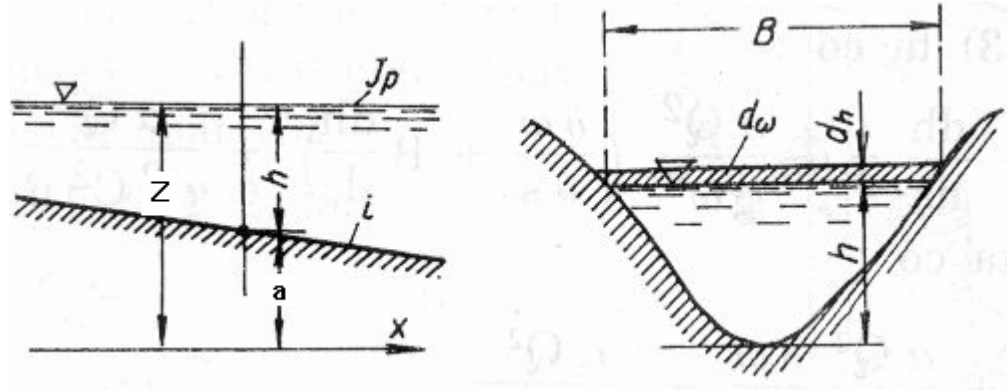
$$Fr = \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B = \frac{\alpha v^2}{gh} \quad \text{gọi là số Froude.}$$

Khi  $Fr > 1$ , dòng chảy gọi là chảy xiết.

Khi  $Fr < 1$ , dòng chảy gọi là chảy êm.

### 1.5.3. Dòng chảy không ổn định thay đổi chậm trong kênh hở

Trong thực tế ta thường gặp hiện tượng dòng chảy chuyển động trong sông, kênh có mặt cắt không lăng trụ, lưu lượng phụ thuộc vào điều kiện mưa, bão, thủy triều... và luôn thay đổi theo thời gian. Vì vậy chuyển động trong thiên nhiên của dòng chảy thường là không ổn định, tức phụ thuộc thời gian và không gian. Ta xét chuyển động thay đổi chậm của chất lỏng không nén.



Hình 1.14. Dòng chảy không ổn định trong kênh hoặc sông thiên nhiên

a) Phương trình liên tục:

Trong dòng chảy, ta lấy một đoạn dòng giới hạn bởi hai mặt cắt ướt  $\omega_1$  và  $\omega_2$ , cách nhau một độ dài vô cùng bé  $dx$ . Thể tích giới hạn bởi không gian trên là  $\omega dx$ , với  $\omega$  là diện tích trung bình của  $\omega_1$  và  $\omega_2$ . Chất lỏng chỉ đi vào ra qua  $\omega_1$  và  $\omega_2$  chứ không vào ra mặt bên.

Sau một thời gian  $dt$ , khối lượng chất lỏng đi qua  $\omega_1$  để vào thể tích nói trên là  $\rho Q dt$ , khối lượng chất lỏng đi ra khỏi  $\omega_2$  là  $(\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} dx) dt$ . Cũng trong thời gian  $dt$  đó, khối lượng chất lỏng trong đoạn đang xét là  $(\rho \omega dx)$  và biến thiên sau thời gian  $dt$  là  $\frac{\partial(\rho \omega dx)}{\partial t} dt$ . Sự biến thiên này bằng hiệu số khối lượng chất lỏng vào  $\omega_1$  và khối lượng chất lỏng ra  $\omega_2$ :

$$\rho Q dt - (\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} dx) dt = - \frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} dx dt = \frac{\partial(\rho \omega dx)}{\partial t} dt.$$

Như vậy:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} dx = 0.$$

Với chất lỏng không nén được,  $\rho = \text{const}$ , ta viết lại thành:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad (1-58)$$

Phương trình (1-58) gọi là phương trình liên tục của dòng chảy không ổn định của chất lỏng không nén được. Vì  $Q = \omega v$  nên có thể viết:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = B \frac{\partial z}{\partial t} \quad (1-59)$$

Và:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (1-60)$$

b) Phương trình chuyển động:

Trong môi trường chất lỏng đang chuyển động, ta lấy một khối hình hộp ABCDEFGH vô cùng nhỏ, có cạnh song song với trục tọa độ và dài  $dx, dy, dz$ . Hình hộp chịu tác động của các lực:

- Lực khối (thể tích): gọi  $F$  là lực khối lượng tác động vào một đơn vị khối lượng chất lỏng,  $F$  có hình chiếu lên các trục là  $F_x, F_y, F_z$ . Khối lượng của hình hộp là  $\rho dx dy dz$ . Hình chiếu lên trục  $Ox$  của lực khối lượng là  $F_x \rho dx dy dz$ .

- Lực mặt, tức áp lực thủy động tác dụng lên những mặt hình hộp và tỷ lệ với diện tích các mặt đó. Gọi  $p$  là áp suất thủy động tại trọng tâm  $M$  của hình hộp,  $M$  có tọa độ  $x, y, z$ . áp suất thủy động lên mặt trái của hình hộp là  $(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2})$  và đối với mặt phải là:  $(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2})$ . Hình chiếu lên trục  $x$  của tổng hợp những lực mặt đó là:

$$(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}) dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

Mặt khác, tổng đại số các hình chiếu lên trục  $x$  của các lực tác dụng lên hình hộp phải bằng tích số của khối lượng hình hộp nhân với hình chiếu của gia tốc chuyển động của trọng tâm, tức là bằng:  $\rho dx dy dz \frac{du}{dt}$ . Vì vậy ta có:

$$\rho dx dy dz F_x - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du}{dt}.$$

Sau khi rút gọn, nhận được:

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt}.$$

Đây là phương trình vi phân chuyển động Euler cho chất lỏng lý tưởng.

Vì  $u=u(x,t)$  nên:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{u^2}{2})}{\partial x}$$

Lực khối lượng trong những trường hợp thường gặp là lực có thế, nên:

$$F_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad \text{trong đó } \pi \text{ là hàm thế.}$$

Như vậy phương trình Euler trở thành:

$$-\frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Với chất lỏng không nén, ta có:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = -\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Ta chỉ xét trường hợp lực khối lượng là trọng lực, nên  $\pi = gz$ , thay vào ta có:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t},$$

với chất lỏng thực, tức có độ nhớt, ta cần thêm số hạng biểu thị tổn thất năng lượng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial h_w}{\partial x}.$$

Trong lòng dẫn hở thay đổi chậm có thể coi các yếu tố cơ bản tại mỗi mặt cắt là các trị số trung bình, thay  $u$  bằng  $v$  ta có:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( z + p/\gamma + \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h_w}{\partial x} = 0 \quad (1-61)$$

Vì chuyển động thay đổi chậm nên có thể bỏ qua các tổn thất cục bộ  $h_w = h_d$  :

$$J = \frac{\partial h_d}{\partial x} = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{v^2}{C^2 R} \quad (1-62)$$

Vì dòng chảy có thể chảy theo 2 hướng, lúc ngược lúc xuôi nên  $J$  viết dưới dạng tổng quát:

$$J = \frac{Q|Q|}{K^2} = \frac{v|v|}{C^2 R} \quad (1-63)$$

Vậy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( z + p/\gamma + \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v|v|}{c^2 R} = 0 \quad (1-64)$$

Gọi  $i_m$  là độ dốc mặt nước,  $i$  là độ dốc đáy kênh:

$$i_m = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - i \quad (1-65)$$

$z$ - cao độ của điểm trên mặt thoáng.

Có thể viết:

$$-\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} + i = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v|v|}{c^2 R} \quad (1-66)$$

Hệ phương trình bao gồm phương trình liên tục (1-60) và phương trình chuyển động (1-66) không có nghiệm giải tích nên người ta thường giải chúng bằng phương pháp số. Một trong các phương pháp số đang thịnh hành là phương pháp sai phân hữu hạn. Bản chất phương pháp sai phân hữu hạn là thay thế các đạo hàm riêng trong các phương trình trên bằng cách rời rạc hoá thành các sai phân theo thời gian và không gian. Có hai loại sơ đồ trong sai phân hữu hạn là sơ đồ ẩn và sơ đồ hiện. Chi tiết về phương pháp sai phân hữu hạn có thể tham khảo trong nhiều sách về phương pháp tính. Hiện nay đã có nhiều chương

trình máy tính ở trong và ngoài nước được thiết lập theo hai sơ đồ nói trên. ở Việt Nam, thường sử dụng chương trình VRSAP viết theo sơ đồ ẩn của GS Nguyễn Như Khuê và viết theo sơ đồ hiện của GS Nguyễn Ân Niên.

## 1.6. LÝ THUYẾT LỚP BIÊN

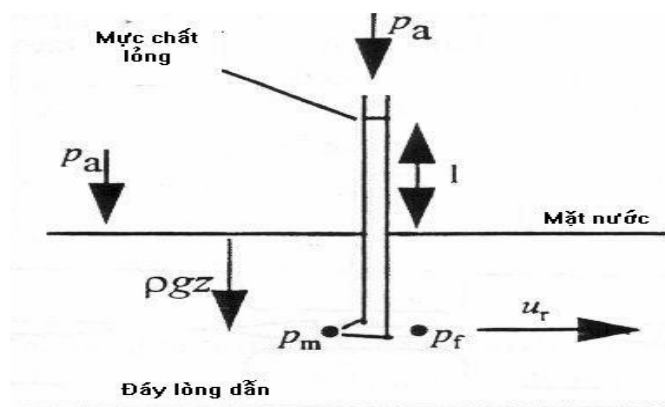
### 1.6.1. Khái niệm

Lý thuyết lớp biên do nhà động lực dòng chảy người Đức là Prandtl (1875-1953) đề xuất để liên kết lý thuyết thủy động lực với thực hành thủy lực, trong đó dòng chảy được tính thông qua các yếu tố kinh nghiệm.

Trong dòng chảy, lớp biên là vùng nằm gần mặt phân cách (tại đáy hoặc thành ống), nơi vận tốc biến đổi rất nhanh theo khoảng cách kể từ mặt phân cách (hình 1.15). Sự giảm vận tốc trong lớp biên thể hiện sự tổn thất động lực khi dòng chảy bị cản trở bởi ma sát. Sức cản này có thể do ứng suất nhớt tác động theo phương tiếp tuyến với mặt phân cách, năng lượng do tổn thất có thể chuyển hoá thành nhiệt. Nếu mặt phân cách khá thô, sức kháng càng lớn, nhiễu động do áp lực có thể tác động vuông góc với mặt phân cách và tạo nên các xoáy, thông thường tổn thất động lực do sự hình thành các xoáy vì mặt phân cách thô lớn hơn rất nhiều so với tổn thất do ứng suất nhớt.

### 1.6.2. Áp suất động lực

Hình dạng biểu đồ phân bố vận tốc theo độ sâu của dòng chảy trên mặt thô phụ thuộc vào độ lớn của lực kéo lớp biên. Xét ví dụ: khi nhúng một ống Pitot (vát một đầu, đủ lớn để loại trừ hiệu ứng mao dẫn)



Hình 1.16. Ống Pitot nhúng trong kênh có dòng chảy

vào dòng chảy đang chuyển động với vận tốc  $u_r$  thì nước trong ống dâng lên cao hơn mực nước trong dòng chảy (hình 1.16). Theo phương trình Bernoulli ta

có:  $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = const$ , vì  $\gamma = \rho g$  nên có thể viết  $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = const$ . Hoặc nói



cách khác :  $\rho gz + p + \rho \frac{u^2}{2} = \text{const}$ . Trong trường hợp thí nghiệm này ta có:

- Phía hạ lưu ống, áp lực là:

$$p_f = \text{const} - \rho u_r^2/2 - \rho gz \quad (1-67)$$

- Tại miệng ống  $u_r = 0$  nên ta có:

$$p_m = \text{const} - \rho gz \quad (1-68)$$

Vì vậy :

$$p_m - p_f = \rho u_r^2/2 \quad (1-69)$$

Đồng thời theo vị trí trong dòng chảy và các áp suất tác động ta có:

$$p_f = p_a + \rho gz \text{ và } p_m = p_a + \rho gz + \rho gl \quad (1-70)$$

Do đó ta được :

$$p_m - p_f = \rho gl = \rho u_r^2/2 = p_d \text{ (} p_d \text{ gọi là áp suất động lực)} \quad (1-71)$$

$$\text{Từ biểu thức : } p_f = p_m - \rho u_r^2/2 \quad (1-72)$$

thấy rằng : áp suất trong dòng chảy chuyển động giảm so với áp suất đó ở cùng độ sâu trong chất lỏng đứng yên một lượng bằng áp suất động lực.

Người ta vận dụng nguyên lý này để đo chính xác vận tốc dòng chảy. Nếu tại một điểm nào đó, vận tốc giảm từ  $u$  đến 0 thì áp suất tăng lên một đại lượng là  $\rho u^2/2$ . Người ta làm một ví dụ khác như trên hình 1.17, trong đó nước chảy qua một ống nằm ngang bị co hẹp rồi lại được mở rộng trở lại như trước. Trong thí nghiệm đó, áp lực  $p$  trong dòng chảy được biểu thị thông qua các cột nước trong các ống đứng nhỏ. Mức nước trong ống đứng ở đoạn co hẹp giảm nhưng rồi lại dâng lên ở đoạn sau, nơi mặt cắt như lúc ban đầu. Đáng lẽ theo phương trình Bernoulli, mức nước trong ống 1 và 3 phải bằng nhau, nhưng chúng lại khác nhau, đó là do ma sát tại lớp biên đã ảnh hưởng đến các yếu tố dòng chảy, cụ thể là làm giảm áp suất khởi đầu.

### 1.6.3. Hệ số kháng

Như vậy lớp biên là một khu vực, tại đó dòng chảy trung bình bị giảm để bù đắp tổn thất động lực do ma sát tại biên. Khi vận tốc càng nhỏ, phạm vi lớp biên tăng lên. Nếu ma sát biên, hoặc sức kháng tại đáy thường biểu thị bởi ứng suất đáy  $\tau_b$  là lớn thì lớp biên tăng lên. Người ta biểu thị hệ số kháng  $C_d$

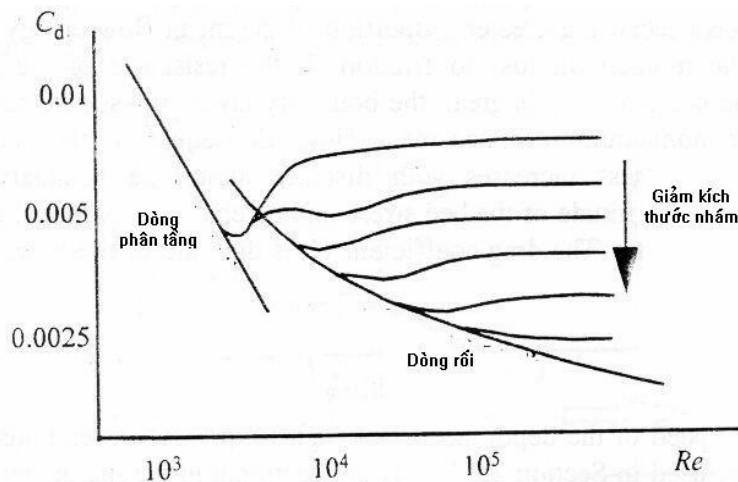
bằng biểu thức sau:

$$C_d = \frac{\tau_b}{\rho u_m^2} \quad (1-73)$$

trong đó :  $\tau_b$ - ứng suất tại đáy

$u_m$ - vận tốc trung bình của dòng chảy theo độ sâu

Như đã biết dòng chảy thường có trạng thái chảy rối hoặc phân tầng, phụ thuộc số Reynold ( $Re$ ). Khi số  $Re$  xấp xỉ  $10^4$  dòng chảy thường ở trạng thái chảy rối.  $C_d$  giảm khi số  $Re$  tăng và quan hệ của chúng thể hiện như trên hình 1.18. Khi kích thước nhám giảm, tức độ thô đáy giảm, hệ số kháng giảm.



Hình 1.18. Biến đổi hệ số kháng theo số Reynolds

#### 1.6.4. Đường phân bố vận tốc logarit

Dạng phân bố vận tốc trong dòng chảy từ mặt đến đáy là một đường cong phức tạp, và cần thiết phải thiết lập về mặt lý thuyết hình dạng đường cong này. Prandtl đưa ra khái niệm quãng đường xáo trộn  $l_m$ :

$$l_m = k(h-z) \quad (1-74)$$

$k=0.36-0.41$  hằng số Karman

$h$ - độ sâu lớp biên

$z$ - khoảng cách tính từ mặt thoáng trở xuống ( $z=0$  tại mặt thoáng;  $l_m=kh$ ,  $z=h$  tại mép lớp biên:  $l_m=0$ )

Hệ số nhớt rối  $N_z$  có thể biểu thị bằng:

$$N_z = l_m^2 \left| \frac{du}{dz} \right| \quad (1-75)$$

trong đó  $du/dz$  là gradient vận tốc theo phương thẳng đứng.

ứng suất rối liên quan đến  $N_z$  được biểu thị bằng :

$$\tau_{zx} = -\rho N_z \frac{du}{dz} = -\rho l_m^2 \left| \frac{du}{dz} \right| \frac{du}{dz} \quad (1-76)$$

Vì dòng chảy giảm dần về phía đáy do ma sát nên  $du/dz < 0$ . Sắp xếp lại biểu thức trên ta có:

$$\frac{du}{dz} = -\sqrt{\frac{\tau_{zx}}{\rho}} \frac{1}{l_m} = -\frac{u_*}{l_m} \quad (1-77)$$

Do  $\tau = \tau_{zx}$  được coi như không đổi trong toàn bộ độ sâu lớp biên, nó bằng chính ứng suất đáy  $\tau_b$ . Vận tốc động lực (hay còn gọi là vận tốc ma sát)  $u_*$  là tham số rất thuận tiện cho việc thể hiện ứng suất đáy trong dòng chảy vùng biên.

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (1-78)$$

Từ biểu thức :  $\frac{du}{dz} = -\frac{u_*}{k(h-z)}$  lấy tích phân ta được:

$$u = \frac{u_*}{k} \ln(h-z) + const \quad (1-79)$$

Gọi  $z_0 = h - h_0$  (tại  $z = h_0$  có  $u = 0$ ) nhận được:

$$u = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{h-z}{z_0}\right) \quad (1-80)$$

Phương trình trên chỉ ra rằng biểu đồ vận tốc ở lớp biên sát đáy có dạng đường logarit về mặt hình học.

## 1.7. PHÂN TÍCH THỨ NGUYÊN VÀ ĐỒNG DẠNG THUỶ LỰC

### 1.7.1. Lý thuyết thứ nguyên (Lý thuyết $\pi$ )

Trong vật lí, thường sử dụng các đại lượng có thứ nguyên và không có thứ nguyên. Đại lượng không có thứ nguyên là đại lượng không sử dụng đơn vị đo. Đại lượng có thứ nguyên là đại lượng sử dụng đơn vị đo. Các đại lượng này có liên quan với nhau bằng các quan hệ nhất định, trong đó đối với một số trong chúng có thể cho các đơn vị tùy ý.

Ta gọi các đại lượng vật lí cơ bản là độc lập, tức không phụ thuộc lẫn nhau, như trong cơ học là chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$ , thời gian  $T$ . Các đại lượng còn lại gọi là tự chọn. Biểu thức của đại lượng vật lí tự chọn thông qua các đại lượng vật lí cơ bản được gọi là thứ nguyên.

Bất kỳ phương trình vật lí nào theo thứ nguyên cũng đều đồng nhất, tức là cả hai vế đều luôn luôn có thứ nguyên như nhau, không phụ thuộc vào cách chọn hệ đại lượng vật lí. Nguyên tắc đó là bắt buộc ngay cả với các phương trình chưa biết. Tính chất đồng nhất là cơ sở lý thuyết của thứ nguyên. Sử dụng chúng có thể thành lập được cả quan hệ giữa các đại lượng dùng để xác định các hiện tượng vật lí khác nhau.

Công thức thứ nguyên trong các hệ thống khác nhau của các đại lượng vật lí dùng cho cùng một đại lượng có thể chứa số lượng biến số khác nhau và có thể có các dạng khác nhau. Vì vậy nói về thứ nguyên chỉ có thể là cho một hệ xác định của các đại lượng vật lí. Để ký hiệu thứ nguyên ta thường dùng cách viết  $[a]$  (trong đó  $a$  - đại lượng vật lí tự chọn).

Công thức thứ nguyên của tất cả các đại lượng phải có dạng số mũ :

$$[D] = A^x B^y C^z \quad (1-81)$$

Trong đó:

$D$ - đại lượng tự chọn;

$A, B, C$  - các đại lượng cơ bản

$x, y, z$  - số mũ.

Nếu trên cơ sở phân tích hiện tượng này hoặc hiện tượng khác ta tách được các đại lượng vật lí, là các đại lượng hoàn toàn xác định được hiện tượng vật lí đó, thì việc xác lập tính chất của quan hệ giữa các đại lượng đã được tách ra đó có thể xuất phát từ nguyên lý đồng nhất của thứ nguyên bằng cái gọi là lý thuyết  $\pi$  do Buckingham đề xướng.

Giả sử có hiện tượng vật lý nào đó hoàn toàn được xác định bằng một số lượng hữu hạn các đại lượng vật lý có thứ nguyên, quan hệ hàm số giữa chúng có thể viết dưới dạng:

$$f(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0 \quad (1-82)$$

Trong đó:

$A_1, A_2, \dots, A_n$  - các đại lượng vật lý, xác định hiện tượng đang xét;

$n$ - số lượng của chúng;

Vậy tương ứng với lý thuyết  $\pi$ , phương trình (1-82) sẽ có dạng:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (1-83)$$

Trong đó:

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$  - các tổ hợp không thứ nguyên của đại lượng  $A$ ;

$m$ - số lượng các đại lượng vật lý cơ bản.

Số lượng lớn nhất của các tổ hợp  $\pi$  lúc này sẽ được viết dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4 \\ \pi_2 &= A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5 \\ &\dots\dots\dots \\ \pi_{n-m} &= A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n \end{aligned} \quad (1-84)$$

hoặc đối với số bất kỳ:

$$\pi = A_1^x A_2^y A_3^z A_i \quad (1-85)$$

Trong đó:

$A_i$  - đại lượng vật lý sau  $A_3$  từ  $A_4$  đến  $A_n$  ;  $i=4,5,\dots$

Như bất kỳ hệ phương trình nào, hệ (1-84) có thứ nguyên về trái bằng thứ nguyên về phải. Do đó chuyển từ (1-82) đến (1-83) ta giảm số lượng các số hạng chưa biết từ  $n$  đến  $n-m$ . Trong cơ học, như đã nói trên,  $m=3$ .

Thay  $\pi$  bằng dạng tích số các đại lượng vật lý cơ bản với số mũ bằng 0, về phải phương trình (1-84) theo (1-82) thay bằng các số hạng có số mũ ta có:

$$\pi = L^0 M^0 T^0 = (L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1})^x (L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2})^y (L^{\alpha_3} M^{\beta_3} T^{\gamma_3})^z x L^{\alpha_i} M^{\beta_i} T^{\gamma_i} \quad (1-86)$$

tức là:

$$\pi = L^0 M^0 T^0 = L^{(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_i)} M^{(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_i)} T^{(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_i)} \quad (1-87)$$

Do đó ta có hệ:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_i = 0$$

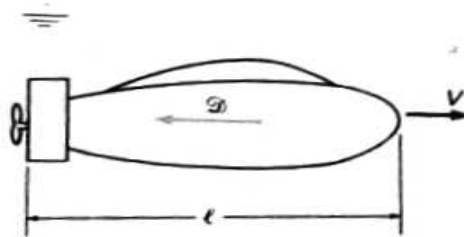
$$\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_i = 0 \quad (1-88)$$

$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_i = 0$$

Trong đó:  $\alpha, \beta, \gamma$  - số, được xác định trên cơ sở đồng nhất về thứ nguyên.

Hệ (1-88) được giải đơn trị đối với các ẩn số là các số mũ chưa biết,  $x, y, z$ . Tiến hành tuần tự các tính toán tương tự đối với từng số hạng trong hệ phương trình (1-84), ta xác định tất cả các số không thứ nguyên  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ .

Dạng cuối cùng của phương trình (1-83) không thể xác định được (trừ các trường hợp đặc biệt đơn giản) trực tiếp từ lý thuyết  $\pi$ , nó được xác định trên cơ sở nghiên cứu thực nghiệm hoặc các số liệu thực địa.



Hình 1.20. Chuyển động của vật có thiết diện hình cầu trong chất lỏng

a) Để làm ví dụ cho việc sử dụng các nguyên lý cơ bản của lý thuyết  $\pi$ , ta nghiên cứu bài toán về sức cản trong chuyển động đều đẳng nhiệt của một vật hình cầu trong chất lỏng nhớt, tĩnh (hình 1.20). Chuyển động của hình cầu trong trường hợp này được xác định bằng các tính chất vật lý của chất lỏng: mật độ  $\rho$ , độ nhớt  $\mu$ ; kích thước của hình cầu: đường kính  $d$ ; vận tốc chuyển động  $u$  của

nó, cũng như lực cản chính diện  $F=F(d,u,\mu,\rho)$ .

Theo (1-82) ta có mỗi một đại lượng dưới dạng hàm số có thể biểu thị bằng tích số các đại lượng vật lý cơ bản với các số mũ tùy ý, cụ thể là:

$$d \sim L^1$$

$$u \sim L^1 T^{-1}$$

$$\rho \sim M^1 L^{-3}$$

$$\mu \sim M^1 L^{-1} T^{-1}$$

$$F \sim M^1 L^1 T^{-2}$$

Theo phương trình (1-83) có thể viết dưới dạng:

$$f(\rho, \mu, u, d, F) = 0$$

Trong đó:

$\rho$  và  $\mu$  - mật độ và độ nhớt của chất lỏng;

$u$  - vận tốc chuyển động đều của hình cầu;

$d$ - đường kính hình cầu;

$F$ - lực cản chính diện.

Ta tách các đại lượng vật lý độc lập và viết lại các phương trình xuất phát như sau:

$$f(d, u, \rho, \mu, F) = 0$$

Theo (1-83) ta có:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0$$

Do đó số lượng các tổ hợp không thứ nguyên  $\pi$  bằng 2.

Bây giờ tương ứng với các công thức (1-84), ta viết:

$$\pi_1 = d^{x_1} u^{y_1} \rho^{z_1} \mu$$

$$\pi_2 = d^{x_1} u^{y_2} \rho^{z_2} F$$

Tiếp theo, theo quan hệ (1-86), ta có

$$\pi_1 = (L^1)^{x_1} (L^1 T^{-1})^{y_1} (M^1 L^{-3})^{z_1} M^1 L^{-1} T^{-1} = L^{x_1+y_1+3z_1-1} T^{-y_1-1} M^{z_1+1}$$

Theo (1-88) có:

$$x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0 ;$$

$$- y_1 - 1 = 0 ;$$

$$z_1 + 1 = 0 .$$

Giải hệ phương trình đã nhận được, ta có:

$$x_1 = -1; y_1 = -1; z_1 = 1$$

$$\text{do đó: } \pi_1 = \frac{\mu}{du_0 \rho} = \frac{\nu}{du_0} = \frac{1}{\text{Re}}, \quad [\pi_1] = 0$$

Re là số Reynolds.

Tương tự đối với  $\pi_2$  ta được:

$$\pi_2 = L^{x_2+y_2-3z_2+1} T^{-y_2-2} M^{z_2+1}$$

$$x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0 ;$$

$$- y_2 - 2 = 0 ;$$

$$z_2 + 1 = 0 .$$

$$x_2 = -2; y_2 = -2; z_2 = -1$$

$$\pi_2 = \frac{F}{d^2 u^2 \rho}, \quad [\pi_2] = 0$$

Thay các giá trị số tổ hợp không thứ nguyên vào phương trình (1-83) ta được:



$$\varphi\left(\frac{1}{\text{Re}}, \frac{F}{d^2 u^2 \rho}\right) = 0$$

hoặc:

$$F = \varphi' \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \rho d^2 u^2$$

Biểu thức trên chỉ ra rằng với kết cấu có thể của phương trình này thì lực cản chính diện tăng khi tổ hợp có thứ nguyên  $\rho d^2 u^2$  tăng và khi số Reynolds giảm.

Ta xác định dạng biểu thức  $\varphi'(1/\text{Re})$  cho trường hợp chảy bao hình cầu bằng dòng chất lỏng nhớt khi số Reynolds nhỏ.

Theo lời giải Stokes:

$$F = 3\pi\mu du$$

Cân bằng vế phải của hai phương trình ta được:

$$3\pi\mu du = \varphi'(1/\text{Re}) \rho d^2 u^2$$

do đó:

$$\varphi' \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) = \frac{3\mu\pi}{\rho du} = \frac{3\pi}{\text{Re}}$$

Viết lại, thay  $\varphi'(1/\text{Re})$  vào, ta được:

$$F = \frac{3\pi}{\text{Re}} \rho d^2 u^2 = \frac{24\pi d^2}{\text{Re}} \rho \frac{u^2}{2}$$

hoặc  $F = c_x \rho u^2 / 2$ , là kết quả mà Newton nhận được cho lực cản chính diện.

So sánh các kết quả, ta thấy hệ số sức cản chính diện  $c_x$  giảm khi số Reynolds tăng. Nghiên cứu thực nghiệm, như đã được biết, hoàn toàn phù hợp với kết của đã nêu.

b) Bằng lý thuyết  $\pi$  và lý thuyết thứ nguyên có thể tìm được phương trình Darcy-Weisbach để tính toán sức cản thủy lực theo chiều dài. Xét chuyển động đều đẳng nhiệt của chất lỏng không nén trong ống hình trụ, tương ứng với

công thức (82), có thể viết  $f(d, v, \rho, \mu, \Delta p, l, k_{td}) = 0$

(trong đó  $d$ - đường kính ống;  $v$  - vận tốc trung bình của dòng chất lỏng;  $\rho$  và  $\mu$ - lần lượt là mật độ và độ nhớt động lực của chất lỏng;  $\Delta p$  - độ hạ thấp áp suất trong ống trên khoảng cách  $l$  ;  $k_{td}$  - độ nhám tuyệt đối tương đương của mặt trong ống).

Tính độ hạ thấp áp suất  $\Delta p$  cho một đơn vị chiều dài ống, khi đó  $f(d, v, \rho, \mu, \Delta p/l, k_{td})=0$

Từ phương trình (83) ta có:  $\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$

Số không thứ nguyên  $\pi$  có thể tính như trên:

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho d v} = \frac{1}{Re}$$

$$\pi_2 = \frac{d \Delta p / l}{\rho v^2}$$

$$\pi_3 = \frac{k_{td}}{d}$$

$$\text{Do đó: } \varphi\left(\frac{1}{Re}; \frac{d \Delta p / l}{\rho v^2}; \frac{k_{td}}{d}\right) = 0$$

Giải quan hệ này đối với tổ hợp không thứ nguyên thứ hai, ta có:

$$\frac{d \Delta p / l}{\rho v^2} = \varphi'\left(\frac{1}{Re}; \frac{k_{td}}{d}\right)$$

Vì độ hạ thấp áp suất  $\Delta p = \rho g h_{ms}$ , có thể viết:

$$h_{ms} = 2 \varphi'\left(\frac{1}{Re}; \frac{k_{td}}{d}\right) \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Ta ký hiệu  $\lambda = 2 \varphi' (1/Re ; k_{td}/d)$ , cuối cùng ta có:

$$h_{ms} = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Đây chính là công thức Darcy-Weisbach.

### 1.7.2. Các bước phân tích thứ nguyên

1- Liệt kê tất cả các đại lượng vật lý xác định hiện tượng mà ta mô tả. Xác định các tham số mục tiêu

2- Xác định các tham số phi thứ nguyên ta cần xây dựng. Ví dụ trong cơ học ta sử dụng các tham số cơ bản M, L, T đối với các quá trình đẳng nhiệt, nếu nhiệt độ biến đổi ta cần thêm  $\theta$ .

3- Giải hệ phương trình phi thứ nguyên.

4- Sắp xếp lại các nhóm theo mục tiêu:

- Một tổ hợp phi thứ nguyên gọi là độc lập nếu không có thành phần nào trong đó nhận được bằng cách nhân hoặc lấy số mũ từ những thành phần khác. Ví dụ tổ hợp  $(l/d, \rho u d / \mu, \varepsilon / d, \rho u l / \mu)$  là không độc lập vì thành phần thứ 4 có thể nhận được bằng cách nhân 2 thành phần đầu tiên với nhau.

- Khi có tổ hợp độc lập, có thể thay thế bất kỳ thành phần nào trong tổ hợp bằng các cách sau:

- + nhân thành phần với hằng số

- + lấy số mũ

- + nhân 1 thành phần có bất kỳ số mũ nào với 1 thành phần khác có số mũ khác

- + kết hợp các cách nói trên.

Ví dụ:  $\frac{gh}{u^2/2} = F(l/d, \rho u d / \mu, \varepsilon / d)$  sẽ tương đương với

$$\frac{2ud\rho gh}{\mu u^2/2} = G(l/d * \rho u d / \mu, \rho u d / \mu, \varepsilon / d * \rho u d / \mu)$$

### 1.7.3. Đồng dạng thủy lực

a) Khái niệm

Vì thủy lực học là cơ chất lỏng ứng dụng hay cơ chất lỏng kỹ thuật nên thực nghiệm đóng vai trò rất quan trọng một khi các vấn đề thực tế chưa thể hoàn toàn giải quyết về lý thuyết.

Thực nghiệm kết hợp với lý thuyết giúp ta kiểm nghiệm các công thức lý

thuyết.

Trong thực nghiệm người ta tái diễn lại các hiện tượng thiên nhiên bằng quy mô nhỏ hơn, gọi là các mô hình vật lý hoặc mô hình thuỷ lực, theo một tỷ lệ nào đó.

Mô hình thuỷ lực có thể chia ra:

- mô hình không biến dạng: tất cả các kích thước của mọi đối tượng trong thiên nhiên được thu nhỏ thành mô hình theo một tỷ lệ nhất định

- mô hình biến dạng: do điều kiện thí nghiệm hạn chế, tỷ lệ kích thước nằm ngang và thẳng đứng không như nhau

- ngoài ra còn có các mô hình xói- không xói, chỉnh thể-bán chỉnh thể..

b) Đồng dạng (tương tự) cơ học

Hiện tượng mà tỉ số của các đại lượng vật lý cùng tên của cùng một biểu hiện vật lý tự nhiên là không đổi, được gọi là đồng dạng cơ học. Các tỷ số này thường là các yếu tố hình học (kích thước, độ dài, khoảng cách), mật độ và lực tác dụng. Điều đó có nghĩa là đối với đôi một bất kỳ của các điểm giống nhau của hai dòng đồng dạng, tất cả các đại lượng véctơ đều đồng dạng hình học, còn các đại lượng vô hướng thì tỷ lệ với nhau.

Hai hiện tượng thuỷ lực là đồng dạng cơ học nếu chúng đồng dạng hình học, động học và động lực học.

+ Đồng dạng hình học: khi tỉ lệ giữa các kích thước bậc nhất (chiều dài) là một trị số không đổi.

Tiếp theo đây ta kí hiệu thuật ngữ dòng chảy tự nhiên và dòng chảy trên mô hình bằng chữ “TN” và “MH”, không hạn chế cho bất cứ một hệ số tỉ lệ nào.

Đối với kích thước chiều dài, ta có tỷ lệ giữa dòng tự nhiên và dòng mô hình là

$$\frac{l_{TN}}{l_{MH}} = \alpha_1 = const \quad (1-89)$$

trong đó  $\alpha_1$  - hệ số tỷ lệ hoặc tỷ lệ chiều dài;

Từ đó để có được đồng dạng hình học của hai dòng chảy phải có đủ tỷ lệ về diện tích và thể tích, tức là:

$$\omega_{TN}/\omega_{MH} = \alpha_{\omega} = \alpha_1^2 \quad (1-90)$$

$$W_{TN}/W_{MH} = \alpha_w = \alpha_1^3 \quad (1-91)$$

+ Ngoài ra, đối với hai dòng chảy đồng dạng động học, hoặc là các đoạn quỹ đạo của các phần tử tương ứng của dòng tự nhiên và mô hình cũng như các thời đoạn mà trong đó xảy ra các quá trình tự nhiên trên mô hình, phải tỷ lệ.

Nói cách khác trong các dòng đồng dạng động học, các phần tử giống nhau vẽ nên các quỹ đạo đồng dạng hình học trong thời đoạn mà các tỷ số được gọi là tỷ lệ thời gian, là đại lượng không đổi:

$$t_{TN}/t_{MH} = \alpha_2 = \text{const} \quad (1-92)$$

Do đó, đối với đôi một bất kỳ của các điểm giống nhau của hai dòng đồng dạng động học, ta có các tỷ số sau đây:

$$u_{TN}/u_{MH} = \alpha_u = \alpha_1/\alpha_2 = \text{const} \quad (1-93)$$

$$a_{TN}/a_{MH} = \alpha_a = \alpha_1/\alpha_2^2 = \text{const} \quad (1-94)$$

Trong đó:

$u_{TN}$  và  $u_{MH}$  - vận tốc trong các điểm giống nhau của dòng tự nhiên và dòng trên mô hình ;

$a_{TN}$  và  $a_{MH}$  - gia tốc của các điểm giống nhau của dòng tự nhiên và trên mô hình

$\alpha_u$  và  $\alpha_a$  - lần lượt là các tỷ lệ của vận tốc và gia tốc.

+ Hệ hoặc hiện tượng thủy lực đồng dạng động lực học với nhau, nếu bản chất vật lý của các lực tác động lên chất lỏng là giống nhau và các vectơ của các lực đó tạo nên các đa giác lực đồng dạng hình học.

Muốn có đồng dạng động lực học nhất thiết phải có đồng dạng động học và hình học.

Đối với đồng dạng động lực học các dòng chảy, tỷ số của mật độ chất lỏng trong tự nhiên và trên mô hình cũng phải bằng trị số không đổi:

$$\rho_{TN}/\rho_{MH} = \alpha_{\rho} = \text{const} \quad (1-95)$$

Trong đó:

$\alpha_p$  - tỷ lệ mật độ

Trong hệ đồng dạng động lực học các tỷ số của lực cùng tên trong các điểm giống nhau trong tự nhiên và trên mô hình là không đổi, tức là:

$$F_{TN}/F_{MH} = \alpha_F = \text{const} \quad (1-96)$$

Trong đó:

F - lực bất kì, trong số đó có cả lực tổng hợp ;

$\alpha_F$  - hệ số tỷ lệ hoặc là tỷ lệ lực

Trong các dòng đồng dạng tỷ số của lực tổng hợp trên lực thành phần là đại lượng không đổi, đối với dòng tự nhiên cũng như dòng trên mô hình:

$$R_{TN}/(F_i)_{TN} = R_{MH}/(F_i)_{MH} = \text{const} \quad (1-97)$$

Trong đó:

R- lực tổng hợp của tất cả các ngoại lực tác dụng lên chất lỏng.

$F_i$  - một trong số các ngoại lực thành phần

Ta xét tỷ số của lực tổng hợp của tất cả các ngoại lực đối với các lực quán tính tương ứng của hai dòng chảy đồng dạng động lực học.

$$R_{TN}/(F_{QT})_{TN} = R_{MH}/(F_{QT})_{MH} \quad (1-98)$$

Ta viết lại tỷ số đó dưới dạng sau đây

$$R_{TN}/R_{MH} = (F_{QT})_{TN}/(F_{QT})_{MH} \quad (1-99)$$

Theo định luật Newton tỷ số lực quán tính có thể viết dưới dạng:

$$(F_{QT})_{TN}/(F_{QT})_{MH} = (\rho W a)_{TN}/(\rho W a)_{MH} = \alpha_p \alpha_1^{3,0} \alpha_1^{-2,0} \quad (1-100)$$

hoặc đối với lực tổng hợp của tất cả các ngoại lực trong dòng tự nhiên và mô hình:

$$R_{TN}/R_{MH} = \alpha_p \alpha_1^{4,0} \alpha_1^{2,0} = \alpha_p \alpha_1^{2,0} \alpha_u^{2,0} \quad (1-101)$$

Thay vế phải của biểu thức (100) bằng tỷ số của các đại lượng vật lý cùng tên, ta có:

$$R_{TN}/R_{MH} = (\rho l^2 u^2)_{TN} / (\rho l^2 u^2)_{MH} \quad (1-102)$$

hoặc

$$R_{TN}/(\rho l^2 u^2)_{TN} = R_{MH} / (\rho l^2 u^2)_{MH} \quad (1-103)$$

Vì tỷ lệ hình học của mô hình đối với từng trường hợp cụ thể có thể là khác nhau nên có thể viết:

$$\frac{R_1}{(\rho l^2 u^2)_1} = \frac{R_2}{(\rho l^2 u^2)_2} = \dots = \frac{R}{\rho l^2 u^2} = idem \quad (1-104)$$

Tỷ số:

$$\frac{R}{\rho l^2 u^2} = Ne \quad (1-105)$$

được gọi là tiêu chuẩn Newton.

Đối với các hiện tượng đồng dạng động lực học trong các điểm giống nhau tiêu chuẩn Newton phải bằng nhau. Tiêu chuẩn Newton xác định sự đồng dạng động lực của hệ thống cơ học.

Tuy nhiên tiêu chuẩn đó không phải luôn luôn có thể được sử dụng dưới dạng tổng quát trong nghiên cứu thủy khí động lực, vì trong nhiều trường hợp không thể tìm được sự đánh giá định lượng các ngoại lực và do đó cả tổng hợp lực.

Vì vậy trong nghiên cứu các hiện tượng thủy lực thường chỉ lấy một lực là lực có tính quyết định hơn so với các lực khác. Do đó với tính chất là tiêu chuẩn đồng dạng động học có thể chọn các tiêu chuẩn riêng, ví dụ tiêu chuẩn Reynolds, tiêu chuẩn Froude và Stokes.

- a) Tương tự của các dòng chảy khi ảnh hưởng của trọng lực là chủ yếu (tiêu chuẩn Froude, 1869)

Một số hiện tượng thủy lực, ví dụ nước chảy qua đập tràn, trọng lực có vai trò hơn các lực khác như lực cản, lực căng mặt ngoài. Lúc đó ta thay trọng lực  $G=Mg$  vào trị số  $R$  trong tiêu chuẩn Newton:

$$\frac{M_{TN} g_{TN}}{\rho_{TN} l_{TN}^2 u_{TN}^2} = \frac{M_{MH} g_{MH}}{\rho_{MH} l_{MH}^2 u_{MH}^2} \quad (1-106)$$

Thay  $M/\rho=W=l^3$  ta có:

$$\frac{u_{TN}^2}{g_{TN} l_{TN}} = \frac{u_{MH}^2}{g_{MH} l_{MH}} = Fr_{TN} = Fr_{MH}, \quad (1-107)$$

Fr là số Froude.

Có thể viết (1-107) dưới dạng:

$$\alpha_u^2 = \alpha_g \alpha_l \quad (1-108)$$

Vì gia tốc trọng trường hầu như ít thay đổi ở mọi nơi nên có thể coi  $\alpha_g=1$  và cuối cùng:

$$\alpha_u = \alpha_l^{0.5} \quad (1-109)$$

Từ đó ta có:

$$u_{TN} = u_{MH} \alpha_l^{0.5} \quad (1-110)$$

Bằng cách tương tự, ta tìm được  $\alpha$  đối với lưu lượng, thời gian, lực, công suất..

- b) Tương tự của các dòng chảy khi ảnh hưởng của lực cản là chủ yếu (tiêu chuẩn Reynolds)

Với dòng chảy trong sông, ống.. tác động lực cản là chủ yếu so với các lực khác. Gọi lực cản là T, ta có:

$$T = \tau \chi l. \quad (1-111)$$

Trong trường hợp tổng quát:  $\tau = \gamma R J$  nên:

$$T = \gamma R J \chi l. \quad (1-112)$$

Thay T cho R ta có:

$$\frac{\alpha_T}{\alpha_\rho \alpha_l^2 \alpha_u^2} = \frac{\alpha_\rho \alpha_g \alpha_R \alpha_J \alpha_\chi \alpha_l}{\alpha_\rho \alpha_l^2 \alpha_u^2} = 1 \quad (1-113)$$

Vì  $\alpha_R = \alpha_\chi = \alpha_l$  nên ta có:

$$\alpha_J = \frac{\alpha_u^2}{\alpha_l \alpha_g} \quad (1-114)$$



Vì số Reynold,  $Re = ul/v$  nên ta có:

$$\frac{\alpha_u \alpha_l}{\alpha_v} = 1. \quad (1-115)$$

Sau một số thay thế, biến đổi và rút gọn, cuối cùng nhận được :

$$Q_{TN} = Q_{MH} \alpha_l. \quad (1-116)$$

Các tỷ lệ khác xem bảng 1.2.

Bảng 1.2. Tỷ lệ mô hình

Tên đại lượng	Tỷ lệ mô hình	
	Tiêu chuẩn Froude	Tiêu chuẩn Reynolds
Vận tốc	$\alpha_l^{0.5}$	$\alpha_l^{-1}$
Lưu lượng	$\alpha_l^{2.5}$	$\alpha_l$
Thời gian	$\alpha_l^{0.5}$	$\alpha_l^{-2}$
Lực	$\alpha_p \alpha_l^3$	$\alpha_p$
Công	$\alpha_p \alpha_l^4$	$\alpha_p \alpha_l$
Công suất	$\alpha_p \alpha_l^{3.5}$	$\alpha_p \alpha_l^{-1}$

Các tiêu chuẩn đồng dạng động lực học có thể tìm bằng lí thuyết thứ nguyên, là lí thuyết được dựa trên tính đồng nhất của các phương trình vật lí hoặc là trên cơ sở phân tích các phương trình vi phân mô tả quá trình nghiên cứu.

## Chương 2

### CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN THUỶ ĐỘNG LỰC BIỂN VEN BỜ

#### 2.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG VÀ LIÊN TỤC ĐỐI VỚI VÙNG BIỂN NÔNG VEN BỜ

Trong khi thiết lập phương trình thuỷ động lực đối với vùng biển nông ven bờ, chúng ta cần chú ý tới đặc điểm quan trọng của khu vực nước nông là các vùng biển xáo trộn mạnh, mật độ nước được xem là không đổi. Cũng là một đối tượng của cơ học chất lỏng địa vật lý, vùng biển nông ven bờ cũng phải được mô tả bằng hệ các phương trình thuỷ nhiệt động lực học biển.

Trong các giáo trình Vật lý biển, trên cơ sở các kết quả nghiên cứu rồi chúng ta đã có hệ các phương trình chuyển động, liên tục, truyền nhiệt và khuếch tán rối biển. Trong khi thiết lập các phương trình trên, chúng ta đã sử dụng 2 phép xấp xỉ cơ bản của cơ học biển là xấp xỉ Boussinesq và xấp xỉ thuỷ tĩnh.

Như vậy, đối với vùng nước ven bờ hệ các phương trình thuỷ động lực cũng có thể viết trong dạng sau:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla q + \nabla \cdot \mathbf{R} \quad (2.2)$$

trong đó  $\mathbf{v}$  là véc tơ vận tốc,  $\boldsymbol{\Omega}$  là véc tơ vận tốc quay của quả đất,  $q$  là áp suất giả định (quy ước):

$$q = \frac{p}{\rho} + g x_3 + \xi$$

với  $p$  là áp suất,  $\rho$  là mật độ,  $x_3$  toạ độ thẳng đứng (theo hướng đi lên là dương),  $\xi$  là thế lực tạo triều và  $\mathbf{R}$  là tenxơ ứng suất Reynolds (ứng suất trên một đơn vị khối lượng), chúng ta đã biết ứng suất Reynolds là kết quả của quá trình tương tác giữa các nhiễu động rối 3 chiều (3D) và các tenxơ nhớt,  $\nabla$  là

toán tử Nabra:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3$  với các véc tơ đơn vị  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Trong phương trình 2.2 chúng ta đã sử dụng phương trình liên tục để biến đổi thành phần bình lưu về dạng số hạng thứ hai.

Phương trình 2.1 và hai thành phần đầu của phương trình 2.2 có thể viết trong dạng tường minh đối với các thành phần:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_2} + \mathbf{v}_3 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_3} - 2\Omega_3 \mathbf{v}_2 = -\frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_1}{\partial x_2} + \frac{\partial R_1}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_2} + \mathbf{v}_3 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_3} + 2\Omega_3 \mathbf{v}_1 = -\frac{\partial q}{\partial x_2} + \frac{\partial R_2}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} + \frac{\partial R_2}{\partial x_3}$$

Như chúng ta đã biết tenxơ ứng suất Reynolds  $R$  có thể tham số hoá thông qua các hệ số rối. Đối với trường hợp rối vi mô đẳng hướng thì các hệ số này đều như nhau theo các hướng ngang và thẳng đứng. Khi kích thước ngang lớn hơn nhiều kích thước thẳng đứng thì vai trò của ứng suất tiếp tuyến theo hướng ngang có vai trò quan trọng hơn, các thành phần của vé phải phương trình (2.2) có thể viết như sau:

$$\nabla \cdot R = \frac{\partial \tau}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \right) \quad (2.3)$$

trong đó  $\tau$  là tenxơ ứng suất tiếp tuyến Reynolds,  $\tilde{\mathbf{v}}$  là hệ số nhớt rối.

Nếu bỏ qua thành phần khuếch tán rối ngang (và khuếch tán phân tử), thì bình lưu trở thành yếu tố cơ bản trên mặt ngang. Tuy nhiên không thể bỏ qua các thành phần phát tán (dispersion) vì vận tốc  $\mathbf{v}$  trong phương trình (2.2) sẽ chứa dòng không ổn định và sự biến đổi của chúng sẽ có tác động lên các thành phần vật chất tương tự như các nhiễu động trong quy mô nhỏ hơn.

Đối với thành phần thứ 3 của phương trình (2.2) ta có thể viết:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_3) + 2(\Omega_1 \mathbf{v}_2 - \Omega_2 \mathbf{v}_1) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial q}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{p}{\rho} + g x_3 \right) \quad (2.4)$$

Theo đánh giá bậc đại lượng đối với các vùng biển ven, tất cả các thành phần bên vế trái của phương trình đều nhỏ khi so với gia tốc trọng trường  $g \sim 10 \text{ m s}^{-2}$ . Có thể đưa ra một số đại lượng đặc trưng sau đây đối với vùng biển nông theo thí dụ đối với biển Bắc.

$$v_3 \sim 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$$

$$(\partial v_3 / \partial t) \sim 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$$

$$v_1 \sim v_2 \sim 1 \text{ m s}^{-1}$$

$$\nabla \cdot (v v_3) \sim 10^{-9} \text{ m s}^{-2}$$

$$2 \Omega_1 \sim 2 \Omega_2 \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$2(\Omega_1 v_2 - \Omega_2 v_1) \sim 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$$

$$v \sim 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$[\partial(v \partial v_3 / \partial x_3)] \sim 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$$

Sau khi đánh giá bậc đại lượng các số hạng đặc trưng cho biển nông, chúng ta có thể bỏ qua vế trái (2.4) và phương trình chuyển về dạng:

$$\frac{\partial q}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{p}{\rho} + g x_3 \right) = 0 \quad (2.5)$$

Như vậy, đối với thành phần thứ ba của phương trình (2.2) ta có thể chuyển sang phương trình cân bằng thủy tĩnh:

$$\nabla q = 0 \quad (2.6)$$

Phương trình (2.5) cho thấy rằng, trong trạng thái động, cân bằng thủy tĩnh của các lực sẽ bảo đảm trên hướng thẳng đứng. Điều này có nghĩa là đối với phần lớn các bài toán hải dương, chúng ta chỉ cần xem xét và giải riêng rẽ đối với hệ hai phương trình cho các thành phần theo hướng ngang, thành phần theo phương thẳng đứng được rút ra từ phương trình thủy tĩnh. Hướng tiếp cận này là giả thiết quan trọng thứ hai đối với cơ học biển và được gọi là xấp xỉ tựa thủy tĩnh hay xấp xỉ thủy tĩnh.

Tích phân phương trình (2.5) theo  $x_3$ , ta có:

$$p = -\rho g x_3 + f(t, x_1, x_2) \quad (2.7)$$

Đối với độ sâu tương ứng mặt biển,  $x_3 = \zeta$ , áp suất tác động lên mặt phải bằng áp suất khí quyển  $p_a$ . Như vậy

$$p_a = -\rho g \zeta + f(t, x_1, x_2) \quad (2.8)$$

với điều kiện  $f(t, x_1, x_2)$  là một hàm bất kỳ.

Kết hợp (2.7) và (2.8) ta thu được

$$q = (p_a/\rho) + g\zeta \quad (2.9)$$

Các thành phần ngang của lực Coriolis có thể thu được dễ dàng bằng cách triển khai tích véc tơ giữa  $\Omega$  và  $v$  :

$$2\Omega_2 v_3 - 2\Omega_3 v_2 \quad \text{theo trục } x_1$$

$$-2\Omega_1 v_3 + 2\Omega_3 v_1 \quad \text{theo trục } x_2,$$

Tại các vùng biển vĩ độ trung bình thì số hạng đầu tỷ lệ với vận tốc thẳng đứng nên có thể xem như không đáng kể. Phép xấp xỉ này nhìn chung thoả mãn cho phần lớn các khu vực biển khác nhau, ngoại trừ khu vực xích đạo. Trở về ký hiệu theo thông thường đối với thành phần vận tốc quay của quả đất theo phương thẳng đứng  $f = 2\Omega_3$  ta có thể viết gia tốc Coriolis trong phương trình chuyển động về dạng sau đây

$$-fv_2 e_1 + fv_1 e_2 = f e_3 \times v \quad (2.10)$$

với điều kiện thành phần thẳng đứng không đáng kể như vừa mới phân tích trên đây.

Nếu ta lấy ký hiệu  $u$  là véc tơ vận tốc theo hướng ngang ( $v = u + v_3 e_3$ ), thì phương trình thuỷ động lực cơ bản có dạng sau đây:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (uu) + f e_3 \times u + \frac{\partial}{\partial x_3} (u v_3) = \\ = -\nabla \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot u + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \quad (2.12)$$

Hai phương trình này cho ta tách riêng các thành phần theo hướng ngang và hướng thẳng đứng. Trong những trường hợp cụ thể chúng ta có thể loại trừ từng nhóm các số hạng phụ thuộc vào mức độ ảnh hưởng, nhất là trong trường hợp cần kể đến ảnh hưởng của ma sát đáy hay ma sát bên do bờ.

Trong các công thức 2.11 và 2.12 toán tử Laplace chỉ chứa hai thành phần theo hướng ngang và thông thường được ký hiệu bằng  $\nabla_h$  :

$$\nabla_h = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2$$

## 2.2. ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU VÀ ĐIỀU KIỆN BIÊN

Để giải hệ các phương trình nêu trên yêu cầu nhất thiết là phải có các điều kiện ban đầu và các điều kiện biên.

Đối với các bài toán không dừng ta sử dụng hệ phương trình tiến triển trong khi giải theo các phương pháp giải tích hoặc phương pháp số đều yêu cầu cung cấp các điều kiện ban đầu.

Các điều kiện biên là đòi hỏi thường xuyên của tất cả các bài toán liên quan tới việc giải hệ các phương trình thủy nhiệt động lực cho các vùng biển bất kỳ. Những điều kiện biên được chia thành hai loại chính: điều kiện biên hờ và điều kiện biên cứng. Các biên cứng đối với các vùng biển đó là đáy biển và bờ biển. Trong số các biên hờ có biên biển hờ nơi tiếp giáp giữa miền tính là nước với vùng nước nằm ngoài như sông hoặc các biển và đại dương khác. Một loại biên hờ khác là biên mặt biển tự do hay mặt phân cách giữa nước và không khí.

### 2.2.1. Điều kiện ban đầu

Các điều kiện ban đầu có thể được thiết lập trên cơ sở lý thuyết hoặc thực nghiệm. Nhìn chung các điều kiện lý thuyết phục vụ cho việc nghiên cứu tính đúng đắn của mô hình. Phụ thuộc vào tính chất các biến, các điều kiện ban đầu có thể cho dạng các giá trị hoặc trường các giá trị riêng biệt cho từng biến. Ta có thể cho giá trị các biến tại thời điểm ban đầu theo một quy luật vật lý tự nhiên nhất định. Ví dụ có thể cho trường ban đầu là đồng nhất theo không gian bao gồm trên mặt rộng, hoặc phương thẳng đứng để nghiên cứu diễn biến của trường do sai số tính toán hay khi có các lực tác động khác nhau. Các trường này có thể cho theo một quy luật vật lý phổ biến, ví dụ cho độ muối tăng từ mặt xuống sâu, từ cửa sông ra biển khơi, v.v...

Sử dụng các phương pháp thực nghiệm, các điều kiện ban đầu sẽ là các trường thực tế, tuy chúng có thể được xây dựng trên cơ sở thực nghiệm kết hợp lý thuyết. Chúng ta đều biết, trong thực tế nghiên cứu biển, chúng ta gần như không có một trường tức thời nào đó của bất cứ một yếu tố thủy nhiệt động lực

hoặc môi trường biên nào đầy đủ cho không gian 3 chiều. Vì vậy để có được các trường ban đầu cần áp dụng phương pháp phân tích, nội ngoại suy số liệu. Nguyên lý của các phương pháp này dựa trên quy luật phân bố theo không gian và thời gian của các yếu tố quan trắc được, kết hợp các phương pháp toán học đánh giá chất lượng số liệu, xác định các sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống, tái tạo lại bức tranh phân bố theo không gian của các yếu tố trong thời đoạn có quan trắc. Các kết quả thu của phương pháp phân tích số liệu thường được dẫn về trong dạng các mảng trên lưới không gian và thời gian đều phục vụ các yêu cầu thực tế cũng như điều kiện ban đầu cho mô hình.

Trong giai đoạn hiện nay trong thực tiễn khí tượng, hải văn phương pháp phân tích khách quan được sử dụng rộng rãi. Những phương pháp phân tích số liệu nhiều chiều (3 hoặc 4 chiều) cũng được phát triển từ cơ sở phân tích khách quan.

Trong khi sử dụng phương pháp số để giải các bài toán hải dương học, bên cạnh các điều kiện ban đầu thu được từ phân tích, người ta sử dụng mô hình tính toán như một công cụ để kiểm tra tính đúng đắn của các trường phân tích. Phương pháp nghịch đảo này cho phép cung cấp các điều kiện ban đầu chính xác hơn đáp ứng yêu cầu ngày càng cao cho các mô hình dự báo.

### **2.2.2. Điều kiện biên**

Trong quá trình thiết lập các điều kiện biên cho các mô hình biển nông ven bờ cần tập trung giải quyết hai vấn đề chủ yếu sau đây:

- (i) tính thích ứng của các số liệu tại điều kiện biên hở
- (ii) cần chọn các điều kiện biên thích hợp tại đáy và bờ
- (iii) điều kiện bảo toàn và liên tục trên mặt phân cách đại dương- khí quyển.

Việc xác định các điều kiện biên tại đáy và trên mặt biển là khó khăn lớn nhất mà các nhà nghiên cứu hay gặp và có nhiều hướng giải quyết khác nhau phụ thuộc chủ yếu vào các bài toán cụ thể và yêu cầu chính xác của chúng.

Mục tiêu của chúng ta là tính toán các đặc trưng trung bình (lấy theo một chu kỳ T cho trước mà chúng ta đặc biệt quan tâm) vì vậy cần thiết phải đưa ra một sơ đồ tham số hoá cho phép tính đến các quá trình có quy mô nhỏ hơn chu kỳ lấy trung bình. Ví dụ, trong trường hợp nghiên cứu chế độ dòng chảy có chu kỳ vừa thì các quá trình quy mô nhỏ liên quan tới các thành phần phát xạ và tán xạ do các nhiễu động rối gây nên cần được đưa vào mô hình bằng sơ đồ tham số hoá.

Thông thường, việc mô tả hệ phương trình thông qua các tham biến khác

nhau có thể làm đơn giản hoá bài toán, bao gồm cả điều kiện biên vì căn cứ theo các giả thiết khi thiết lập bài toán, các biên thực tế cũng đã được xấp xỉ bằng các giả thiết tương ứng có thể xem đây như một dạng làm trơn.

Nếu cho rằng mặt biển và đáy biển được mô tả bằng các biểu thức:

$$x_3 = \zeta, \quad x_3 = -h,$$

ta có các điều kiện liên tục đối với vận tốc như sau

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = v_3 \quad \text{khi } x_3 = \zeta \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h = v_3 \quad \text{khi } x_3 = -h \quad (2.14)$$

Các phương trình (2.13) và (2.14) cho ta điều kiện biên trên và dưới được gắn liền với chất lỏng chuyển động theo vận tốc trung bình:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + v_3 \mathbf{e}_3$$

Điều này có nghĩa là các biên cũng được xem như một lớp chất lỏng luôn chuyển động cùng với toàn bộ hệ, đảm bảo sự liên tục động học.

Tuy nhiên giả thiết nêu trên lại khác với các biên trong thực tế, khi các vật liệu trên mặt chuyển động với vận tốc biến đổi thực chứ không phải với vận tốc chất lỏng sát đó. Mặt khác, với các quy mô thời gian khác nhau thì biên cũng có thể xác định khác nhau, ta có thể thấy rõ qua bài toán triều và bài toán dòng chảy dư.

Nhìn chung có thể nói rằng đối với mỗi bài toán đều có các quan điểm riêng về biên trên mặt và đáy biển. Đây là một vấn đề vô cùng phức tạp, đòi hỏi nhiều thủ thuật tinh vi cũng như hiểu biết sâu về cấu trúc các lớp biên và các quá trình xảy ra trong đó.

Có thể nêu lên một số vấn đề mà ta thường gặp như việc xác định các đặc trưng (vị trí, vận tốc, ...) của lớp biên khí quyển trên mặt biển trong điều kiện có sóng. Ta có thể cho rằng sóng gây ảnh hưởng tức thời tới gió, trong khi chính các đặc trưng của sóng như vận tốc, độ cao, ... lại chịu tác động của ứng suất gió trước đó. Thông thường để tính toán các thông lượng phục vụ cho điều kiện biên bảo toàn, người ta sử dụng các công thức tính toán khí hậu căn cứ vào số liệu khí tượng trên mặt biển, các đặc trưng mặt biển và các hệ số trao đổi động lượng, nhiệt và ẩm. Các hệ số này có thể định nghĩa như sau:



$$C_u = \frac{\tau}{\rho v^2}, C_\theta = \frac{H}{\rho C_p v (\theta - \theta_0)}, Cq = \frac{E}{\rho v (q - q_0)},$$

trong đó  $\theta_0$  và  $q_0$  là nhiệt độ và độ ẩm tại một độ cao đặc trưng cho mặt biển. Các đại lượng ứng suất, thông lượng nhiệt và ẩm chủ yếu là các thông lượng rối.

Một đặc trưng quan trọng của dòng khí trên mặt sóng là ảnh hưởng của nhiễu động sóng lên dòng khí. Các nhiễu động của sóng dẫn tới việc các nhiễu động vận tốc được tạo nên bởi hai thành phần: nguồn gốc rối thuần túy và nguồn gốc sóng ( $u', v', w'$  và  $u'_s, v'_s$  và  $w'_s$ ). Kết quả nghiên cứu cho thấy rằng các loại nhiễu động trên thường độc lập với nhau:  $\overline{u'_s u'} \approx 0$ ,  $\overline{v'_s v'} \approx 0$ ,  $\overline{u'_s w'} \approx 0, \dots$ , nhưng giữa chúng lại có mối tương quan nhất định:  $\overline{u'_s w'_s} \neq 0, \overline{v'_s w'_s} \neq 0$ .

Như vậy trong lớp biên khí quyển trên mặt sóng xuất hiện các ứng suất sóng  $\tau_{sx} = \overline{\rho u'_s w'_s}$  và  $\tau_{sy} = \overline{\rho v'_s w'_s}$ . Chúng giảm rất nhanh khi khoảng cách tính từ mặt sóng tăng lên, vì vậy ảnh hưởng của các thành phần này lên phân bố thẳng đứng của vận tốc trung bình chỉ giới hạn trong một lớp mỏng  $h_s$  vào khoảng  $0,1\lambda$  ( $\lambda$ - bước sóng), sự biến đổi của vận tốc trung bình trong lớp khí quyển nằm trên đó có dạng tương tự như đối với lớp khí quyển sát mặt trên nền cứng. Đối với trường hợp phân tầng phiếm định phân bố của vận tốc trung bình ở phần này sẽ tuân theo quy luật logarit.

Để tính toán ứng suất gió trên mặt biển có sóng  $\tau = \tau_t + \tau_s$  cũng như phân bố thẳng đứng của vận tốc gió có thể viết biểu thức ứng suất gió về dạng sau  $\tau = \tau_t (1 + \gamma)$  trong đó  $\gamma = f(v^*/c_0)$  là một hàm của tỷ số giữa vận tốc (động lực) gió và vận tốc truyền sóng.

Và các quá trình tương tác giữa vận tốc gió, sóng và các bọt khí trong nước và các hạt nước trong không khí cũng vô cùng phức tạp.

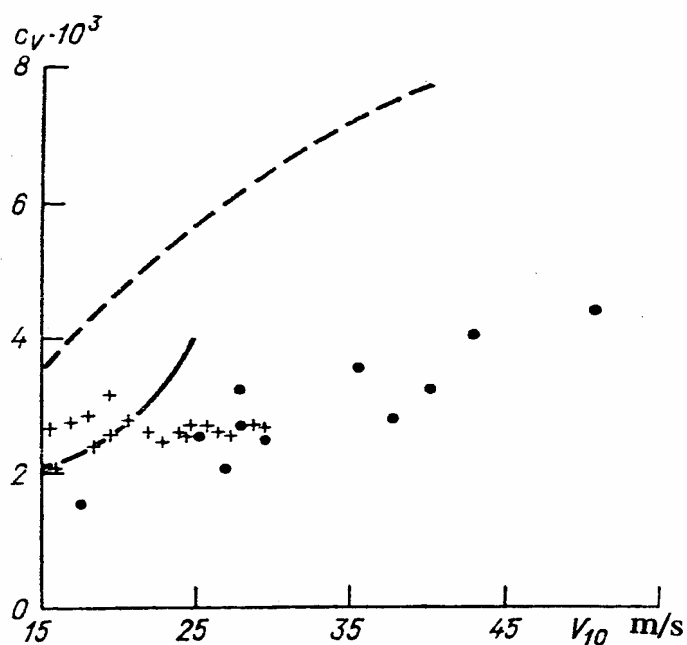
Trong điều kiện gió lớn, đặc biệt khi gió bão với vận tốc lớn hơn 15 m/s, các quá trình trao đổi động lượng và nhiệt- chất bị biến đổi mạnh. Nguyên nhân của sự biến đổi này chủ yếu do sự xuất hiện của các hạt nước từ sóng và mặt biển bắn vào khí quyển. Những tác động trực tiếp của sự hiện diện các hạt nước lên các dòng động lượng có thể thông qua các cơ chế vật lý sau:

(i). Khối lượng hạt nước trong khí quyển cũng chuyển động cùng một vận tốc của dòng khí, chúng sẽ truyền động lượng cho nước biển khi rơi xuống lớp mặt. Đồng thời sự hiện diện của các bọt khí trong lớp nước trên cùng sẽ góp phần tăng cường dòng động lượng cho biển.

(ii). trong điều kiện sóng lớn, độ ẩm khí quyển lớp sát mặt tăng làm thay đổi điều kiện ổn định mật độ của dòng khí và gián tiếp tác động lên dòng động lượng.

Trị số thực của hệ số ma sát  $C_u$  trong điều kiện gió bão rất khó xác định bằng số liệu quan trắc vận tốc, tuy nhiên các kết quả nghiên cứu khác nhau đều cho thấy giá trị lớn của nó. Trên hình 2.1 đưa ra các số liệu biến đổi hệ số này với các điều kiện gió khác nhau trong đó có gió bão. Trong các tính toán thông thường có thể lấy  $C_{ub}$  vào khoảng từ  $2 \cdot 10^{-3}$  đến  $4 \cdot 10^{-3}$ .

Đối với các thông lượng nhiệt và ẩm (hơi nước), ảnh hưởng của sóng và gió lớn được thể hiện thông qua quá trình bốc hơi từ các hạt nước trong lớp sát mặt vào không khí. Các kết quả nghiên cứu cho thấy rằng trên bề mặt hạt nước, sức trương của hơi nước phụ thuộc vào bán kính và độ mặn của bản thân hạt nước, và chỉ các hạt có đường kính lớn mới gây tác động mạnh lên sự bốc hơi. Thông thường khi vận tốc gió trong khoảng từ 20 m/s đến 25 m/s lượng nhiệt do bốc hơi từ các hạt nước cũng có đại lượng cỡ thông lượng nhiệt tổng cộng (nhiệt rối và nhiệt hoá hơi) trao đổi qua mặt phân cách biển - khí quyển, hay nói cách khác, thông lượng nhiệt tăng lên hai lần.



Hình 2.1. Hệ số trở kháng mặt biển trong gió bão theo nhiều tác giả khác nhau

Khi gió lớn với vận tốc trên 25 m/s thì mức độ gia tăng còn lớn hơn có thể đạt tới giá trị từ 5 đến 6 lần. Đối với thông lượng ẩm, hệ số  $C_q$  cũng có sự gia tăng tương tự như  $C_0$ .

Vấn đề tương tự cũng xảy ra đối với lớp biên đáy khi sự biến đổi của nồng độ các chất lơ lửng không cho phép ta xác định chính xác vị trí mặt phân cách giữa nước và đáy và từ đó xác định các quá trình cần đưa vào trong mô hình. Hiện tượng tương tự cũng xảy ra tại lớp biên giữa biển và đất liền, do sự biến động và tương tác giữa cát và nước biển cũng như sự biến đổi của mực nước biển dưới tác động của sóng và thủy triều. Bên cạnh các khó khăn nêu trên chúng ta còn phải quan tâm giải quyết những hiện tượng đặc biệt song cũng đã trở thành phổ biến đó là các màng mỏng các chất tập trung trên mặt biển (váng dầu, váng mỡ, ...), chúng không những biến đổi vị trí của mặt phân cách không khí – nước mà còn ảnh hưởng trực tiếp đến các quá trình trao đổi năng lượng và vật chất giữa biển và khí quyển. Chính sự tồn tại của các màng vật chất này làm cho các quá trình trao đổi qua mặt mặt phân cách biển – khí quyển như hệ số ma sát, truyền nhiệt, v.v... cũng bị biến đổi theo.

Vai trò của sóng đối với các quá trình trao đổi trên biên rất phức tạp không những đối với mặt biển mà đối với cả lớp biên đáy. Điều quan trọng ở đây là làm sao có thể xác định được sự hiện diện của các lớp biên cùng các quá trình liên quan như lắng đọng, tách khỏi đáy và truyền tải theo dòng. Như vậy mức độ hiểu biết và tham số hoá các điều kiện biên là yếu tố quyết định cho sự thành công của mô hình.

Hiện nay trong các mô hình thủy động lực, các nhiễu động rối vi mô đã được tham số hoá theo nhiều phương pháp khác nhau và đã được áp dụng, tuy nhiên các điều kiện biên đã thiết lập được có lẽ chỉ mới đáp ứng tốt cho các quá trình quy mô lớn và vừa, còn đối với các quá trình quy mô nhỏ cần phải hoàn thiện thêm. Trên mặt biển, nhìn chung các thông lượng được tính toán theo số liệu gió, nhiệt độ và độ ẩm đo được trên độ cao 10 mét, cho rằng các thông lượng phụ thuộc vào các đặc trưng tương ứng. Theo cách biểu diễn của Krauss thì

- đối với dòng động lượng (chia cho mật độ nước biển)

$$\tau_s = C_u V \|V\| = C^* V \|V\| \quad (2.15)$$

- đối với thông lượng nhiệt (chia cho nhiệt dung và mật độ nước biển)

$$h_s = C_\theta (\theta_0 - \theta) \|V\| = C^* (\theta_0 - \theta) \|V\| \quad (2.16)$$

- đối với thông lượng ẩm

$$e_s = C_q (q_0 - q) \|V\| = C^* (q_0 - q) \|V\| \quad (2.17)$$

Trong đó hệ số ma sát  $C^*$  được xem như một tham số kiểm tra,  $\theta_0$  và  $q_0$  là giá trị nhiệt độ và độ ẩm trên mặt biển. Các đại lượng này có thể xác định

được thông qua tham số hoá lớp biên khí quyển.

$$C_u = \frac{\tau}{\rho v^2}, C_\theta = \frac{H}{\rho C_p v (\theta - \theta_0)}, Cq = \frac{E}{\rho v (q - q_0)},$$

Theo các tác giả khác nhau thì các thông lượng trên xác định theo số liệu khí tượng lớp biên có độ chính xác không cao, Krauss cho rằng sai số có thể vào khoảng 30% nhưng theo Hidy thì sai số có thể đạt tới 50%. Trên các biên cứng nhìn chung có thể cho vận tốc bị triệt tiêu, không chú ý tới sự biến dạng của đáy. Tuy nhiên trong các mô hình, đặc biệt mô hình hai chiều thì ứng suất tính theo vận tốc trung bình cho cả tầng nhiều khi cần có sự hiệu chỉnh. Theo Nihoul thì có thể biểu diễn qua dạng

$$\tau_b = D \left\| \vec{u} \right\| - m \tau_s \quad (2.18)$$

trong đó số hạng thứ hai cho phép hiệu chỉnh giá trị ứng suất theo ứng suất trên mặt  $\tau_s$ .

Hệ số ma sát đáy D có thể tính theo qui luật phân bố logarit trong lớp biên:

$$D = \left\{ \kappa / (\ln(z_b/z_0)) \right\}^2,$$

ở đây  $z_b$  là khoảng cách tính từ đáy nơi có vận tốc  $u = \vec{v}_b$ ,  $z_0$  tham số nhám,  $z_0 \sim 10^{-3} - 10^{-2}$  cm. Việc tính toán hệ số ma sát đáy sẽ được đề cập chi tiết hơn trong phần mô hình số đặc biệt khi vận tốc  $\vec{v}_b$  được xác định tại các khoảng cách khác nhau có thể nằm trong hoặc ngoài lớp biên logarit. Khi có hiệu ứng biến đổi hướng vận tốc trong lớp biên ta có thể đưa thêm hệ số hiệu chỉnh R vào công thức (2.17) và chuyển về trong dạng sau:

$$\bar{\tau}_b = R \cdot C_D \cdot \left\| \vec{v}_b \right\| \vec{v}_b$$

Tại những nơi mà lớp biên đáy không xác định thì có thể lấy gần đúng  $C_D \sim 0,026$ .

## 2.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI VỚI VẬN TỐC TRUNG BÌNH THEO ĐỘ SÂU

### 2.3.1. Những khái niệm chung

Chuyển động trung bình theo độ sâu được thể hiện qua vận tốc  $\bar{u}$  hay là tốc độ dòng tổng cộng U (dòng toàn phần) được xác định theo công thức sau:

$$U = U_1 \vec{e}_1 + U_2 \vec{e}_2 = H\vec{u} = \int_{-h}^{\zeta} u dx_3 \quad (2.19)$$

trong đó H là độ sâu tổng cộng của cột nước, có nghĩa là:

$$H = h + \zeta \quad (2.20)$$

Nếu các đại lượng lệch khỏi giá trị trung bình theo độ sâu được ký hiệu bằng  $\hat{u}$  trên đầu, ta có

$$u = \bar{u} + \hat{u} \quad (2.21)$$

với

$$\int_{-h}^{\zeta} \hat{u} dx_3 = 0 \quad (2.22)$$

Tích phân theo  $x_3$  của các đạo hàm riêng tuân thủ các công thức sau về quy tắc đạo hàm theo tham số

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \eta} dx_3 = \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-h}^{\zeta} f dx_3 - f(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - f(-h) \frac{\partial h}{\partial \eta} \quad (2.23)$$

trong đó  $\eta$  được thay cho các biến  $t$ ,  $x_1$  và  $x_2$ , còn  $f$  là một hàm bất kỳ của các biến  $t$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , và  $x_3$ . Giá trị của  $f$  tại  $x_3 = \zeta$  và  $x_3 = -h$  tương ứng đối với mặt và đáy.

Tích phân phương trình (2.12) theo độ sâu, ta có

$$\int_{-h}^{\zeta} \left( \nabla \cdot \vec{u} \right) dx_3 + v_3(\zeta) - v_3(-h) = 0 \quad (2.24)$$

Tiến hành biến đổi tích phân trong công thức (2.24) theo điều kiện (2.23) và loại trừ  $v_3(\zeta)$  và  $v_3(-h)$  dựa trên cơ sở các phương trình (2.13), (2.14), ta có thể viết (2.24) về dạng sau

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.25)$$

trong đó H xác định theo phương trình (2.20) và

$$\frac{\partial H}{\partial t} \sim \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (2.26)$$

(bỏ qua sự biến đổi chậm của địa hình đáy).

Phương trình (2.25) có thể viết cho vận tốc trung bình  $\bar{\mathbf{u}}$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla H + H \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.27)$$

Trong đó  $\nabla$  chỉ còn lại hai số hạng

$$\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

và các hàm  $H$ ,  $U$  và  $\bar{\mathbf{u}}$  không còn phụ thuộc vào  $x_3$ .

Tuy rằng  $\text{div}$  của vận tốc  $\mathbf{v}$  theo phương trình cơ bản luôn bằng 0, nhưng  $\text{div}$  của vận tốc trung bình  $\bar{\mathbf{u}}$  lại không triệt tiêu.

Tuy nhiên nếu mực nước  $\zeta$  tại mọi điểm đều nhỏ hơn  $h$  và nếu  $h$  biến đổi theo thời gian chậm hơn so với vận tốc trung bình  $\bar{\mathbf{u}}$  và mực nước  $\zeta$  thì phương trình (27) lại có dạng

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.28)$$

Nếu ta chọn  $L$  là kích thước đặc trưng cho biến động của  $h$  và  $l$  là độ dài đặc trưng cho biến động của  $\zeta$  và  $\bar{\mathbf{u}}$ , thì bậc đại lượng của hai số hạng đầu phương trình (2.27) sẽ là

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &\sim \frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim 0 \left( \frac{\zeta}{l} \right) \\ \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla H &\sim \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \zeta + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla h \sim 0 \left( \frac{\zeta}{l} \right) + 0 \left( \frac{h}{L} \right) \end{aligned}$$

trong khi số hạng thứ 3 lại là tổng của hai thành phần, bậc đại lượng của mỗi phần sẽ là

$$H \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \sim 0 \left( \frac{h}{l} \right)$$

Nếu như chúng ta có trường hợp  $l \ll L$  và  $\zeta \ll h$  thì vai trò của hai số hạng đầu sẽ là không đáng kể so với số hạng thứ 3 vì vậy ta có được phương trình (2.28). Các đại lượng  $\vec{e}_1$  và  $\vec{e}_2$  là các vectơ đơn vị theo hướng x và y.

### 2.3.2. Hiệu ứng của sự phân lớp

Việc tích phân phương trình liên tục (2.12) có thể tiến hành một cách đơn giản vì độ lệch vận tốc xuất hiện trong các số hạng chỉ ở dạng phụ thuộc tuyến tính và chúng sẽ biến mất khi ta lấy tích phân dựa theo tính chất đã dẫn trong công thức (2.22). Tuy nhiên điều này hoàn toàn không đơn giản đối với phương trình chuyển động, vì

$$H^{-1} \int_{-h}^{\zeta} u_i u_j dx_3 = \overline{u_i u_j} + H^{-1} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i \hat{u}_j dx_3 \quad (2.29)$$

Như vậy trung bình của tích sẽ bao gồm hai thành phần. Thành phần thứ nhất là tích các đại lượng trung bình, thành phần thứ hai là trung bình của tích các giá trị độ lệch. Như vậy tương tự như trong trường hợp lấy trung bình theo thời gian, trung bình theo độ sâu cũng làm xuất hiện thành phần tương tác phi tuyến liên quan tới tích các độ lệch.

Các thành phần tương tác phi tuyến này về nguyên lý có thể được thể hiện thông qua trường trung bình. Thông thường có thể chấp nhận quan điểm cho rằng các quá trình khuếch tán do các nhiễu động gây nên và ảnh hưởng của nó lên dòng trung bình cũng có những nét tương tự như khuếch tán phân tử, tuy nhiên vai trò tương đối của chúng hoàn toàn khác nhau. Trong trường hợp đó số hạng trung bình tích các nhiễu động trong công thức (2.29) hoàn toàn có vai trò tương tự; sự bất đồng nhất của trường vận tốc đóng vai trò khuếch tán động lượng cũng như các tính chất khác của môi trường như nhiệt độ, dinh dưỡng, chất ô nhiễm, v.v...

Hiệu ứng này được gọi là hiệu ứng (do) phân lớp (shear effect) vì các nhiễu động sẽ bị triệt tiêu nếu như trường vận tốc đồng nhất theo phương thẳng đứng, và số hạng thứ hai trong (29) sẽ chỉ có nghĩa nếu như tồn tại gradien thẳng đứng hay là có sự phân lớp của vận tốc.

Hiệu ứng phân lớp đóng một vai trò hết sức quan trọng trong quá trình khuếch tán các hợp phần bền vững vì vậy cần phải thiết lập các mối quan hệ giữa chúng và các đặc trưng trung bình theo độ sâu.

Trong các mô hình thủy động lực thông thường người ta chọn các phép gần đúng khá thô, bằng cách đưa ảnh hưởng này vào các thành phần khuếch tán ngang, nhằm đưa một phần nhỏ ảnh hưởng ba chiều vào mô hình, và cho thêm một phần vào trong các hệ số khuếch tán.

Kết quả của dạng mô hình này phụ thuộc vào quy mô không gian và tính

phức tạp của địa hình miền tính. Điều này thông thường bị lẫn với sai số của việc triển khai tính toán trên các kích thước lưới khác nhau.

Cần phải nói rằng việc đưa hiệu ứng phân lớp vào có thể làm thay đổi đáng kể giá trị của hệ số khuếch tán.

Ví dụ, nếu đưa hiệu ứng phân lớp trong dạng

$$H^{-1} \int \hat{u}_i \hat{u}_j dx_3 = -a \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.30)$$

từ việc so sánh bậc đại lượng hai vế ta có thể thu được:  $a \sim \frac{l \hat{u}^2}{u}$  trong đó bên cạnh các đặc trưng vận tốc nhiễu động và vận tốc trung bình còn có  $l$  là độ dài đặc trưng cho biến động ngang.

Tỷ lệ giữa bình phương độ lệch vận tốc và vận tốc trung bình phụ thuộc vào phân bố thẳng đứng của vận tốc  $u$ . Đại lượng này sẽ rất nhỏ khi có sự đồng nhất theo phương thẳng đứng. Nhưng điều này hầu như không thể có được vì vận tốc bao giờ cũng đạt giá trị cực đại trên mặt và bị triệt tiêu tại đáy. Như vậy tỷ lệ này phụ thuộc chặt chẽ vào giá trị vận tốc trung bình.

Trong trường hợp nêu trên hệ số  $a$  có thể có giá trị lớn hơn hệ số nhớt rồi từ một đến hai bậc. Hệ số nhớt rồi có thể tính theo công thức sau:  $\tilde{\nu} \sim l \nu_l$  trong đó vận tốc đặc trưng:  $\nu_l \sim \mathcal{E}^{1/3} l^{1/3}$  gắn liền với các xoáy có quy mô  $l$  và thông thường vận tốc này có giá trị nhỏ hơn nhiều so với  $\bar{u}$ .

### 2.3.3. Các thông lượng trao đổi trên mặt biển

Chúng ta có thể viết tích phân số hạng cuối của phương trình (2.11) trong dạng sau đây:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) dx_3 = \left[ \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_{x_3=\zeta} - \left[ \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_{x_3=-h} = \tau_s - \tau_b \quad (2.31)$$

Nếu kể đến các phương trình (2.15) và (2.18) thì phương trình (2.31) có thể biến đổi về dạng



$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) dx_3 = CV \|V\| - Du \|\bar{u}\| \quad (2.32)$$

trong đó  $C = C^*(1+m)$  với các hệ số  $C^*$  và  $m$  đã được lý giải trong phần 2.2.

#### 2.3.4. Phương trình trung bình theo độ sâu

Tích phân phương trình (2.11) theo độ sâu và kết hợp các phương trình (2.23), (2.25), (2.32) chúng ta thu được phương trình sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (H^{-1} U U) + f e_3 \wedge U = \\ = -H \nabla \cdot \left( \frac{p_a}{\rho} + g \zeta \right) + a \nabla^2 U - \frac{D}{H^2} U \|U\| + CV \|V\| \end{aligned} \quad (2.33)$$

và đối với vận tốc trung bình

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + f e_3 \wedge \bar{u} = \\ = -\nabla \cdot \left( \frac{p_a}{\rho} + g \zeta \right) + a \nabla^2 \bar{u} - \frac{D}{H} \bar{u} \|\bar{u}\| + \frac{C}{H} V \|V\| \end{aligned} \quad (2.34)$$

Trong các phương trình trên bên cạnh các hệ số đã dẫn,  $a$  là hệ số rối ngang và  $V$  là vận tốc gió trên mặt biển.

### 2.4. HỆ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI VỚI QUÁ TRÌNH QUY MÔ VỪA

Các phương trình (2.25) và (2.33) mô tả biến đổi của tốc độ dòng tổng cộng cho cả hai trường hợp quy mô lớn và quy mô vừa. Tuy nhiên tại các vùng biển nông thông thường các quá trình quy mô vừa lại lớn hơn quá trình quy mô lớn tới nhiều lần. Trong nhiều trường hợp, ví dụ như đối với Bắc Hải, khi cho điều kiện biên theo biến trình quy mô vừa thì ngay cả dòng chảy thường kỳ (dòng dư) cũng trở nên không đáng kể, nhiều khi không vượt quá sai số tính toán.

Sử dụng các phương trình (2.25) và (2.33) với điều kiện biên quy mô vừa sẽ cho phép mô tả các chuyển động quy mô vừa trong biển, có thể bỏ qua ảnh hưởng của các quá trình vĩ mô.

Các phương trình trên được sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu, tính toán triều và nước dâng, vấn đề quan trọng ở đây là việc cung cấp các điều kiện biên

hở (biên thông với các thuỷ vực khác như biển, đại dương). Thông thường việc có được đồng bộ các số liệu trên biên hở được xem như rất hiếm vì các quan trắc chỉ tiến hành trên các trạm ven bờ và hải đảo.

Trong nhiều trường hợp chúng ta cũng rất khó có được điều kiện biên trên mặt phân cách biển - khí. Việc thiếu số liệu quan trắc trường khí tượng không cho phép thiết lập các điều kiện biên tương đối chính xác, đồng thời các hệ số (C, D, v.v..) cũng chưa nhận được sự thống nhất qua các kết quả nghiên cứu.

Đối với mô hình nước dâng, các điều kiện biên hở có thể lấy khác nhau phụ thuộc vào nguồn gốc trong hay ngoài vùng tính toán. Nếu nguồn sóng nằm trong vùng thì tại biên hở với biển khơi có thể cho biến động mực nước tại biên bằng 0. Sai số trong trường hợp này có thể do hiệu ứng phản xạ sóng qua biên hở. Khi sóng đi từ ngoài vào, tương tự như đối với triều, thì việc cho diễn biến mực nước trên biên hở là không thể thiếu được. Như đã trình bày ở trên do không có đủ số liệu quan trắc, sai số gặp phải ở đây nhiều khi phụ thuộc vào điều kiện biên hở.

Tuy nhiên, hiện nay có thể nói rằng các mô hình triều và nước dâng đã đạt được nhiều kết quả phù hợp với số liệu khảo sát hơn cả.

#### 2.4.1. Các đặc điểm hệ phương trình hai chiều triều và nước dâng

Để phân tích đầy đủ các khía cạnh khác nhau của mô hình hai chiều triều và nước dâng, chúng ta viết hệ phương trình cơ bản trong dạng đầy đủ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{U}) + f \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{U} = \\ = -H \nabla \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + a \nabla^2 \mathbf{U} - \boldsymbol{\tau}_b + \boldsymbol{\tau}_s \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.36)$$

trong đó các thành phần ứng suất được tính trên một đơn vị khối lượng nước biển. Chúng ta lần lượt xem xét các đặc điểm cụ thể của các phương trình, điều kiện biên và kỹ thuật số triển khai mô hình.

Bậc đại lượng của các số hạng của phương trình

(i). Như đã trình bày trên đây thành phần bình lưu thông thường được xem không đáng kể. Tuy nhiên theo đánh giá của Brettschneider thì đối với vận

tốc lớn, thành phần bình lưu có thể trở nên đáng kể vượt cả thành phần do gia tốc Coriolis. Theo Brettschneider (1967) có thể thấy rằng khi vận tốc vào khoảng 1 m/s thì thành phần này không thể bỏ qua được (xem bảng sau).

Vận tốc U (m/s)	0,2	1
Kích thước lưới (m)	$5 \cdot 10^4$	$10^4$
Tỷ lệ bình lưu/Coriolis	$5 \cdot 10^{-2}$	1.3

Trong thời gian sau này một số tác giả đã giữ thành phần bình lưu trong mô hình triều và nước dâng.

(ii). Thành phần Coriolis  $f \times U$  luôn được đánh giá là quan trọng nhất, tuy nhiên theo Heaps (1975) thì nó tác động mạnh lên biến đổi mực nước hơn lên dòng nước vận chuyển. Khi triển khai mô hình người ta không chỉ chú ý tới thành phần lực Coriolis mà sự biến đổi của  $f$  theo vĩ tuyến cũng cần được tính đến. Điều này trong các mô hình hiện đại đã được đưa vào trực tiếp khi sử dụng hệ tọa độ cầu.

(iii). Lực tạo triều  $\xi$  thông thường được xem bằng 0, đặc biệt đối với các vùng biển khi sóng bên ngoài xâm nhập vào có tính quyết định.

(iv). Thành phần khuếch tán  $a \nabla^2 U$  cũng được xem là không đáng kể trong các mô hình toán học. Tuy nhiên nhiều tác giả vẫn giữ lại phần này với hệ số  $a$  được lấy một cách khá cao nhằm đảm bảo độ ổn định của mô hình số (trong trường hợp giữ phần bình lưu thì yêu cầu này không còn có ý nghĩa nữa).

(v). Ma sát đáy là một yếu tố không kém phần quan trọng, hiện nay các tác giả đều đi đến thống nhất sử dụng công thức dạng sau đây

$$\tau_b = \Gamma U \|U\|^{-m} \tau_s$$

trong đó  $\Gamma$  là hàm của  $H$  và  $m$  là một hằng số cần xác định.

Trong trường hợp cho rằng ứng suất đáy tỷ lệ với bình phương của vận tốc trung bình theo độ sâu thì  $\Gamma$  có dạng sau

$$\Gamma = D H^{-2} \quad (2.38)$$

trong đó  $D$  là một hằng số, theo Hansen thì  $D = 3 \cdot 10^{-3}$ , còn theo Banks  $D = 2,5 \cdot 10^{-3}$ .

Tồn tại một giả thiết phức tạp khi cho rằng ứng suất đáy phụ thuộc vào

binh phương vận tốc quy chiếu tại một độ cao tương đối nào đó kể từ đáy. Bằng cách sử dụng các quy luật phân bố vận tốc theo độ sâu rút ra từ thực nghiệm có thể rút ra biểu thức cho rằng vận tốc quy chiếu là một hàm của U. Kết quả cuối cùng đối với  $\Gamma$  cũng có dạng như (2.37), nhưng D không phải là một hằng số. Theo Leenderste thì

$$D = \frac{\alpha}{[19,4 \ln(0,9H)]^2} \quad (2.39)$$

còn theo Ronday (1976)

$$D = \frac{\alpha}{\left[1,23 + \ln \frac{0,14H}{z_0}\right]^2} \quad (2.40)$$

với  $z_0$  là độ nhám và  $\alpha$  là hằng số. Theo công thức của Ronday thì  $\alpha$  có giá trị như sau

$$\alpha \sim 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ đối với } H \sim 10 \text{ m}$$

$$\alpha \sim 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ đối với } H \sim 80 \text{ m}$$

Công thức của Hansen và Banks có khả năng cho giá trị gần đúng đối với vùng nước nông, nhưng kém chính xác đối với biển sâu hơn.

Ứng suất gió trên mặt biển là hàm của bình phương vận tốc gió trên một độ cao quy chuẩn, thông thường người ta chọn độ cao 2 mét hoặc 10 mét.

$$\tau_s = C^* V \|V\| \quad (2.41)$$

trong đó  $C^*$  là hệ số ma sát chia cho mật độ.

Theo Roll thì giá trị của  $C^*$  biến đổi trong khoảng từ  $1 \times 10^{-6}$  đến  $3 \times 10^{-6}$ . Nhiều nhà nghiên cứu cho rằng  $C^*$  là một hàm của vận tốc gió, ví dụ theo Sheppard thì

$$C^* = (0,98 + 0,14V) 10^{-6} \quad (2.42)$$

Vận tốc gió V sử dụng trong các công thức (2.41) và (2.42) thường lấy từ trường gió địa chuyển hoặc gió theo quan trắc trên một độ cao xác định. Chấp nhận điều kiện hệ số  $C^*$  không đổi, Dun- Christensen đưa ra công thức tính V từ gió địa chuyển như sau:

$$V = a\sqrt{f_1 V_g + f_2} + b \quad (2.43)$$

trong đó a và b là các hằng số thực nghiệm và  $f_1, f_2$  là các hàm của hiệu nhiệt độ giữa biển và khí quyển.

#### 2.4.2. Những hướng phát triển của mô hình triều và nước dâng.

Sau khi xem xét các khía cạnh của mô hình triều và nước dâng, chúng ta thấy rằng đối với mô hình các quá trình quy mô vừa, vai trò của cấu trúc thẳng đứng cần phải được xem xét và đánh giá cụ thể bằng cách so sánh chúng với mô hình 3 chiều đầy đủ. Tuy nhiên việc giải mô hình 3 chiều sẽ không thể được, nếu như không tiến hành một số phép xấp xỉ hoặc đơn giản hoá. Việc đơn giản hoá bằng các tham số nhiều khi không đưa lại kết quả mong muốn, so với sự phức tạp của phương pháp giải. Trên quan điểm đó, trong thực tế người ta vẫn tìm cách giảm mô hình xuống 2D và 1D.

Tuy nhiên hai loại mô hình này lại có rất nhiều hạn chế. Mô hình 1D của Ekman hoàn toàn không thể áp dụng cho các vùng nơi mà các thành phần bình lưu không thể bỏ qua được như tại các vùng rốn triều và ven bờ.

Mô hình 2D trung bình theo độ sâu, gần như bỏ qua ảnh hưởng của phân tầng mật độ, không cho ta thông tin về phân bố theo độ sâu của vận tốc ngang, điều mà rất nhiều bài toán thực tiễn như vận chuyển trầm tích, công trình bờ, v.v... yêu cầu.

Tuy nhiên khi giải từng mô hình chúng ta đã phải nghiên cứu các quá trình chi tiết nhằm thiết lập các điều kiện biên, vai trò của các yếu tố khí tượng, của đáy, vì vậy việc triển khai song song hai mô hình có thể đưa đến một số kết quả tốt khi có sự phân tích và kết nối phù hợp.

Các phương trình cơ bản của mô hình 3 chiều thuỷ động lực quy mô vừa.

Trên cơ sở sử dụng phép xấp xỉ Boussinesq ta có thể viết các phương trình cơ bản về dạng sau đây

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + f \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\mathbf{u}v_3) = \\ = -\nabla q + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.45)$$

và Trong đó  $e_3$  theo hướng thẳng đứng với gốc đặt tại mực biển quy chiếu

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_3} = -b \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} b) + \frac{\partial}{\partial x_3} (v_3 b) = \\ = Q + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\lambda} \frac{\partial b}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = v_3 \text{ khi } x_3 = \zeta \quad (2.48)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h = -v_3 \right) \text{ khi } x_3 = -h \quad (2.49)$$

là vận tốc ngang,  $v_3$  là thành phần thẳng đứng của vận tốc dòng chảy 3D;  
đồng thời toán tử

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

trở thành

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

và hàm  $q$  được viết trong dạng

$$q = \frac{p}{\rho_0} + g x_3$$

với  $p$  là áp suất ,

$\rho_0$  là mật độ quy chiếu không đổi và  $g$  là gia tốc trọng trường;  $b$  là độ  
nổi:  $b = -g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$

$Q_b$  là hàm nguồn sản sinh độ nổi,

$\zeta$  là độ cao mặt biển,

$h$  là độ sâu,

$h+\zeta=H$  là độ cao toàn cột nước;

$\tilde{v}, \tilde{\lambda}$  là các hệ số nhớt rối và khuếch tán rối đối với độ nổi theo phương thẳng đứng.

Mô hình tích phân theo độ sâu và mô hình nhiều lớp

Do những khó khăn gặp phải đối với bài toán 3D, trong những trường hợp biển nông xáo trộn tốt thì có thể không chú ý tới biến đổi theo phương thẳng đứng. Có thể tích phân các phương trình theo độ sâu cho toàn biển và chỉ chú trọng tính toán mực nước và vận tốc trung bình trong toàn lớp nước. Tuy tích phân cho toàn lớp nhưng cũng cần đưa thành phần ma sát đáy vào phương trình, thông thường số hạng này có dạng

$$\tau_b = \left[ \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_{x_3=-h} \quad (2.50)$$

chúng ta cũng có thể sử dụng tham số hoá để thể hiện số hạng này thông qua vận tốc trung bình  $\bar{u}$  tuy rằng theo đúng cơ chế vật lý thì cần tìm mối liên quan với vận tốc sát đáy. Mô hình hai chiều tích phân theo độ sâu có thể cho ta một số khái niệm về biến đổi theo độ sâu, nếu như tiến hành tính toán ho nhiều tầng. Mô hình nhiều lớp cho ta vận tốc trung bình theo các lớp và từ đó cho ta phân bố tương đối của vận tốc theo độ sâu. Tuy nhiên theo hướng này bên cạnh ứng suất trên đáy cần xác định ứng suất giữa các lớp thông qua các hệ số ma sát tại các lớp biên.

Trong hướng giải quyết này chúng ta không thể tăng quá mức số lớp (tương tự như số điểm nút lưới trong mô hình 3D) nên phân bố thẳng đứng nhiều khi trở nên rất thô. Do số lớp hạn chế vì vậy điều nên làm là dựa theo phân bố thẳng đứng của cấu trúc mật độ (lực nổi), song do sự biến động theo thời gian của cấu trúc này nên việc này gần như rất khó thực hiện.

Mô hình dựa trên hiệu ứng phân lớp

Lấy đạo hàm phương trình (2.44) theo  $x_3$  và bỏ qua các thành phần phi tuyến, ta có

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + f \mathbf{e}_3 \wedge \omega = \nabla b + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \tilde{\nu} \omega \right) \quad (2.51)$$

trong đó

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial x_3} \quad \text{được gọi là véc tơ phân lớp.}$$

Hai phương trình (2.51) và (2.47) tạo nên hệ khép kín đối với  $\omega$  và  $b$ .

Đối với những khu vực nằm xa bờ và cửa sông, có thể cho rằng gradient ngang của độ nổi  $b$  bằng 0, ta có thể giải riêng phương trình (2.51) cho  $\omega$  và phương trình (2.47) cho  $b$ , hệ số khuếch tán rồi được xem là hàm của  $\omega$ .

Trường vận tốc  $u$  có thể thu được từ  $\omega$  kèm theo các hằng số tích phân là hàm của  $x_1, x_2$  và  $t$  và cũng là hàm của hoàn lưu chung trên vùng nghiên cứu.

Kết quả hoàn toàn tương tự thu được khi cho rằng vận tốc địa chuyển  $u_g$  không phụ thuộc vào độ sâu và là nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + f \mathbf{e}_3 \wedge u_g = -\nabla q \quad \left( = \nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + g\zeta \right) \right) \quad (2.53)$$

Số hạng  $\nabla q$  có thể loại trừ bằng cách tính hiệu  $u - u_g$ . Có thể nói vận tốc địa chuyển đóng vai trò như hằng số tích phân vừa nói ở trên.

Hướng nghiên cứu này đã được nhiều nhà khoa học như Niiler, Phillips và Kitaigorodskii sử dụng trong mô hình nê nhiệt (thermocline). Điều khó khăn nhất ở đây là việc xác định các điều kiện biên, trong đó có ứng suất đáy mà chúng ta đã có dịp đề cập ở phần trên.

Các mô hình giải tích

Bằng cách chấp nhận điều kiện tựa đồng nhất ngang và bỏ qua các thành phần bình lưu phi tuyến cùng với các giả thiết khác nhau liên quan tới hệ số nhớt rồi ta có thể thu được nghiệm giải tích của phương trình (2.44) phụ thuộc vào lực  $q$ . Phương trình (2.44) với các điều kiện nêu trên sẽ có dạng đơn giản:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f \mathbf{e}_3 \wedge u = -\nabla q + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \quad (2.54)$$

Phương trình này thông thường được gọi là phương trình Ekman.



Những lời giải của Welander, Jelesnianski, v.v.. đều cho thấy những giả thiết đưa ra (hệ số nhớt rồi không đổi, ứng suất đáy phụ thuộc vào vận tốc trung bình) nhiều khi xa rời thực tế.

Các mô hình đa mode (multi-mode)

Các mô hình đa mode dựa trên nguyên lý phân tách vận tốc hay ứng suất nhớt ra nhiều thành phần, có thể trên cơ sở các giá trị riêng, và lời giải cuối cùng là tổ hợp của các lời giải riêng.

Diễn hình của hướng nghiên cứu này là việc sử dụng đồng thời các mô hình 1D và 2D để hiệu chỉnh và lựa chọn điều kiện biên và đặc biệt là ứng suất đáy. Bằng cách đưa thêm các thành phần phi tuyến vào trong quá trình lặp, hướng nghiên cứu này đã phát triển trở thành một hướng mới đó là mô hình 3D (2D+1D) sẽ trình bày trong phần tiếp theo.

Mô hình triều và nước dâng ba chiều (2D+1D) đối với biển nông xáo trộn mạnh.

Trong trường hợp này, ảnh hưởng của độ nổi không cần kể đến. Các phương trình cơ bản ở đây sẽ là (2.11) và (2.12).

Bằng cách thay biến từ  $(x_1, x_2, x_3, t)$  sang  $(x_1, x_2, \xi, t)$  với  $\xi = \frac{x_3 + h}{H}$  ta có thể viết về trái phương trình (2.11) trong dạng

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A + B + S \quad (2.56)$$

trong đó

$$A = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.57)$$

$$B = H^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} (1 - \xi) \left( \mathbf{u} \cdot \nabla h + \mathbf{v}_3 \right) \quad (2.58)$$

$$S = H^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \xi \left[ \left( \mathbf{u}_s - \mathbf{u} \right) \cdot \nabla \xi - \left( \mathbf{v}_{3_s} - \mathbf{v}_3 \right) \right] \quad (2.59)$$

và trên mặt biên thoả mãn điều kiện

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \zeta = v_{3_s} \quad \leftarrow \quad \mathbf{x}_3 = \zeta \quad (2.60)$$

Xem xét giá trị các thành phần A, B, S theo các phân bố vận tốc khác nhau cho thấy rằng B bị loại bỏ trên mặt và rất lớn tại đáy, còn S tồn tại trên toàn cột nước nhưng giá trị thường nhỏ.

So sánh giữa A và S cho thấy khi độ sâu rất nhỏ thì  $S \ll A$ . Tuy nhiên đối với sự lan truyền sóng dài thì thành phần A cũng không đáng kể so với đạo hàm vận tốc theo thời gian. Thành phần B tại đáy do biến thiên dòng chảy sát đáy liên quan tới địa hình, tuy nhiên đối với những vùng tương đối xa bờ, hoặc lưới tính khá thô, thì B không vượt quá 10% so với đạo hàm vận tốc.

Cho rằng hệ số nhớt rối là một tích của hai thành phần, theo  $x_1, x_2, t$  và theo độ sâu

$$\tilde{v} H^{-2} = \sigma(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \lambda(\xi) \quad (2.61)$$

Phương trình (2.11) bây giờ có thể viết

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - f \mathbf{u}_2 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} \right) \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + f \mathbf{u}_1 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right) \quad (2.63)$$

Hệ phương trình này có thể áp dụng cho những vùng biển nơi các thành phần bình lưu phi tuyến không đáng kể. Tuy nhiên đối với những khu vực đặc biệt trên các kết quả thu được có thể sử dụng làm điều kiện biên cho các mô hình có tính đến tính chất phi tuyến này. Kết hợp mô hình sử dụng hệ phương trình (2.62), (2.63) và mô hình 2D tích phân theo độ sâu, ta có được một mô hình 3D mà tại mỗi điểm nút bên cạnh mực nước, vận tốc trung bình theo phương thẳng đứng còn có phân bố vận tốc theo độ sâu.

## **Chương 3**

### **HOÀN LƯU BIỂN NÔNG VEN BỜ**

#### **3.1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ HOÀN LƯU DƯ**

Đối với vùng biển nông, các quá trình quy mô vừa như triều và nước dâng có thể có vận tốc đạt tới khoảng xấp xỉ 1 m/s. Tuy nhiên thời kỳ áp đảo của các quá trình này không phải thường xuyên, trong những trường hợp còn lại, gió vẫn đóng một vai trò đáng kể trong hình thành chế độ hoàn lưu biển. Đối với các quá trình sinh thái và môi trường thì tác động của dòng dư lại đóng một vai trò quan trọng, người ta thường nói đến hiện tượng các khối nước chuyển động theo dòng dư.

Theo các quan điểm cổ điển thì dòng dư được xem như hiệu giữa dòng thực đo và dòng triều. Tuy nhiên phải chú ý tới tính không ổn định của dòng do gió tạo nên, vì vậy việc nghiên cứu một dòng tương đối ổn định là một vấn đề cần được quan tâm.

Trong thực tế do dòng dư ổn định nhỏ hơn dòng triều tới vài bậc, vì vậy lấy trung bình từ số liệu đo nhiều khi chỉ cho ta đại lượng nhỏ hơn sai số đo đạc của máy.

Mặt khác, dựa vào chu kỳ lấy trung bình có thể thu được các đại lượng đặc trưng cho nhiều quá trình khác biệt nhau.

Đối với khu vực bán nhật triều với trạng thái synop ổn định trong vài ba ngày thì khi lấy trung bình ngày ta hy vọng thu được dòng dư đặc trưng cho tác động của điều kiện khí tượng. Nếu lấy trung bình tháng, ta thu được bức tranh mang tính khí hậu, và dòng dư sẽ đặc trưng cho tác động của hoàn lưu chung đại dương và biển khơi cùng với ảnh hưởng trung bình của các tương tác phi tuyến của các chuyển động quy mô vừa (triều, nước dâng,...).

Vai trò của dòng dư và cấu trúc của chúng (front, ...) đối với quần xã biển, đối với dòng trầm tích trung bình hay hiện tượng lắng đọng ô nhiễm đã được tất cả các giới khoa học công nhận.

Trên quan điểm đó chỉ có một hướng nghiên cứu có triển vọng hơn cả là mô hình tính toán nhằm đưa ra được bức tranh tương đối chính xác về lưu dư, trong khi kết quả đo đạc còn chưa thể đáp ứng được

Dựa vào các nghiên cứu khác nhau về việc xác định lưu dư cũng như vận tốc dòng, chúng ta có thể điểm lại một số quan điểm cơ bản về vấn đề quan trọng này.

Trước hết chúng ta mô tả một số ký hiệu sẽ sử dụng sau này:

$\langle \dots \rangle$  trung bình theo thời gian

$(\dots)_E$  biến theo Euler,

$(\dots)_L$  biến theo Lagrange,

$\overline{(\dots)}$  trung bình theo toàn cột nước.

a. Giá trị trung bình Euler của vận tốc trung bình theo độ sâu toàn cột nước.

Biểu thức toán học của giá trị này được xác định như sau:

$$\langle \bar{u} \rangle_E(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \left\{ \frac{1}{H(\tau)} \int_{-h}^{\zeta(\tau)} u(x_3, \tau) d x_3 \right\} d \tau \quad (3.1)$$

trong đó sự phụ thuộc của vận tốc theo tọa độ ngang được thể hiện trong dạng ẩn.

b. Vận tốc lưu dư Euler trung bình theo toàn cột nước

Công thức để xác định như sau

$$\overline{\langle u \rangle_E}(t) = \frac{1}{H_0} \int_{-h}^{\zeta_0(t)} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(x_3, \tau) d \tau \right\} d x_3 \quad (3.2)$$

Theo định nghĩa này thì vận tốc này rất khó xác định đối với trường hợp hạt nước nằm giữa đỉnh triều cao và thấp.

c. Vận tốc dòng Euler

Do phương trình liên tục áp dụng đối với lưu dư trước hết cần thỏa mãn đối với dòng toàn phần. Theo quan điểm đó có thể đưa ra định nghĩa vận tốc lưu dư từ dòng dư toàn phần.

$$\bar{u}_{0,E}(t) = \frac{U_0}{H_0} = \frac{\langle H\bar{u} \rangle_E}{\langle H \rangle_E} = \frac{1}{H_0(t)} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \int_{-h}^{\zeta(t)} u(x_3, \tau) dx_3 d\tau \quad (3.3)$$

trong đó  $U_0$  là dòng toàn phần (lưu lượng) dư theo Euler.

Tuy nhiên dòng toàn phần trung bình và lưu lượng qua một mặt cắt nào đó có thể phân tích thành hai số hạng

$$U_0 = \langle H\bar{u} \rangle_E = H_0 \bar{u}_0 + \langle \zeta_1 \bar{u}_1 \rangle_E \quad (3.4)$$

Như vậy dòng toàn phần trung bình bao gồm phần do vận tốc trung bình và phần do dao động quy mô vừa của mặt nước và vận tốc khi giữa chúng có tương quan khác 0. Như vậy hoàn toàn dễ hiểu việc giá trị trung bình theo Euler của vận tốc trung bình theo độ sâu không thoả mãn phương trình liên tục.

Chúng ta có thể dẫn ra ví dụ cho trường hợp sóng nhật triều đơn M2 và dòng dư không đổi:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \langle \bar{u} \rangle_E + u_{M2} \cos(\omega t - \psi_u) \\ H &= h + \zeta = h + \zeta_0 + \zeta_{M2} \cos(\omega t - \psi_\zeta) \end{aligned}$$

Như vậy dựa vào công thức (3.4) ta có

$$U_0 = (h + \zeta_0) \langle \bar{u} \rangle_E + \frac{1}{2} u_{M2} \zeta_{M2} \cos(\psi_u - \psi_\zeta)$$

Trong công thức này, dòng toàn phần liên quan tới nhiều quy mô vừa phụ thuộc vào chênh lệch pha giữa mực nước và vận tốc. Giá trị của thành phần này nhiều khi có thể so sánh được với thành phần đầu.

d. Trung bình trường vận tốc Lagrange

Đối với các biến Lagrange thì vị trí ban đầu của phần tử nước  $X^0$  tại thời điểm  $t^0$  là quan trọng nhất và định nghĩa về vận tốc lưu dư Lagrange có thể viết như sau

$$\langle \bar{u} \rangle_L(X^0, t^0) = \frac{1}{T} \int_{t^0}^{t^0+T} \bar{u}(X^0, \tau) d\tau \quad (3.5)$$

Nếu ký hiệu  $X(X^0, t)$  là vị trí của phần tử  $X^0$  vào thời điểm  $t$ , ta có thể thu được phương trình quỹ đạo bằng cách tích phân từ trường vận tốc Lagrange

Và vận tốc lưu dư từ công thức (3.5) sẽ là

$$X(X^0, t) = X^0 + \int_{t^0}^t \bar{u}(X^0, \tau) d\tau \quad (3.6)$$

$$\langle \bar{u} \rangle_L(X^0, t^0) = \frac{1}{T} \int_{t^0}^{t^0+T} \bar{u}(X^0, \tau) d\tau = \frac{X(X^0, t^0+T) - X(X^0, t^0)}{T} \quad (3.7)$$

Như vậy vận tốc lưu dư Lagrange là vận tốc trung bình của các phần tử chất lỏng, vận tốc này có sự biến động lớn phụ thuộc vào các nhiễu động. Để đơn giản hoá bài toán và phục vụ tính toán thực tế người ta đưa ra một phép xấp xỉ bậc nhất như sau:

$$\langle \bar{u} \rangle_L^{(1)} = \frac{\langle U \rangle_L^{(1)}}{H_0} = \frac{\langle U \rangle_E + U_s}{H_0} \quad (3.8)$$

Trong đó  $\langle U \rangle_E = \langle H \bar{u} \rangle_E$  là dòng dư Euler,

$$U_s = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( H_0 \left\langle \bar{u}_{M2}(t) \int_{t^0}^t \bar{v}_{M2}(\tau) d\tau \right\rangle_E \right) e_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( H_0 \left\langle \bar{v}_{M2}(t) \int_{t^0}^t \bar{u}_{M2}(\tau) d\tau \right\rangle_E \right) e_2$$

là dòng Stokes. Biểu thức này đã được Longuet- Higgins phát triển trong lý thuyết sóng Stokes.

Như vậy vận tốc lưu dư Lagrange có thể lấy gần đúng như sau:

$$\langle \bar{u} \rangle_L \sim \langle \bar{u} \rangle_E + \bar{u}_s \sim \langle \bar{u} \rangle_E + \left\langle \int \bar{u} d\tau \cdot \nabla \bar{u} \right\rangle_E \quad (3.9)$$

Đại lượng này hoàn toàn có thể xác định thông qua trường vận tốc Euler.

### 3.2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Như đã trình bày ở các phần trên, hệ phương trình 3D áp dụng cho vùng biển nông xáo trộn mạnh sẽ là

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v v) + f e_3 \times v = -\nabla q + \nabla R \quad (3.11)$$

trong đó R là tenxơ ứng suất Reynolds hình thành do kết quả tương tác phi

tuyến giữa các nhiễu động 3D của rối vi mô.

Trong trường hợp có thể chấp nhận điều kiện đồng nhất ngang, ta có thể viết

$$\nabla.R = \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}_3} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} \left( \tilde{\mathbf{v}} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}_3} \right) \quad (3.12)$$

Thông thường dòng dư được xác định theo khoảng thời gian  $T$  có độ lớn tối thiểu một đến hai chu kỳ triều, ta lấy ký hiệu  $_0$  cho các đại lượng đó

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad (3.13)$$

với

$$(\mathbf{v})_0 = \mathbf{v}_0 \quad (3.14)$$

$$(\mathbf{v}_1)_0 = 0 \quad (3.15)$$

Nếu cho  $T$  vào khoảng 1 ngày ( $\sim 10^5$  giây) thì phép lấy trung bình đã loại bỏ triều và làm trơn các nhiễu động dòng chảy do trường gió gây nên với chu kỳ nhỏ hơn  $T$ . Tuy nhiên sự biến động của trường gió cũng có chu kỳ tương đương  $10^5$  giây và như vậy không trùng với rãnh thấp trong phổ năng lượng dòng chảy. Như đã trình bày ở chương trước chúng ta không thể thu được phương trình cho  $\mathbf{v}_0$  bằng cách lấy trung bình phương trình (3.11). Vì trong trường hợp đó có sự phụ thuộc rất mạnh vào thời gian và  $\mathbf{v}_0$  không đặc trưng cho trạng thái tựa dừng mà các nhà sinh thái học và môi trường cần.

Trong thực tiễn thì giá trị trung bình ngày của dòng dư chỉ có thể thu được khi tác động của gió yếu hoặc không đáng kể.

Trong trường hợp này “dòng dư triều” được lấy từ kết quả xâm nhập của dòng ngoài và tương tác phi tuyến của triều.

Nếu chu kỳ lấy trung bình từ  $10^6$  (2 tuần) đến  $10^7$  (4 tháng) ta sẽ thu được dòng dư khí hậu, các kết quả này có thể sử dụng trong các mô hình sinh thái, môi trường.

Tuy nhiên ta vẫn có thể thu được loại dòng dư thứ ba, với chu kỳ lấy trung bình lớn hơn  $10^5$  s, nhưng điều kiện synop phải tương đối ổn định. Loại dòng dư này được gọi là dòng dư gió.

Từ phương trình (3.11), đạo hàm theo thời gian với  $T$  bằng một số lần chu kỳ triều sẽ là:

$$\frac{v(t+T)-v(t)}{T} \leq 0(10^{-5} v_0) \quad (3.16)$$

Giá trị trung bình của gia tốc Coriolis sẽ là

$$2\Omega \wedge v_0 \sim 0(10^{-4} v_0) \quad (3.17)$$

Như vậy ta có thể bỏ qua số hạng đạo hàm theo thời gian trong phương trình đối với  $v_0$ . Phương trình đối với dòng dư là phương trình dừng

$$\nabla \cdot v_0 = 0 \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot (v_0 v_0) + f \wedge v_0 = -\nabla q_0 + \frac{\partial \tau_0}{\partial x_3} + \nabla \cdot N \quad (3.19)$$

trong đó

$$N = (-v_1 v_1)_0 \quad (3.20)$$

Vì  $v_0$  thường nhỏ hơn  $v_1$  từ 1 đến 2 bậc nên số hạng đầu vế trái của phương trình (3.19) là không đáng kể. Ten xơ  $N$  cũng có nghĩa tương tự như  $R$ , nhưng lại đặc trưng cho chuyển động quy mô vừa, người ta thường gọi là ten xơ Reynolds quy mô vừa. Như vậy số hạng cuối của phương trình (3.19) là số hạng bổ sung do tương tác phi tuyến của các chuyển động quy mô vừa (triều, nước dâng,...).

Vai trò của số hạng này đã được chú ý đến trong nhiều công trình nghiên cứu dưới cái tên là ứng suất triều.

Ten xơ  $N$  có thể tính được bằng cách giải hệ các phương trình (3.11), (3.12) cho chuyển động quy mô vừa và lấy trung bình  $v_1 v_1$ .

Phương trình vận chuyển theo hướng ngang

Như đã trình bày trên đây, vận tốc chuyển động có thể tách riêng thành hai phần theo hướng ngang và hướng thẳng đứng, cũng như trung bình theo độ sâu và phần dư:

$$v = u + v_3 e_3 \quad (3.21)$$

$$u = u_0 + u_1 \quad (3.22)$$

Ta có thể rút ra biểu thức dòng toàn phần (lưu lượng) dư



$$U_0 = \int_{-h}^{\zeta_0} u_0 dx_3 = H_0 \bar{u}_0 \quad (3.23)$$

trong đó  $\bar{u}_0$  là vận tốc trung bình theo độ sâu,  $H_0 = h + \zeta_0$ ,  $h$  là độ sâu và  $\zeta_0$  là mực nước dư ( $H_0 \sim h$  vì  $\zeta_0 \ll h$ ). Hệ phương trình đối với lưu lượng dư thu được từ các phương trình (3.19), (3.20) sau khi biến đổi có dạng

$$\nabla \cdot U_0 = 0 \quad (3.24)$$

$$f e_3 \wedge U_0 = -H_0 \nabla q_0 - K U_0 + \theta \quad (3.25)$$

trong đó

$$K = \frac{D \|u_1\|_0}{H_0} \quad (3.26)$$

$$\text{và } \theta = \tau^s_0 + \tau^n_0 - \tau^f_0$$

(i)  $\tau^s_0$  ứng suất gió dư

(ii)  $\tau^n_0$  ứng suất Reynolds quy mô vừa

$$\tau^n_0 = \int_{-h}^{\zeta_0} \nabla \cdot (-v_1 u_1)_0 dx_3 \quad (3.27)$$

(iii)  $\tau^f_0$  ma sát nhớt quy mô vừa

$$\tau^f_0 = (D \|u_1\| u_1) \quad (3.28)$$

Ma sát nhớt quy mô vừa là một phần của ma sát đáy đối với dòng dư (một phần khác là  $KU_0$ ) đây là kết quả của tương tác phi tuyến các chuyển động quy mô vừa. Hệ phương trình trên có thể biến đổi về phương trình cho hàm dòng và giải với các điều kiện biên tương ứng.

### 3.3. BIẾN ĐỔI CỤC BỘ THEO ĐỘ SÂU CỦA VẬN TỐC NGANG

#### 3.3.1. Phương trình mô tả

Giả sử

$$u = u_1 + i u_2 \quad (3.29)$$

$$\tau = \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial x_3} = \sigma H \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\Phi = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) - i \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right)$$

Hai phương trình chuyển động nước nông ven bờ (2.62) và (2.63) chương II có thể viết dưới dạng chung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ifu = \Phi + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad (3.30)$$

Lực tác động  $\Phi$  là một hàm của  $t$ ,  $x_1$  và  $x_2$ . Tuy các mối liên hệ không thể hiện trong dạng trực tiếp, nhưng  $u$  là một hàm của  $\xi$ ,  $t$ ,  $x_1$  và  $x_2$ . Như vậy tại mỗi điểm bất kỳ  $(x_1, x_2)$ , phương trình (3.30) cho ta mô hình phân bố cục bộ theo độ sâu của vận tốc ngang như là một hàm của thời gian.

Nếu ký hiệu  $\tau_s$  và  $\tau_b$  là các giá trị tương ứng của  $\tau$  trên mặt và đáy, thì vận tốc trung bình theo độ sâu  $\bar{u}$  được tính theo phương trình sau:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + if\bar{u} = \Phi + (\tau_s - \tau_b) H^{-1} \quad (3.31)$$

và phương trình đối với chênh lệch vận tốc  $\hat{u} = u - \bar{u}$  sẽ có dạng sau:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + if\hat{u} = \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tilde{\nu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) - \left( \frac{\tau_s - \tau_b}{\sigma} \right) H^{-1} \right] \quad (3.32)$$

Sự biến đổi của hệ số nhớt rối theo độ sâu nhìn chung rất phức tạp, nó phụ thuộc chủ yếu vào điều kiện cụ thể. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp có thể sử dụng biểu thức tổng quát sau đây:

$$\tilde{\nu} = \kappa \left| \tau_b \right|^{1/2} (x_3 + h) \quad (3.33)$$

trong đó  $\kappa$  là một hằng số mà theo nhiều kết quả đo đạc có thể lấy bằng hằng số Karman được sử dụng trong nghiên cứu lớp biên khí quyển và biển.

Kết hợp hai phương trình (3.32) và (3.33) chúng ta nhận thấy rằng  $\sigma H$  có thể lấy tỷ lệ với  $\kappa(\tau_b)^{1/2}$ . Sẽ không ảnh hưởng tới tính tổng quát nếu chúng ta

chọn hệ số tỷ lệ bằng 1 ( các hàm  $\sigma$  và  $\lambda$  sẽ được xác định như các hàm thứ cấp). Như vậy:

$$\sigma H = \kappa \left| \tau_b \right|^{1/2} \quad (3.34)$$

và

$$\lambda(\xi) \sim \xi \quad (3.35)$$

đối với các giá trị  $\xi$  nhỏ.

Tiến hành thay các biến mới trên cơ sở các định nghĩa sau đây

$$\hat{u} = w e^{-ift} + \frac{\tau_s}{\sigma H} s(\xi) + \frac{\tau_b}{\sigma H} b(\xi) \quad (3.36)$$

$$y = \int_0^t \sigma(v) dv \quad (3.37)$$

trong đó

$$s(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\eta}{\lambda(\eta)} d\eta \quad (3.38)$$

$$b(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1-\eta}{\lambda(\eta)} d\eta \quad (3.39)$$

Phương trình (3.32) bây giờ có thể viết

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_s s(\xi) + \theta_b b(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (3.40)$$

trong đó

$$\theta_a = \frac{e^{ift}}{\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial t} + if \right) \left( \frac{\tau_a}{\sigma H} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{ift} \frac{\tau_a}{\sigma H} \right), \quad a = s, b \quad (3.41)$$

với các điều kiện biên như sau:

$$\lambda \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} \quad (3.42)$$

Nếu như chúng ta có được biểu thức của hệ số nhớt rồi thì các đại lượng  $s$  và  $b$  sẽ là những hàm của  $\xi$ . Phương trình vừa thu được đối với  $w$  (40) cho phép chúng ta xác định phân bố thẳng đứng của vận tốc như một hàm của  $\sigma$ ,  $H$ ,  $\theta_s$  và  $\theta_b$  phụ thuộc vào  $t$  (hay  $y$ ) tại mỗi điểm cho trước  $(x_1, x_2)$ .

### 3.3.2. Hàm phân bố vận tốc ngang theo độ sâu

Sử dụng các tích phân biến đổi Laplace:

$$W(a, \xi) = \int_0^\infty e^{-ay} w(y, \xi) dy \quad (3.43)$$

$$\Theta_a(a) = \int_0^\infty e^{-ay} \theta_a(y) dy \quad (3.44)$$

Phương trình (3.32) bây giờ có thể biến đổi về dạng sau:

$$aW + \Theta_s s(\xi) + \Theta_b b(\xi) - W_0(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left( \lambda \frac{dW}{d\xi} \right) \quad (3.45)$$

với các điều kiện biên

$$\lambda \frac{dW}{d\xi} = 0 \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} \quad (3.46)$$

Tìm nghiệm của phương trình trên trong dạng chuỗi của các hàm trực giao  $f_n(\xi)$  trong khoảng  $(0,1)$ . Các hàm chuỗi này sẽ thoả mãn hệ các phương trình sau đây

$$\frac{d}{d\xi} \left( \lambda \frac{d f_n}{d\xi} \right) = -\alpha_n f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.47)$$

$$\lambda \frac{d f_n}{d\xi} = 0 \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} \quad (3.48)$$

$\alpha_n$  là các giá trị riêng với  $\alpha_0 = 0$ .

Chúng ta tìm nghiệm của phương trình (3.45) trong dạng sau:

$$W = \sum_0^{\infty} c_n f_n(\xi) \quad (3.49)$$

$$w_0 = \sum_0^{\infty} \omega_n f_n(\xi) \quad (3.50)$$

$$s_n = \int_0^1 s f_n d\xi \quad (3.51)$$

$$b_n = \int_0^1 b f_n d\xi \quad (3.52)$$

Các hệ số  $\omega_n$ ,  $s_n$ ,  $b_n$  sẽ được xác định nếu như các hàm  $\lambda(\xi)$ ,  $s(\xi)$  và  $b(\xi)$  cho trước. Các hệ số  $c_n$  được xác định từ phương trình cơ sở (3.45). Ta có:

$$c_n = \frac{\omega_n - s_n \Theta_s - b_n \Theta_b}{a + \alpha_n} \quad (3.53)$$

Như vậy ta có biểu thức sau đối với hàm vận tốc

$$w = L^{-1} W = \sum \left( \omega_n e^{-\alpha_n y} - s_n R_n^s - b_n R_n^b \right) f_n(\xi) \quad (3.54)$$

trong đó

$$R_n^a = \int_0^y \theta_a(y') e^{-\alpha_n(y-y')} dy' \quad a = s, b \quad (3.55)$$

Từ các phương trình (3.47) và (3.48) dễ dàng thấy rằng

$$\int_0^1 f_n(\xi) d\xi = 0 \quad n > 0 \quad (3.56)$$

và như vậy  $f_0$  là một hằng số sao cho các chuỗi (3.49), (3.50), (3.51) và (3.52) cho ta giá trị trung bình theo độ sâu của các hàm tương ứng.

Kết hợp các biểu thức (3.36), (3.41) và (3.55) ta thu được

$$\begin{aligned} \hat{u} = & \frac{\tau_s}{\sigma H} [s(\xi) - \bar{s}] + \frac{\tau_b}{\sigma H} [b(\xi) - \bar{b}] + \\ & + \sum \left( \omega_n e^{-\alpha_n y} - s_n R_n^s - b_n R_n^b \right) f_n(\xi) e^{-\beta y} \end{aligned} \quad (3.57)$$

trong đó  $\bar{s}$  và  $\bar{b}$  là giá trị trung bình theo độ sâu của  $s$  và  $b$ , và điều kiện triệt tiêu của độ lệch vận tốc đã được sử dụng để loại trừ  $\omega_0$  ra khỏi biểu thức thu được.

Bằng cách tiến hành lấy tích phân theo từng phần và sử dụng phương trình (3.41) ta có thể viết

$$R_n^a = \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{d^p \theta_a}{d y^p} \frac{e^{\alpha_n y}}{\alpha_n^p + 1} \right] e^{-\alpha_n y} =$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n^{-q} \left[ \frac{d^q}{d y^q} \left( \frac{e^{ift} \tau_a}{\sigma H} \right) \right]_y - \alpha_n^{-q} e^{-\alpha_n y} \left[ \frac{d^q}{d y^q} \left( \frac{e^{ift} \tau_a}{\sigma H} \right) \right]_0 \right\} \quad (3.58)$$

$a = s, p \quad n = 1, 2, \dots$

Sử dụng công thức (34) và các giá trị đặc trưng cho vùng biển nông có thể thấy rằng giá trị  $\sigma$  vào khoảng  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  đối với trường hợp dòng yếu và triều thuận nghịch, và khoảng  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  trong trường hợp triều mạnh và gió cũng mạnh. Khoảng thời gian biến đổi của trường vận tốc và ứng suất gió có thể được đặc trưng bởi “tần số”

$$\omega \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1} \sim f$$

Như vậy

$$\frac{d}{dy} = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} \sim \frac{\omega}{\sigma} \leq 1 \quad (3.59)$$

Trong các công thức trên các thành phần liên quan tới hàm mũ sẽ có giá trị nhỏ dần khi  $n$  tăng. Cuối cùng ta có thể thu được phần chênh lệch vận tốc trong dạng sau đây.

$$\hat{u} = \frac{\tau_s}{\sigma H} [s(\xi) - \bar{s}] + \frac{\tau_b}{\sigma H} [b(\xi) - \bar{b}] -$$

$$- \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{e^{ift}}{\sigma H} \left( \frac{s_1 \tau_s + b_1 \tau_b}{\alpha_1} \right) \right] f_1(\xi) e^{-ift} \quad (3.60)$$

Như vậy hiệu ứng Ekman về biến đổi hướng dòng chảy và gió chỉ chứa trong số hạng thứ 3 và các số hạng bậc cao, mặt khác nó sẽ trở nên đáng kể chỉ khi  $\sigma$  nhỏ, nghĩa là trong trường hợp dòng chảy yếu và gió yếu, điều này hầu như luôn thoả mãn đối với biển.

Để thoả mãn điều kiện vận tốc bằng 0 tại đáy ta có thể đưa ra biểu thức

sau:

$$\hat{u} = \bar{u}|_{\xi} = \xi_0 \quad (3.61)$$

Như vậy ta đã thu được biểu thức tương quan giữa ứng suất mặt, ứng suất đáy và vận tốc trung bình theo độ sâu. Như vậy ứng suất đáy có thể biểu thị qua hàm của vận tốc trung bình và ứng suất gió trên mặt và có thể sử dụng trong khi giải bài toán hoàn lưu hai chiều. Các mô hình 2 chiều cho ta các kết quả vận tốc trung bình, và mực nước, điều này cũng tương ứng với việc cho ứng suất đáy và  $\sigma$ . Các kết quả vừa nêu có thể thay vào biểu thức (3.60) để tính phân bố của dòng chảy theo độ sâu tại các điểm.

### 3.4. THÍ DỤ ÁP DỤNG MÔ HÌNH 2 CHIỀU

Cho rằng hệ số nhớt rối có thể biểu diễn qua dạng đơn giản sau

$$\lambda = \xi \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \quad (3.62)$$

cho phép thể hiện nghiệm của hệ phương trình (3.47) và (3.48) trong dạng giải tích.

Các hàm riêng và giá trị riêng của các phương trình (3.47) và (3.48) được thể hiện qua dạng sau:

$$f_n = (4n+1)^{1/2} p_{2n}(\xi-1) \quad (3.63)$$

$$\alpha_n = n(2n+1) \quad (3.64)$$

trong đó  $p_{2n}$  là đa thức Legendre.

Phương trình (60) sẽ có dạng

$$\begin{aligned} \hat{u} = & \frac{\tau_s}{\sigma H} [4 \ln 2 - 2 - 2 \ln(2 - \xi)] + \\ & \frac{\tau_b}{\sigma H} [2 - 2 \ln 2 - \ln(2 - \xi) + \ln \xi] + \\ & \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{ift} \frac{\tau_s + 2\tau_b}{\sigma H} \right) \left( \frac{5\xi^2}{12} - \frac{5\xi}{6} + \frac{5}{18} \right) e^{-ift} \end{aligned} \quad (3.65)$$

trong đó  $\xi$  biến đổi từ 0 đến 1, ngoại trừ đối với  $\ln \xi$  cần lấy giới hạn dưới là  $\xi_0$ .

Tại  $\xi = \xi_0 \sim 0$  phương trình (3.61) sẽ cho ta:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \frac{\tau_s}{\sigma H} [2 - 2 \ln 2] + \frac{\tau_b}{\sigma H} [-\ln \xi_0 + \ln 2 - 2] + \\ & + \frac{-5}{18} \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{ift} \frac{\tau_s + 2\tau_b}{\sigma H} \right) e^{-ift} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} u = & \frac{\tau_s}{\sigma H} 2 \ln \frac{2}{2-\xi} + \frac{\tau_b}{\sigma H} \left[ \ln \frac{\xi}{\xi} + \ln \frac{2-\xi}{2} \right] + \\ & - \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{ift} \frac{\tau_s + 2\tau_b}{\sigma H} \right) \frac{5}{12} \xi(2-\xi) e^{-ift} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Biểu thức (3.67) cho ta thấy rằng phân bố thẳng đứng của vận tốc  $u$  là kết quả của 3 thành phần liên quan tới ứng suất gió trên mặt, ứng suất đáy và tác động tổng hợp của lực Coriolis và các ứng suất nêu trên. Cho rằng  $\ln \xi_0 = -10$  xem đây là giá trị đặc trưng, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\tau_s}{\sigma H} 2 \ln \frac{2}{2-\xi}}{\frac{\tau_b}{\sigma H} \left[ \ln \frac{\xi}{\xi} + \ln \frac{2-\xi}{2} \right]} & \sim 0,1 \frac{\tau_s}{\tau_b} \\ \frac{\sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{ift} \frac{\tau_s}{\sigma H} \right) \frac{5}{12} \xi(2-\xi)}{\frac{\tau_s}{\sigma H} 2 \ln \frac{2}{2-\xi}} & \sim 0,3 \frac{\omega}{\sigma} \\ \frac{\sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{ift} \frac{\tau_b}{\sigma H} \right) \frac{5}{12} \xi(2-\xi)}{\frac{\tau_b}{\sigma H} \left[ \ln \frac{\xi}{\xi} + \ln \frac{2-\xi}{2} \right]} & \leq 0,1 \frac{\omega}{\sigma} \end{aligned}$$

trong đó  $\omega$  là tần số đặc trưng cho biến động theo thời gian.

Trong trường hợp gió mạnh và dòng chảy mạnh, các đại lượng ứng suất



$\tau_s$  và  $\tau_b$  lớn gần như nhau ( $>10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2$ ),  $\sigma$  có thể lớn hơn một bậc so với  $\omega$ , ứng suất đáy đóng một vai trò chủ yếu, ảnh hưởng trực tiếp của ứng suất gió không vượt quá 10% và không có hiện tượng biến đổi hướng dòng theo Ekman. Điều này cũng có thể xem tương tự trường hợp triều mạnh và gió yếu.

Trong trường hợp gió mạnh nhưng dòng dư không lớn lắm, ảnh hưởng của ma sát gió và đáy như nhau. Hiện tượng biến đổi hướng Ekman sẽ tồn tại khi tỷ lệ  $\omega/\sigma$  vẫn còn nhỏ hơn 1.

Trường hợp gió yếu và dòng yếu, các giá trị ứng suất nhỏ, nhưng vai trò của ứng suất đáy lớn hơn,  $\omega$  và  $\sigma$  có giá trị tương đương nhau, ứng suất gió và lực Coriolis chỉ gây ảnh hưởng chung nhỏ hơn 10%. Như vậy đối với các vùng biển nông ven bờ nơi mà triều có thể gây ra dòng triều lớn hơn khoảng 1 m/s thì trong khoảng thời gian triều mạnh lực Coriolis có thể bỏ qua và như vậy phương trình (3.66) có thể viết

$$\bar{u} = \frac{\tau_s}{\sigma H} [2 - 2 \ln 2] + \frac{\tau_b}{\sigma H} [-\ln \xi_0 + \ln 2 - 2] \quad (3.68)$$

Mặt khác hệ số trong số hạng đầu có thể lấy vào khoảng 10% số hạng thứ hai, vì vậy phương trình (3.34) có thể viết

$$(\sigma H)^2 = \kappa^2 |\tau_b| \sim \frac{\sigma H |\bar{u} \kappa^2|}{-\ln \xi_0 + \ln 2 - 2} \quad (3.69)$$

hay

$$\sigma H \sim \frac{|\bar{u}| \kappa^2}{-\ln \xi_0 + \ln 2 - 2} \quad (3.70)$$

Kết hợp với công thức (3.68) ta có

$$\tau_b \sim -m \tau_s + D \bar{u} |\bar{u}| \quad (3.71)$$

trong đó

$$m = \frac{2 - 2 \ln 2}{-\ln \xi_0 + \ln 2 - 2} \sim 0,07 \quad (3.72)$$

$$D = \frac{\kappa^2}{(-\ln \xi_0 + \ln 2 - 2)^2} \sim 2,11 \cdot 10^{-3} \quad (3.73)$$

(cho rằng  $\ln \xi_0 \sim -10$ )

Công thức (3.71) cùng các hệ số  $m$  và  $D$  hoàn toàn tương ứng công thức thực nghiệm đã được dẫn ở phần trước.

### 3.5. MÔ HÌNH 3 CHIỀU (3D) HOÀN LƯU BIÊN NÔNG VEN BỜ

#### 3.5.1. Các khái niệm cơ bản về mô hình 3 chiều địa- thủy động lực tổng quát

Trong khi thiết lập mô hình 3 chiều người ta sử dụng hệ các phương trình đầy đủ mô tả các quá trình chuyển hoá, lan truyền nhiệt- chất và thủy động lực biển. Có thể phân biệt hai hướng chính tùy thuộc vào cách chọn các phương trình: trong dạng các phương trình nguyên thủy (cơ bản) hoặc các phương trình dẫn suất của chúng. Trong các phương trình nguyên thủy, người ta sử dụng các biến trực tiếp như vận tốc, nhiệt độ, áp suất, v.v... Các phương trình dẫn suất có thể là phương trình biến đổi xoáy, phương trình đường dòng, v.v..

Do ý nghĩa vật lý của các biến trực tiếp thường rất rõ ràng và khả năng đơn giản hơn khi cho các điều kiện biên ở trên biên cứng nên việc sử dụng hệ phương trình nguyên thủy có nhiều thuận lợi hơn so với các phương trình dẫn suất (ví dụ các phương trình chuyển động viết cho vận tốc và xoáy).

Cũng như trong nhiều bài toán địa- thủy động lực biển, mô hình toán học 3 chiều nhiệt- thủy động lực biển được xây dựng trên cơ sở hai phép xấp xỉ phổ biến: xấp xỉ Bousinesq và xấp xỉ thủy tĩnh. Trong phép xấp xỉ Bousinesq giả thiết rằng sự biến đổi của mật độ nước biển là không đáng kể, ngoại trừ trường hợp khi sự biến đổi đó được mô phỏng bằng các biểu thức chứa gradient mật độ trong một số thành phần của phương trình chuyển động. Trên cơ sở này phương trình liên tục được lấy xấp xỉ như trường hợp chất lỏng không nén. Giả thiết thủy tĩnh công nhận sự cân bằng giữa trọng lực và lực do gradient áp suất theo phương thẳng đứng gây nên.

Trong hệ phương trình đầy đủ nhiệt- thủy động lực, bức xạ mặt trời được xét đến thông qua thông lượng qua mặt phân cách và không có các nguồn khối của nhiệt năng.

Độ cong của mặt cầu quả đất được xét gần đúng trên mặt phẳng  $\beta$  lấy toạ độ trung tâm biển ( $\lambda_0$  và  $\phi_0$ ) làm gốc, hướng của gia tốc trọng trường vuông góc với mặt phẳng đó và hệ toạ độ đề các có dạng sau:

$$x = R(\phi - \phi_0)\cos \lambda$$

$$y = R(\lambda - \lambda_0)$$

$$z = r - R$$

trong đó  $r$  là khoảng cách đến tâm trái đất,  $R$  - bán kính trái đất. Việc sử dụng hệ toạ độ như trên không gây ảnh hưởng đáng kể đối với kết quả khi kích thước biển bị giới hạn trong một vài ngàn kilômét.

Bên cạnh các phép xấp xỉ nêu trên cần sử dụng các phương pháp khép kín hệ các phương trình nguyên thủy bằng cách tham số hoá các thành phần năng lượng rồi, đặc biệt đối với các quá trình có kích thước đặc trưng nhỏ. Để xây dựng mô hình toán, cần xác định quy mô quá trình trên cơ sở đáp ứng đối tượng và mục tiêu bài toán cũng như sự biến động của quy mô thời gian của hệ thống biển.

Trong phần sau đây chúng ta đi sâu nghiên cứu các quá trình "thời tiết biển" trong đó chủ yếu là chu kỳ mùa. Như đã trình bày ở phần trên các quá trình này gắn liền với phổ của hầu hết các hiện tượng tự nhiên đặc trưng của hệ thống biển.

### **3.5.2. Hệ các phương trình cơ bản**

Hệ các phương trình thủy nhiệt động lực học nguyên thủy là cơ sở cho tất cả các mô hình môi trường nước và không khí. Trong quá trình phát triển của phương pháp mô hình hoá toán học và việc tìm kiếm khả năng triển khai giải bằng phương pháp số các nhà khoa học đã đề xuất và ứng dụng nhiều phép xấp xỉ và đơn giản hoá khác nhau. Trong số đó người ta chú trọng các biến đổi khác nhau của hệ phương trình nhằm dẫn chúng về dạng 1 chiều (1D) và hai chiều (2D) cho phép có lời giải giải tích hoặc triển khai bằng phương pháp số trên các máy tính nhỏ và vừa. Để làm được việc này người ta đã đề xuất và phát triển những phép tham số hoá tương ứng kèm theo những sai số tất nhiên của từng phương pháp.

Ngày nay khi phương tiện tính toán phát triển vượt bậc, việc nâng cao độ chính xác của mô hình và tốc độ xử lý đáp ứng yêu cầu dự báo đã bắt buộc các nhà nghiên cứu trở lại với hệ các phương trình nguyên thủy. Mô hình sử dụng hệ các phương trình nguyên thủy chỉ được triển khai đầy đủ khi sử dụng phương pháp 3 chiều (3D) và 4 chiều (4D). Tuy nhiên số lượng các phương trình của mô hình phụ thuộc vào số biến cần nghiên cứu cùng các phương trình khép kín hệ.

Các mô hình thủy nhiệt động lực sử dụng hệ các phương trình cơ bản đã được phát triển trong 10 năm gần đây, trong đó có mô hình của Blumbert, Mellor (ĐH Princeton) và của Phòng nghiên cứu địa thủy động lực (GHER) của GS J.C.J. Nihoul (1989). Theo GS Nihoul, khái niệm về "thời tiết biển" bao gồm hoàn lưu chung toàn biển và các quá trình quy mô trung bình. Sử dụng hệ các phương trình thủy nhiệt động lực lấy trung bình theo thời gian ta có thể tách riêng các quá trình để nghiên cứu: đối với các quá trình quy mô trung bình cần loại trừ rồi vì mô, đối với hoàn lưu chung cần loại trừ các quá trình quy mô trung bình.

Hệ các phương trình thủy nhiệt động lực học nguyên thủy là cơ sở cho tất cả các mô hình môi trường nước và không khí. Trong quá trình phát triển của phương pháp mô hình hoá toán học và việc tìm kiếm khả năng triển khai giải bằng phương pháp số các nhà khoa học đã đề xuất và ứng dụng nhiều phép xấp xỉ và đơn giản hoá khác nhau. Trong số đó người ta chú trọng các biến đổi khác nhau của hệ phương trình nhằm dẫn chúng về dạng 1 chiều (1D) và hai chiều (2D) cho phép có các nghiệm giải tích hoặc triển khai bằng phương pháp số trên các máy tính nhỏ và vừa. Để làm được việc này người ta đã đề xuất và phát triển những phép tham số hoá tương ứng kèm theo những sai số tất nhiên của từng phương pháp.

Ngày nay khi phương tiện tính toán phát triển vượt bậc, việc nâng cao độ chính xác của mô hình và tốc độ xử lý nhằm đáp ứng yêu cầu dự báo đã bắt buộc các nhà nghiên cứu trở lại với hệ các phương trình nguyên thủy. Mô hình sử dụng hệ các phương trình nguyên thủy chỉ được triển khai đầy đủ khi áp dụng phương pháp 3 chiều (3D) và 4 chiều (4D). Tuy nhiên số lượng các phương trình của từng mô hình lại phụ thuộc vào số biến cần nghiên cứu cũng như các sơ đồ (phương trình) khép kín hệ.

Mô hình thủy nhiệt động lực do Phòng nghiên cứu địa- thủy động lực (GHER), Đại học Liège dưới sự chỉ đạo của giáo sư J.C.J. Nihoul (1989) đã phát triển và ứng dụng trong 10 năm gần đây. Như đã trình bày ở phần trên, khái niệm về “thời tiết biển” bao gồm các hiện tượng và quá trình từ quy mô hoàn lưu chung toàn biển đến quy mô trung bình. Sử dụng hệ các phương trình nhiệt- thủy động lực lấy trung bình theo thời gian ta có thể tách riêng các quá trình để nghiên cứu: đối với các quá trình quy mô trung bình cần loại trừ rối vi mô, đối với hoàn lưu chung cần loại trừ các quá trình quy mô trung bình và nhỏ hơn.

Hệ các phương trình cơ bản của mô hình gồm các phương trình chuyển động và liên tục đã được biến đổi theo giả thiết Bousinesq và tựa thủy tĩnh, các phương trình truyền nhiệt và khuếch tán muối.

Các biến của hệ phương trình gồm: vectơ vận tốc  $\vec{v}$ , nhiệt độ  $T$ , độ muối  $S$ , áp suất giả định  $q$ , động năng rối  $k$  và tản mát năng lượng rối  $\varepsilon$ .

Trên cơ sở này, cùng với phương trình cân bằng năng lượng rối và sơ đồ tham số hoá năng lượng rối quy mô vừa theo GHER, hệ các phương trình cơ bản có dạng sau:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{u} + f \vec{e}_3 \times \vec{u} = -\nabla_h q + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{v} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \right) \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\lambda}^T \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\lambda}^S \frac{\partial S}{\partial x_3} \right) \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla k = \tilde{\nu} \left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \right\|^2 - \tilde{\lambda}^b \frac{\partial b}{\partial x_3} + \pi^0 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\lambda}^k \frac{\partial k}{\partial x_3} \right) \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varepsilon = \\ = \frac{\varepsilon}{k} (\gamma_1 \tilde{\nu} \left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \right\|^2 - \gamma_2 \tilde{\lambda}^b \frac{\partial b}{\partial x_3} + \gamma_1 \pi^0 - \gamma_3 \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\lambda}^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

trong đó:

$$\nabla \equiv \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}; \nabla_h \equiv \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\vec{v} \equiv \vec{u} + u_3 \vec{e}_3;$$

$$b = - \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g = b(T, S);$$

$$q \equiv \frac{p}{\rho_0} + g x_3 + \xi; \quad \frac{\partial q}{\partial x_3} = b;$$

$$\tilde{\nu} = \frac{\alpha_k k^2}{16\varepsilon}; \quad \alpha_k \approx 1$$

Bên cạnh các tham số đã nêu,  $f = 2\Omega \cos \lambda$  - tần số Coriolis,  $\tilde{\lambda}^y$  - các hệ số khuếch tán rối,  $\tilde{\nu}$  - nhớt rối,  $\gamma_i$  - các hệ số phi thứ nguyên  $O(1)$ ,  $\xi$  - thế của lực tạo triều,  $\rho$  - mật độ nước biển ( $\rho_0$  là giá trị quy chiếu của mật độ).

Thành phần  $\pi^0$  biểu thị vai trò nguồn bổ sung năng lượng rối do các quá trình quy mô vừa hoặc dưới lưới sẽ được đề cập kỹ trong phần tiếp theo.

Để nghiên cứu các đặc trưng cơ bản của cấu trúc nhiệt muối và hoàn lưu biển tiến tới thiết lập mô hình dự báo chúng, việc xác định các biến động qui mô hoàn lưu chung của biển hay biến động mùa được quan tâm chú ý đầu tiên. Quy mô thời gian của các quá trình này sẽ vào cỡ tháng, mùa và năm. Theo các qui tắc thông thường trong việc xác lập phương trình chuyển động trung bình chúng ta sẽ thu được hệ các phương trình đối với các đặc trưng thống kê qui mô nêu trên, như vậy các biến động qui mô vừa và nhỏ hơn đã bị loại bỏ. Trong thực tế các hiện tượng quy mô vừa như triều, dao động quán tính, bão v.v.. có thể gây những ảnh hưởng đáng kể lên qui mô tháng và mùa. Việc tham số hoá các ảnh hưởng này đã được giáo sư J.C.J. Nihoul (1989) nghiên cứu trên cơ sở phân tích bậc đại lượng kết hợp các kết quả đo đặc năng lượng rối biển của nhiều nhà nghiên cứu trong đó có các công trình của Kitaigorotski (1979) và Monin và Ozmidov (1985).

Để đánh giá vai trò của thành phần này, cần xem xét mức độ tác động của nó được thể hiện qua hai quá trình cơ bản là bình lưu- đối lưu (do vận tốc trung bình) và khuếch tán rối.

Đối với quá trình bình lưu- đối lưu, nếu lấy  $L_1$  và  $u_1$  là các đại lượng đặc trưng cho kích thước ngang và vận tốc đối với chuyển động qui mô vừa thì vận tốc thẳng đứng tương ứng đối với chuyển động rối có thể đánh giá theo công thức:

$$u_v \sim u_1 H / L_1,$$

trong đó  $H$  là độ sâu.

Nếu lấy biểu thức tính vận tốc động lực  $u_* = C^{1/2} u_1$ , với các đại lượng đặc trưng:  $H \sim 50$  m và  $C \sim 3 \cdot 10^{-3}$  ta có:

$$u_v / u_* \sim H / (L_1 C^{1/2}) \sim 10^{-2}.$$

Chúng ta đều biết, vận tốc động lực  $u_*$  đặc trưng cho cường độ xáo trộn động lực rối theo phương thẳng đứng, như vậy từ biểu thức trên cho thấy ảnh hưởng của đối lưu thẳng đứng qui mô vừa thường nhỏ hơn so với xáo trộn rối do đó chỉ cần chú ý tới ảnh hưởng của rối ngang.

Đối với quá trình khuếch tán rối, chúng ta lần lượt xem xét các thông lượng tương ứng. Cho rằng kích thước vận tốc qui mô lớn là  $u_0$  và qui mô vừa là  $u_1$  thì các thành phần cơ bản trong phương trình chuyển động sẽ là:

$$\nabla(u_0 u_1), \nabla(u_1 u_1)_0 \text{ và } 2\Omega \wedge u_0$$

Để đánh giá bậc đại lượng của các thành phần này chúng ta xem xét một số trường hợp cụ thể sau đây:

- Biển xáo trộn mạnh và triều áp đảo với các bậc đại lượng tương ứng:

$u_1 \sim 1 \text{ m/s}$ ,  $u_0 \sim 10^{-1} \text{ m/s}$ , ta có:

$$\nabla(u_0 u_1) \sim 10^{-7}, \quad \nabla(u_1 u_1)_0 \sim 10^{-5} \quad \text{và} \quad 2\Omega \wedge u_0 \sim 10^{-5},$$

Như vậy, trong trường hợp này, ảnh hưởng của các quá trình qui mô vừa là đáng kể.

- Trường hợp biển phân tầng mạnh và triều yếu với  $u_1 \sim u_0 \sim 3 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$  thì:

$$\nabla(u_0 u_1) \sim 10^{-6}, \quad \nabla(u_1 u_1)_0 \sim 10^{-7} \quad \text{và} \quad 2\Omega \wedge u_0 \sim 3 \cdot 10^{-5},$$

như vậy ảnh hưởng của qui mô vừa là nhỏ và có thể bỏ qua.

Có thể rút ra kết luận rằng vai trò của chuyển động qui mô vừa lên các quá trình quy mô lớn phụ thuộc vào điều kiện động lực của biển.

Quá trình tương tác biển- khí cùng các biến động qui mô vừa tác động lên các yếu tố vật lý thủy văn biển thông qua các thông lượng rối và năng lượng. Đối với nguồn năng lượng trung bình ta có thể viết:

$$Q_0^k = -\langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle_0 : \nabla \vec{u}_0 - \left[ \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle_1 : \nabla \vec{u}_1 \right]_0 + \langle \vec{b}' \vec{u}'_3 \rangle_0 - \varepsilon_0$$

Số hạng thứ hai thể hiện vai trò truyền động năng qui mô vừa vào nguồn năng lượng rối trong lớp nước trên cùng của biển. Đại lượng này có thể được xác định theo nhiều cách khác nhau phụ thuộc vào vai trò tương đối của các quá trình động lực. Theo Kitaigorotski (1979) thì nguồn năng lượng này giảm rất nhanh theo độ sâu và thông lượng cho toàn lớp nước trên cùng có thể xác định bằng  $\beta \tau_w^{3/2}$  trong đó  $\tau_w$  là ứng suất gió (trên một đơn vị khối lượng nước biển) và  $\beta \sim 10$ .

Hệ số  $\beta$  có thể được xem là hàm của độ dày lớp nước và độ phân tầng hay số Richardson  $R_f$ .

Đối với nhiều mô hình 3 chiều hiện hành, hai phương trình đối với động năng rối  $k$  và tản mát năng lượng rối  $\varepsilon$  thường được thay thế bằng các phép tham số hoá chủ yếu thông qua các biểu thức liên kết giữa các hệ số trao đổi rối, động năng rối hoặc quãng đường xáo trộn. Khác với hướng này cũng như với hướng giải quyết của Blumert và Mellor (1987), trong mô hình GHER các tác giả đã giữ lại phương trình đầy đủ đối với động năng rối sau khi đã được bổ sung thêm nguồn năng lượng từ các quá trình quy mô vừa và dưới lưới, còn phương trình đối với tản mát năng lượng rối được tham số hoá bằng một loạt các quan hệ đã được kiểm nghiệm rộng rãi trong cơ học chất lỏng biển- khí

quyển. Những mối quan hệ đó bao gồm sự kết hợp giữa nguồn năng lượng do hiệu ứng phân lớp và nguồn năng lượng do sự phân tầng mật độ (độ nổi). Các thành phần này được tính theo các tần số Brunt-Vaisalia (N) và Prandtl (M) tương ứng:

$$N^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad M^2 \equiv \nabla \bar{v}; \quad \nabla \bar{v} \approx \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \right\|^2$$

Hơn nữa, trong quá trình khép kín hệ các phương trình, ảnh hưởng của dòng năng lượng quy mô vừa cũng được tính đến khi xác định tần số Prandtl và hệ số rối, quãng đường xáo trộn rối cũng không lấy bằng một giá trị cố định mà được tính theo quy luật lớp biên đáy và rối biên.

### 3.5.3. Sơ đồ khép kín rối

Trong các phương trình khép kín rối đối với mật độ động năng rối  $k$  và tản mát  $\varepsilon$ , các thành phần  $Q^y$  ( $y: k$  hay  $\varepsilon$ ) thể hiện các nguồn phát sinh và tiêu huỷ là khó xác định nhất.

Tuy nhiên, đối với mật độ động năng rối  $k$  ta có thể viết biểu thức sau đây đối với  $Q^k$ :

$$Q^k = -\langle \vec{v} \vec{v} \rangle : \langle \nabla \bar{u} \rangle + \langle \vec{b} u_3 \rangle - \varepsilon$$

trong đó, hai thành phần đầu của biểu thức này có thể xác định bằng các công thức kinh điển đã được kiểm nghiệm trong lý thuyết về quy luật trao đổi ứng suất rối và lực nổi Acshimede, riêng thành phần cuối  $\varepsilon$  sẽ phải tính từ phương trình (3.79) hoặc tham số hoá nó.

Trong phương trình (3.79), đại lượng  $Q^\varepsilon$  hiện tại chỉ có thể xác định thông qua các thành phần trong  $Q^k$  bằng một loạt các hệ số  $\gamma_i$ :

$$Q_k^\varepsilon = \left( \frac{\varepsilon}{k} \right) \left[ -\gamma_1 \langle \vec{v} \vec{v} \rangle : \nabla \langle \bar{v} \rangle + \gamma_2 \langle \vec{b} u_3 \rangle - \gamma_3 \varepsilon \right]$$

Điều này làm cho mô hình thu được mang nhiều tính thực nghiệm hơn, nhiều khi chủ quan.

Một số tác giả như Blumbert and Mellor (1987), Mellor and Yamada (1982) đã thay phương trình (3.79) đối với  $\varepsilon$  bằng phương trình tương tự đối với tổ hợp khác nhau của  $\varepsilon$ ,  $k$  và  $\gamma_i$  cũng đã không làm giảm số phép tham số hoá cũng như tính thực nghiệm của hệ.

Để có thể tính toán hệ số rối cũng như tản mát năng lượng rối liên quan



chúng ta cần đi sâu nghiên cứu cơ chế chuyển hoá năng lượng rối giữa quy mô lớn và các quy mô nhỏ hơn.

Từ quan điểm cho rằng các quá trình rối quy mô nhỏ (mesialscale,  $f = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ), rối nhót xoáy (eddy viscosity) và rối quy mô vừa (mesoscale  $\sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ) hay còn gọi là rối blinui đóng vai trò chủ yếu trong chuyển hoá năng lượng rối nhận từ chuyển động trung bình và vĩ mô rồi tản mát chúng thành nhiệt, giáo sư J. Nihoul (1989) đã đưa ra một dạng nhót xoáy trung bình của nhiễu động quy mô nhỏ và vĩ mô làm ngưỡng cho quá trình chuyển hoá năng lượng đó.

Xuất phát từ giả thiết cho rằng quá trình tản mát nhiệt được đặc trưng bởi:

$$\begin{aligned} \text{Kích thước dài} \quad l_m &\sim \varepsilon^{-1/4} \nu^{3/4} \\ \text{Quy mô thời gian} \quad t_m &\sim \varepsilon^{-1/2} \nu^{1/2} = (l_m u_m^{-1}) \\ \text{Quy mô vận tốc} \quad u_m &\sim l_m \cdot t_m^{-1} \sim \varepsilon^{-1/4} \nu^{1/4} \\ \text{và số Reynolds} \quad R_m &= u_m \cdot l_m / \nu^{-1} \sim 1 \end{aligned} \quad (3.80) \quad (3.81)$$

Từ các kết quả thực nghiệm nghiên cứu phổ năng lượng các quá trình biên và khí quyển dễ dàng thấy rằng phổ năng lượng rối giảm rất nhanh từ đỉnh tại kích thước đặc trưng  $l_m$ , có thể cho rằng tại đây mật độ động năng rối của xoáy ( $u_m^2/2$ ) là phần chủ yếu của động năng rối  $k$ , hay:

$$u_m \sim \alpha k^{1/2} \quad (3.82)$$

Từ (3.80), (3.81), (3.82) ta có:

$$\tilde{\nu} \sim \alpha \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.83)$$

$$\text{hay:} \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{2} \alpha_k^{1/4} \sqrt{k} l_m;$$

Kích thước dài  $l_m$  có thể xác định thông qua quy luật rối lớp biên và ảnh hưởng phân tầng:

$$l_m = (1 - R_f) l_n(x_3) \quad (3.84)$$

trong đó  $l_n(x_3)$  hàm mô tả phân bố của quãng đường xáo trộn tương ứng hệ số rối theo khoảng cách từ đáy trong lớp biên cũng như toàn bộ tầng nước, trong chương mô hình số sẽ đi sâu hơn phân tích mối tương quan này.

Như vậy đối với tản mát năng lượng rối: 
$$\varepsilon = \frac{\alpha_k k^2}{16\tilde{\nu}} \quad (3.85)$$

với 
$$\alpha = \frac{\alpha_k^{1/4}}{2}$$

Từ công thức này ta có thể rút ra công thức tính hệ số nhớt rối:

$$\tilde{\nu} = \frac{\alpha_k k^2}{16\varepsilon} ; \quad \alpha_k \approx 1$$

Công thức này đã được Kolmogorov rút ra khi áp dụng lý thuyết đồng dạng và thứ nguyên nghiên cứu rối.

Như vậy có thể sử dụng các mối tương quan thực nghiệm đối với  $\varepsilon$  thông qua động năng rối  $k$  và hệ số nhớt rối (hoặc  $l_m$ ) để khép kín hệ phương trình của mô hình.

Về vai trò của các quá trình quy mô vừa trong sự hình thành hoàn lưu và cấu trúc cỡ "thời tiết biên" chúng ta sẽ có dịp đề cập khi ứng dụng mô hình trong vùng nước nông. Như đã trình bày trên đây, đối tượng nghiên cứu ở đây là các đặc trưng tựa dừng qui mô tháng và mùa, vì vậy những chuyển động có kích thước nhỏ hơn đều được xem là nhiễu động và cần được đưa vào trong sơ đồ tham số hoá quy mô vừa như đã trình bày ở phần trên.

Trong trường hợp đối lưu thẳng đứng, như đã phân tích trên đây, ảnh hưởng của quy mô vừa và nhỏ gây nên xáo trộn thẳng đứng có thể bỏ qua khi so sánh với xáo trộn rối. Tuy nhiên có thể điều này sẽ làm giảm ảnh hưởng của các thành phần ngang của trường. Nhìn chung mức độ chính xác phụ thuộc vào tương quan giữa hai quá trình trên.

Như vậy các biểu thức (3.84) và (3.85) cho ta khép kín hệ phương trình và cho phép giải các biến vận tốc, nhiệt độ và độ muối (hoặc độ nổi  $b$ ) và động năng rối. Số Richardson động lực trong trường hợp này được bổ sung bởi các nguồn năng lượng qui mô vừa, có thể viết trong dạng sau:

$$R_f \equiv \frac{\tilde{\lambda}^b N^2}{\tilde{\nu} M^2 + \pi^0}$$

với  $N$  và  $M$  là các tần số Brunt- Vaisailia và Prandtl tương ứng,

và  $\pi^0 = \left[ \left\langle -\vec{v}' \vec{v}' \right\rangle_1 : \nabla u_1 \right]_0 \sim \beta \left[ \tau^{3/2} \right]_0 D^{-1}$  là phần năng lượng bổ sung do các quá trình quy mô vừa và nhỏ,  $D$  - là kích thước đặc trưng cho độ dày của lớp xáo trộn trên của biển.

Các hệ số khuếch tán rối có thể được xác định phụ thuộc vào hệ số nhớt rối  $\tilde{\nu}$  và mức độ phân tầng thông qua số Richardson thông lượng  $R_f$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^b &= \Psi^b \tilde{\nu}; \\ \Psi^b &\sim \gamma \sqrt{1 - R_f}; \\ \gamma &\sim 1.1 - 1.4\end{aligned}$$

Bên cạnh số Richardson thông lượng  $R_f$ , các công thức trên có thể biến đổi sử dụng số Richardson thông thường  $R_i$ :

$$\begin{aligned}\tilde{R}_i &\equiv \frac{\gamma N^2}{2 \tilde{M}^2} \\ 1 - R_f &= \left( \tilde{R}_i + \sqrt{\tilde{R}_i^2 + 1} \right)^{-2} \\ \tilde{M}^2 &\equiv M^2 + \frac{\pi^0}{\tilde{\nu}}\end{aligned}$$

### 3.5.4. Các điều kiện biên

a. Điều kiện biên trên mặt tiếp giáp biển- khí quyển

Trên mặt phân cách biển- khí quyển, cần đảm bảo tính liên tục của các thông lượng trao đổi từ hai môi trường có kể đến sự khác biệt về mật độ của nước và không khí. Thông thường các thông lượng này đều do quá trình trao đổi rối quyết định:

- Đối với ứng suất rối:

$$\tilde{\nu} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} = \vec{\tau}_0, \quad (3.86)$$

- Động năng rối:

$$-\lambda^k \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_3} = \beta \tau^{3/2} D^{-1} \quad (3.87)$$

- Thông lượng rôi nhiệt và muối:

$$-\tilde{\chi}^y \frac{\partial y}{\partial x_3} = F^y \quad (3.88)$$

b. Điều kiện biên trên đáy:

- Đối với vận tốc (ứng suất rôi) :

$$\tilde{v} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} = \vec{\tau}_b \quad (3.89)$$

trong đó:

$$\vec{\tau}_b = \rho_0 C_D \left\| \vec{v}_b \right\| \vec{v}_b \quad (3.90)$$

với  $C_D$  - hệ số ma sát đáy, đại lượng này có thể tính theo qui luật phân bố logarit trong lớp biên:

$$C_D = \{ \kappa / (\ln(z_b/z_0)) \}^2,$$

ở đây  $z_b$  là khoảng cách tính từ đáy nơi có vận tốc  $v = \vec{v}_b$ ,  $z_0$  tham số nhám,  $z_0 \sim 10^{-3} - 10^{-2}$  cm. Việc tính toán hệ số ma sát đáy sẽ được đề cập chi tiết hơn trong phần mô hình số đặc biệt khi vận tốc  $\vec{v}_b$  được xác định tại các khoảng cách khác nhau có thể nằm trong hoặc ngoài lớp biên logarit. Khi có hiệu ứng biến đổi hướng vận tốc trong lớp biên ta có thể đưa thêm hệ số hiệu chỉnh  $R$  vào công thức (3.90) và chuyển về trong dạng sau:

$$\vec{\tau}_b = R \cdot C_D \cdot \left\| \vec{v}_b \right\| \vec{v}_b$$

Tại những nơi mà lớp biên đáy không xác định thì có thể lấy gần đúng  $C_D \sim 0,026$ .

- Đối với động năng rôi:

Giá trị động năng rôi tại lớp biên đáy được xác định theo quy luật rôi lớp

biên, trong bài toán này lớp biên đáy được mô phỏng theo định luật logarit. Như vậy động năng rối có thể tính theo ứng suất rối đáy, theo Blumert and Mellor (1987) thì mối tương quan này có thể viết:

$$k_b = B_1^{1/3} \|\vec{\tau}_b\|, \quad B_1 = 16,6 \quad (3.91)$$

- Đối với các thông lượng nhiệt và muối:

Không có trao đổi qua đáy, các thông lượng cho bằng 0.

#### c. Điều kiện biên lỏng

Điều kiện biên lỏng được xây dựng theo nguyên lý đảm bảo sự liên kết giữa trong và ngoài miền tính. Sử dụng phương pháp thể tích hữu hạn cho phép dễ dàng hơn việc triển khai đối với cả hai điều kiện giữ nguyên giá trị hoặc thông lượng qua biên. Việc xây dựng các điều kiện biên cần đảm bảo không những tính liên tục của thông lượng mà có khả năng thể hiện miền ngoài như một hệ tích cực áp đặt lên hệ trong hoặc như hệ thụ động chịu tác động của hệ trong.

#### d. Điều kiện biên cứng

Tương tự như ở đáy, đối với các biến vô hướng, các thông lượng theo hướng pháp tuyến của các biên vô hướng đều bị triệt tiêu và cho bằng 0, còn đối với vận tốc thì áp dụng luật ma sát biên:

$$\nu \frac{\partial}{\partial n} \left( \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{u}) \right) = C_D^C \|\vec{u}\| \vec{u} \quad (3.92)$$

với  $C_D^C$  là hệ số ma sát.

Tại các cửa sông thì điều kiện biên riêng được áp dụng không tuân thủ điều kiện biên cứng. Điều này sẽ được trình bày kỹ trong phần mô hình số.

## Chương 4

### SÓNG TRONG DẢI VEN BỜ

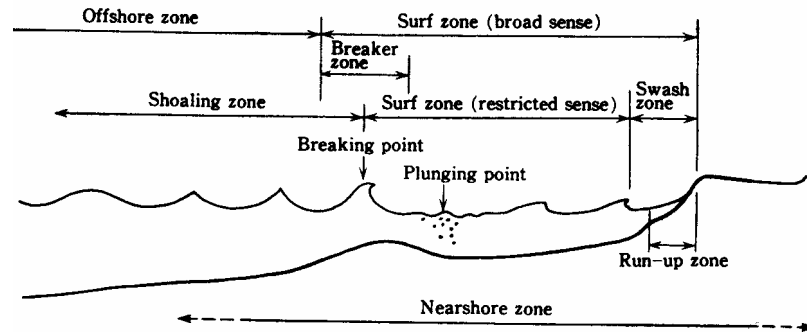
#### Giới thiệu

Gió thường xuyên tồn tại trên biển, dưới tác động của gió trên mặt biển, sóng được hình thành và lan truyền đi xa trên biển đến các vùng bờ. Sóng gió thường là các sóng ba chiều không đồng đều và có tính ngẫu nhiên về biên độ, chu kỳ và hướng truyền. Trong nhiều cách mô tả sóng ngẫu nhiên thì cách đơn giản nhất thường dùng đó là đơn giản các sóng về một sóng đơn đặc trưng (Representative Monochromatic Wave) có chu kỳ, độ cao và hướng truyền xác định.

Đối với sóng ngoài khơi để phát triển nhờ năng lượng của gió thì có ba nhân tố của trường gió phải thỏa mãn đó là: Tốc độ gió lớn hơn một giá trị tới hạn nào đó, khoảng dài gió và thời gian gió thổi phải đủ dài. Sau khi rời khỏi vùng gió tác động, sóng gió đã phát triển truyền đi trên biển, phân tán ra mọi phía và một phần nhỏ năng lượng của sóng bị mất đi do ma sát nhớt. Khi các sóng tiếp cận tới các vùng bờ chúng chuyển thành sóng lừng có dạng hai chiều với chu kỳ đồng đều và các đỉnh sóng tạo thành luống.

Do độ sâu giảm đi theo hướng vào bờ, các sóng lừng mang đặc tính của sóng nước nông tương tự như các sóng có chu kỳ không đổi. Vùng nước nông được xem là bắt đầu khi sóng cảm nhận được nền đáy và đáy biển ảnh hưởng lên quá trình truyền sóng. Có nghĩa là, ngược lại đáy biển cũng chịu ảnh hưởng tác động từ chuyển động sóng. Nếu trường gió tác động thổi qua vùng bờ thì mặt biển nổi sóng gồm nhiều đỉnh sóng không đồng đều tiến vào bờ, khi đó sự biến dạng sóng vùng nước nông là rất phức tạp.

Những đặc tính nổi bật của quá trình chuyển hoá sóng ở vùng nước nông là biến dạng sóng (Wave Shoaling) và khúc xạ sóng (Wave Refraction). Khúc xạ sóng là kết quả của sự thay đổi tốc độ truyền sóng như là hàm của độ sâu nước, tốc độ dòng chảy và chu kỳ sóng. Các sóng bị khúc xạ thay đổi hướng truyền làm cho các dải đỉnh sóng có xu thế song song với các đường đẳng sâu. Biến dạng sóng là kết quả thay đổi tốc độ truyền của dòng năng lượng sóng, độ sâu càng nông thì tốc độ dòng năng lượng càng giảm đi, do độ cao sóng tỉ lệ thuận với căn bậc hai của năng lượng sóng nên độ cao sóng phải tăng lên khi sóng tiến đến vùng nước nông hơn để đảm bảo năng lượng sóng được bảo toàn và cuối cùng sóng bị vỡ tại điểm mà độ cao sóng xấp xỉ bằng độ sâu. Điểm này được gọi là điểm sóng đổ (breaking point) đánh dấu điểm cuối của vùng nước nông (Shoaling zone) và bắt đầu của vùng sóng đổ (Surf zone). (xem hình 4.1) . Nhìn chung, điểm đổ của một chuỗi sóng không phải là một điểm cụ thể mà là một vùng bởi vì điểm sóng đổ bị dịch chuyển theo từng sóng tới do sự không đồng nhất của sóng tới và sự phản xạ của bờ.



Hình 4.1 Sóng trong vùng ven bờ

Trong hình 4.1 các thuật ngữ có ý nghĩa như sau: offshore zone: vùng khơi; Shoaling zone: vùng nước nông; Surf zone: vùng sóng đổ; Swash zone: vùng sóng vỗ bờ; Breaking point: điểm sóng đổ; Plunging point: điểm sóng đổ sập xuống. Run-up zone: vùng sóng leo; Near-shore zone: vùng ven bờ. Theo các nghiên cứu thì ảnh hưởng của đáy lên chuyển động sóng quan sát được khi tỷ lệ giữa độ sâu và độ dài sóng nước sâu nhỏ hơn 0,5, tức là khi độ sâu nhỏ hơn 1/2 độ dài sóng. Như thế khi sóng lan truyền vào vùng bờ, dưới tác động ảnh hưởng của nền đáy như độ dốc, sự giảm độ sâu, độ gồ ghề của đáy, sóng bị thay đổi các đặc trưng của nó. Trên thực tế, khi sóng truyền vào vùng nước nông thì xảy ra các hiện tượng: biến dạng sóng, khúc xạ sóng, tán xạ sóng, phản xạ sóng, phá huỷ sóng và tiêu tán năng lượng. Các mô tả chi tiết về các hiện tượng này sẽ được trình bày trong các mục tiếp theo của chương này. Để mô tả kích thước, đặc trưng của các sóng ta sử dụng các khái niệm qui ước sau:

$H$  : độ cao sóng – khoảng chênh lệch giữa đỉnh sóng và chân sóng;  $L$ : độ dài sóng – khoảng cách giữa hai đỉnh sóng (hoặc chân sóng) kế tiếp;  $T$ : chu kỳ sóng – khoảng thời gian để hai đỉnh sóng kế tiếp đi qua một điểm cố định;  $C$ : tốc độ truyền sóng,  $C = \frac{L}{T}$ .

Tỉ số  $H/L$  được gọi là độ dốc sóng. Đại lượng  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  là tần số góc của sóng. Đại lượng  $\frac{H}{h}$  là độ cao tương đối hay độ cao không thứ nguyên của sóng. Đại lượng  $\frac{h}{L}$  là độ sâu tương đối hay độ sâu không thứ nguyên. Trong đó,  $h$  là độ sâu nước. Trên thực tế sóng gió trên biển có chu kỳ bậc  $10^{-1}$  và là loại sóng phổ biến nhất trên đại dương và tổng năng lượng của nó cũng lớn nhất.

## 4.1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG SÓNG

### 4.1.1 Phương trình sóng thế

Để mô tả chuyển động của sóng nước, ta giả thiết: nước là chất lỏng không nén; chuyển

động sóng là chuyển động không xoáy (do lực đàn hồi chính gây ra chuyển động sóng là lực thế trọng trường). Do vậy, tại một điểm xác định, các phương trình Navier-Stokes và phương trình liên tục có dạng:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) + \nu \nabla^2 V \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (4.2)$$

Trong đó:  $V(X,t) = (u,v,w)$  là véc tơ vận tốc ;  $p(X,t)$  là áp suất;  $g$  là gia tốc trọng trường;  $X=(x,y,z)$  là toạ độ không gian;  $\nu$  là hệ số nhớt động học;

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ là toán tử Nabla;}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta ; \Delta \text{ được gọi là toán tử Laplace.}$$

Trong chuyển động sóng, giá trị của  $\nu$  trong nước khá nhỏ cỡ  $10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$ , do đó một cách xấp xỉ ta bỏ qua thành phần cuối trong phương trình chuyển động và viết lại dưới dạng:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) \quad (4.3)$$

Do chuyển động sóng xét ở đây là chuyển động không xoáy nên ta có thể biểu diễn vận tốc  $V$  theo các giá trị Gradient của thế vận tốc  $\Phi$  dưới dạng:

$$V = \nabla \Phi \quad (4.4)$$

và

$$\nabla \times V = 0 \quad (4.5)$$

Sử dụng biểu thức (4.4) thế vào phương trình liên tục ta thu được phương trình Laplace:

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.6)$$

Ta sử dụng đẳng thức toán học trong giải tích véc tơ

$$V \cdot \nabla V = \nabla \frac{V^2}{2} - V \times (\nabla \times V) \quad (4.7)$$

và biểu thức (4.4), phương trình chuyển động (4.3) có thể viết lại như sau:



$$\frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \Phi|^2 - V \times (\nabla \times V) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right)$$

Để ý đến đẳng thức (4.5) thì phương trình này lại có thể viết lại thành

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \Phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (4.8)$$

Phương trình (4.8) chứng tỏ rằng biểu thức trong ngoặc là một hằng số theo không gian và chỉ phụ thuộc vào thời gian. Vì vậy, ta có thể viết như sau:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \Phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (4.9)$$

Ta đặt  $\Phi_1 = \Phi - \int C(t)dt$ , khi đó phương trình (4.9) có thể viết lại dưới dạng:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \Phi_1|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$

Tương tự thay  $\Phi_1$  vào phương trình Laplace ta có:

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0$$

Như vậy hằng số  $C(t)$  bị hấp phụ hoàn toàn vào trong hàm thế vận tốc mà dạng của các phương trình liên tục và phương trình chuyển động không thay đổi. Để tiện ta đổi  $\Phi$  cho  $\Phi_1$  và như thế ta có dạng tổng quát của hai phương trình trên như sau:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \Phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (4.10)$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.11)$$

Phương trình (4.10) chính là phương trình Bernoulli. Ta thấy nếu biết giá trị của thế vận tốc  $\Phi$  từ phương trình (4.11) thì có thể xác định được trường áp suất  $p$  từ phương trình (4.10).

Để giải được hệ các phương trình (4.10) và (4.11) ta cần thiết phải biết các phương trình trên các biên mặt phân cách nước – không khí và tại đáy. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét và thiết lập các phương trình trên các biên này.

#### 4.1.2. Các phương trình trên biên

Đối với chuyển động sóng nước trên mặt biển thì hai biên cần quan tâm là biên giữa nước

và không khí và biên tại đáy biển.

Tại hai mặt biên này ta giả thiết nước chỉ chuyển động dọc theo biên, do đó tại mặt biên phân cách nước – không khí sẽ là điều kiện biên động học còn tại đáy sẽ là điều kiện biên không thấm.

a. Biên tại mặt biển.

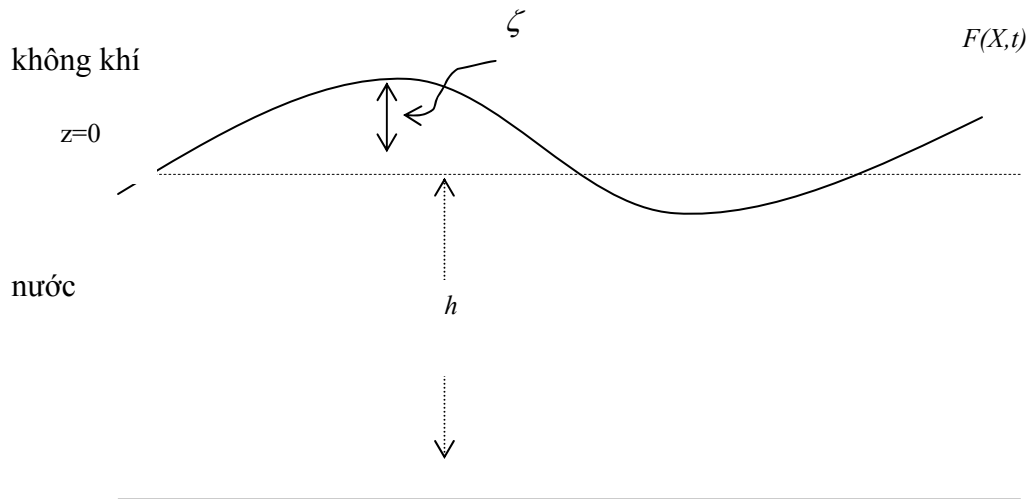
Ta sử dụng biểu thức so sánh giữa độ dịch chuyển  $\zeta$  của bề mặt với mực  $z$  (xem hình 4.1), phương trình biểu diễn bề mặt như sau:

$$F(X, t) = z - \zeta(x, y, t) \quad (4.12)$$

Như thế tại  $z = \zeta$  ta có:

$$F(X, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0 \quad |_{z=\zeta} \quad (4.13)$$

Gọi  $q$  là tốc độ tại một điểm trên mặt biên; Sau một khoảng thời gian  $dt$  thì phương trình bề mặt được mô tả như sau:



Hình 4.1 Minh hoạ mặt biên động học

$$F(X + qdt, t + dt) = 0 = F(X, t) + \left( \frac{\partial F}{\partial t} + q \cdot \nabla F \right) dt + O(dt)^2$$

Bỏ qua đại lượng vô cùng nhỏ bậc hai ta có thể xấp xỉ có:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + q \cdot \nabla F = 0 \quad (4.14)$$

Với giả thiết hạt nước trên biên chuyển động không bứt ra khỏi mặt biên nên tốc độ của hạt nước phải bằng với tốc độ của mặt biên,  $V=q$ . Ta có:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + q \cdot \nabla F = \frac{\partial F}{\partial t} + V \cdot \nabla F = 0 \quad (4.15)$$

Thay biểu thức bề mặt biên vào phương trình (4.15) ta thu được:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{tại } z = \zeta \quad (4.16)$$

Phương trình (4.16) chính là điều kiện biên động học tại mặt biên (Kinetic boundary condition).

Nếu xét cân bằng lực tại biên phân cách nước – không khí ta có điều kiện biên động lực học. Ta giả thiết bề mặt phân cách biên – khí quyển không có khối lượng, sức căng của bề mặt nhỏ có thể bỏ qua. Như thế áp suất từ hai phía của mặt phân cách nước - không khí phải cân bằng và bằng áp suất khí quyển  $P_a$ . Sử dụng phương trình Bernoulli (4.10) tại mặt  $z = \zeta$  ta có:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \Phi|^2 + \frac{P_a}{\rho} + gz = 0 \quad (4.17)$$

Phương trình (4.17) được gọi là điều kiện biên động lực học.

b. Biên tại đáy.

Với điều kiện biên không thấm được giả thiết ta có:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (4.18)$$

Trong đó  $n$  nằm trên đường pháp tuyến với mặt biên.

Tương tự như cách biểu diễn mặt biên mặt thoáng nước – không khí, phương trình biểu diễn mặt biên tại đáy  $z = -h$  có dạng:

$$S_b = z + h(x, y) = 0 \quad \Big|_{z=-h} \quad (4.19)$$

Do đó phương trình trên biên sẽ là:

$$V \cdot \nabla S_b = 0 \quad (4.20)$$

Thay phương trình (4.19) vào (4.20) ta thu được

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ tại } z = -h \quad (4.21)$$

Như vậy, hệ các phương trình (4.10), (4.11), (4.16), (4.17) và (4.21) cho phép mô tả chuyển động của sóng thế trên bề mặt chất lỏng không nén.

Để ý các phương trình trên biên ta thấy chúng đều là các phương trình phi tuyến nên việc giải hệ các phương trình nói trên thực tế là cực kỳ khó khăn. Để có thể thu được nghiệm dễ dàng hơn người ta đã sử dụng những phép xấp xỉ đơn giản bớt cho các điều kiện biên này. Sau đây chúng ta xem xét lý thuyết sóng biên độ nhỏ hay còn gọi là lý thuyết sóng tuyến tính cũng với việc sử dụng giả thiết và phép xấp xỉ cho các phương trình trên biên.

### 4.1.3. Lý thuyết sóng tuyến tính

a. Phép xấp xỉ tuyến tính cho sóng biên độ nhỏ

Giả thiết sóng có biên độ nhỏ so với độ dài sóng:

$$\frac{H}{L} \ll 1$$

khi đó ta đi đánh giá bậc đại lượng của các số hạng trong phương trình trên biên. Trước hết ta qui các thành phần trong các phương trình (4.16) và (4.17) về dạng không thứ nguyên.

Sử dụng các đại lượng đặc trưng sau:

$$\frac{L}{2\pi} \text{ đặc trưng cho độ dài } (x, y, z, h)$$

$$\omega^{-1} = \frac{T}{2\pi} \text{ đặc trưng cho thời gian } t$$

$A$  đặc trưng cho dao động mặt nước  $\zeta$

Trong đó các đại lượng  $L, \omega, A$  lần lượt là các đại lượng thông thường: độ dài sóng, tần số góc và biên độ của dao động sóng.

Từ các đại lượng đặc trưng trên ta suy ra:

$$V \sim A.\omega \text{ và do đó } \Phi \sim A.\omega.\frac{L}{2\pi}$$

Nếu ta ký hiệu dấu ' ở trên đầu của các đại lượng không thứ nguyên thì ta sẽ có:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi' \cdot \frac{A\omega L}{2\pi} \\ (x, y, z, h) &= (x', y', z', h') \cdot \frac{L}{2\pi} \\ t &= t' \cdot \frac{1}{\omega} \\ \zeta &= \zeta' \cdot A \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Thế các biểu thức (4.22) vào các phương trình trên biên (4.16) và (4.17) ta thu được:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \varepsilon \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial y'} \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right) = \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + \frac{2\pi g}{\omega^2 L} \zeta' + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \Phi'|^2 = -P'_a = -\frac{2\pi}{\rho A \omega^2 L} P_a \quad (4.24)$$

Trong đó

$$\varepsilon = \frac{2\pi A}{L} = \pi \frac{H}{L}$$

Theo giả thiết thì  $\varepsilon \ll 1$ . Trên thực tế thì độ cao sóng H có bậc là mét còn độ dài sóng thì có bậc là trăm mét do đó phương trình (4.23) và (4.24) có thể xấp xỉ thành:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} = \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + \frac{2\pi g}{\omega^2 L} \zeta' = -\frac{2\pi}{\rho A \omega^2 L} P_a \quad (4.26)$$

b. Hệ phương trình chuyển động sóng.

Thay ngược các biểu thức (4.22) vào phương trình (4.25) và (4.26) ta thu được:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta = -\frac{P_a}{\rho} \quad (4.28)$$

Kết hợp phương trình (4.27) và (4.28) với các phương trình (4.10), (4.11) và điều kiện biên đáy (4.21) ta có hệ các phương trình mô tả chuyển động sóng theo lý thuyết sóng tuyến tính.

#### 4.1.4. Sóng tiến trọng lực có biên độ nhỏ

Ta xét sóng phẳng hai chiều chuyển động trong mặt phẳng  $xoz$  vận tốc và áp suất không phụ thuộc vào tọa độ trục  $oy$ . Ta sẽ tìm các thể vận tốc trên hướng truyền sóng  $ox$ .

Hệ phương trình mô tả chuyển động sóng theo lý thuyết sóng tuyến tính sẽ là:

Do ta xét chuyển động sóng không chịu tác động của áp suất khí quyển nên ta tìm hàm thể vận tốc ứng với  $P_a=0$ . Do vậy hệ phương trình có dạng:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad -h < z < 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad z = -h \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad z = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\zeta \quad z = 0 \quad (4.32)$$

Giả sử sóng tiến là các dao động mặt nước dạng:

$$\zeta = A \cos k(x - Ct) \quad (4.33)$$

ta đi tìm nghiệm của phương trình (4.29) dưới dạng:

$$\Phi = f(z) \sin k(x - Ct) = f(z) \sin(kx - \omega t) \quad (4.34)$$

Trong đó  $k = \frac{2\pi}{L}$  là số sóng.

Thế phương trình (4.34) vào (4.29) ta có:

$$-f(z)k^2 \sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0$$

Ta suy ra

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} - k^2 f(z) = 0 \quad (4.35)$$

Giải phương trình (4.35), ta đi tìm nghiệm dưới dạng  $e^{rz}$ ; Thay vào (4.35) ta có:

$$r^2 e^{rz} - k^2 e^{rz} = 0$$

Phương trình (4.35) có nghiệm dạng:

$$f(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} \quad (4.36)$$

Trong đó  $C_1, C_2$  là các hằng số tùy ý cần xác định bằng các điều kiện biên.

Từ điều kiện biên:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad z = -h$$

Coi rằng sự biến đổi độ sâu theo phương ngang không đáng kể thì có:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h$$

Thế biểu thức (4.34) vào phương trình này và sử dụng (4.36) cho  $f(z)$  ta có:

$$\sin(kx - \omega t) \cdot (C_1 k e^{-kh} - C_2 k e^{kh}) = 0$$

$$C_1 e^{-kh} - C_2 e^{kh} = 0$$

$$\text{Đặt } \frac{C}{2} = C_1 e^{-kh} \Rightarrow C_2 e^{kh} = \frac{C}{2}$$

Từ đó ta thu được  $f(z) = \frac{C}{2} (e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}) = C \cdot \text{ch } k(z+h)$  và hàm thế vận tốc là:

$$\Phi = C \cdot \text{ch } k(z+h) \sin(kx - \omega t)$$

Biểu thức của hàm thế này phải thỏa mãn phương trình điều kiện biên (4.32), ta có:

$$-\omega C \text{ch } k(z+h) \cos(kx - \omega t) = -gA \cos(kx - \omega t)$$

Vậy  $C = \frac{gA}{\omega \operatorname{ch} k(z+h)}$  tại  $z=0$

Như vậy nghiệm thu được là:

$$\Phi = \frac{gA}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(kx - \omega t) \quad (4.37)$$

Thay (4.37) và (4.33) vào phương trình (4.31) ta có:

$$\omega A \sin(kx - \omega t) = \frac{gAk}{\omega} \frac{\operatorname{sh} kh}{\operatorname{ch} kh} \sin(kx - \omega t)$$

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh \quad (4.38)$$

Các thành phần vận tốc của chuyển động sẽ là:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos(kx - \omega t) \quad (4.39)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\operatorname{sh} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(kx - \omega t) \quad (4.40)$$

Ta đi tìm quỹ đạo hạt nước trong chuyển động sóng.

Gọi điểm  $(x_0, z_0)$  là điểm mà hạt nước ở trạng thái chưa bị kích thích chuyển động sóng, ta có:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z_0+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\operatorname{sh} k(z_0+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$x(t) = x_0 + \delta(t)$$

$$z(t) = z_0 + \gamma(t)$$

Ta lại có:

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{\partial \Phi[x(t), z(t); t]}{\partial x}$$



$$\frac{dz}{dt} = w = \frac{\partial \Phi[x(t), z(t); t]}{\partial z}$$

Suy ra:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial \Phi(x_0 + \delta, z_0 + \gamma; t)}{\partial x} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x_0, z_0} + \delta \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{x_0, z_0} + \gamma \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_{x_0, z_0} + \dots$$

Bỏ qua các thành phần bậc cao của biểu thức trên ta thu được:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\text{ch } k(z_0 + h)}{\text{ch } kh} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\text{sh } k(z_0 + h)}{\text{ch } kh} \sin(kx_0 - \omega t)$$

Lấy tích phân theo t ta thu được:

$$\delta = x - x_0 = -\frac{gAk}{\omega^2} \frac{\text{ch } k(z_0 + h)}{\text{ch } kh} \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$\gamma = z - z_0 = \frac{gAk}{\omega^2} \frac{\text{sh } k(z_0 + h)}{\text{ch } kh} \cos(kx_0 - \omega t)$$

Bình phương hai vế các biểu thức này rồi cộng lại có để ý đến biểu thức (4.38) ta có:

$$\frac{(x - x_0)^2}{\left[ A \frac{\text{ch } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh} \right]^2} + \frac{(z - z_0)^2}{\left[ A \frac{\text{sh } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh} \right]^2} = 1 \quad (4.41)$$

Như vậy chuyển động sóng của các sóng có biên độ nhỏ trong biển sâu hữu hạn h, các quỹ đạo chuyển động của hạt nước có dạng elip với các bán trục ngang là :

$$A \frac{\text{ch } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh} \text{ và bán trục đứng là } A \frac{\text{sh } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh}.$$

Khi tăng z theo độ sâu thì trục đứng giảm nhanh và tại đáy  $z_0 = -h$  thì  $\text{sh } k(z_0 + h) = 0$  và hạt nước chỉ chuyển động theo phương nằm ngang.

Trong trường hợp biển sâu vô hạn thì phương trình (4.41) trở thành:

$$\frac{(x-x_0)^2}{[Ae^{kz_0}]^2} + \frac{(z-z_0)^2}{[Ae^{kz_0}]^2} = 1 \quad (4.42)$$

Phương trình (4.42) cho ta thấy bán kính  $r = e^{kz_0}$  giảm theo độ sâu theo qui luật hàm mũ, quỹ đạo của chuyển động là những đường tròn.

#### 4.1.5. Tốc độ nhóm sóng và năng lượng sóng

##### a. Tốc độ nhóm sóng

Trong điều kiện tự nhiên, sóng biển không phải là một dao động sóng đơn mà là các dao động phức tạp chồng chất của rất nhiều sóng đơn.

Ta giả thiết có một nhóm sóng đơn có độ dài sóng khác nhau nhưng nằm trong một dải hẹp, xung quang giá trị số sóng  $k=k_0$ . Các sóng có biên độ  $A(k)$  và tần số góc  $\omega(k)$ . Như thế, các dao động bề mặt nước có thể biểu diễn dưới dạng như sau:

$$\zeta = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A(k)e^{i[kx-\omega(k)t]}dk \quad (4.43)$$

$$\text{Với } \frac{\Delta k}{k_0} \ll 1 \quad (4.44)$$

Trong đó  $A(k)$  là phổ biên độ tương ứng với  $k$ ;  $\omega(k)$  là tần số thỏa mãn biểu thức (4.38).

Khai triển Taylor hàm  $\omega(k)$  tại điểm  $k_0$  ta có:

$$\omega(k) = \omega(k_0 + k - k_0) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} + O(k - k_0)^2$$

$$\text{Ta ký hiệu } \xi = \frac{k - k_0}{k_0} \quad ; \quad \omega_0 = \omega(k_0) \text{ và } C_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \quad (4.45)$$

thì phương trình trên có thể viết lại:

$$\omega \approx \omega_0 + (k - k_0) \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \omega_0 + k_0 \xi C_g$$

$$k = k_0 \xi + k_0$$

Từ phương trình (4.44) ta thấy, nếu  $k$  nằm trong khoảng  $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$  thì  $\xi$  sẽ biến

đổi trong khoảng  $\left[-\frac{\Delta k}{k_0}, \frac{\Delta k}{k_0}\right]$ . Ta thay các biểu thức này vào phương trình (4.43) và đổi cận tích phân cho biến  $\xi$  ta có:

$$\zeta = \int_{-\Delta k/k_0}^{\Delta k/k_0} A(\xi k_0 + k_0) e^{i[(k_0 \xi + k_0)x - (\omega_0 + k_0 C_g)t]} k_0 d\xi$$

Trong dải hẹp  $\pm \Delta k$  thì ta có thể coi giá trị  $A(k) \cong A(k_0)$  do đó ta có thể viết lại:

$$\zeta \cong \int_{-\Delta k/k_0}^{\Delta k/k_0} A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \cdot e^{i[k_0 x - k_0 C_g t]} k_0 d\xi$$

$$\zeta \cong A(k_0) k_0 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{1}{i[k_0 x - k_0 C_g t]} e^{i[k_0 x - k_0 C_g t]} \left[ \frac{\Delta k_0}{k_0} \right]_{-\Delta k_0/k_0}^{\Delta k_0/k_0}$$

$$\zeta \cong A(k_0) \frac{k_0 [e^{i\Delta k(x - C_g t)} - e^{-i\Delta k(x - C_g t)}]}{i[k_0 x - k_0 C_g t]} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$$

Sử dụng đẳng thức:

$$e^{ix} - e^{-ix} = \cos x + i \sin x - \cos x + i \sin x = 2i \sin x$$

biểu thức của  $\zeta$  trở thành:

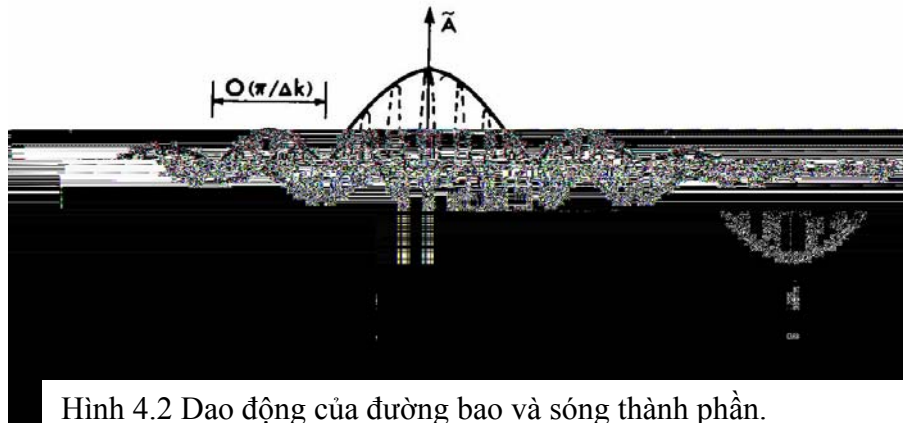
$$\zeta \cong 2A(k_0) \frac{\sin \Delta k(x - C_g t)}{x - C_g t} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$$

Đặt  $\tilde{A} = \frac{A(k_0)}{x - C_g t} \sin \Delta k(x - C_g t)$  ta có:

$$\zeta \cong \tilde{A} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (4.46)$$

Từ phương trình (4.46) ta thấy rằng: dao động của mặt nước như là một dao động dạng sin nhưng có biên độ biến đổi theo thời gian và không gian. Biên độ  $\tilde{A}$  biến đổi với tần số là  $C_g \Delta k$  nhỏ hơn rất nhiều so với tần số  $\omega_0$  của dao động sóng, tức là dao động của biên độ chậm hơn rất nhiều. Đường bao do biến đổi chậm của biên độ  $\tilde{A}$  là dạng của nhóm sóng và nó truyền

đi với tốc độ là  $C_g$ , còn dao động sóng thành phần truyền đi với tốc độ là  $C = \omega_0/k_0$  (xem hình 4.2). Như vậy  $C_g$  chính là tốc độ truyền của đường bao hay của nhóm sóng và nó được gọi là tốc độ nhóm sóng.



Hình 4.2 Dao động của đường bao và sóng thành phần.

Từ biểu thức

$$C_g = \frac{d\omega}{dk}$$

ta thay biểu thức (4.38) của tần số vào ta có:

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\omega} \left( g \operatorname{th} kh + \frac{gkh}{\operatorname{ch}^2 kh} \right)$$

$$C_g = \frac{1}{2} C \left( 1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh} \right)$$

$$C_g = \frac{1}{2} C \cdot n \quad (4.47)$$

$$n = 1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh} \quad (4.48)$$

$n$  được gọi là tham số nước nông.

$$\text{Tại biển sâu khi } kh \gg 1 \text{ thì } C_g \approx \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \left( \frac{g}{k} \right)^{1/2}$$

Tại vùng nước nông khi  $kh \ll 1$  thì  $C_g \approx C \approx (gh)^{1/2}$ . (4.49)

#### b. Năng lượng sóng

Xét năng lượng trung bình của chuyển động sóng trong một chu kỳ sóng trong cột chất lỏng có diện tích tiết diện đơn vị. Năng lượng  $E$  là tổng của động năng KE và thế năng PE

$$E = KE + PE$$

Động năng chứa trong cột chất lỏng là:

$$KE = \frac{\rho}{2} \overline{\int_{-h}^{\zeta} [V(X, t)]^2 dz} \quad (4.50)$$

Trong đó dấu  $\overline{\quad}$  phía trên của biểu thức có nghĩa là lấy trung bình theo thời gian qua một chu kỳ sóng thí dụ:

$$\overline{F} = \frac{1}{T} \int_0^T F dt \quad ; \quad T \text{ là chu kỳ của sóng.}$$

Giả thiết sóng là sóng biên độ nhỏ, ta có thể xấp xỉ:

$$KE \cong \frac{\rho}{2} \overline{\int_{-h}^0 (u^2 + w^2) dz} \quad (4.51)$$

Sử dụng các biểu thức của  $u$  và  $w$  từ kết quả của lý thuyết sóng tuyến tính:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \cos(kx - \omega t)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{ch } kh} \sin(kx - \omega t)$$

thay vào phương trình (4.51) ta có:

$$KE \cong \frac{\rho}{2} \left[ \int_{-h}^0 \left( \frac{gkA}{\omega \text{ch } kh} \right)^2 \text{ch}^2 k(z+h) dz \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt + \right. \\ \left. + \int_{-h}^0 \left( \frac{gAk}{\omega \text{ch } kh} \right)^2 \text{sh}^2 k(z+h) dz \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kx - \omega t) dt \right]$$

Ta thấy:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2}$$

Viết lại phương trình trên thành:

$$KE = \frac{\rho}{4} \left( \frac{gAk}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\text{ch}^2 kh^{-h}} \int_0^0 (\text{ch}^2 k(z+h) + \text{sh}^2 k(z+h)) dz$$

Sau khi thực hiện tích phân và đơn giản bớt, ta thu được biểu thức của động năng như sau:

$$KE = \frac{1}{4} \rho g A^2 = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (4.52)$$

Thế năng của cột nước được biểu diễn như sau:

$$PE = \int_0^{\zeta} \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g \overline{\zeta^2} \quad (4.53)$$

Với  $\zeta = A \cos(kx - \omega t)$  ta có:

$$\overline{\zeta^2} = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{A^2}{2}$$

Thay vào phương trình (4.53) ta có biểu thức của thế năng là:

$$PE = \frac{1}{4} \rho g A^2 = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (4.54)$$

Năng lượng sóng trong cột nước đơn vị trung bình qua một chu kỳ sóng sẽ có dạng:

$$E = KE + PE = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (4.55)$$

c. Dòng năng lượng sóng.

Ta xét một mặt cắt thẳng đứng có độ rộng đơn vị dọc theo đỉnh sóng. Khi đó dòng năng lượng đi qua mặt cắt này chính là năng lượng trung bình do áp suất động của sóng gây ra trong một chu kỳ sóng. Ta có biểu thức mô tả dòng năng lượng sóng như sau:

$$EFLUX = \overline{\int_{-h}^{\zeta} p(x,t).u(x,t)dz} \quad (4.56)$$

Trong đó EFLUX là dòng năng lượng sóng; p(x,t) là áp suất động của chuyển động sóng.

Coi sóng có biên độ nhỏ, ta sử dụng các kết quả của lý thuyết sóng tuyến tính:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho g A \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \cos(kx - \omega t) \quad (4.57)$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{gAk}{\omega} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \cos(kx - \omega t) \quad (4.58)$$

thay vào phương trình (4.56) ta có:

$$EFLUX = \overline{\int_{-h}^{\zeta} p(x,t).u(x,t)dz} \approx \overline{\int_{-h}^0 p(x,t).u(x,t)dz}$$

$$EFLUX \approx \rho \frac{(gA)^2 k}{\omega} \frac{1}{\text{ch}^2 kh} \frac{1}{2} \int_{-h}^0 \text{ch}^2 k(z+h) dz$$

Sau khi đơn giản hoá và sử dụng phương trình (4.47), (4.48) ta dễ dàng nhận được:

$$EFLUX = \frac{1}{2} \rho g A^2 \left( \frac{\omega}{k} \cdot \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) \right) = E.C_g \quad (4.59)$$

Phương trình (4.59) cho thấy tốc độ nhóm sóng  $C_g$  còn có ý nghĩa là tốc độ truyền năng lượng của chuyển động sóng.

## 4.2. BIẾN DẠNG SÓNG

Khi sóng truyền vào vùng nước nông thì các đặc trưng của sóng bị thay đổi như độ cao,

độ dài, tốc độ truyền sóng. Nguyên nhân do ảnh hưởng của sự giảm độ sâu đáy. Theo lý thuyết sóng tuyến tính, ta có các mối liên hệ sau:

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh \quad (4.60)$$

Từ các biểu thức:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $C = \frac{\lambda}{T}$  thay vào (4.60), ta có:

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda} \quad (4.61)$$

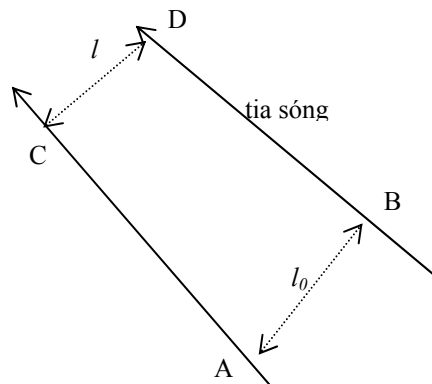
$$C = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda} \quad (4.62)$$

Tại biển sâu, ta có:

$$\lambda_o = \frac{gT^2}{2\pi}, \quad C_o = \frac{gT}{2\pi} \quad (4.63)$$

trong đó:  $\omega$ : tần số sóng;  $T$ : chu kỳ sóng;  $\lambda$ : bước sóng;  $h$ : độ sâu của nước;  $C$ : tốc độ sóng;  $K$ : số sóng. Trên thực tế, khi sóng truyền vào vùng nước nông ta quan sát được độ cao sóng tăng dần lên khi độ sâu giảm đi. Độ sâu càng giảm thì độ cao sóng càng tăng nhanh và đạt đến một giá trị cực đại, sau đó, sóng bị đổ nhào và năng lượng của nó tiêu tán đáng kể do quá trình đổ nhào này. Để thiết lập mối quan hệ giữa độ cao sóng trong vùng nước nông với độ cao sóng ngoài khơi, ta giả thiết rằng:

- Dòng năng lượng sóng giữa hai tia sóng kề nhau được bảo toàn.
- Bỏ qua mất mát năng lượng sóng do ma sát đáy.



Hình 4.3 Sơ đồ hai tia sóng.



Trên hình 4.3, ta thấy dòng năng lượng sóng truyền qua đoạn AB là  $E_o U_o l_o$  và qua đoạn CD là  $E U l$ .

$$E U l = E_o U_o l_o \quad (4.64)$$

$$\text{Với } E_o = \rho g H_o^2 / 8, \quad E = \rho g H^2 / 8;$$

$$U_o = C g_o = C_o / 2; \quad U = C g = C \cdot n$$

$$n = \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right)$$

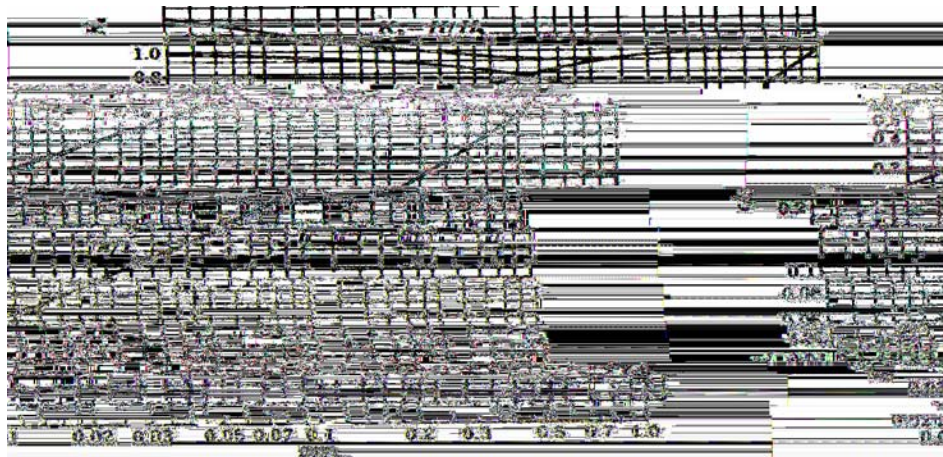
Thay vào (4.64) ta thu được:

$$\frac{H}{H_o} = \left( \frac{l_o}{l} \right)^{1/2} \left( \frac{C_o}{C} \left( 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right)^{-1} \right)^{1/2} \quad (4.65)$$

Ta ký hiệu:

$$K_s = \left( \frac{C_o}{C} \left( 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right)^{-1} \right)^{1/2}$$

đại lượng này được gọi là hệ số nước nông. Như vậy nếu biết các đặc trưng của sóng ngoài khơi và tỷ số  $l_o/l$  thì độ cao sóng tại một điểm xác định trong vùng nước nông có thể tính theo công thức (4.65). Các tính toán hệ số nước nông theo độ sâu không thứ nguyên  $h/\lambda_o$  được vẽ trên giản đồ hình 4.4.



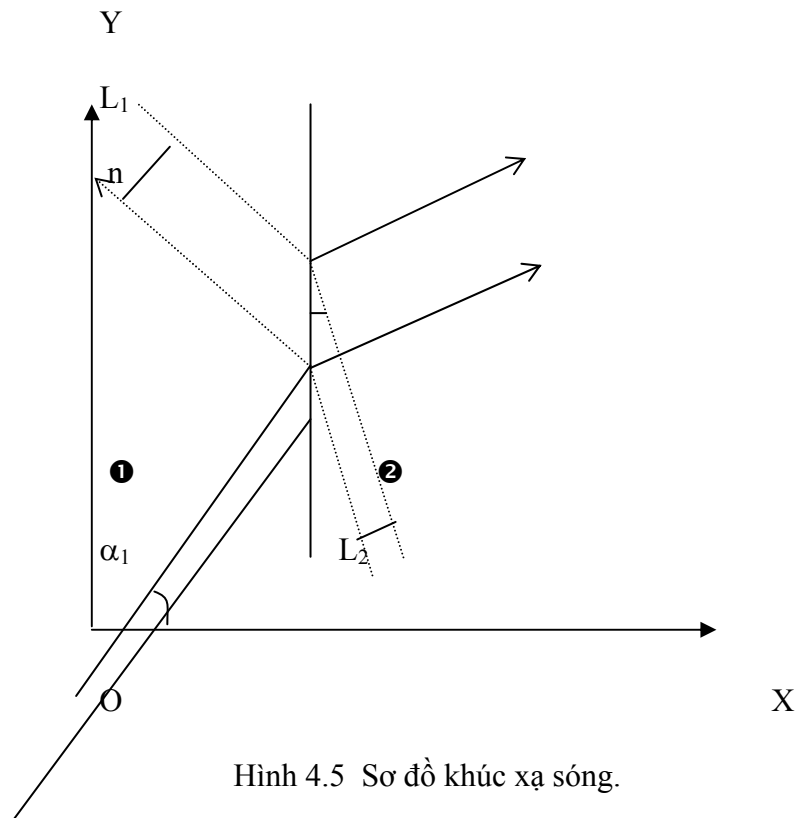
Hình 4.4 Các đặc trưng quan hệ với độ sâu không thứ nguyên theo lý thuyết sóng tuyến tính.

### 4.3. KHÚC XẠ SÓNG

Khi quan sát sóng truyền từ khơi vào vùng nước nông hơn, ta thấy hướng truyền của sóng dần dần dịch chuyển, sóng trở nên trật tự hơn tạo thành từng luồng sóng và các đường nối đỉnh sóng có xu thế uốn cong dần theo đường đẳng sâu. Từ phương trình (4.62) cho thấy tốc độ truyền sóng phụ thuộc vào độ sâu của nước. Do tốc độ  $C$  giảm khi độ sâu giảm nên độ dài sóng cũng giảm đi tỉ lệ với tốc độ truyền sóng. Khi sóng truyền vào bờ theo hướng lệch với pháp tuyến đường đẳng sâu đáy một góc nào đó thì xuất hiện rõ sự thay đổi tốc độ truyền sóng dọc theo đỉnh sóng bởi vì phần sóng ở vùng nước sâu hơn sẽ di chuyển nhanh hơn phần sóng ở vùng nước nông hơn. Sự thay đổi này làm cho đỉnh sóng có xu thế uốn cong theo đường đẳng sâu đáy. Hiện tượng thay đổi hướng truyền của sóng này được gọi là sự khúc xạ sóng, nó phụ thuộc vào mối quan hệ giữa độ sâu và độ dài sóng. Để giải thích hiện tượng khúc xạ sóng bằng biểu thức toán học, chúng ta xét vùng bờ thoải có đường đẳng sâu song song, sóng truyền vào nghiêng một góc  $\alpha_0$  so với pháp tuyến của đường đẳng sâu đáy. Ta đặt trục  $OX$  từ ngoài khơi vào bờ, trục  $OY$  dọc theo bờ (hình 4.5). Sau một khoảng thời gian  $dt$  sóng đi được một đoạn  $L_1$  trong vùng 1 và một đoạn  $L_2$  trong vùng 2. Do đó các tốc độ trong vùng 1 và vùng 2 sẽ là:

$$C_1 = \frac{L_1}{dt} = \frac{S \cdot \sin \alpha_1}{dt}$$

$$C_2 = \frac{L_2}{dt} = \frac{S \cdot \sin \alpha_2}{dt}$$



Hình 4.5 Sơ đồ khúc xạ sóng.

Ta có:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad (4.66)$$

Như vậy tốc độ truyền sóng tuân theo luật Snell.

Nếu ta áp dụng mối quan hệ cho vùng nước sâu hơn, sâu hơn nữa... thì ta sẽ có mối quan hệ giữa tốc độ và hướng truyền sóng tại một vùng cụ thể so với vùng nước sâu như sau:

$$\frac{C}{C_o} = \frac{\sin \alpha_o}{\sin \alpha} \quad (4.67)$$

Để áp dụng cho điều kiện đường đẳng sâu thực, ta cần mở rộng công thức (4.66) dưới dạng vi phân. Ta xét tia sóng truyền theo phương S và luống sóng theo phương n (xem hình 4.6) ta có:

Theo phương S:

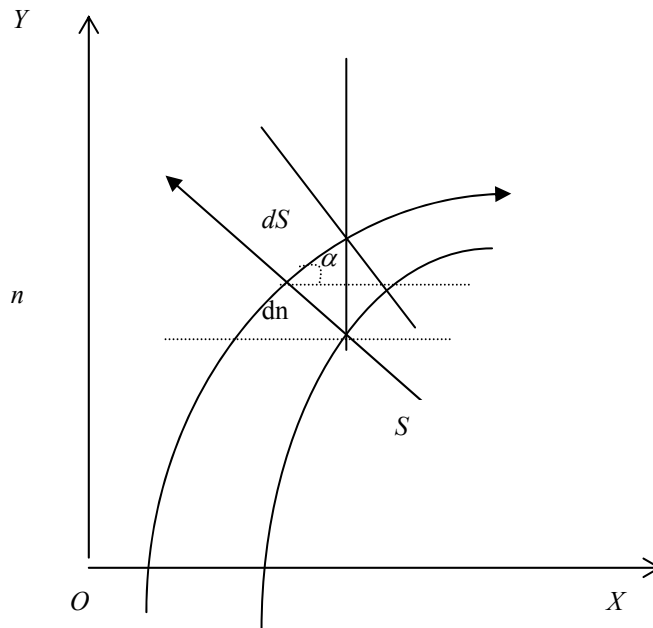
$$dx = dS \cos \alpha$$

$$dy = dS \sin \alpha$$

Theo phương n:

$$dx = -dn \sin \alpha$$

$$dy = dn \cos \alpha$$



Hình 4.6 Sơ đồ khúc xạ của tia sóng

Từ công thức (4.66) ta có:

$$\sin\alpha / C = \text{const}$$

Lấy đạo hàm biểu thức trên theo  $dS$  ta thu được:

$$-\frac{\sin\alpha}{C^2} \frac{dC}{dS} + \frac{\cos\alpha}{C} \frac{d\alpha}{dS} = 0$$

$$\frac{d\alpha}{dS} = \frac{\tan\alpha}{C} \frac{dC}{dS} = -\frac{1}{C} \frac{dC}{dn} \quad (4.68)$$

Ta dễ dàng thấy sự thay đổi khoảng cách giữa các tia sóng là do khúc xạ sóng. Từ biểu thức (4.65) ta có thể viết lại dưới dạng:

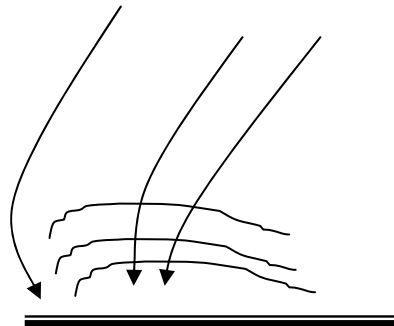
$$\frac{H}{H_o} = \sqrt{\frac{l_o}{l}} \sqrt{\frac{C_o}{C.n}} = K_r K_s \quad (4.69)$$

trong đó  $K_r$  gọi là hệ số khúc xạ.

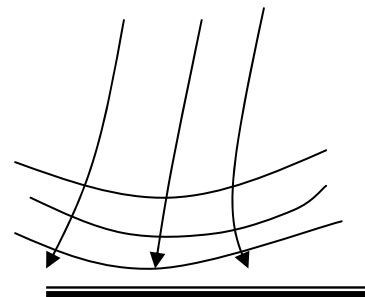
Từ biểu thức (4.61) (Dispersion relation) của lý thuyết sóng tuyến tính ta có thể xác định được các vận tốc sóng  $C$  tại các độ sâu cho trước khi biết chu kỳ sóng, và hệ số  $K_s$  có thể xác định tiếp theo đó.

Để xác định hệ số  $K_r$  ta cần xây dựng các tia sóng. Việc xây dựng các tia sóng phụ thuộc vào các góc khúc xạ sóng tại các điểm cụ thể. Do vậy, các góc khúc xạ sóng cần thiết phải biết, để thu được các góc khúc xạ ta có thể giải phương trình (4.68).

Nếu khúc xạ sóng dẫn đến các tia sóng có xu thế xít lại (hội tụ) thì hệ số  $K_r$  tăng, và ngược lại nếu các tia sóng có xu thế tăng khoảng cách (phân kỳ) thì hệ số  $K_r$  giảm. Trên thực tế những vùng có địa hình đường đẳng sâu uốn cong lõm sẽ làm các tia sóng hội tụ và kết quả độ cao sóng ở đó tăng lên (hình 4.7), những vùng có địa hình đường đẳng sâu uốn cong lồi sẽ làm các tia sóng phân kỳ và kết quả độ cao sóng ở đó giảm đi (hình 4.8).



Hình 4.7 Các tia sóng hội tụ



Hình 4.8 Các tia sóng phân kỳ

Trên thực tế, sự khúc xạ sóng khá quan trọng do một số lý do sau:

1) Sự khúc xạ sóng gắn liền với hiệu ứng nước nông, nó cho phép xác định độ cao sóng tại một độ sâu cụ thể khi biết các đặc trưng sóng tới ở vùng nước sâu như độ cao  $H_0$ , chu kỳ  $T_0$  và hướng truyền.

2) Sự thay đổi hướng truyền của sóng khác nhau ở từng phần khác nhau trong vùng truyền sóng dẫn đến sự hội tụ hay phân kỳ của năng lượng sóng và ảnh hưởng cụ thể đến các lực mà sóng tác động lên các công trình bờ.

3) Sự khúc xạ sóng cũng đóng góp vào sự thay đổi địa hình đáy thông qua hiệu ứng làm xói lở hay bồi lắng các trầm tích trên bãi biển. Các nghiên cứu đã chỉ ra rằng có mối quan hệ giữa sự khúc xạ sóng, phân bố năng lượng dọc bờ và sự xói lở, bồi lắng vật chất trên bãi biển.

Ngoài việc sóng bị khúc xạ do địa hình đáy, sóng còn có thể bị thay đổi hướng truyền do dòng chảy hoặc bất kỳ một nhân tố nào làm cho một phần của sóng di chuyển chậm hơn phần khác. Tại cửa sông, sự khúc xạ có thể xảy ra do chênh lệch của tốc độ dòng chảy. Khúc xạ cũng có thể xảy ra khi sóng truyền cắt ngang dòng chảy một góc. Mức độ tác động của dòng chảy làm khúc xạ sóng tới phụ thuộc vào tốc độ của dòng chảy và qui mô không gian của nó. Tại những vùng cửa triều, dòng chảy rút ngược hướng với sóng tới có thể làm tăng độ cao và độ dốc sóng. Tuy nhiên, định lượng hoá sự ảnh hưởng của dòng chảy đến sự khúc xạ sóng là vấn đề khó khăn và còn nhiều khía cạnh trong đó còn chưa hiểu được một cách thấu đáo.

#### 4.4. TÁN XẠ SÓNG

Khi một chuỗi sóng tiến bị chặn lại bởi vật cản như tường, đê chắn sóng, đảo nhỏ ... thì sóng không thể truyền qua nhưng thực tế phía sau vật cản vẫn quan sát được các dao động sóng nhỏ, nguyên nhân do sự tán xạ của sóng (wave diffraction). Trên thực tế, hiện tượng tán xạ sóng rất quan trọng khi quan tâm đến việc xác định các tác động của sóng xung quanh và phía sau các công trình xây dựng trên biển.

Để mô tả hiện tượng tán xạ sóng bằng các biểu thức toán học, ta sử dụng các phương trình xuất phát sau:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z} = 0 \quad -h(x) \leq z \leq 0 \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{tại biên cứng} \quad (4.73)$$

Trong đó  $\Phi$ : hàm thế vận tốc;  $h(x)$ : độ sâu đáy.

Sử dụng kết quả của lý thuyết sóng tuyến tính

$$\Phi(x, z, t) = f(z, h)\phi(x, t) \quad (4.74)$$

$$f(z, h) = \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \quad (4.75)$$

thế vào phương trình Laplace (4.70) với giả thiết độ nghiêng của đáy nhỏ ta có:

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (4.76)$$

Đây là phương trình Helmholtz cho hàm  $\phi(x, t)$ , trong đó  $\phi(x, t)$  là thế vận tốc tại mặt.

Nếu ta xét chuyển động sóng điều hoà dạng:

$$\phi(x, t) = \text{Re}[\psi(x)e^{-i\omega t}] \quad (4.77)$$

thì ta có:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (4.78)$$

Đây là phương trình mô tả tán xạ sóng với điều kiện biên cứng.  $n$  là véc tơ đơn vị nằm trên mặt phẳng ngang,  $\Psi(x)$  là hàm biên độ sóng.

#### 4.5. PHẢN XẠ SÓNG

Các sóng nước có thể bị phản xạ toàn phần hay một phần từ các vật cản tự nhiên cũng như nhân tạo khi bị chặn. Sự phản xạ sóng thường quan trọng đối với các công việc thiết kế các công trình bờ, đặc biệt quan trọng đối với các công trình trong cảng. Sự phản xạ sóng tức là phản xạ năng lượng của sóng tới nó ngược với sự tiêu tán năng lượng. Các sự phản xạ tích hợp và tiêu tán năng lượng nhỏ xảy ra trong cảng phức tạp có thể tạo ra vùng năng lượng lớn làm xuất hiện các sóng lớn trong cảng. Sự dao động mặt nước này có thể gây ra các chuyển động mạnh làm tăng sức căng các dây neo có thể đến mức quá tải, do đó các tường chắn, cầu cảng, bờ kè trong cảng phải được thiết kế để có khả năng tiêu tán năng lượng hơn là làm phản xạ các

sóng. Các bờ biển tự nhiên thường có khả năng tiêu tán năng lượng sóng rất tốt, do đó khi sửa đổi, xây dựng kè,... trong cảng làm cho diện tích tự nhiên của bờ biển bị thu hẹp cần cân nhắc đến sự phản xạ của sóng. Thông thường thì các nghiên cứu bằng mô hình thủy lực là rất cần thiết để đánh giá những thay đổi diễn ra trong cảng khi có các công trình được xây dựng. Sự quan trọng của phản xạ sóng trong cảng và ảnh hưởng của nó đến việc phát triển cảng đã được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu như Bretschneider (1966), Lee (1969) và LeMehaute (1965). Cộng hưởng sóng trong cảng đã được Reichlen trình bày năm 1966.

Để đánh giá mức độ phản xạ của vật cản đối với các sóng người ta dùng tỉ số giữa độ cao sóng phản xạ và độ cao sóng tới, và được gọi là hệ số phản xạ  $\chi = H_r/H_i$ . Độ lớn của  $\chi$  thay đổi từ 1.0 - đối với sự phản xạ toàn phần, đến 0 - đối với trường hợp không có phản xạ. Tuy nhiên, giá trị nhỏ của  $\chi$  không có nghĩa là năng lượng của sóng bị tiêu tán bởi vì năng lượng của sóng có thể truyền qua công trình như trong trường hợp đê chắn sóng có thể thấm. Hệ số truyền qua được định nghĩa là tỉ số giữa độ cao sóng truyền qua và độ cao sóng tới. Nói chung, các hệ số phản xạ và truyền qua phụ thuộc vào hình dạng, cấu trúc của công trình và các đặc trưng của sóng tới như độ dốc sóng, độ sâu tương đối  $d/L$  tại chân của công trình.

#### 4.5.1. Sự phản xạ từ tường đứng không thấm

Khi sóng truyền vào vùng có độ sâu biến đổi đột ngột tức là vùng có độ dốc đáy lớn hay bị chặn lại bởi các vách đứng thì một phần năng lượng sóng bị phản xạ trở lại và phía trước các vật cản này tồn tại một trường sóng kết hợp giữa sóng tới và sóng phản xạ. Phần năng lượng phản xạ phụ thuộc và nhiều yếu tố như độ nghiêng của vật cản, tính chất của vật cản, bề mặt vật cản, hướng sóng tới,...

Thông thường các tường đứng không thấm phản xạ hầu hết năng lượng sóng tới ngoại trừ khi bề mặt tường được phủ cao su hoặc một lớp nhám thô. Hệ số phản xạ, do đó, thường xấp xỉ 1.0 và độ cao của sóng phản xạ bằng với độ cao của sóng tới. Xét hiện tượng một sóng tiến phản xạ tại một tường đứng thỏa mãn điều kiện biên  $U = 0$  tại mặt của tường đứng. Năng lượng của sóng sẽ bị phản xạ toàn phần tại bề mặt. Giả thiết dao động của bề mặt do sóng là:

$$\eta_i = a \cos(kx - \omega t) = \frac{1}{2} H \cos(kx - \omega t) \quad (4.79)$$

sóng phản xạ:

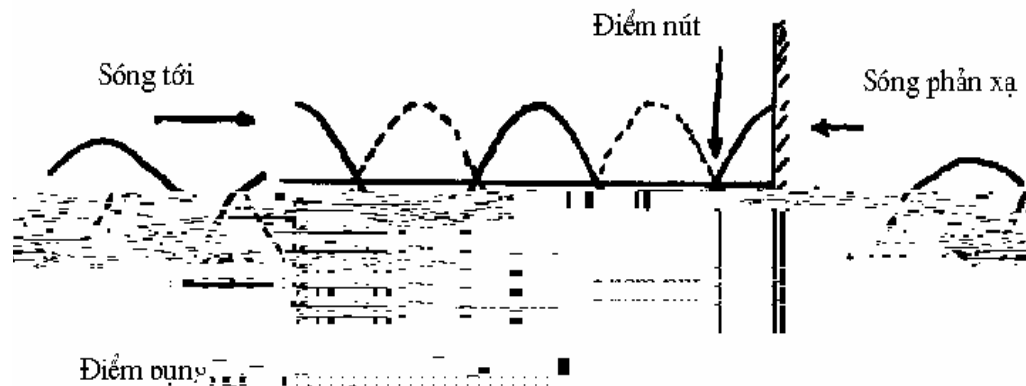
$$\eta_r = a \cos(kx + \omega t) = \frac{1}{2} H \cos(kx + \omega t) \quad (4.80)$$

Trong đó  $a$  là biên độ của dao động sóng;  $H$  là độ cao sóng.

Khi sóng tới và sóng phản xạ gặp nhau nó chồng chất và chuyển động bề mặt là sự kết hợp của sóng tới và sóng phản xạ do đó:

$$\eta = \eta_i + \eta_r = H \cos kx \cos \omega t \quad (4.81)$$

Biểu thức này biểu diễn sóng đứng trong đó từ bụng sóng đến đỉnh sóng là  $2H$  gấp đôi độ cao của sóng tới (xem hình 4.9).



Hình 4.9 Sóng phản xạ từ tường đứng

Tại điểm nút nơi  $\cos(kx)=0$ , giá trị  $\eta$  luôn là 0, trong khi đó tại điểm bụng  $\cos(kx)=\pm 1$  giá trị của  $U=0$  nhưng dao động mực nước  $\eta$  đạt cực đại bằng hai lần độ cao sóng tới. Như thế, tại các điểm nút chuyển động của các hạt nước luôn trên phương ngang, trong khi đó thì ở các điểm bụng thì chuyển động của các hạt nước lại luôn trên phương đứng.

Trong trường hợp sóng phản xạ với hệ số  $0 < \chi < 1$  thì ta có:

$$\eta = \frac{1}{2} H [\cos(kx - \omega t) + \chi \cos(kx + \omega t)] \quad (4.82)$$

Viết lại dưới dạng:

$$\eta = \frac{1}{2} H A(kx) \cos(\delta(kx) - \omega t) \quad (4.83)$$

trong đó:

$$A^2(kx) = (1 + \chi)^2 \cos^2(kx) + (1 - \chi)^2 \sin^2(kx) = 1 + \chi^2 + 2\chi \cos(2kx)$$

$$\text{tg}(\delta(kx)) = \left( \frac{1 - \chi}{1 + \chi} \right) \text{tg}(kx)$$

Như vậy tại giá trị xác định của  $x$  thì độ cao từ bụng sóng tới đỉnh sóng sẽ là  $HA(kx)$ . Giá trị cực đại và cực tiểu của độ cao sóng phân bố trên miền xét là:

$$\begin{aligned} H_{\max} &= (1 + \chi)H \\ H_{\min} &= (1 - \chi)H \end{aligned} \quad (4.84)$$



Từ (4.84) cho phép ta tính toán hệ số phản xạ một cách đơn giản từ trường sóng đo đạc.

$$\chi = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max} + H_{\min}} \quad (4.85)$$

$$H = \frac{1}{2}(H_{\max} + H_{\min}) \quad (4.86)$$

Do hệ số phản xạ  $\chi$  thông thường nhỏ hơn 1 tức là năng lượng sóng tới không bị phản xạ hoàn toàn mà một phần đã bị tiêu tán do ma sát, ... hoặc truyền qua vật cản. Trong trường hợp này ta định nghĩa hệ số truyền qua  $K_t$  như là tỉ số giữa độ cao sóng thấm qua và độ cao sóng tới.

Gọi  $K_c$  là hệ số bảo toàn năng lượng - được định nghĩa là tỉ số giữa tổng năng lượng phản xạ và năng lượng truyền qua với năng lượng của sóng tới. Do mật độ năng lượng trung bình tỉ lệ thuận với bình phương độ cao sóng nên ta có:

$$K_c = \frac{\chi^2 + H_t^2}{H_i^2} = \chi^2 + K_t^2 \quad (4.87)$$

Như vậy, bằng việc đo đạc, tính toán hệ số phản xạ và hệ số truyền qua ta có thể xác định được phần năng lượng mất mát. Về mặt lý thuyết, để tính toán người ta thường sử dụng giả thiết không tiêu tán năng lượng, nó tương đương với:

$$\chi = (1 - K_t^2)^{1/2} \quad (4.88)$$

#### 4.5.2. Sự phản xạ trong vịnh kín

Các dao động cộng hưởng có thể xảy ra giữa hai tường đứng khi chúng được đặt tại những vị trí  $x=0$  và  $x=l_B$  hoặc  $x=0$  và  $x=2l_B, \dots$ , tại các tường này sẽ là các điểm bụng của dao động. Nếu các vật cản được đặt tại  $x=0$  và  $x=l_B$  thì có 1/2 sóng tồn tại giữa hai vật cản. Cũng như vậy, nếu  $l_B$  là độ dài của vịnh và  $l_B = 0.5 L$ , với  $L$  là độ dài sóng. Do độ dài sóng được biểu diễn dưới dạng:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$$

nên chu kỳ dao động cơ sở của vịnh sẽ là

$$T = \left[ \frac{4\pi l_B}{g \operatorname{th}(\pi h / l_B)} \right]^{1/2}$$

Các kiểu dao động cộng hưởng tiếp theo có thể xảy ra trong vịnh là khi có chọn một sóng

trong vịnh ( $l_B=L$ ), hoặc có 3/2 sóng trong vịnh ( $l_B=3/2*L$ ) ... tức là khi  $l_B=L*j/2$  với  $j=1,2,...$ . Trên thực tế thì giá trị độ dài của vịnh là cố định  $l_B$  và các sóng có thể gây ra cộng hưởng trong vịnh có độ dài sóng thoả mãn biểu thức:

$$L = \frac{2l_B}{j} \quad j = 1,2,....$$

ta có:

$$T_j = \left[ \frac{4\pi l_B}{jg \tanh(\pi j h / l_B)} \right]^{1/2} \quad j = 1,2,... \quad (4.89)$$

Đối với cảng kín, gần chữ nhật có chiều dài  $l_B$ , các sóng truyền vào qua khe của đê chắn sóng có chu kỳ gần với chu kỳ  $T_j$  có thể dẫn đến cộng hưởng đáng kể trong cảng nếu như cơ chế tiêu tán năng lượng sóng của cảng không tốt. Phương trình (4.89) được thiết lập với giả thiết cuối vịnh là các tường đứng nhưng nó vẫn có thể được áp dụng cho các trường hợp bờ có tính phản xạ cao. Các biên có độ nghiêng như bãi biển thường là nhân tố tiêu tán năng lượng hiệu quả nhưng đối với các sóng dài thì tính phản xạ của nó cũng có thể trở nên đáng kể.

Sự dao động cộng hưởng chu kỳ dài trong hồ hay trong các vùng nước kín được gọi là “Seiches”. Các chu kỳ của dao động này nằm trong khoảng từ vài phút đến vài giờ, phụ thuộc vào hình dạng của từng vùng nước cụ thể. Nói chung những hồ, vịnh này thì thường nông (khi so độ sâu với chiều dài của chúng) do đó  $\tanh(j\pi h / l_B) \approx j\pi h / l_B$  và phương trình (4.89) có thể viết dưới dạng:

$$T_j = \frac{2l_B}{j} \frac{1}{(gh)^{1/2}} \quad j = 1,2,... \quad (4.90)$$

Phương trình (4.90) được gọi là công thức Merian. Với các vịnh tự nhiên, hình dáng phức tạp và độ sâu thay đổi thì việc áp dụng phương trình (4.90) khó khăn. Tuy nhiên, công thức Merian được xem là hiệu quả cho phép xấp xỉ bậc nhất cho trường hợp các vịnh kín. Với các vịnh hỏ một đầu, có các kiểu dao động khác nhau tồn tại do sự cộng hưởng sẽ xuất hiện một điểm nút nằm ngoài cửa vịnh và dao động cơ bản có thể xuất hiện khi 1/4 sóng nằm trong vịnh, do đó:

$$l'_B = L / 4 ,$$

$$T = 4l'_B / (gh)^{1/2}$$

Tổng quát chung ta có:

$$l'_B = (2j - 1)L / 4$$

$$T = \frac{4l'_B}{(2j-1)(gh)^{1/2}} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Thí dụ:

Một hồ có độ sâu trung bình  $h=18.6\text{m}$ , dài  $l_B=354\text{ km}$ , tìm chu kỳ dao động cơ bản của hồ  $T_j$  với  $j=1$ :

$$T_j = \frac{2l_B}{j} \frac{1}{(gh)^{1/2}}$$

$$T_1 = \frac{2(354000)}{1} \frac{1}{(9.81 * 18.6)^{1/2}} = 52440(s) = 14,57 \text{ giờ}$$

#### 4.5.3. Phản xạ sóng từ các mặt nghiêng, bãi biển, bờ kè thoải và đê chắn sóng

Phần năng lượng sóng bị phản xạ từ bãi biển hay từ các công trình xây dựng trên biển phụ thuộc vào độ dốc, độ nhám và tính thấm của bề mặt của bãi biển và công trình; phụ thuộc vào độ dốc sóng và hướng sóng tới. Năm 1974 Battjes đã đưa ra một tham số tương tự dạng:

$$\xi = \frac{1.0}{\text{ctg}\theta \sqrt{H_i / L_o}} \quad (4.91)$$

đây là tham số quan trọng trong việc xác định năng lượng sóng phản xạ khi sóng tới trực diện với vật chắn. Trong phương trình (4.91)  $\theta$  góc nghiêng của bề mặt công trình tạo với phương ngang,  $H_i$  - độ cao sóng tới,  $L_o$ - độ dài sóng vùng nước sâu.

Lượng phản xạ được đánh giá thông qua hệ số phản xạ  $\chi$  :

$$\chi = \frac{H_r}{H_i}$$

$H_r$ : độ cao sóng phản xạ.

Dựa trên nhiều kết quả đo đạc, quan trắc khác nhau, Seelig và Ahrens năm 1981 đã xây dựng các đường cong quan hệ giữa tham số tương tự và hệ số phản xạ như trên hình 4.10. Đường cong này cho phép xác định hệ số phản xạ cho các mặt nghiêng trơn, bãi biển cát và các công trình, đê chắn sóng đá sỏi, bê tông. Trên các đường cong cho thấy hệ số phản xạ  $\chi$  giảm đi khi độ dốc sóng tăng lên cũng như khi góc nghiêng  $\theta$  giảm đi.

Thí dụ:

Cho: một sóng tới có chu kỳ  $T=10$  giây, độ cao sóng  $H_i=2m$  tác động lên một mặt nghiêng:

Tìm: a) độ cao sóng bị phản xạ từ mặt nghiêng không thấm có  $\text{ctg}\alpha=5$ .

b) so sánh hệ số phản xạ thu được trong trường hợp a) với trường hợp độ nghiêng bãi biển  $\text{ctg}\alpha=50$ .

Lời giải:

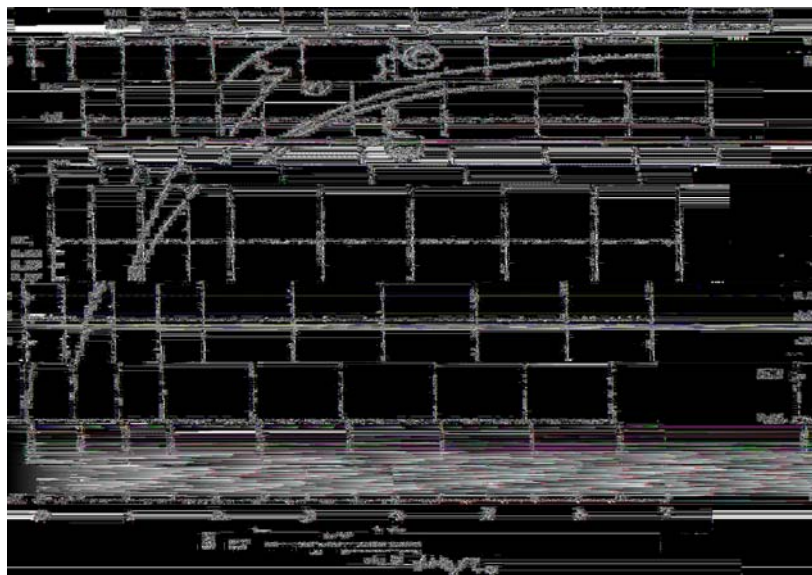
$$a) \quad L_o = \frac{gT^2}{2\pi} = \frac{9.81 \cdot 10 \cdot 10}{2 \cdot 3.14159} = 156m$$

từ phương trình (4.32) ta xác định  $\xi$

$$\xi = \frac{1.0}{5.0 \sqrt{2/156}} = 1.77$$

hệ số phản xạ xác định từ đường cong A trên hình 4.10  $\approx 0.29$  do đó độ cao sóng phản xạ  $H_r=0.29 \cdot H_i=0.58m$ .

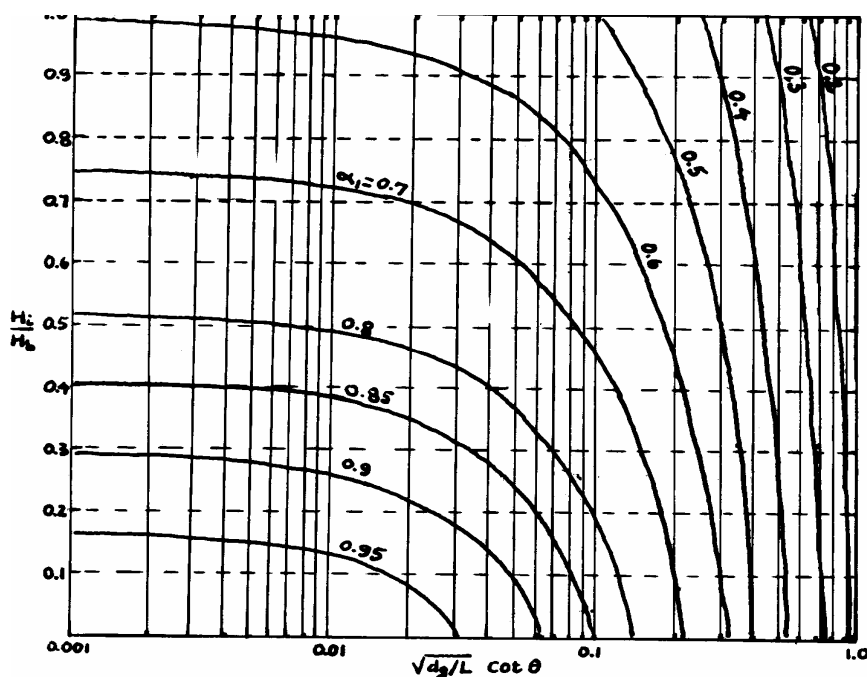
$$b) \quad \xi = \frac{1.0}{50.0 \sqrt{2/156}} = 0.18$$



Hình 4.10 Quan hệ giữa hệ số phản xạ sóng trên mặt nghiêng (A), bãi biển (B) và đê chắn sóng (C) với tham số  $\xi$ .

Từ đường cong B trên hình 4.10 ta xác định được  $\alpha < 0.01$ . Như vậy, với bãi biển nghiêng 1/50 phản xạ năng lượng nhỏ hơn trường hợp a) tức là bãi biển tiêu tán năng lượng tốt hơn so với công trình có độ nghiêng 1/5.

Bề mặt bê tông có sỏi cuội thường làm tiêu tán năng lượng nhiều hơn so với bề mặt nhẵn, do vậy, giá trị hệ số phản xạ xác định từ các đường cong trên hình 4.10 cần được nhân với hai hệ số suy giảm  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$ . Các hệ số này được xác định theo toán đồ hình 4.11, các hệ số này đại diện cho tác động của độ nhám bề mặt và hiệu ứng sóng đổ tại chân của công trình. Trên hình 4.11  $d_g$  là đường kính nhám,  $L$  là độ dài sóng tại chân công trình,  $H_b$  độ cao sóng đổ tại chân công trình.  $\alpha_2$  phụ thuộc vào số lớp đá sỏi phủ bề mặt và tỉ số giữa đường kính  $d_g$  và độ cao cao sóng tới  $H_i$ .



Hình 4.11 Sơ đồ xác định hệ số hiệu chỉnh

Bảng 4.1 Hệ số  $\alpha_1$  trong trường hợp nhiều lớp

$d_g/H_i$	$n$			
	1	2	3	4
$<0.75$	1.00	0.93	0.88	0.78
0.75-2.0	1.00	0.71	0.70	0.69
$<2.0$	1.00	0.58	0.52	0.49

Thí dụ: Một sóng có chu kỳ  $T=10s$ , độ cao sóng  $H_i=2m$  tác động lên một bề mặt có hai lớp phủ

với đường kính của thành phần phủ  $d_g=1\text{m}$ . Mặt nghiêng của công trình  $\text{ctg}\theta=5$ ; độ cao sóng đồ tại chân công trình là  $H_b=3.6\text{m}$ , độ dài sóng tại điểm sóng đồ là  $L_b=65.2\text{m}$ . Xác định hệ số phản xạ.

- Tính các tham số không thứ nguyên:

$$\sqrt{d_g/L} \cot \theta = \sqrt{1/65.2} * 5 = 0.62$$

$$\frac{H_i}{H_b} = \frac{2.0}{3.6} = 0.56$$

$$\frac{d_g}{H_i} = \frac{1.0}{2.0} = 0.5$$

Từ toán đồ hình 4.11 với  $\sqrt{d_g/L} \cot \theta = 0.62$  và  $H_i/H_b = 0.56$  suy ra được  $\sigma_1 \approx 0.93$  từ bảng 4.1 với  $d_g/H_i < 0.75$  và  $n=2$  ta thu được  $\sigma_2 \approx 0.93$ . Từ hình 4.10 ta tra được  $\sigma_3 \approx 0.29$ . Hệ số phản xạ sau khi hiệu chỉnh sẽ là:

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \approx 0.29 = 0.29 * 0.93 * 0.29 = 0.08$$

#### 4.6. SÓNG ĐỒ VÀ TIÊU TÁN NĂNG LƯỢNG SÓNG

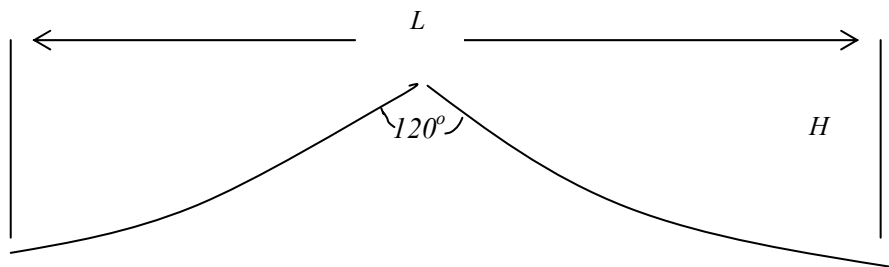
Khi sóng tiến từ ngoài khơi vào vùng nước nông, do sự giảm của độ sâu đáy, sóng giảm dần độ dài và độ cao sóng tăng dần lên, độ dốc sóng tăng lên đến một giá trị tới hạn nào đó thì sóng bị đổ nhào ở một độ sâu nào đó và khi đó năng lượng sóng bị tiêu tán đáng kể do quá trình ma sát rối phức tạp và ma sát với đáy.

Việc nghiên cứu để làm rõ cơ chế tiêu tán năng lượng sóng một cách định lượng và các chỉ tiêu sóng đồ là rất quan trọng, đã và đang được các nhà khoa học nghiên cứu sóng biển trên toàn thế giới quan tâm. Độ cao cực đại của sóng truyền trong vùng nước sâu được giới hạn bởi một độ dốc cực đại để đảm bảo sóng giữ được ổn định.

Các sóng đạt đến độ dốc tới hạn sẽ bắt đầu vỡ và trong quá trình này sẽ làm tiêu tán một phần năng lượng của sóng. Dựa trên cơ sở lý thuyết, Michell (1893) đã tìm ra độ dốc tới hạn dưới dạng:

$$\left(\frac{H}{L}\right)_{\max} = 0.142 \approx \frac{1}{7}$$

Điều này xuất hiện khi góc ở đỉnh sóng là  $120^\circ$  (xem hình 4.12). Độ dốc tới hạn này đạt được khi tốc độ hạt nước tại đỉnh sóng bằng với tốc độ truyền sóng; bất kỳ một sự tăng độ dốc nữa cũng sẽ dẫn đến tốc độ hạt nước tại đỉnh sóng lớn hơn tốc độ truyền sóng và sóng bắt đầu vỡ.



Hình 4.12 Góc ở đỉnh sóng đạt độ cao tới hạn

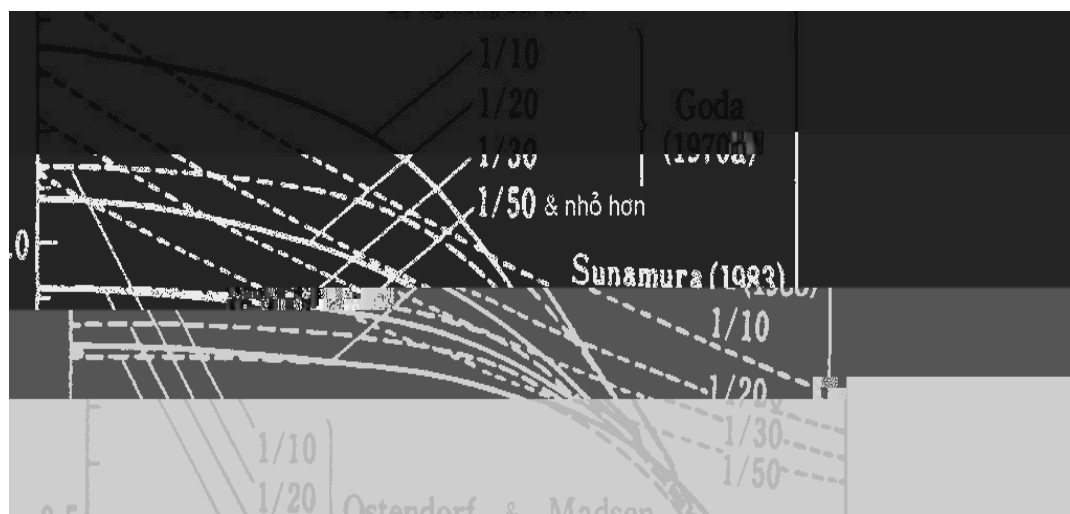
Trong vùng nước nông, khi sóng di chuyển vào vùng nước nông, độ dốc tới hạn mà sóng có thể đạt được, giảm đi theo một hàm của độ sâu tương đối  $d/L$  và độ nghiêng của đáy  $m$  theo hướng trực diện với hướng truyền sóng. Munk (1949) đã dẫn ra các mối quan hệ giữa  $H_b$ - độ cao sóng đồ;  $h_b$ - độ sâu sóng đồ;  $H'_o$ - độ cao sóng nước sâu không bị khúc xạ và  $L_o$  - độ dài sóng nước sâu. Biểu thức của Munk như sau:

$$\frac{H_b}{H'_o} = \frac{1}{3.3(H'_o/L_o)^{1/3}} \text{ và } \frac{h_b}{H_b} = 1.28$$

Tỉ số  $H_b/H'_o$  được gọi là chỉ số độ cao sóng đồ.

Năm 1972, Weggel đã đưa ra các mối quan hệ giữa  $h_b/H_b$  và  $H_b/gT^2$  đối với các bãi biển có độ dốc khác nhau như sau:

$$\frac{h_b}{H_b} = \frac{1}{b - (aH_b/gT^2)}$$



Hình 4.13 Các chỉ tiêu sóng đồ trên nền dốc khác nhau

Trong đó  $a$  và  $b$  là các hàm phụ thuộc vào độ dốc đáy  $m$ :

$$a = 43.75(1 - e^{-19m})$$

$$b = \frac{1.56}{(1 + e^{-19.5m})}$$

Các nghiên cứu độc lập của Miche, Danel và Hamada đã chứng minh độ dốc tới hạn của các sóng trong vùng nước nông có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\left(\frac{H}{L}\right)_{\max} = 0.142 \operatorname{th}(2\pi h/L) \quad (4.92)$$

Các đo đạc thực tiễn đã cho thấy độ cao sóng cực đại có quan hệ với độ sâu vùng nước nông như sau:

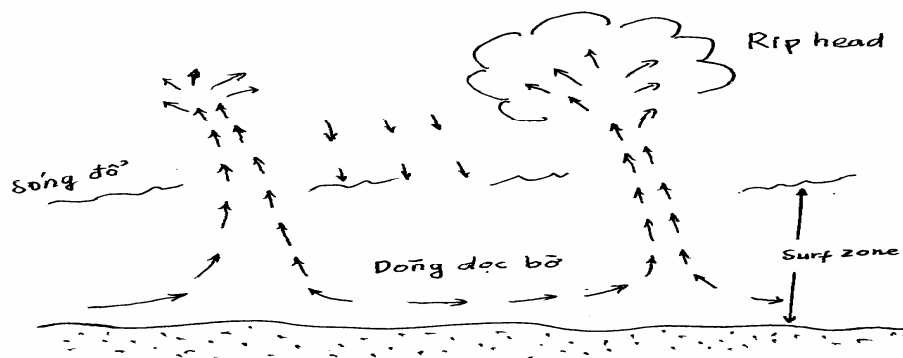
$$\left(\frac{H_{\max}}{h}\right) \leq 0.78 \quad (4.93)$$

Năm 1970 Goda đã nghiên cứu từ các số liệu thực tế và trong phòng thí nghiệm, và đã đưa ra biểu đồ quan hệ cho phép xác định độ sâu đổ sóng và độ cao sóng đổ trên các nền dốc khác nhau (xem hình 4.13).

## 4.7. DÒNG CHẢY SÓNG

### 4.7.1. Giới thiệu

Khi sóng truyền vào vùng ven bờ, do biến đổi không đồng nhất của địa hình đáy đã gây ra khúc xạ, phản xạ sóng cũng như tiêu tán năng lượng sóng xảy ra không đồng đều và do đó dòng động năng của sóng tại các điểm khác nhau, khác nhau; thêm vào đó là sự đổ nhào của các sóng tại vùng sóng đổ đã dồn một lượng nước vào vùng gần bờ tạo ra các ứng suất không đồng nhất



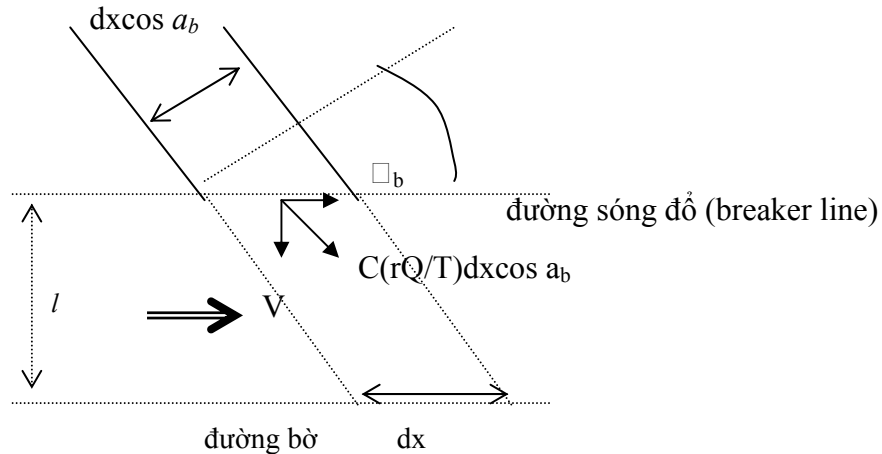
Hình 4.14 Sơ đồ dòng chảy sóng trong dải ven bờ này. Chính những nguyên nhân trên đã tạo ra các dao động mực nước có chu kỳ dài hơn nhiều chu kỳ của các sóng tới và tạo nên hệ thống dòng chảy phức tạp trong vùng ven bờ và gọi là dòng chảy sóng (wave-induced current).



Trên thực tế dòng chảy do sóng sinh ra này đóng một vai trò rất quan trọng trong việc di chuyển trầm tích đáy và lở lũng và làm thay đổi đáng kể địa hình bờ. Việc nhận biết về dòng chảy sóng đầu tiên phải kể đến đó là người dân đánh cá và những người sống gần bờ biển, họ đã biết về dòng chảy sóng khá sớm thông qua kinh nghiệm sống hàng ngày của mình. Năm 1941 Emery và LaFond lần đầu tiên xuất bản bài báo tựa đề "Rip Current" ; Rip Current được định nghĩa như là dòng chảy có hướng từ bờ ra khơi. Dòng chảy này thông thường đạt 1m/s và mở rộng ra ngoài vùng sóng đôi khi đến 500m. Phần dòng chảy dọc bờ được gọi là dòng dọc bờ (Long shore current). Năm 1950 Shepard và Inman từ các nghiên cứu của mình tại Đại học tổng hợp California đã trình bày sơ đồ mô tả về dòng chảy sóng ven bờ như hình 4.14.

#### 4.7.2. Tốc độ trung bình của dòng chảy sóng dọc bờ.

Xét chuỗi sóng truyền vào bờ, tại vị trí sóng đôi có góc sóng là  $\alpha_b$ . Giả sử dòng chảy ổn định và đồng nhất có hướng dọc theo đường bờ (xem hình 4.15).



Hình 4.15 Minh họa tính toán tốc độ dòng chảy trung bình dọc bờ

Động lượng truyền qua đường sóng đổ trên một đơn vị độ dài trên đường nối đỉnh sóng và trong một đơn vị thời gian là  $C(\alpha Q/T)$ . Trong đó Q là thể tích nước biển truyền qua mặt cắt đứng trong một chu kỳ sóng; T - chu kỳ sóng, C - tốc độ truyền sóng. Như vậy, qua đoạn  $dx \cos \alpha_b$  dòng động lượng truyền vào vùng bờ là  $C(\alpha Q/T) dx \cos \alpha_b$ .

Thành phần động lượng dọc bờ sẽ là:

$$C(\alpha Q/T) dx \cos \alpha_b \sin \alpha_b \quad (4.94)$$

Giả thiết khối lượng nước  $(\alpha Q/T) dx \cos \alpha_b$  di chuyển với động lượng trên có thành phần tốc độ dọc bờ là V. Khi đó ta có thể viết:

$$(C \sin \alpha_b - V)(\alpha Q/T) dx \cos \alpha_b = f \alpha IV^2 dx \quad (4.95)$$

trong đó:

f: hệ số ma sát

l: độ dài khoảng cách từ bờ đến đường sóng đồ

$$Q = 4h^2 \sqrt{\frac{H_b}{3h_b}} \quad \text{và} \quad C = \sqrt{2.28gH_b}$$

Từ (4.95) ta thu được:

$$V = \frac{a}{2} \left[ \sqrt{l + \frac{4C \sin \alpha_b}{a}} - l \right] \quad (4.96)$$

$$a = 2.61H_b \frac{h_b}{l} \cos \alpha_b / (fT)$$

Theo Inman và Quinn từ các thí nghiệm và đo đạc thực tế đã cho rằng giá trị của hệ số f = 0.00404 V<sup>3/2</sup> (V:m/s). Thay vào (4.96) ta thu được:

$$V = \left[ \left( \frac{l}{4x^2} + y \right)^{1/2} - \frac{l}{2x} \right]^2 \quad (4.97)$$

Trong đó

$$x = 646H_b \frac{h_b}{l} \cos \alpha_b / T$$

$$y = C \sin \alpha_b$$

Rất nhiều nghiên cứu về dòng chảy dọc bờ đã được thực hiện trong nhiều năm qua và các nhà khoa học đã đưa đến các công thức khác nhau cho các trường hợp khác nhau để xác định tốc độ của dòng chảy dọc bờ do sóng sinh ra. Theo Eagleson:

$$\begin{aligned} \frac{V(x)^2}{A} &= l - \left[ l - \frac{V(0)}{A} \right] e^{-Bx} \\ A &= \frac{3}{8} \left[ \frac{gH_b^2 n_b}{h_b} \right] \frac{\sin \alpha_b \sin 2\alpha_b \sin \beta}{f} \\ B &= \frac{2}{5} \left[ \frac{f}{h_b \cos \alpha_b \sin \alpha_b} \right] \end{aligned} \quad (4.98)$$

trong đó:

x: khoảng cách dọc bờ; V(x) tốc độ tại điểm x; V(0) tốc độ tại x=0.

$n_b = C_{gb}/C_b$  ;  $\alpha$  góc nghiêng của đáy; hệ số ma sát  $f$  được tính theo công thức của Karman & Prandtl

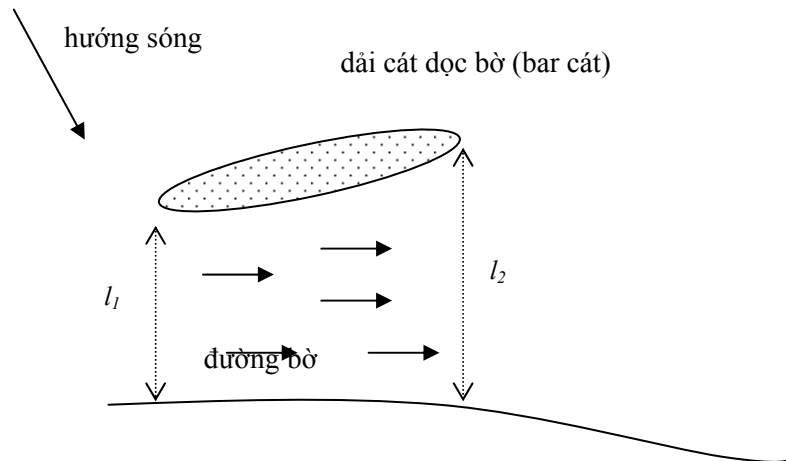
$$f = \left[ 2 \log_{10} \frac{h_b}{K} + 1.74 \right]^2 \quad (4.99)$$

$K$ : độ nhám, thông thường  $K$  nằm trong khoảng 0.03 đến 0.1cm

Từ (4.98), khi  $x$  tăng thì  $V(x)$  tiến đến giá trị tới hạn  $V=A^{1/2}$ .

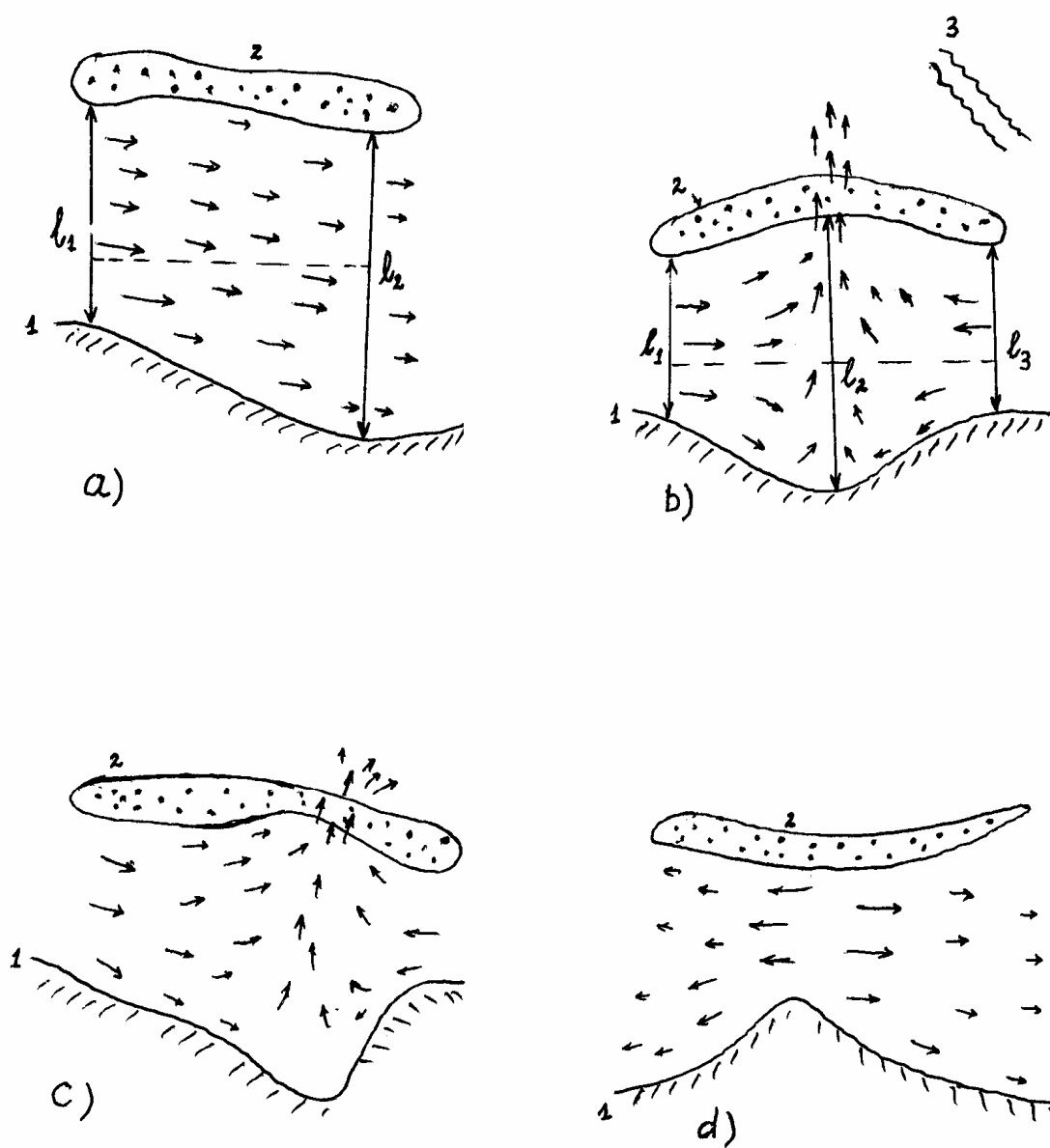
Trên thực tế khi tồn tại các dải cát dọc bờ thì việc tính toán dòng chảy trở nên phức tạp và dòng chảy hướng ra khơi và vuông góc với bờ thường xuyên quan sát được. Shadrin và Bruun đã quan tâm nghiên cứu các hoàn cảnh phức tạp và đã đưa ra các công thức cho phép xác định tốc độ dòng trung bình dọc bờ như sau (minh hoạ trên hình 4.16):

$$V = \frac{a}{2} \left[ \sqrt{\frac{l + 4C_b \sin \alpha_b}{a}} - l \right] \pm \sqrt{l.11 \frac{H_b}{T} \sqrt{gH_b} \left( l - \frac{l_1}{l_2} \right)} \quad (4.100)$$



Hình 4.16 Dòng chảy trung bình dọc bờ phía trong dải cát.

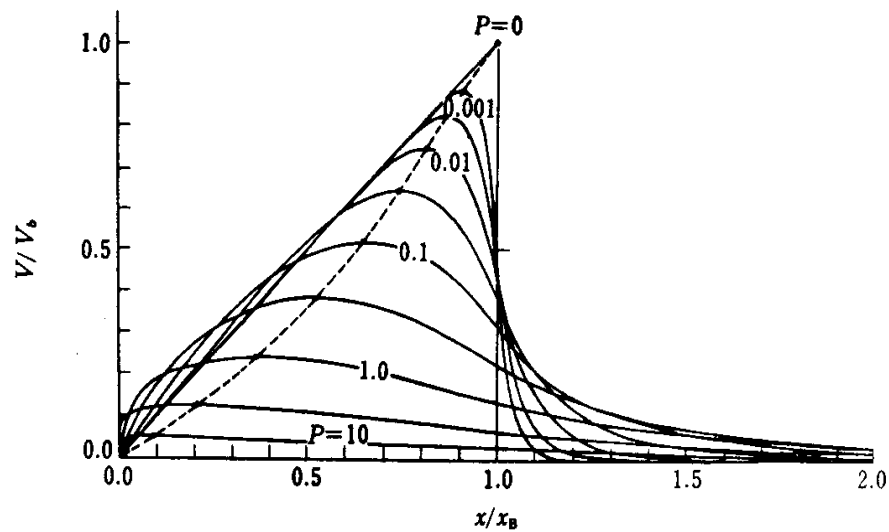
Trên thực tế quan sát được các dạng dòng chảy do sóng sinh ra khác nhau với các dạng dải cát khác nhau như sau:



Hình 4.17 ( a, b, c, d). Các dạng phân bố dòng chảy sóng theo địa hình

Thông thường trong các trường hợp này thì mực nước trung bình thay đổi phía trong vùng sóng đổ và khác nhau tại các vị trí khác nhau dọc theo bờ và phát sinh dòng chảy. Khi sóng tới có độ cao nhỏ thì dòng gián đoạn (Rip current) thường xuất hiện ở vị trí mà khoảng cách từ bờ đến dải cát lớn nhất như trong trường hợp b) và c) trên hình 4.17. Khi độ cao sóng tăng dần lên thì dòng chảy thẳng góc với bờ giảm dần đi và cuối cùng biến mất. Khi độ cao đạt khoảng lớn hơn 1m thì đáy bị thay đổi do sự dịch chuyển của trầm tích và các dải cát cũng bị dịch chuyển, thường thì chúng di chuyển song song với bờ.

Qua đo đạc thực nghiệm và phân tích lý thuyết đã cho thấy phân bố của dòng chảy dọc bờ trên hướng vuông góc với bờ có dạng như trên hình 4.18.



Hình 4.18 Phân bố dòng chảy dọc bờ theo kết quả tính toán của Longuet-Higgins (1970)

#### 4.7.3. Các đặc trưng của dòng chảy vuông góc với bờ

Trên thực tế độ cao sóng đổ tại các điểm là không đồng nhất dọc theo bờ, lượng nước dồn vào phía trong vùng sóng đổ là không đồng nhất và chính lượng nước này chảy ngược trở ra khơi thông qua các dải hẹp và dòng chảy này được gọi là dòng gián đoạn.

Từ các kết quả quan trắc tại nhiều vùng biển khác nhau có thể tóm tắt một số nét đặc điểm của dòng gián đoạn như sau (Horikawa 1978):

- 1) Dòng gián đoạn được phát sinh khi sóng lừng truyền vào bờ với hướng gần vuông góc.
- 2) Dòng gián đoạn thường xuất hiện trên các bãi biển có độ nghiêng thoải.

3) Tốc độ của dòng gián đoạn và khoảng cách từ gốc dòng đến ngọn có quan hệ chặt với độ cao sóng tới cũng như với sự hội tụ hay phân kỳ của sóng do hiện tượng khúc xạ.

4) Mỗi chuỗi sóng tạo thành một hệ dòng chảy đặc trưng riêng.

5) Khi độ cao sóng tới lớn lên thì số lượng dòng gián đoạn trên một đơn vị dọc bờ nhỏ nhưng tốc độ của dòng lại lớn, còn khi độ cao sóng tới nhỏ đi thì số lượng các dòng gián đoạn tăng lên nhưng tốc độ lại giảm đi.

6) Dòng gián đoạn dường như có quan hệ yếu với tốc độ gió địa phương nhưng lại có quan hệ chặt hơn với hướng gió thổi.

7) Dòng gián đoạn thường có tốc độ lớn hơn 1m/s và phát triển ra biển có thể đến 500m, thông thường là 100m đến 200m.

8) Dòng gián đoạn thay đổi theo thời gian. Sự thay đổi này do dao động của mực nước có chu kỳ dài sinh ra do các đợt sóng tấn công vào bờ.

#### 4.7.4. Hệ phương trình mô tả dòng chảy sóng trung bình, ứng suất sóng

Ta đã biết khi sóng truyền vào vùng ven bờ do các hiệu ứng tác động của nền đáy sóng bị khúc xạ, bị biến dạng, bị đổ nhào, ... và dẫn đến mực nước trung bình của biển bị thay đổi và trường dòng chảy ven bờ phát sinh. Việc mô tả hệ dòng chảy ven bờ do sóng sinh ra một cách đầy đủ theo không gian 3 chiều là một vấn đề khó khăn và phức tạp. Trong phần này chúng ta sẽ chỉ xem xét dòng chảy trung bình do sóng sinh ra trong dải ven bờ và mô tả nó bằng các hệ phương trình cụ thể dựa trên các phương trình cơ bản của hệ phương trình Navier-Stokes.

Trước hết ta định nghĩa:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (4.101)$$

$$U_i(x, y, t) = \overline{\frac{l}{\zeta + h} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz} \quad i = 1, 2 \quad (4.102)$$

$$u_i = U_i + \tilde{u}_i(x, y, z, t) \quad (4.103)$$

Ta có:

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} u_i dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} U_i dz} + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i dz}$$

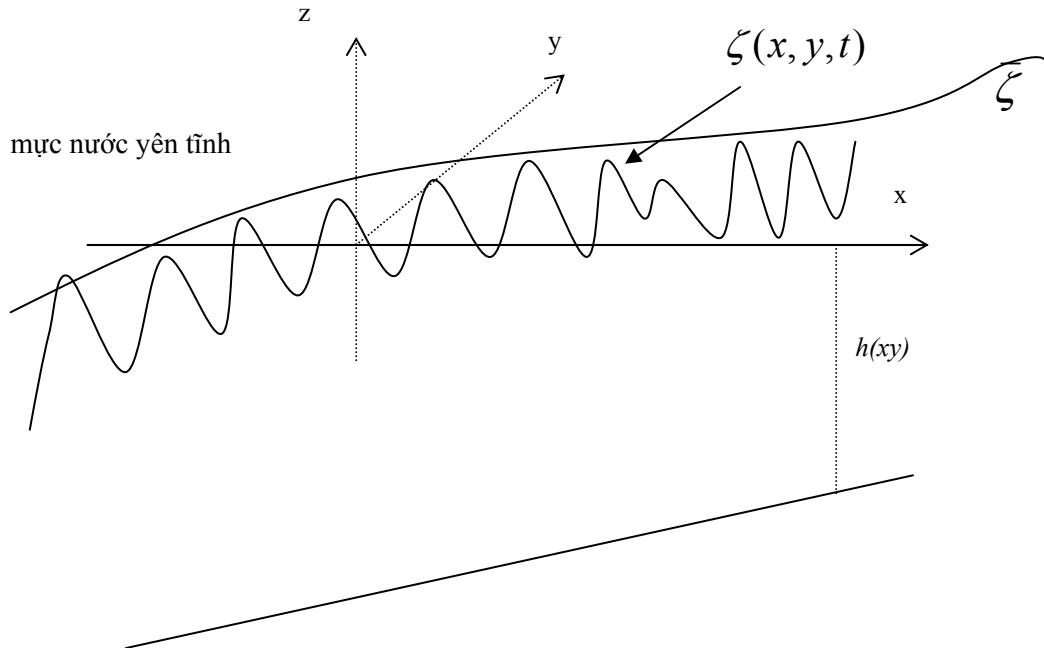
$$(\bar{\zeta} + h)U_i = U_i(\bar{\zeta} + h) + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i dz}$$

do đó:

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i dz} = 0 \quad (4.104)$$

Trong đó:  $\tilde{u}_i$  là giá trị thay đổi khỏi giá trị trung bình  $U_i$ ;  $\zeta(x, y, t)$  là độ dịch chuyển của bề mặt;  $\bar{\zeta}$  trung bình thời gian của  $\zeta(x, y, t)$  trong chu kỳ sóng;  $h(x, y)$  độ sâu của nước kể từ mặt yên tĩnh.

Một cách sơ lược, dao động bề mặt nước có thể mô tả như trên hình 4.19.



Hình 4.19 Minh họa dao động của mực nước trung bình

Từ hệ phương trình Navier Stokes áp dụng cho chất lỏng không nén và giả thiết rằng ảnh hưởng của độ nhớt lên chuyển động là không đáng kể thì hệ phương trình mô tả chuyển động của chất lỏng và phương trình liên tục sẽ có dạng:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial w u_i}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.107)$$

với  $-h(x, y) \leq z \leq \zeta(x, y, t)$

Kết hợp với các điều kiện biên:

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j}, \quad z = \zeta \quad (4.108)$$

$$w = -u_j \frac{\partial h}{\partial x_j}, \quad z = -h \quad (4.109)$$

$$p = 0, \quad z = \zeta \quad (4.110)$$

Trong các công thức trên khi chỉ số  $j$  lặp lại trong một số hạng thì số hạng đó được lấy tổng theo  $j$ ; Với  $j=1,2$ .

Tích phân phương trình liên tục từ  $z = -h$  đến  $z = \zeta$  và lấy trung bình, kết hợp với các điều kiện biên (4.108), (4.109) và biểu thức (4.102) cuối cùng ta thu được:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (h + \bar{\zeta}) U_j \right] = 0 \quad (4.111)$$

Tích phân phương trình chuyển động (4.105), (4.106) và kết hợp với các điều kiện biên cuối cùng ta thu được:

$$\rho(h + \bar{\zeta}) \left[ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} [\tilde{u}_i \tilde{u}_j \rho + p \delta_{ij}] dz} = \rho g(h + \bar{\zeta}) \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho(h + \bar{\zeta}) W \right] \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (4.112)$$

Ta sử dụng biểu thức:

$$\rho g(h + \bar{\zeta}) \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{2} \rho g(h + \bar{\zeta})^2 \right] - \rho g(h + \bar{\zeta}) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i}$$



do  $|W| \ll |U|$  và do độ nghiêng của đáy nhỏ phương trình (4.112) có thể giản ước về dạng:

$$\rho(h + \bar{\zeta}) \left[ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i} \right] = - \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\bar{\zeta}} [\tilde{u}_i \tilde{u}_j \rho + p \delta_{ij}] dz} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{2} \rho g (h + \bar{\zeta})^2 \right] \quad (4.113)$$

Đặt

$$S_{ij} = \overline{\int_{-h}^{\bar{\zeta}} [\tilde{u}_i \tilde{u}_j \rho + p \delta_{ij}] dz} - \left[ \frac{1}{2} \rho g (h + \bar{\zeta})^2 \right] \delta_{ij} \quad (4.114)$$

phương trình (4.113) có thể viết lại dưới dạng:

$$\rho(h + \bar{\zeta}) \left[ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i} \right] = - \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.115)$$

$$\text{với } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases}$$

$S_{ij}$  được gọi là ứng suất sóng (Radiation Stress - lần đầu tiên được Longuet-Higgins và Stewart đặt tên vào năm 1961).

Từ biểu thức mô tả của  $S_{ij}$  ta thấy rằng Radiation Stress được định nghĩa như là tổng của áp suất động lực dư và dòng động năng dư do chuyển động sóng gây ra.

Như vậy, hệ các phương trình (4.115) và (4.111) mô tả dòng chảy trung bình dưới tác động của chuyển động sóng.

Sử dụng các biểu thức biểu diễn các thành phần vận tốc của lý thuyết sóng biên độ nhỏ:

$$u = \frac{a\omega \operatorname{ch} k(h+z)}{\operatorname{sh} kh} \cos(kx - \omega t)$$

$$w = \frac{a\omega \operatorname{sh} k(h+z)}{\operatorname{sh} kh} \sin(kx - \omega t)$$

$$v=0$$

thế vào phương trình (4.114) của  $S_{ij}$ , sau khi đã bỏ qua các số hạng có giá trị nhỏ ta thu được biểu thức:

$$S_{ij} = E \begin{pmatrix} \frac{2C_g}{C} - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{kh}{\sinh 2kh} \end{pmatrix} \quad (4.116)$$

Trong đó năng lượng sóng  $E = \frac{I}{8} \rho g H^2$ ;  $C$  là tốc độ pha;  $C_g$  là tốc độ nhóm sóng.

Trong trường hợp tổng quát với dao động sóng mặt được biểu diễn dưới dạng:

$$\zeta = a \cos(k \cos \alpha + k \sin \alpha - \omega t) \quad (4.117)$$

ta thu được biểu thức biểu diễn của  $S_{ij}$  có dạng:

$$S_{ij} = \frac{E}{2} \left[ \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{2C_g}{C} + \delta_{ij} \left( \frac{2C_g}{C} - 1 \right) \right] \quad (4.118)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_x = k \cos \alpha \\ k_2 &= k_y = k \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.119)$$

$\alpha$  là góc giữa tia sóng tới và chiều dương của trục  $ox$

Biểu thức (4.118) có thể viết dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= S_{11} = \frac{E}{2} \left[ \frac{2C_g}{C} \cos^2 \alpha + \left( \frac{2C_g}{C} - 1 \right) \right] \\ S_{yy} &= S_{22} = \frac{E}{2} \left[ \frac{2C_g}{C} \sin^2 \alpha + \left( \frac{2C_g}{C} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.120)$$

$$S_{xy} = S_{yx} = S_{12} = S_{21} = E \frac{C_g}{C} \sin \alpha \cos \alpha$$

Nếu xét đến tác động của ma sát đáy đến dòng chảy trung bình thì ta cần thêm các ứng suất ma sát  $\tau_i^B$  vào vế phải của phương trình (4.115), khi đó hệ phương trình có dạng:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho(h + \bar{\zeta})} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - \tau_i^B \frac{1}{\rho(h + \bar{\zeta})} \quad (4.121)$$

trong đó:

$$\tau_i^B = f \rho U_i \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \quad (4.122)$$

f – hệ số ma sát.

Như vậy để xác định được các giá trị  $S_{ij}$  thì các giá trị của độ cao sóng phân bố trong vùng ven bờ và các góc sóng tới cần được xác định cụ thể trước.

Trong trường hợp tổng quát hơn, tính đến ảnh hưởng của ma sát nhớt thì thành phần ma sát trao đổi ngang được thêm vào vế phải của phương trình (4.121) đó là:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho(h + \bar{\zeta})} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - \tau_i^B \frac{1}{\rho(h + \bar{\zeta})} + M_i \quad (4.123)$$

Trong đó:

$$M_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon_{\mu} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right), \quad \varepsilon_{\mu} \text{ là hệ số trao đổi ngang.} \quad (4.124)$$

Theo Bowen và Longuet-Higgins thì  $\varepsilon_{\mu}$  được biểu diễn dưới dạng:

Theo Bowen

$$\varepsilon_{\mu} = \rho(h + \bar{\zeta}) A_h \quad (4.125a)$$

Theo Longuet-Higgins

$$\varepsilon_{\mu} = \mu_c (h + \bar{\zeta}) \quad (4.125b)$$

$$\mu_c = N \rho l \sqrt{g(h + \bar{\zeta})}, \quad 0 < N < 0.016$$

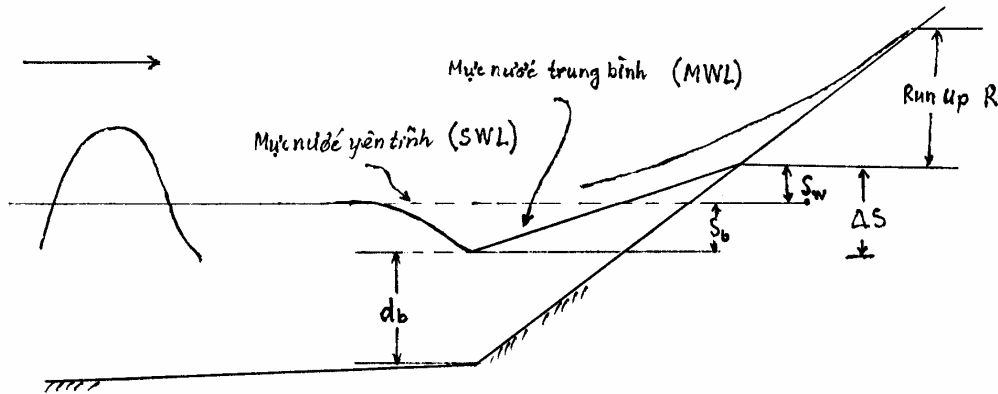
l: khoảng cách từ bờ, giá trị của l có thể xấp xỉ như sau:

$$l \approx (h + \bar{\zeta}) / \operatorname{tg} \beta$$

$\operatorname{tg} \beta$  : độ nghiêng của bãi biển.

#### 4.7.5. Thay đổi mực nước trung bình do tác động của sóng.

Các quan trắc thực tế đã cho thấy sự dao động của mực nước trung bình vùng ven bờ có một phần đóng góp do tác động của các sóng tới từ khơi. Sự dâng mực nước phía trong vùng sóng đổ được gọi là wave setup và phía ngoài vùng sóng đổ có sự hạ xuống của mực nước trung bình so với mực yên tĩnh được gọi là wave setdown. Trên hình 4.20 cho thấy sơ đồ mô tả tác động của sóng lên sự thay đổi mực nước trung bình vùng ven bờ. Trong đó đường chấm gạch chỉ mực nước yên tĩnh khi không có tác động của sóng.



Hình 4.20 Sơ đồ mô tả tác động của sóng lên mực nước trung bình

Đường liền nét chỉ vị trí của mực nước trung bình khi có sự tác động của sóng và sóng đổ. Tại điểm sóng đổ  $d_b$  mực nước trung bình hạ thấp nhất, khoảng cách giữa mực này với mực nước yên tĩnh được gọi là wave setdown  $S_b$ . Tiếp theo điểm sóng đổ theo hướng vào bờ, độ cao của mực nước trung bình tăng dần. Giá trị  $S_w$  trên hình vẽ chỉ độ lớn của wave setup.  $R$  là khoảng dâng cao cực đại của nước do quán tính của chuyển động sóng (Run up).

Để xem xét hiện tượng Wave setup, Wave setdown, ta xét một chuỗi sóng ổn định tiến vào bờ với hướng trực diện, bãi biển có độ dốc thoải đều đường đẳng sâu song song. Như vậy, các đặc trưng của sóng chỉ phụ thuộc vào  $x$  (theo hướng  $ox$ ) mà không phụ thuộc vào  $y$  (theo hướng  $oy$ ). Hệ trục tọa độ ở đây được đặt với  $ox$  vuông góc với bờ và  $oy$  song song với bờ.

Với các giả thiết trên, ta áp dụng phương trình (4.123) và thu được:

$$\frac{\partial}{\partial x}(h + \bar{\zeta})U = 0 \quad (4.126)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}S_{xx} = -\rho g(h + \bar{\zeta})\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} - \tau_x^B + M_x \quad (4.127)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S_{xy} = -\rho g(h + \bar{\zeta}) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \tau_y^B + M_y \quad (4.128)$$

do  $S_{xy} = 0$  nên

$$-\tau_y^B + M_y = 0$$

Trong phương trình (4.127) giả thiết thành phần ma sát  $-\tau_y^B + M_y$  nhỏ có thể bỏ qua thì phương trình trở thành:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_{xx} = -\rho g(h + \bar{\zeta}) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \quad (4.129)$$

Do các quá trình vật lý diễn ra phía trong và ngoài vùng sóng đồ khác nhau, ta xét hai trường hợp riêng biệt:

Phía ngoài vùng sóng đồ:

Do giá trị của  $\bar{\zeta}$  rất nhỏ so với độ sâu  $h$ , ta có thể bỏ qua và phương trình (4.129) có thể xấp xỉ dưới dạng:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_{xx} \approx -\rho g h \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \quad (4.130)$$

Tích phân phương trình (4.130) với  $\bar{\zeta} \rightarrow 0$  và  $h \rightarrow \infty$  ta thu được:

$$\bar{\zeta} = -\frac{H^2}{8} \frac{k}{\text{sh } 2kh} \quad (4.131)$$

Như vậy mực nước trung bình hạ xuống một khoảng  $\bar{\zeta}$  so với mực yên tĩnh và được gọi là Wave set-down.

Phía trong vùng sóng đồ:

Giả thiết độ cao sóng có thể được biểu diễn dưới dạng

$$H = \gamma (h + \bar{\zeta}) \quad (4.132)$$

Do tốc độ pha và tốc độ nhóm sóng trong vùng này là xấp xỉ bằng nhau  $C_g/C=n=1$  nên từ phương trình (4.130) ta có

$$S_{xx} = \frac{3E}{2}$$

Thay biểu thức của  $S_{xx}$  vào phương trình (4.129) ta thu được:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{3}{8} \rho g \gamma^2 (h + \bar{\zeta})^2 \right] = -\rho g (h + \bar{\zeta}) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \quad (4.133)$$

Phương trình này có nghiệm

$$\bar{\zeta} = k(h_b - h) + \bar{\zeta}_b \quad (4.134)$$

$$k = \left[ 1 + \left( \frac{8}{3} \gamma^2 \right) \right]^{-1}$$

Trong đó:  $\bar{\zeta}_b$  là giá trị Wave set-down tại điểm sóng đổ. Biểu thức (4.134) cho thấy mực nước trung bình tăng dần theo hướng vào bờ tính từ điểm sóng đổ và được gọi là Wave set-up.

#### 4.7.6. Phân bố của dòng chảy sóng dọc bờ

Để xem xét phân bố dòng chảy sóng dọc bờ ta xem xét các phân tích của Longuet-Higgins và Bowen.

Ta xét trường hợp đơn giản, độ nghiêng đáy đồng nhất đường đẳng sâu song song với đường bờ thẳng, dòng chảy ổn định. Trục x được đặt vuông góc với bờ, trục y được đặt song song với bờ.

Trong phần trước ta đã sử dụng phương trình (4.127) vào việc xem xét sự dâng và rút nước phía trong và ngoài vùng sóng đổ, bây giờ ta sẽ dùng phương trình (4.128) để xem xét phân bố dòng chảy dọc bờ:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_{xy} = -\rho g (h + \bar{\zeta}) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \tau_y^B + M_y$$

Do giả thiết trên,  $\frac{d\bar{\zeta}}{dy} = 0$  và như vậy phương trình (4.128) trở thành:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_{xy} = -\tau_y^B + M_y \quad (4.135)$$

Để giải phương trình (4.135), ta đi xác định các giá trị của  $S_{xy}$ ,  $M_y$  và  $\tau_y^B$ .

Theo lý thuyết sóng biên độ nhỏ, ta có biểu thức mô tả  $S_{xy}$  như sau:

$$S_{xy} = \frac{E}{2} \frac{C_g}{C} \sin 2\alpha = E \frac{C_g}{C} \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.136)$$

Phía ngoài vùng sóng đổ:

Giả thiết năng lượng giữa hai tia sóng được bảo toàn do đó:

$$E C_g \cos \alpha = \text{const} = E_b C_{gb} \cos \alpha_b$$

theo luật Snell  $\frac{\sin \alpha}{C} = \frac{\sin \alpha_b}{C_b}$

$$S_{xy} = E C_g \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{C} = E_b C_{gb} \frac{\sin \alpha_b}{C_b} = \text{const}$$

như thế ta có thể viết biểu thức sau:

$$M_y - \tau_y^B = \frac{d}{dx} S_{xy} = 0 \quad (4.137)$$

Phía trong vùng sóng đổ:

Độ cao sóng giả thiết được biểu diễn dưới dạng:

$$H = \gamma (h + \bar{\zeta})$$

khi đó

$$S_{xy} = \frac{1}{8} \rho g \gamma^2 (h + \bar{\zeta})^2 \frac{C_g}{C} \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.138)$$

Góc  $\alpha$  phía trong vùng sóng đổ thường rất nhỏ do vậy ta có thể xấp xỉ:

$$S_{xy} = \frac{1}{8} \rho g \gamma^2 (h + \bar{\zeta})^2 \sin \alpha_b \cos \alpha_b \quad (4.139a)$$

$$S_{xy} = \frac{1}{8} \rho g \gamma^2 (h + \bar{\zeta})^2 \sqrt{g(h + \bar{\zeta})} \frac{\sin \alpha}{C} \quad (4.139b)$$

Phương trình (4.139a) do Bowen đưa ra với giả thiết xấp xỉ  $\alpha_b \approx \alpha$  và  $C_g \approx C$ . Phương trình

(4.139b) Longuet-Higgins trình bày với giả thiết  $\cos \alpha \approx 1$  và  $C_g \approx \sqrt{g(h + \bar{\zeta})}$ . Do đó phương trình (4.135) có thể viết dưới hai dạng xấp xỉ:

$$M_y - \bar{\tau}_y^b = \frac{1}{4} \rho g \gamma^2 (h + \bar{\zeta}) \sin \alpha_b \cos \alpha_b \frac{d}{dx} (h + \bar{\zeta}) \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned} M_y - \bar{\tau}_y^b &= \frac{5}{16} \rho g^{3/2} \gamma^2 (h + \bar{\zeta})^{3/2} \frac{\sin \alpha_b}{C} \frac{d}{dx} (h + \bar{\zeta}) \\ &= \frac{5}{16} \rho g \gamma^2 (h + \bar{\zeta}) \sin \alpha_b \frac{d}{dx} (h + \bar{\zeta}) \quad (4.141) \end{aligned}$$

Có thể xác định biểu thức mô tả  $M_y$  và  $\bar{\tau}_y^b$  dưới dạng tổng quát:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_\mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \rho (h + \bar{\zeta}) A_h \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h + \bar{\zeta}) \mu_c \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \quad (4.142) \\ &= \rho (h + \bar{\zeta}) A_h \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (\text{theo Bowen}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h + \bar{\zeta}) \mu_c \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \quad (\text{theo Longuet-Higgins}) \end{aligned}$$

trong đó  $\mu_c = N \rho g \bar{x} \sqrt{g(h + \bar{\zeta})}$ ;  $0 < N \leq 0.016$ ;  $\bar{x}$  là khoảng cách tính từ bờ đến điểm đang xét.

$$\bar{\tau}_y^b = \begin{cases} \rho C_v & \text{Bowen} \\ \rho f_w \left| \overline{uwh} \right| \frac{v}{2} = \frac{1}{\pi} \rho f_w u_{\max} v & \text{Longuet - Higgins} \end{cases} \quad (4.143)$$

Coi wave set-down nhỏ và bỏ qua kết quả dẫn đến là:

(1) Theo Bowen

Phía ngoài vùng sóng đổ có:

$$A_h \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{C.v}{x.S} = 0 \quad (4.144)$$



$S = \tan \alpha$  là độ nghiêng của đáy.

Phía trong vùng sóng đồ có:

$$A_h \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{C.v}{m\bar{x}} = -\frac{1}{4} g \gamma^2 m \sin \alpha_b \cos \alpha_b \quad (4.145)$$

$$m = (h + \bar{\zeta}) / \bar{x} = (1 - K).S$$

Giải các phương trình trên với điều kiện biên  $v \rightarrow 0$  khi  $x \rightarrow \infty$  và  $v=0$  tại  $x=0$  ta thu được phân bố tốc độ dòng theo hướng vuông góc với bờ như sau:

ngoài vùng sóng đồ:

$$v(x) = P \lambda(x)^{1/2} K_1 \left[ \lambda(x)^{1/2} \right] \quad \lambda^2 = \frac{4C}{A_h.S} \quad (4.146)$$

trong vùng sóng đồ:

$$v(\bar{x}) = Q A(\bar{x})^{1/2} I_1 \left[ A(\bar{x})^{1/2} \right] + B A^2 \bar{x} \quad (4.147)$$

$$A^2 = \frac{4C}{A_h.m}; B = \frac{m^2 g \gamma^2}{4C A^2} \sin \alpha_b \cos \alpha_b$$

trong đó  $K_1$  và  $I_1$  là hàm Bessel bậc 1. Các hằng số tích phân P và Q được xác định theo điều kiện  $v(x)$  và  $dv(x)/dx$  liên tục tại đường sóng đồ  $\bar{x}_b = x_b + x_s$ . Đặt:

$$\theta = \frac{4C h_b}{A_h.S^2} = \lambda^2 x_b = A^2 \bar{x}_b (1 - K)^2 \quad (4.148)$$

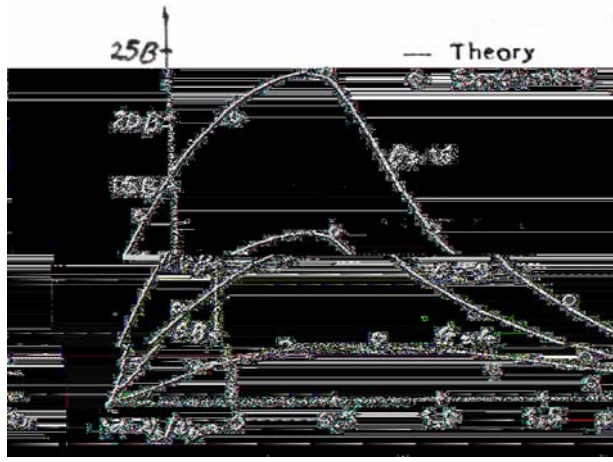
ta có phân bố vận tốc  $v$  là hàm của  $\alpha$  và  $x/\bar{x}_b$ . Để tìm phân bố vận tốc thực, các giá trị thích hợp của  $A_h$  và  $C$  phải được xác định. Hình 4.21 cho thấy so sánh giữa một họ các đường cong tính toán theo công thức lý thuyết khi sử dụng các giá trị của  $\alpha = 4,9$  và  $16$ , và các số liệu thí nghiệm của Eagleson và Galvin.

(2) Theo Longuet-Higgins.

Các phương trình cơ bản được viết dưới dạng:

Ngoài vùng sóng đồ:

$$N\rho g^{1/2} S^{3/2} \frac{d}{d\bar{x}} \left\{ \bar{x}^{5/2} \frac{dv}{d\bar{x}} \right\} - \frac{1}{2\pi} \rho f_w \gamma g^{1/2} S^{1/2} \bar{x}^{1/2} v = 0 \quad (4.149)$$



Hình 4.21 So sánh giữa đường cong lý thuyết và số liệu thí nghiệm về phân bố dòng chảy dọc bờ.

Phía trong vùng sóng đổ:

$$\begin{aligned} N\rho g^{1/2} S^{3/2} \frac{d}{d\bar{x}} \left\{ \bar{x}^{5/2} \frac{dv}{d\bar{x}} \right\} - \frac{1}{2\pi} \rho f_w \gamma g^{1/2} m^{1/2} \bar{x}^{1/2} v \\ = \frac{5}{16} \rho g^{3/2} \gamma^2 m^{5/2} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{g(h + \bar{\zeta})}} \bar{x}^{3/2} \end{aligned} \quad (4.150)$$

Trong đó phép xấp xỉ dưới đây đã được áp dụng

$$U_{\max} = \frac{\pi H}{T \operatorname{sh}\{2\pi(h + \bar{\zeta})/L\}} \approx \frac{HC}{2(h + \bar{\zeta})} \approx \frac{\gamma g^{1/2}(h + \bar{\zeta})^{1/2}}{2} \quad (4.151)$$

Longuet-Higgins đã giả thiết  $m = (1 - K)S \approx S$  và dẫn ra phương trình sau:

$$P \frac{d}{d\bar{x}} \left( \bar{x}^{5/2} \frac{dv}{d\bar{x}} \right) - q \bar{x}^{1/2} v = \begin{cases} -r \bar{x}^{3/2} & 0 < \bar{x} < \bar{x}_b \\ 0 & \bar{x}_b < \bar{x} < \infty \end{cases} \quad (4.152)$$

trong đó

$$P = N\rho g^{1/2} S^{3/2}$$

$$q = \frac{1}{2\pi} \rho f_w \gamma g^{1/2} S^{1/2} \quad (4.153)$$

$$r = \frac{5}{16} \rho g^{3/2} \gamma^2 S^{5/2} \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{g(h + \zeta)}} \right)_b$$

Nếu bỏ qua thành phần ma sát bên thì nghiệm đơn giản thu được dưới dạng:

$$v = \begin{cases} \frac{r}{q} \bar{x} & 0 < \bar{x} < \bar{x}_b \\ 0 & \bar{x}_b < \bar{x} < \infty \end{cases} \quad (4.154)$$

ở đây

$$\frac{r}{q} = \frac{5\pi\gamma}{8f_w} (gh_b) \frac{S}{\bar{x}_b} \left( \frac{\sin \alpha_b}{C_b} \right)$$

Tại điểm  $\bar{x} = \bar{x}_b$ , vận tốc dọc bờ  $v_o$  sẽ như sau:

$$v_o = \frac{5\pi\gamma}{8f_w} (gh_b) S \left( \frac{\sin \alpha_b}{C_b} \right) \quad (4.155)$$

Ta đưa vào các biến không thứ nguyên  $X = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_b}$ ,  $V = \frac{v}{v_o}$  và viết lại phương trình (4.149), (4.150) và (4.148) như sau:

$$P \frac{d}{dX} \left( X^{5/2} \frac{dV}{dX} \right) - X^{1/2} V = \begin{cases} -X^{3/2} & 0 < X < 1 \\ 0 & 1 < X < \infty \end{cases} \quad (4.156)$$

Trong đó  $P = \frac{2\pi SN}{\mathcal{H}_w}$  là một tham số không thứ nguyên diễn tả tương quan so sánh giữa xáo trộn ngang và ma sát bên. Nghiệm của phương trình trên là:

(a)  $P \neq 2/5$

$$V = \begin{cases} B_1 X^{P1} + AX & 0 < X < 1 \\ B_2 X^{P2} & 1 < X < \infty \end{cases} \quad (4.157)$$

$$P_1 = -\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{P}\right)^{1/2}, \quad P_2 = -\frac{3}{4} - \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{P}\right)^{1/2}, \quad A = \left(1 - \frac{5}{2}P\right)^{-1}$$

$$B_1 = \frac{P_2 - 1}{P_1 - P_2} A = [P(1 - P_1)(P_1 - P_2)]^{-1}$$

$$B_2 = \frac{P_1 - 1}{P_1 - P_2} A = [P(1 - P_2)(P_1 - P_2)]^{-1}$$

(b)  $P = 2/5$

$$V = \begin{cases} \frac{10}{49}X - \frac{5}{7}X \ln X & 0 < X < 1 \\ \frac{10}{49}X^{-5/2} & 1 < X < \infty \end{cases} \quad (4.158)$$

Các hệ số nhân với  $X$  và  $X^{-5/2}$  được xác định từ việc đảm bảo tính liên tục của  $V$  và  $dV/dX$  tại đường sóng đồ ( $X=1$ ).



Hình 4.22 So sánh giữa kết quả lý thuyết và thực nghiệm (theo Galvin & Eagleson)

Khi tham số  $P$  thay đổi trong khoảng 0 đến 0.4 thì giá trị cực đại của vận tốc không thứ nguyên  $V$  chỉ giảm đến khoảng 1/4. Điều này cho thấy ma sát đáy đóng vai trò quan trọng hơn ma sát bên trong sự phân bố của dòng chảy dọc bờ

Trên hình 4.22 minh họa so sánh giữa các kết quả lý thuyết ở trên và số liệu thí nghiệm của Galvin và Eagleson, và gợi ý cho thấy giá trị của  $P$  có thể lấy trong khoảng từ 0.1 đến 0.4.

## Chương 5

### TÁC ĐỘNG CỦA SÓNG GIÓ LÊN CÔNG TRÌNH

Đặc trưng của trạng thái mặt biển là sự chuyển động phức tạp của nước biển mà có thể nói đặc trưng chủ yếu của nó là chuyển động sóng và dòng chảy. Chuyển động sóng trên biển chủ yếu được gây ra do gió và có chu kỳ cỡ  $\leq 10^1$  s. Sóng được gây ra do các tác nhân khác như dao động của áp suất khí quyển, do động đất, do lực hút hành tinh thì thường có chu kỳ dao động dài hơn nhiều so với sóng gió. Còn đối với dòng chảy thì chủ yếu do tác động lôi kéo của gió, do chênh lệch mật độ hay mực nước gây ra. Trên thực tế, sóng gió và dòng chảy đã tác động mạnh mẽ trong dải ven bờ và tạo nên các quá trình động lực phức tạp của bờ biển, ảnh hưởng đáng kể đến các công trình do con người xây dựng trên biển cũng như ảnh hưởng đến các hoạt động kinh tế, xã hội của con người trong dải bờ biển. Do vậy đánh giá được các đặc trưng tác động của các yếu tố động lực là một vấn đề cần thiết phục vụ cho hoạt động xã hội cũng như chiến lược phát triển kinh tế.

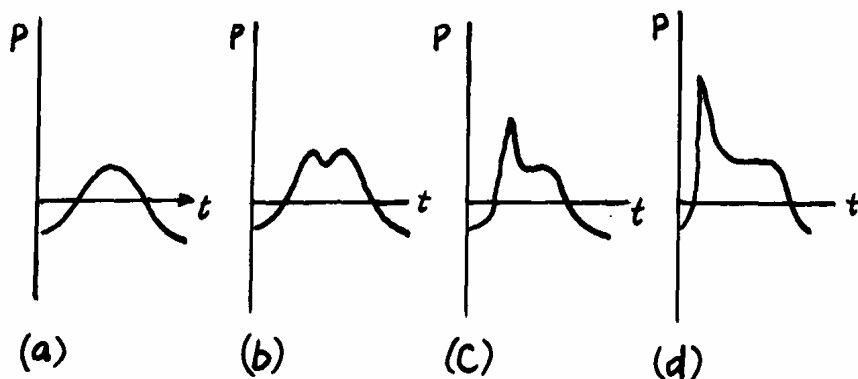
Trong phần này, các nghiên cứu tác động của sóng lên công trình sẽ được trình bày. Tuy nhiên, việc trình bày một cách cặn kẽ và tổng hợp toàn bộ các nghiên cứu hiện nay về tác động của sóng lên công trình thì nằm ngoài phạm vi của phần này. Do đó trong phần này chỉ dừng lại ở việc trình bày các khái niệm cơ bản, các công thức xác định một số lực tác động của sóng lên công trình được quan tâm trong các thiết kế và xây dựng công trình trên biển.

#### 5.1. ÁP SUẤT SÓNG LÊN TƯỜNG ĐỨNG

##### 5.1.1. Hiện tượng

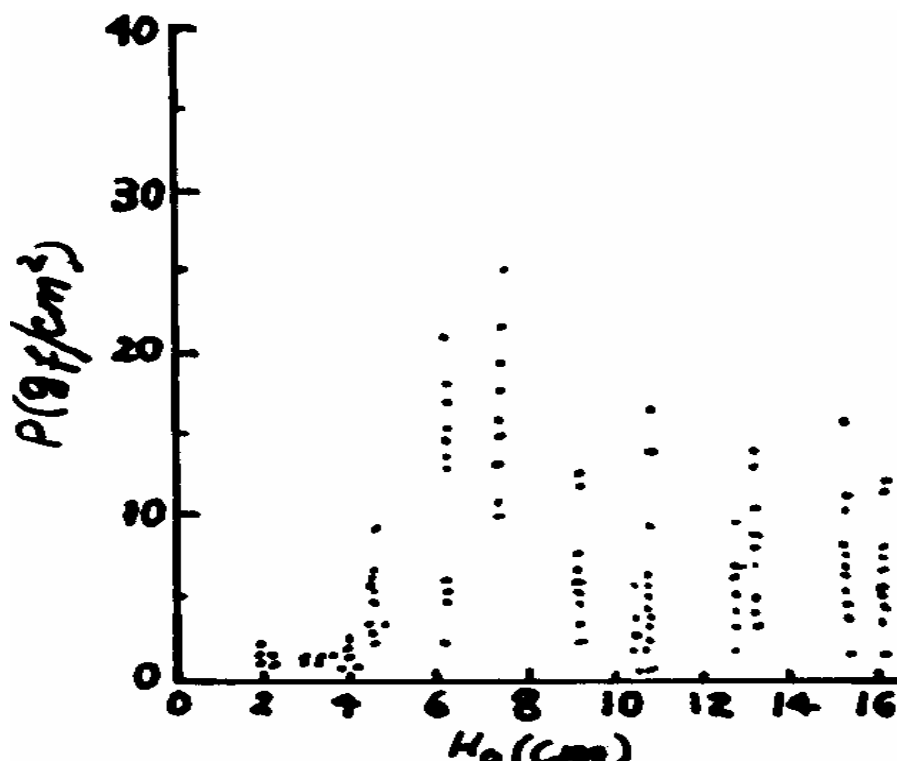
Xét một tường đứng đặt trong nước ở một độ sâu xác định h nào đó. Các sóng từ khơi đến thẳng góc với tường, nó đập vào tường một lực, độ lớn của lực này phụ thuộc vào các đặc trưng của sóng. Khi sóng tới có độ cao không quá lớn, sóng sẽ bị phản xạ hoàn toàn tại tường và tạo nên một hệ sóng đứng ngay phía trước của tường chắn. Trong trường hợp này áp lực sóng biến đổi dần cùng với dao động của bề mặt nước (xem hình 5.1), đây là áp suất của sóng đứng thông thường. ở một chừng mực nào đó thì các sóng lớn sẽ tạo ra các áp lực sóng có hai đỉnh như trong hình 5.1 b, khi các sóng tới có độ cao lớn hơn nữa thì nó sẽ xảy ra hiện tượng phá hủy của các sóng đứng, các đỉnh sóng bị sụp đổ và tạo ra dạng áp lực sóng bất đối xứng; phần thứ nhất của đỉnh sóng đôi lớn hơn nhiều so với phần thứ hai như trong hình 5.1c. Đó là các giai đoạn chuyển tiếp từ áp lực sóng đứng sang áp lực sóng đổ. Khi độ

cao sóng tới đạt đến điều kiện tới hạn thì diễn biến áp suất sóng bắt đầu từ áp suất xung lực tiếp theo là áp lực chớp sóng như trong hình 5.1d. Ngoài ra, các sóng bị đổ tần công vào tường và tạo ra một áp lực nhỏ hơn áp lực xung (áp lực lớn nhất). Trên hình 5.2 là thí dụ về mối quan hệ thực nghiệm giữa độ cao sóng tới  $H_0$  và áp suất sóng cực đại tại mực nước yên tĩnh  $P_{\max}$ .



Hình 5.1 Các dạng áp suất sóng

- áp suất  $P$  được tính bằng  $gf = \text{gram lực} = 9.81 \times 10^{-3} \text{N}$



Hình 5.2 Quan hệ thực nghiệm giữa áp suất tại mực yên tĩnh và độ cao sóng (Horikawa và Hase, 1962)

### 5.1.2. Áp lực gây ra do sóng đứng

Xét phân bố của áp lực sóng trên thành đứng của tường theo các lý thuyết khác nhau như sau:

a) Theo lý thuyết sóng biên độ nhỏ.

Khi độ cao sóng nhỏ, ta có thể áp dụng lý thuyết sóng biên độ nhỏ để phân tích sự phân bố của áp suất sóng. Khi đó profile sóng và thế vận tốc của sóng đứng có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\eta = a \cos k(x - ct) + a \cos k(x + ct) = 2a \cos(kx) \cos(kct) \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= ac \frac{\operatorname{ch} k(h+y)}{\operatorname{sh} kh} (\sin k(x-ct) - \sin k(x+ct)) \\ &= -2ac \frac{\operatorname{ch} k(h+y)}{\operatorname{sh} kh} \cos(kx) \sin(kct) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Thế vào phương trình biểu diễn áp suất

$$\frac{p}{\rho} = -gy - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.3)$$

và sử dụng  $c^2 = \frac{g}{k} \operatorname{th} kh$ , với  $kc = \sigma$  và  $2a=H$ , ta thu được:

$$\frac{p}{\rho g} = -y + H \frac{\operatorname{ch} k(h+y)}{\operatorname{ch} kh} \cos kx \cos \sigma t \quad (5.4)$$

tại vị trí mà  $\cos(kx)=1$ , biên độ dao động của áp suất đạt cực đại.

Để tăng độ chính xác của phép xấp xỉ ta sử dụng phương trình biểu diễn áp suất dưới dạng đầy đủ hơn:

$$\frac{p}{\rho} = -gy - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + f(t) \quad (5.5)$$

Để ý tại mặt ta coi  $P=P_0=0$  và  $\eta_0 = 2a \cos \sigma t = H \cos \sigma t$ , do đó phương trình (5.5) tại mặt thoáng có dạng:

$$f(t) = g\eta_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad , \quad y = \eta_0 \quad (5.6)$$

Tại điểm  $\cos kx=1$ , và thay (6) vào (5) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{p}{g\rho} = & -y + \frac{kH^2 \sin^2 \sigma t}{\text{sh } 2kh} [\text{sh}^2 k(h+\eta_0) - \text{sh}^2 k(h+y)] \\ & + \eta_0 \left[ 1 + \frac{\text{ch } k(h+y)}{\text{ch } kh} - \frac{\text{ch } k(h+\eta_0)}{\text{ch } kh} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Tại thời điểm mà  $\cos \sigma t = 1$ ;  $\sin \sigma t = 0$ , và đỉnh sóng đặt tại tường đứng thì phân bố áp suất sóng có dạng:

$$\frac{p}{g\rho} = -y + H \left[ 1 + \frac{\text{ch } k(h+y)}{\text{ch } kh} - \frac{\text{ch } k(h+H)}{\text{ch } kh} \right] \quad (5.8)$$

Tại đáy  $y=-h$ ,

$$\frac{p}{g\rho} = h + H \left[ 1 + \frac{1}{\text{ch } kh} - \frac{\text{ch } k(h+H)}{\text{ch } kh} \right] \quad (5.9)$$

b) Các phương trình của Sainflou:

Đối với lý thuyết sóng biên độ hữu hạn, chúng ta sử dụng phương trình của Sainflou dựa trên lý thuyết sóng trochoid.

Trục lớn và nhỏ của quỹ đạo chuyển động của hạt chất lỏng tại vị trí trung bình  $(x_0, y_0)$  được biểu diễn dạng:

$$\gamma = a \frac{\text{ch } k(h+y_0)}{\text{sh } kh} \quad , \quad \gamma' = a \frac{\text{sh } k(h+y_0)}{\text{sh } kh} \quad (5.10)$$

Theo Sainflou thì chuyển động của hạt nước trong sóng đứng có dạng:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - 2\gamma \sin kx_0 \cos \sigma t \\ y &= y_0 + ka^2 \frac{\text{sh } 2k(h+y_0)}{\text{sh}^2 kh} \cos^2 \sigma t + 2\gamma' \cos kx_0 \cos \sigma t \end{aligned} \quad (5.11)$$

Tích phân phương trình liên tục dạng Lagrang thu được



$$\frac{p}{\rho} = gy - \frac{2\sigma^2}{k} \left[ \gamma \cos kx_0 \cos \sigma t + \frac{k}{2} (\gamma^2 + \gamma'^2) (\cos^2 \sigma t + \cos 2\sigma t) - \frac{ka^2}{2\text{sh}^2 kh} \cos 2kx \cos^2 \sigma t \right] + f(t) \quad (5.12)$$

Thế phương trình thứ hai của (5.11) vào (5.12) và loại bỏ thành phần k□□ khi so sánh với □ ta có:

$$\frac{p}{\rho g} = -y_0 + 2\left(\frac{\sigma^2}{gk} \gamma - \gamma'\right) \cos kx_0 \cos \sigma t + f(t) \quad (5.13)$$

từ biểu thức  $\sigma^2 = gk \tanh kh$  và  $p=0$  tại  $y_0=0$  ta thu được  $f(t)=0$ , do đó

$$\frac{p}{\rho g} = -y_0 + H \left[ \frac{\text{ch } k(h + y_0)}{\text{ch } kh} - \frac{\text{sh } k(h + y_0)}{\text{sh } kh} \right] \cos kx_0 \cos \sigma t \quad (5.14)$$

Biểu thức mô tả phân bố của áp suất dọc tường đứng có thể thu được khi đặt  $x_0=0$  vào phương trình (5.14).

Sự chênh lệch giữa dao động trung bình và mực nước yên tĩnh  $\delta_0$  nhận được như sau:

- Thay  $x_0=0$  vào phương trình thứ hai của (5.11) ta thu được:

tại mực yên tĩnh  $y=y_0$ :

$$y = y_0 + ka^2 \frac{\text{sh } 2k(h + y_0)}{\text{sh}^2 kh} \cos^2 \sigma t + 2\gamma' \cos \sigma t \quad (5.15)$$

tại đỉnh và chân sóng:

$$\begin{aligned} y_{crest} &= y_0 + ka^2 \frac{\text{sh } 2k(h + y_0)}{\text{sh}^2 kh} \cos^2 \sigma t + 2\gamma' \\ y_{trough} &= y_0 + ka^2 \frac{\text{sh } 2k(h + y_0)}{\text{sh}^2 kh} \cos^2 \sigma t - 2\gamma' \end{aligned} \quad (5.16)$$

Từ các phương trình trên ta có biểu thức của mực nước trung bình là:

$$y = y_0 + ka^2 \frac{\text{sh } 2k(h + y_0)}{\text{sh}^2 kh} \quad (5.17)$$

và độ chênh

$$\delta = ka^2 \frac{\text{sh } 2k(h + y_0)}{\text{sh}^2 kh} \quad (5.18)$$

tại mặt tự do  $y_0=0$

$$\delta_0 = ka^2 \frac{\text{sh } 2kh}{\text{sh}^2 kh} = 2ka^2 \text{cth } kh = \frac{\pi H^2}{L} \text{cth } \frac{2\pi h}{L} \quad (5.19)$$

Phân bố áp suất sóng tới tại tường đứng thời điểm đỉnh sóng có dạng:

$$\frac{p}{\rho g} = -y_0 + H \left[ \frac{\text{ch } k(h + y_0)}{\text{ch } kh} - \frac{\text{sh } k(h + y_0)}{\text{sh } kh} \right] \quad (5.20)$$

Như vậy: - tại mặt thoáng  $y_0=0$  có  $p/\rho g=0$

- tại đáy  $y_0=-h$  có  $\frac{p}{\rho g} = h + \frac{H}{\text{cth } kh}$

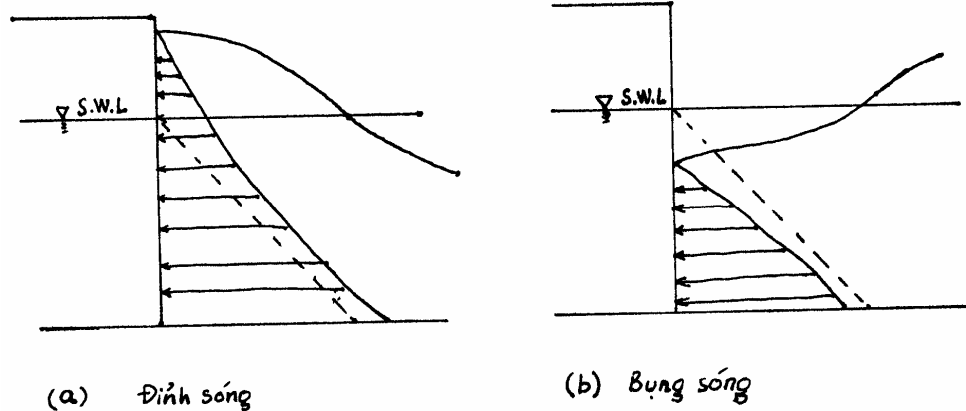
Một cách tương tự, phân bố áp suất trên tường đứng tại thời điểm bụng sóng có dạng:

$$\frac{p}{\rho g} = -y_0 - H \left[ \frac{\text{ch } k(h + y_0)}{\text{ch } kh} - \frac{\text{sh } k(h + y_0)}{\text{sh } kh} \right] \quad (5.21)$$

- tại mặt thoáng  $y_0=0$  có  $p/\rho g=0$

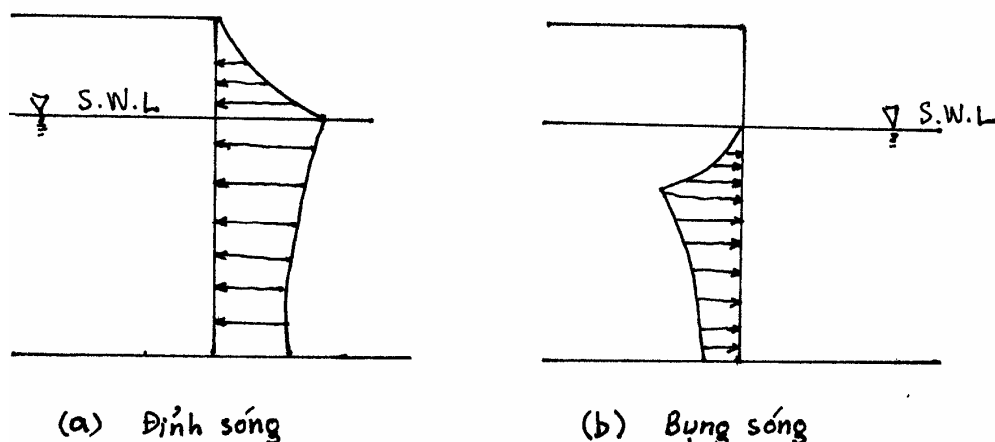
- tại đáy  $y_0=-h$  có  $\frac{p}{\rho g} = h - \frac{H}{\text{cth } kh}$

Các kết quả thu được minh hoạ trên hình (5.2) (5.3)

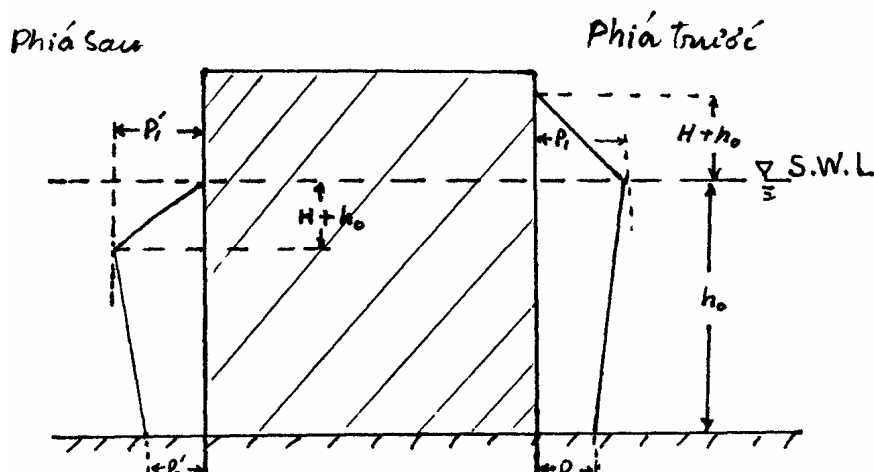


Hình 5.3 Phân bố áp suất của sóng đứng theo lý thuyết của Saint-Venant

Trên thực tế để đơn giản công thức của Sainflou mà vẫn đảm bảo độ chính xác cần thiết, người ta đã giả thiết phân bố áp suất sóng có dạng như trên hình 5.4



Hình 5.4 áp suất sóng đứng tác động lên đê chắn sóng



Hình 5.5 Minh họa cho công thức đơn giản hoá của Sainflou  
Công thức đơn giản hoá có dạng:

(1) Tại thời điểm đỉnh sóng áp suất được xác định theo công thức:

$$p_1 = (p_2 + \rho gh) \left( \frac{H + h_0}{H + h + h_0} \right) \quad (5.22)$$

$$p_2 = \rho g \frac{H}{\text{ch}\left(\frac{2\pi h}{L}\right)} \quad (5.23)$$

(2) Tại thời điểm bùng sóng áp suất được xác định theo công thức:

$$p_1 = \rho g(H - h_0) \quad (5.24)$$

$$p'_2 = p_2 = \rho g \frac{H}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi h}{L}\right)} \quad (5.25)$$

trong đó 
$$h_0 = \delta_0 = \frac{\pi H^2}{L} \operatorname{cth} \frac{2\pi h}{L}$$

c) Một số nghiên cứu khác

Như mô tả ở trên thì công thức của Sainflou dựa trên lý thuyết quay còn với một số nhà nghiên cứu khác như Gourret, Miche, Biesel, Rundgren, Kishi và Tadjbakhsh và Keller lại giải quyết vấn đề dựa trên lý thuyết không xoáy và sử dụng phép xấp xỉ bậc 2. Riêng Goda và Kakizaki thì sử dụng phép xấp xỉ bậc 4. Trên hình 5.6 là kết quả so sánh giữa tính theo công thức của Goda & Kakizaki với kết quả thí nghiệm. Trên hình 5.7 mô tả các vùng có thể áp dụng của công thức của Sainflou và công thức theo lý thuyết sóng tuyến tính.



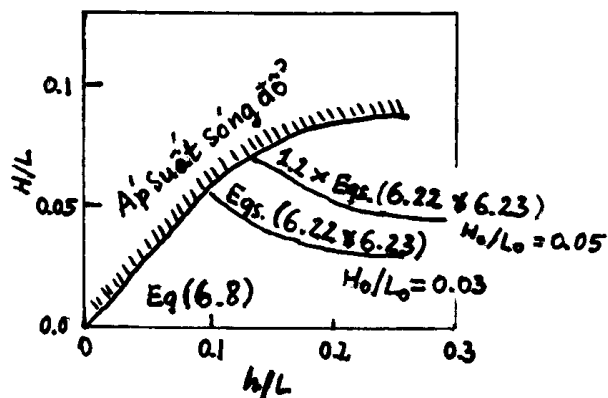
Hình 5.6 So sánh giữa đường cong lý thuyết và số liệu thí nghiệm về phân bố áp suất sóng đứng (Goda & Kakizaki, 1966)

Từ các sơ đồ trên hình 5.6, hình 5.7 cho thấy công thức đơn giản của Sainflou không phải thường xuyên cho giá trị an toàn nhất như mong đợi trong các trường hợp cụ thể. Nói chung, phân bố áp suất sóng đứng về nguyên lý có thể áp dụng cho việc thiết kế các đê chắn sóng với điều kiện  $h \geq 2H$  nhưng nó không phải đúng cho tất cả các trường hợp.

### 5.1.3. Áp suất sóng đổ

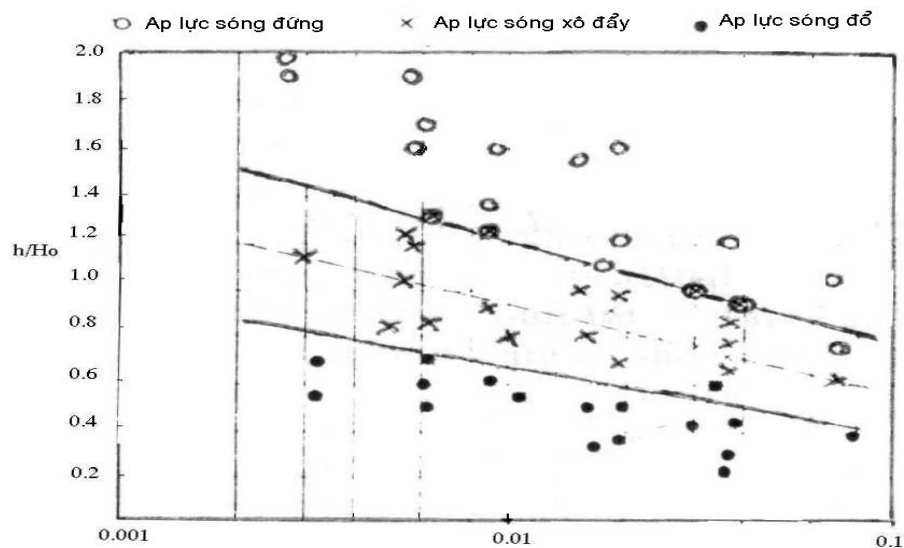
Các sóng đổ thực hiện các áp lực xung rất mạnh lên các tường đứng trong khoảng thời gian rất ngắn thường nhỏ hơn 1/10 giây nhưng giá trị cực đại của nó quả thật là rất đáng quan tâm. Với các điều kiện sóng như nhau thì xung lực của áp suất này là tương tự. Từ thực tế này nên áp suất sóng đổ được hiểu như là sự chuyển đổi của động lượng sóng.

Trên hình 5.8 minh họa các đặc trưng của áp lực sóng lên tường đứng được đặt tại các độ sâu khác nhau trên một mặt nghiêng 1/15 đối với sóng đứng, sóng xô đang đổ và sóng đổ. Từ sơ đồ hình vẽ chúng ta thấy rằng áp suất sóng đổ xuất hiện trong vùng có giới hạn theo độ sâu tương đối  $h/H_0$  và là hàm của độ dốc sóng trong vùng nước sâu  $H_0/L_0$ .



Eq : chỉ phương trình

Hình 5.7 Tiêu chuẩn áp dụng của các công thức khác nhau đối với áp suất sóng đứng (Kishi, 1964)



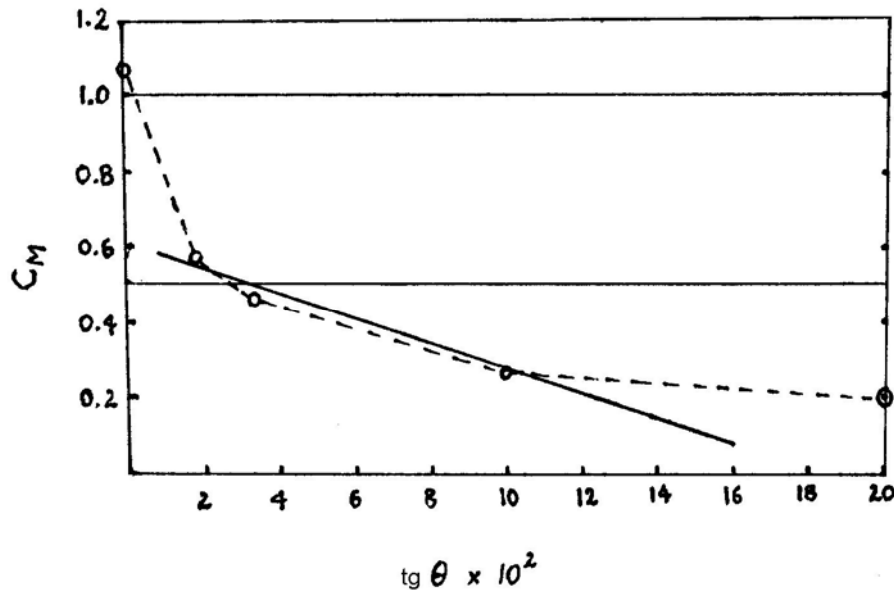
Hình 5.8 Phân loại áp suất sóng lên tường đứng trên nền dốc 1/15

Mithsuyasu đã trình bày một công thức thực nghiệm để xác định độ sâu nơi mà áp lực xung đáng quan tâm:

$$\frac{h_M}{H_0} = C_M \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^{1/4} \quad (5.26)$$

$C_M$  là một hàm của độ nghiêng  $\text{tg}\theta$  như mô tả trên hình 5.9.

Hiện tại các hiện tượng áp suất sóng đồ là quá phức tạp để có thể có được những phân tích lý thuyết một cách chính xác. Do đó, các nghiên cứu hiện tượng này được giới hạn trong việc xác định áp suất bằng sử dụng các mô hình thực nghiệm.



Hình 5.9 Mối quan hệ giữa  $C_M$  và độ nghiêng đáy (Horikawa&Hase, 1962)

a) Công thức thực nghiệm của Hiroi

Hiroi đã trình bày một mô hình mà trong đó áp suất sóng được lấy đồng nhất

$$p = 1.5 \rho g H \quad (5.27)$$

Áp suất được giả thiết tác dụng từ đáy lên đến độ cao  $1.25H$  phía trên mực nước yên tĩnh nhưng nếu độ cao sóng bờ lên hơn  $1.25H$  thì áp suất được giả thiết là tác động đến độ cao sóng bờ lên này. Trong đó  $H$  là độ cao của sóng tiến tại tường.

Thực tế cho thấy áp suất sóng đồ được đánh giá theo công thức của Hiroi không phù hợp với cường độ sóng địa phương tại từng điểm quan sát trong phòng thí nghiệm hay trên thực tế nhưng nó lại đúng với áp suất trung bình cho toàn miền chịu ảnh hưởng của áp suất sóng. Trong hầu hết các trường hợp thì cường độ áp suất thực là lớn hơn ở vùng lân cận mực nước trung bình và nhỏ hơn ở gần đáy. Tuy nhiên nếu trong trường hợp áp suất sóng đồ mạnh ở gần mặt thì công thức của Minikin thường được sử dụng tính toán.

#### b) Công thức của Minikin

Minikin cho rằng áp suất sóng đồ lên tường đứng được gây ra do va đập của các front sóng đồ mà tại đó có một lớp mỏng của các bọt khí. Minikin đã dựa vào rất nhiều các thí nghiệm đo đạc và các đo đạc, quan trắc thực tế đã đưa ra các công thức sau:

(1) Áp suất xung được tính theo công thức:

$$P_m = 102.4 \rho g d \left( 1 + \frac{d}{h} \right) \frac{H}{L} \quad (5.28)$$

$$P_y = P_m \left( \frac{H - 2|y|}{H} \right)^2 \quad (5.29)$$

trong đó  $y$  là khoảng cách tính từ mặt nước yên tĩnh và có giá trị trong khoảng  $-H/2$  đến  $+H/2$ .

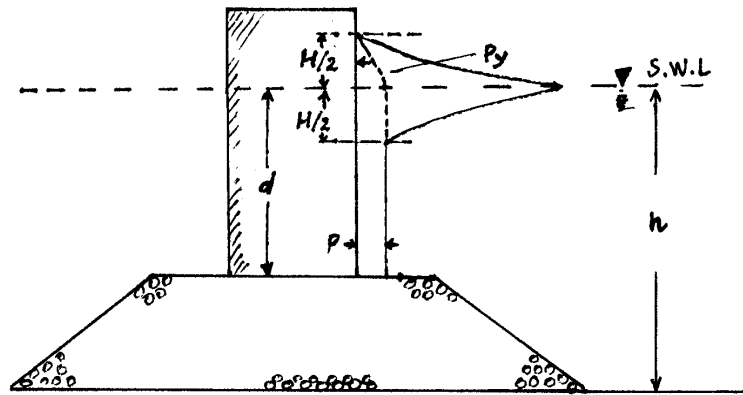
(2) Áp suất tĩnh được tính theo công thức:

$$P_s = \rho g \left( \frac{H}{2} - y \right) \quad , y: 0 \text{ đến } H/2 \quad (5.30)$$

$$P'_s = \rho g \frac{H}{2} \quad (5.31)$$

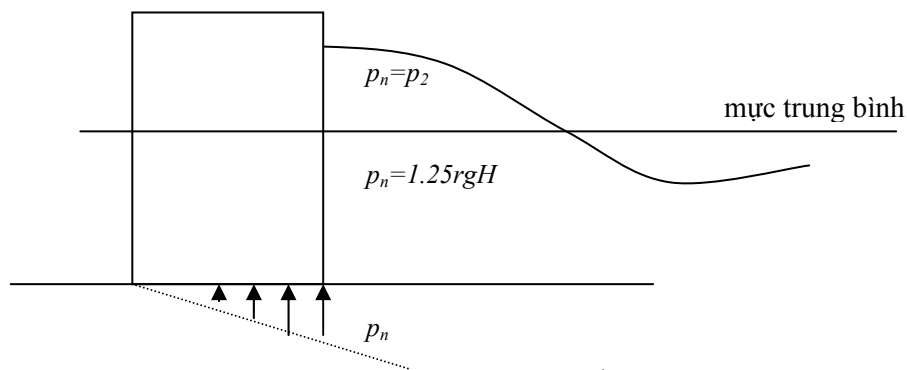
Ở đây,  $P_y$  là áp suất xung trong khoảng  $-H/2$  đến  $+H/2$  xung quanh mực yên tĩnh;  $P_m$  là giá trị cực đại của áp suất shock tại mực nước yên tĩnh;  $P_s$  là áp suất tĩnh trên mực nước yên tĩnh;  $P'_s$  là áp suất tĩnh dưới mực nước yên tĩnh;  $H$  là độ cao sóng tại độ sâu  $h$ ;  $L$  độ dài sóng tại độ sâu  $h$ ;  $d$  độ sâu tại chân tường.

Hình 5.10 dưới đây mô tả phân bố áp suất theo công thức của Minikin.

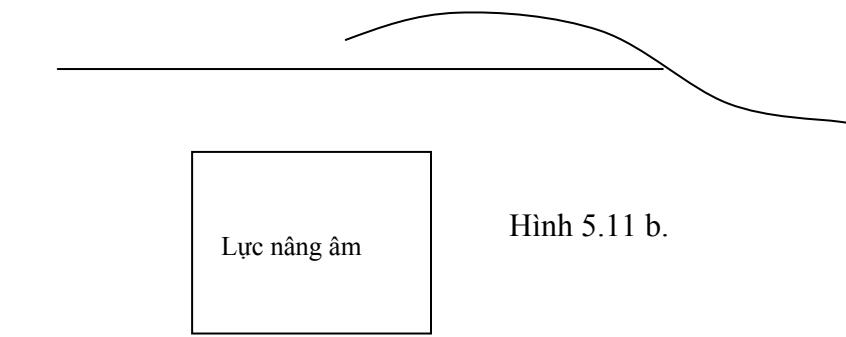


Hình 5.10 Phân bố áp suất sóng đồ theo công thức của Sainflou

#### 5.1.4. Lực nâng của sóng.



Hình 5.11 a.



Hình 5.11 b.

Hình 5.11 Sơ đồ lực nâng do tác động của sóng

Trên thực tế các lực nâng do tác động của sóng được phát sinh dọc theo chân của các đê chắn sóng là một vấn đề rất đáng quan tâm. Tính thấm của môi trường nền cho phép áp suất của chất lỏng truyền vào và dẫn đến các biến đổi của áp lực có thể gây ra các lực nâng tác động lên công trình. Giả sử độ



cao của đê chắn sóng đủ để ngăn không cho các sóng tràn qua. Phân bố theo phương ngang của lực nâng giả thiết có dạng như trên hình 5.11a. áp lực nâng tại chân phía ngoài của đê là  $P_2$  được xác định theo công thức của Sainflou trong trường hợp sóng đứng hoặc theo công thức  $p=1.25 \rho_r g H$  trong trường hợp sóng đổ. Khi độ cao của đê thấp hơn so với độ cao của đỉnh sóng bờ qua (xem hình 5.11b.) thì lực nâng có thể bỏ qua và cần quan tâm đến lực nâng âm khi mà bụng sóng tiến đến.

## 5.2. ÁP LỰC SÓNG LÊN TRÊN CÁC CÔNG TRÌNH.

### 5.2.1. Tính ổn định của các đụn sỏi, bê tông bề mặt.

Đối với các đê chắn sóng có tường đứng thì chức năng chính là chặn và làm phản xạ các sóng tới, còn đối với các đê chắn sóng dạng thoải thì được xây dựng bằng sỏi cuội hoặc các khối bê tông có chức năng làm đổ các sóng tới và tiêu tán năng lượng của sóng trên các sườn dốc nghiêng của đê. Với mục đích xây dựng một cấu trúc ổn định cho đê chắn sóng dạng này thì trọng lượng của đá hay các khối bê tông trên lớp mặt phải đủ lớn để chống lại các tác động của sóng. Trọng lượng cần thiết của các khối bê tông đó được xác định nhờ các trợ giúp thực nghiệm trong rất nhiều năm qua. Từ năm 1938, Irbarren đã đưa ra một công thức xác định khối lượng của khối bê tông, sỏi cần thiết.

Khi sóng tấn công và đổ trên mặt nghiêng của công trình thì một khối lượng xác định của nước đổ sập lên mặt nghiêng này và tạo ra một áp suất âm lên các khối đất đá, bê tông. Chính áp suất âm này làm giảm trọng lượng hữu hiệu của các khối sỏi đá, bê tông này và làm giảm sự chống đỡ của nó đối các tác động của sóng.

Ta ký hiệu  $F$  là lực nâng tác động lên khối đá sỏi,  $A$  là diện tích chiếu lên hướng của lực nâng,  $W$  là khối lượng của khối đá sỏi,  $H$  là độ cao sóng phía trước của đê chắn sóng. Lực nâng và diện tích chiếu sẽ là:

$$F = k \rho_r g A H \quad (5.32)$$

$$A \sim \left( \frac{W}{\rho_r g} \right)^{2/3} \quad (5.33)$$

Trong đó  $\rho_r$  là tỉ trọng của khối sỏi đá,  $k$ : hằng số thực nghiệm.

Kết hợp hai biểu thức này lại thu được:

$$F = K' \rho_r g H \left( \frac{W}{\rho_r g} \right)^{2/3} \quad (5.34)$$

$K'$  là một hằng số.

Điều kiện ổn định cho sự trượt của khối sỏi trên mặt nghiêng là:

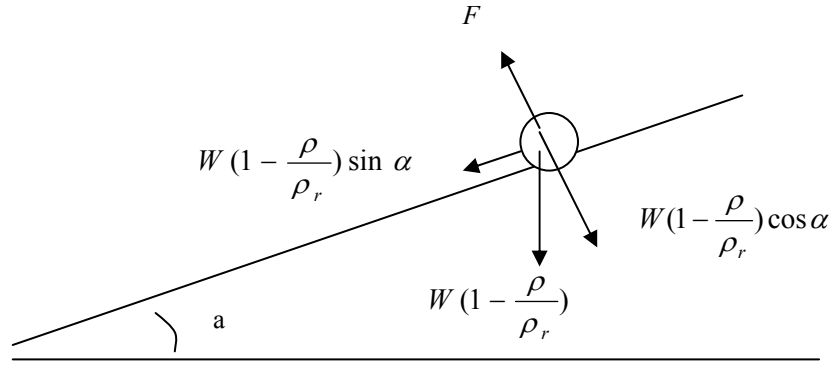
$$W\left(1 - \frac{\rho}{\rho_r}\right) \sin \alpha - \mu \left[ W\left(1 - \frac{\rho}{\rho_r}\right) \cos \alpha - K' \rho g H \left(\frac{W}{\rho_r g}\right)^{2/3} \right] \quad (5.35)$$

Trong đó:  $\alpha$  là góc nghiêng phía trước của đê,

$\mu$  là hệ số ma sát giữa các khối sỏi đá.

Giải phương trình (5.35) đối với  $W$  ta thu được:

$$W = \frac{K \mu^3 \rho_r g H^3}{(\rho_r / \rho - 1)^3 (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)^3} \quad (5.36)$$



Hình 5.12 Mô tả lực tác động lên một vật bề mặt

ở đây  $K = (K')^3$  là hằng số xác định từ thực nghiệm.

Hudson đã thực hiện lặp đi lặp lại nhiều thí nghiệm để xác định hằng số  $K$  trình bày trong phương trình (5.36) và cuối cùng đã phát hiện ra các giới hạn của phạm vi có thể áp dụng của phương trình này. Dựa trên công việc này, Hudson đã đưa ra một công thức dưới đây, công thức này hiện nay rất hay được sử dụng.

$$W = \frac{\rho_r g H^3}{K_D (\rho_r / \rho - 1)^3 \coth \alpha} \quad (5.37)$$

Công thức này thực tế không chắc về mặt lý thuyết xong đã được khẳng định là cho kết quả hợp lý trong rất nhiều các trường hợp thực nghiệm khác

nhau.

Hệ số không thứ nguyên  $K_D$  được gọi là hệ số ổn định nó thường có giá trị trong khoảng 2.8 đến 4.3 đối với sỏi, từ 6.6 đến 13.6 đối với các khối bê tông xi măng dưới điều kiện khối lượng bị phá huỷ là từ 0% đến 1%.

Trong các phương trình trên, sự ảnh hưởng của chu kỳ sóng hay độ dài sóng là không được kể đến, song các khảo sát trong phòng thí nghiệm đã chỉ ra rằng với độ cao sóng như nhau thì sóng có chu kỳ dài hơn gây phá huỷ công trình lớn hơn. Trong trường hợp đỉnh của công trình bị sóng tấn công từ nhiều hướng khác nhau thì lớp phủ có thể bị xô dịch hoặc bị đẩy rơi, do đó tại đỉnh khối lượng của các khối che phủ cần được tăng thêm bằng 1,5 lần giá trị xác định theo công thức (5.37).

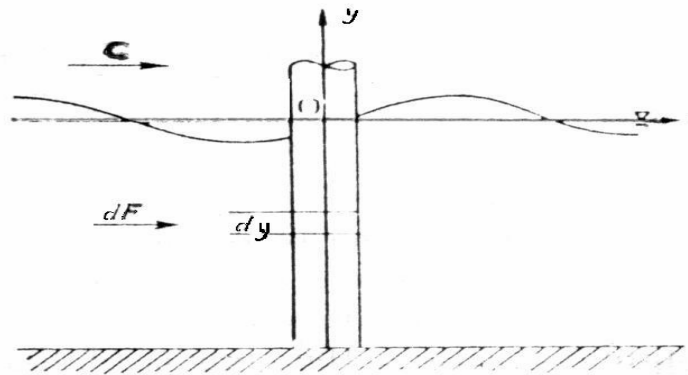
### 5.2.2. Áp lực của sóng lên các cấu trúc ống.

Gia số áp lực sóng tác động lên một ống được biểu diễn dưới dạng:

$$dF = \frac{1}{2} \rho C_D U |U| dS + \rho C_M \dot{U} dV \quad (5.38)$$

trong đó  $dF$  - áp lực sóng vi phân ngang,  $dV$  - thể tích,  $dS$  - tiết diện cắt chiều lên phương ngang,  $\rho$  - mật độ nước,  $C_D$  và  $C_M$  - hệ số kéo và hệ số quán tính,  $U$  và  $\dot{U}$  - vận tốc và gia tốc của nước theo phương ngang tại trục của ống. Trong trường hợp ống trụ có đường kính  $D$  (xem hình 5.13) thì phương trình (5.38) trở thành:

$$dF = \left( \frac{1}{2} \rho C_D D U |U| dS + \rho C_M \frac{\pi D^2}{4} \dot{U} \right) dV \quad (5.39)$$

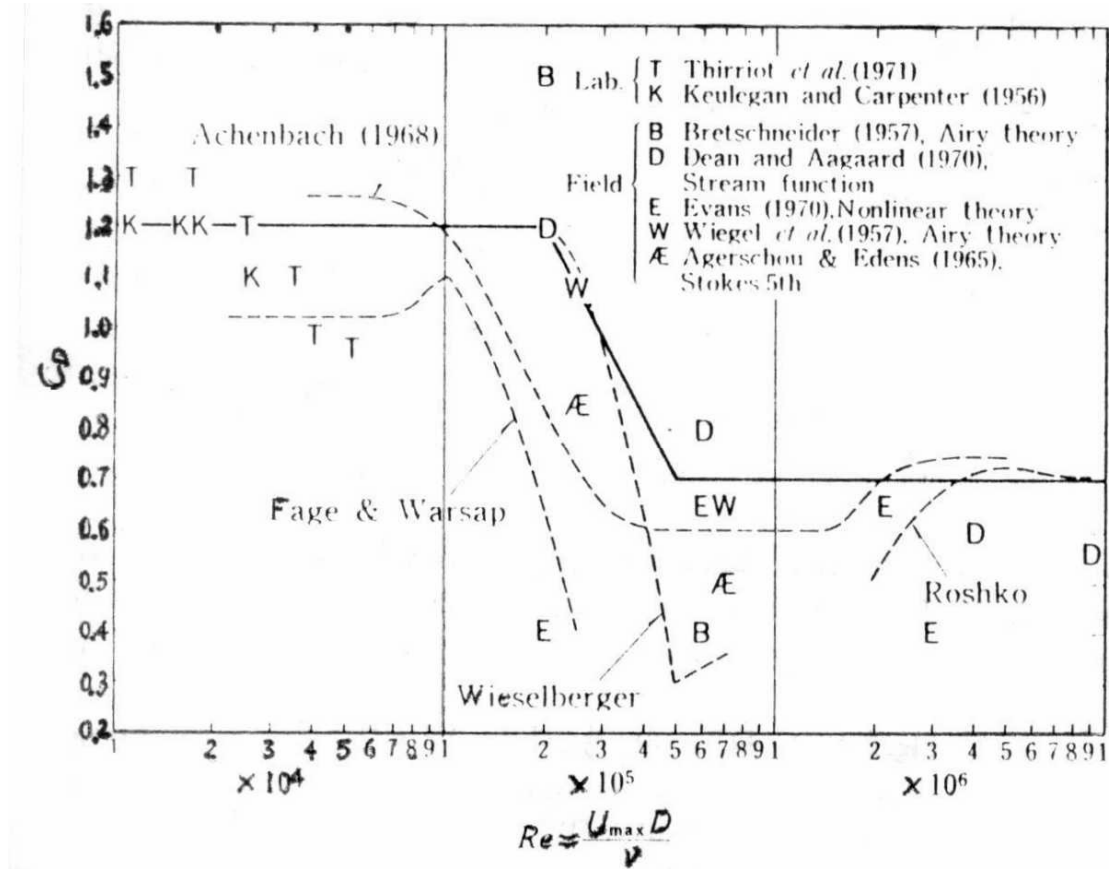


Hình 5.13 Mô tả định nghĩa áp lực sóng lên trụ đứng

Công thức này lần đầu tiên được Morison, O'brien, Johnson và Schaaf trình bày với giả thiết áp lực sóng có thể biểu diễn như là sự kết hợp tuyến

tính của lực kéo và lực quán tính được gây ra do vận tốc và gia tốc của hạt nước. Trong quá trình nghiên cứu đã có rất nhiều cuộc khảo sát được thực hiện để xác định hệ số  $C_D$  và  $C_M$ .

Trên hình 5.14 là tóm lược các kết quả khảo sát và đường cong thiết kế được CERC\* đưa ra. Hoàng tuyến trong hình 5.14 được gán là số Reynold  $Re=U_{\max}D/\nu$  với  $U_{\max}$  là vận tốc ngang cực đại tại  $y=0$ ,  $D$  là đường kính ống. Mặt khác giá trị của  $C_M$  thực tế bằng với giá trị xác định theo lý thuyết và là hàm của tỉ số giữa đường kính ống và độ dài sóng.



Hình 5.14 Quan hệ giữa hệ số kéo  $C_D$  và số Reynolds (Theo các số liệu thí nghiệm CERC, 1973)

Áp lực sóng phụ thuộc vào thời gian, do vậy việc tính toán nó là cực kỳ phức tạp. Gia số áp lực sóng cực đại  $dF_{\max}$  thì dễ dàng xác định được theo phương trình:

$$dF_{\max} = \begin{cases} dF_D + \frac{dF_M^2}{4dF_D} & \text{khi } 2dF_D > dF_M \\ dF_M & \text{khi } 2dF_D < dF_M \end{cases} \quad (5.40)$$

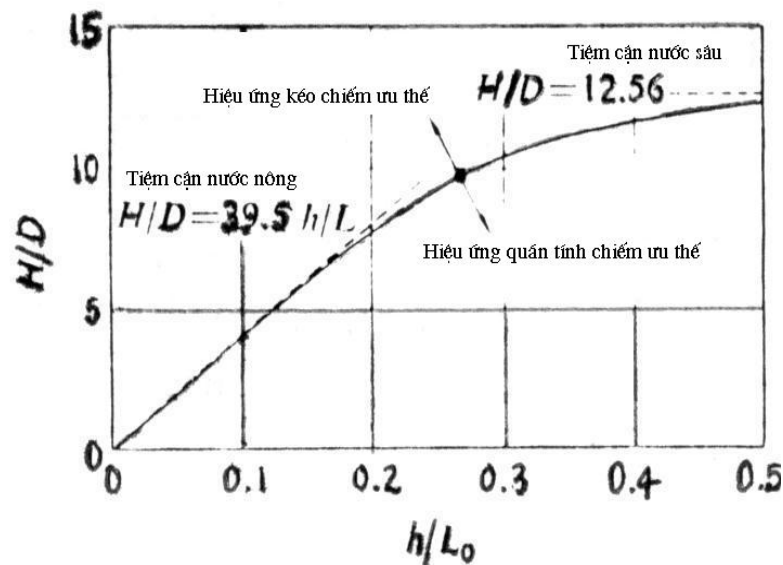
Trong đó:

$$dF_D = \frac{1}{2} \rho C_D U_{max}^2 dS$$

$$dF_M = \rho C_M \dot{U}_{max} dV$$

$\dot{U}_{max}, U_{max}$  Là biên độ của gia tốc và vận tốc hạt nước theo phương ngang.

Hình 5.15 chỉ cho thấy điều kiện tiêu chuẩn  $(F_D)_{max} = (F_M)_{max}$ . Đường cong trên hình này thu được bằng cách tích phân các thành phần kéo và thành phần quán tính từ mặt tới đáy sử dụng lý thuyết sóng biên độ nhỏ và giả thiết  $C_D=1.0$ ;  $C_M=2.0$ . Phía trên và dưới của đường cong tới hạn là hoặc tổng lực kéo  $(F_D)_{max}$  hoặc là tổng lực quán tính  $(F_M)_{max}$  chiếm ưu thế.



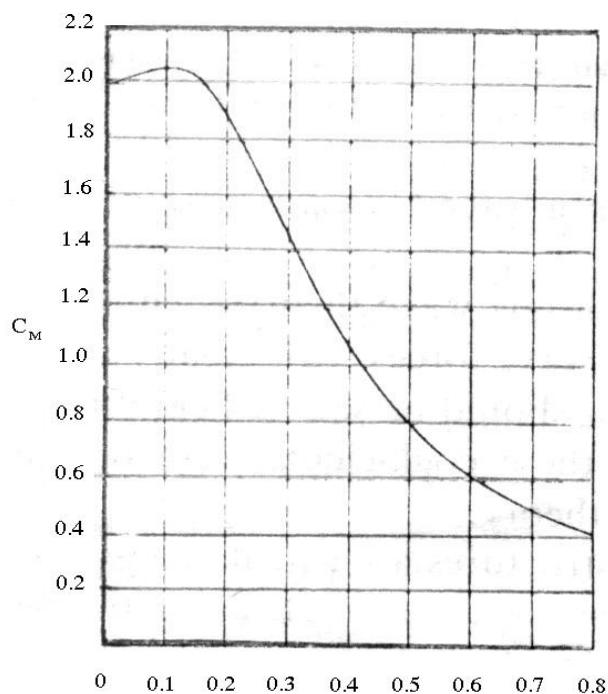
Hình 5.15 Đường cong  $H/D$  khi  $(F_D)_{max} = (F_M)_{max}$ ,  $C_D=1$  và  $C_M=2$  (Dựa trên lý thuyết sóng tuyến tính, theo Dean và Harleman, 1966)

Lý thuyết sóng biên độ hữu hạn cũng được sử dụng để tính toán  $U$  và  $\dot{U}$  nhằm thu được áp lực sóng với độ chính xác cao hơn. Trong trường hợp đó, giá trị của  $C_D$  và  $C_M$  phải được lựa chọn rất thận trọng bởi vì hầu hết các số liệu thí nghiệm đều thu được dựa trên cơ sở của lý thuyết sóng tuyến tính. Áp lực sóng lên cấu trúc ống được tính toán như vectơ tổng của áp lực sóng tác dụng theo các hướng khác nhau như hướng đứng, hướng xiên, phương ngang. Do vậy, giá trị cực đại của áp lực sóng được xác định bằng tổng của các giá trị áp lực sóng tác dụng lên các hướng và các khác biệt về pha tác động cần phải được quan tâm xem xét. áp lực sóng tác động lên một hướng thành phần được tính theo công thức (5.38). Trong đó các thành phần gia tốc và vận tốc hạt nước trực giao với trục của hướng thành phần nên gán cho  $U$  và  $\dot{U}$ .

Khi một nền năng được chống đỡ bởi các ống xây dựng trên vùng nước khá sâu thì các phân tích cấu trúc động lực cần được thực hiện để phục vụ thiết kế. Lý do là tần số tự nhiên của công trình có thể có quan hệ gần với cho kỳ sóng thì sự cộng hưởng có thể xảy ra và làm phá hoại kết cấu của công trình. Do đó, các đặc trưng phản hồi của công trình nên được điều tra, khảo sát theo các điều kiện sóng phức tạp. Trong các xem xét trên, đường kính ống đã được giả thiết cực nhỏ so với độ dài sóng. Khi đường kính của trụ công trình tăng thì lực quán tính trở nên chiếm ưu thế như đã chỉ ra trên hình (5.15). MacCamy và Fuchs đã giải quyết vấn đề này trên cơ sở của lý thuyết sóng tuyến tính. ý tưởng là quan tâm đến các sóng phản xạ và nhiễu xạ từ các trụ cũng như các sóng tới nhằm tìm ra nghiệm cho hàm thế  $\phi$  thỏa mãn điều kiện biên tại bề mặt của công trình.

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0$$

Trong đó,  $\phi$  là thế vận tốc tổng hợp;  $r$  là bán kính từ tâm của trụ;  $r=a$  là tại bề mặt của trụ. Từ đó, các phân bố lực dọc theo bề mặt của trụ có thể được xác định và do đó lực quán tính có thể tính được. Dựa trên các kết quả trên, Bretschneider và Denis đã xác định giá trị của hệ số quán tính  $C_M$  như là một hàm của  $D/L$  như trên hình (5.16). Từ giản đồ này có thể nhận thấy rằng giá trị  $C_M$  tăng từ 2.0 và đạt đến một giá trị cực đại tại điểm có  $D/L$  nằm trong khoảng 0.1 - 0.2. Tiếp sau giá trị  $C_M$  giảm xuống rất nhanh khi  $D/L$  tăng lên.



Hình 5.16 Hệ số quán tính của một cột hình trụ (Bretschneider và Denis, 1969).

## Chương 6

### QUÁ TRÌNH VẬN CHUYỂN TRẦM TÍCH

#### 6.1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Quá trình vận chuyển trầm tích đóng một vai trò hết sức quan trọng trong kỹ thuật bờ. Rất nhiều vấn đề liên quan tới xây dựng các công trình bờ đòi hỏi cung cấp các số liệu tính toán định lượng về bồi tụ, xói lở và ổn định đường bờ. Sóng, dòng chảy cùng với các tính chất vật lý của vật liệu đáy là những nhân tố quan trọng quyết định cho các quá trình trên. Vấn đề quan trọng nhất là việc xác định chính xác tốc độ dòng chảy và vận chuyển trầm tích trong khu vực nghiên cứu. Giá trị của vận tốc, sự biến động của nó cũng như quá trình tương tác với biến đổi bờ đóng vai trò quyết định cho việc dự báo sự thay đổi tự nhiên cũng như tác động của các công trình lên sự biến đổi của bờ và đáy.

Một cách tổng quát có thể chia quá trình vận chuyển trầm tích thành 3 bước chủ yếu

- (i) Điều kiện tách các vật liệu từ đáy, đưa chúng về dạng lơ lửng hay khả năng thể tích vật liệu đáy bị hao mòn;
- (ii) Hiện tượng dịch chuyển ngang của các phần tử nêu trên do các quá trình xảy ra trong lớp nước;
- (iii) Sự lắng đọng của các phần tử vật chất xuống đáy.

Thông thường người ta quan tâm tới sự vận chuyển trầm tích trên một đơn vị diện tích mặt đáy cụ thể. Điều này cũng tương đương với một thể tích nước cụ thể được giới hạn bởi mặt đáy đó và tiết diện trụ thẳng đứng. Nếu biết được cân cân vật chất đi vào và đi ra qua bề mặt trụ kể trên, chúng ta hoàn toàn có thể xác định mức độ bồi hay xói của mặt đáy quan tâm. Như vậy trong ba quá trình nêu trên, quá trình (ii) có ý nghĩa quyết định cho việc giải quyết bài toán đặt ra.

Trong một chừng mực nào đó, việc tính toán sự phân bố thẳng đứng của vật chất không quan trọng bằng tổng lượng vận chuyển ngang, đại lượng này được thể hiện qua thể tích của vật chất dịch chuyển qua một đơn vị khoảng cách ngang trong một đơn vị thời gian ( $L^3/LT$ ).

Vấn đề chủ yếu ở đây là xác định các biểu thức cụ thể phụ thuộc dòng

trầm tích vào dòng chảy, sóng và tính chất vật liệu đáy. Cho đến thời điểm hiện nay các công thức trên còn rất đa dạng và chưa cho ta một sự khẳng định cuối cùng về độ chính xác và khả năng ứng dụng rộng rãi của chúng. Tuy nhiên đối với từng yếu tố riêng biệt đã có được những công thức lý thuyết và bán thực nghiệm khá phù hợp với kết quả quan trắc.

### 6.1.1. Cơ sở lý thuyết xây dựng các công thức vận chuyển trầm tích

Cơ sở chung của việc tính tốc độ vận chuyển vật chất khá đơn giản, chúng ta có thể biểu diễn nó bằng tích phân theo độ sâu và thời gian:

$$S_x = \int_{-h}^{\eta} \left[ \int_0^{t'} c(z,t) u(z,t) dt \right] dz \quad (6.1)$$

trong đó  $x$  là hướng vận chuyển, vuông góc với tiết diện đứng có độ rộng  $d = 1$  đơn vị;  $c(z,t)$  là nồng độ vật chất lơ lửng được thể hiện qua thể tích vật liệu trên 1 đơn vị thể tích nước;  $h$  độ sâu nước;  $t'$  là khoảng thời gian lấy tích phân;  $u(z,t)$  là vận tốc tức thời của dòng nước theo hướng  $x$ , bao gồm dòng chảy ổn định, dòng triều và dòng sóng, vận tốc này được xem như vận tốc dịch chuyển trầm tích;  $\eta(x,y,t)$  là độ cao mực nước biển. Trong công thức (6.1) tính chất bất đồng nhất ngang, theo hướng vuông góc  $x$ , đã được trung bình hoá, chu kỳ lấy trung bình  $t'$  cần chọn đủ lớn để loại bỏ các tính chất nhiễu động tần số cao (có thể do sóng). Thông thường chu kỳ này cần đủ lớn, ít ra thì cũng lớn hơn chu kỳ sóng.

Vấn đề chủ yếu ở đây là tìm cách xác định chính xác dạng cụ thể của các hàm  $c(z,t)$  và  $u(z,t)$  để thay vào công thức (6.1).

### 6.1.2. Những phương hướng giải quyết và khả năng đơn giản hoá bài toán

Công thức (6.1) hoàn toàn có thể áp dụng cho cột nước từ mặt đến đáy, tuy nhiên do tính chất phân bố đột biến của nồng độ tại lớp sát đáy việc tính toán vận tốc và nồng độ cần được giải quyết cho từng lớp nhỏ, trong đó có thể sử dụng các hệ phương trình khác nhau căn cứ vào tính chất vật lý cụ thể. Theo hướng này, người ta chia tốc độ vận chuyển vật chất ra hai phần: phần lơ lửng và phần di đáy.

Trong việc tính toán theo công thức (6.1) có thể được đơn giản hoá bằng cách cho vận tốc tương đối ổn định theo thời gian  $u(z,t) \sim u(z)$  và xem đó như vận tốc trung bình. Sự biến động của nồng độ thông thường rất phức tạp và khó có thể đo được trong khoảng thời gian tương đối ngắn, vì vậy trong tính toán thông thường lấy giá trị trung bình  $\bar{c}(z)$ . Như vậy công thức (6.1) bây giờ có thể viết như sau:



$$S_x = \int_{-h}^{\eta} u(z) \bar{c}(z) dz \quad (6.2)$$

Như vậy nếu như chúng ta biết được quy luật phân bố của vận tốc dòng chảy và của nồng độ vật chất theo độ sâu, chúng ta có thể tính được dòng trầm tích vận chuyển theo hướng dòng chảy. Tuy nhiên điều này gần như rất khó thực hiện vì quy mô của các quá trình này rất phức tạp nên khó có thể nói đến một sự phân bố trung bình nào đó của vận tốc nói chung cũng như nồng độ vật chất chứa trong từng độ sâu, đặc biệt trong lớp biên sát đáy. Vì vậy để có thể đưa ra các công thức hoặc mô hình tính toán cụ thể cần đi sâu nghiên cứu cơ chế của các quá trình thủy động lực của biển trong đó chú trọng tới các lớp biên sát đáy và bờ biển.

### 6.1.3. Cơ chế của quá trình vận chuyển trầm tích

Để có thể phát triển và ứng dụng các công thức và mô hình tính toán vận chuyển trầm tích một cách có hiệu quả, chúng ta cần tìm hiểu cơ chế của quá trình này, chú trọng cơ chế vật lý của quá trình tách và lắng đọng trầm tích sát đáy.

Các quá trình thủy động lực như sóng và dòng chảy phát triển và xâm nhập vào toàn bộ lớp nước từ bề mặt tự do đến lớp biên đáy. Kết quả của các quá trình này là sự xuất hiện của vận tốc chuyển động của các phần tử nước. Sự chuyển động của nước trong biển luôn hình thành trên mặt đáy một lớp biên trong đó có lớp biên sát đáy. Đặc điểm quan trọng của lớp biên đáy là cường độ của dòng động lượng trao đổi giữa lớp nước và đáy được thể hiện qua ứng suất ma sát hay lực tác động lên đáy (ứng suất phân lớp). Trong trường hợp ứng suất đáy đạt tới một giá trị tới hạn (tương ứng một giá trị vận tốc đáy tới hạn  $u_{bcr}$ ), đủ lớn để các hạt trầm tích trên đáy bắt đầu tách ra và dịch chuyển theo nước. Theo lý thuyết thì các phần tử trầm tích đáy vừa bị tách ra và các phần tử nước trong lớp sát đáy chuyển động theo các vận tốc khác nhau, nhưng do các hạt trầm tích thường có kích thước rất nhỏ (khối lượng rất bé) nên chúng nhanh chóng đạt tới vận tốc như vận tốc nước bao quanh. Như vậy có thể cho rằng các hạt trầm tích trên mặt đáy sẽ đứng yên nếu ứng suất nhỏ hay  $u_b < u_{bcr}$  và bị chuyển dịch theo nước với vận tốc  $u_b$  nếu ứng suất lớn hay vận tốc dòng sát đáy đủ lớn  $u_b > u_{bcr}$ .

Việc xác định vận tốc tới hạn đối với từng loại trầm tích đáy sẽ được xét trong một mục riêng. Trong phần này chúng ta chỉ xem xét một khía cạnh thủy động lực học của lớp biên phục vụ tính toán vận tốc dòng chảy trong lớp nước gần đáy.

Trước hết cần nhận thấy rằng, các quá trình thủy động lực rất khó tách riêng từng quá trình để nghiên cứu và tính toán. Trong số những quá trình thủy động lực người ta chú trọng tới các quá trình sóng, dòng chảy và thủy triều.

Các công thức xác định vận tốc sát đáy  $u_b$  cần được rút ra từ lý thuyết lớp biên sát đáy trong đó độ gồ ghề của mặt đáy đóng một vai trò hết sức quan trọng.

Bên cạnh độ gồ ghề tự nhiên của nền đáy, tính chất biến đổi tuần hoàn của các trường thủy động lực như sóng, triều, dòng chảy luôn có khả năng tạo nên các sóng cát trên mặt đáy. Những sóng cát này gây nên hai hiệu ứng lên lớp nước nằm trên đó là: ma sát rối do các xoáy hình thành trên mặt sóng đáy hay là tác động trực tiếp của sóng đáy thông qua độ nhám; vận tốc dòng nước trên đỉnh và chân sóng đáy khác nhau tạo ra sự khác nhau về mức độ tách hoặc lắng đọng trầm tích khác nhau trên các vị trí khác nhau của sóng đáy.

Những vấn đề này rất phức tạp đang đòi hỏi những sự nỗ lực nhiều hơn theo cả hai hướng lý thuyết và thực nghiệm.

Đi đôi với quá trình tương tác đáy và lớp biên dẫn tới biến đổi các quá trình xói và lắng đọng trực tiếp trên mặt đáy, một quá trình khác không kém phần quan trọng là khả năng vận chuyển khối trầm tích vừa được tách ra từ đáy và mức độ cung cấp trầm tích cho lớp biên sát đáy thông qua quá trình trao đổi giữa toàn bộ lớp nước và lớp biên. Những thông lượng này một mặt phục vụ tính toán khả năng bồi xói đáy, một mặt lại là những điều kiện biên cho bài toán bình lưu khuếch tán trầm tích lơ lửng trong nước. Do việc tách toàn bộ tầng nước trên đáy ra lớp biên sát đáy và lớp biên chịu quá trình bình lưu-khuếch tán không thể thực hiện được một cách rõ ràng vì sự hiện diện của một lớp chuyển tiếp là hoàn toàn tự nhiên, vì vậy bài toán vận chuyển trầm tích trong nước khó có thể giải quyết triệt để bằng lý thuyết.

Về tổng thể bản thân lớp đáy biển cũng cần được nghiên cứu một cách chi tiết hơn bằng cách chia ra thành nhiều lớp có độ xốp (nồng độ) khác nhau, để có thể áp dụng các quy luật vật lý tương ứng cho từng lớp liên quan tới vận chuyển vật chất và nước.

Như vậy việc áp dụng các công thức và mô hình tính toán dựa trên các mối quan hệ bán thực nghiệm là hoàn toàn cần thiết trong nghiên cứu quá trình vận chuyển trầm tích và bồi xói đáy và bờ biển. Trong phần tiếp theo chúng ta đi sâu phân tích một số công thức thông dụng tính toán vận chuyển trầm tích biển.

## 6.2. NHỮNG CÔNG THỨC TÍNH TOÁN VẬN CHUYỂN TRẦM TÍCH

Sau khi xem xét các cơ chế của quá trình vận chuyển trầm tích, chúng ta cố gắng đưa ra các công thức tính toán dòng bồi tích vận chuyển do kết quả tổng hợp của các quá trình thủy động lực cơ bản vùng ven bờ là sóng và dòng chảy.

Như đã trình bày ở trên, công thức (6.1) là cơ sở cho việc xác định dòng

trầm tích vận chuyển. Vấn đề quan trọng đối với chúng ta là xác định quy luật phân bố và biến động theo không gian và thời gian của các trường vận tốc và nồng độ vật chất trong nước.

Cũng như các cách tiếp cận kinh điển trong nghiên cứu các quá trình phức tạp, chúng ta tiến hành nghiên cứu quy luật tác động của các quá trình thủy động lực riêng biệt lên hiện tượng vận chuyển trầm tích, đây là phương pháp nghiên cứu các quá trình hay chẩn đoán. Theo hướng này, trước hết ta tìm hiểu quy luật và đề xuất các công thức tính toán dòng trầm tích do dòng chảy ổn định, tiếp theo là dòng trầm tích do sóng và cuối cùng là dòng tổng hợp do tương tác của các quá trình trên.

### 6.2.1. Dòng trầm tích vận chuyển do dòng chảy ổn định

Tồn tại rất nhiều công thức tính toán dòng trầm tích bằng cách phân tách thành hai phần: dòng di đáy,  $S_b$  và dòng vận chuyển các chất lơ lửng,  $S_s$ . Dòng tổng cộng sẽ là tổng của hai thành phần nêu trên.

Trước hết chúng ta điểm lại một số công thức tính dòng trầm tích do dòng chảy ổn định đã được nghiên cứu và ứng dụng từ lâu, chủ yếu được phát triển và ứng dụng trong lĩnh vực thủy văn lục địa.

Một trong những công thức được đưa ra sớm nhất là công thức Kalinske-Frijlik do Frijlink (1952) đưa ra trên cơ sở số liệu quan trắc của Kalinske (1947). Công thức này áp dụng cho dòng di đáy (bed load) được viết trong dạng như sau:

$$S_b = BD \frac{V}{C} \mu \sqrt{g} \exp \left[ -0,27 \frac{\Delta C^2 D}{\mu V^2} \right] \quad (6.3)$$

trong đó:

B là một hệ số không thứ nguyên, phụ thuộc vào thứ nguyên của dòng trầm tích;

C là hệ số Chezy;

D kích thước trung bình của hạt trầm tích;

V vận tốc trung bình dòng ổn định;

$\mu$  hệ số ‘sóng đáy’;

$\Delta$  mật độ tương đối của trầm tích, được xác định theo công thức sau:

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \quad (6.4)$$

trong đó  $\rho_s$  là mật độ của các trầm tích và  $\rho$  là mật độ nước.

Trong công thức (6.3) giá trị của hệ số B phụ thuộc vào đặc điểm của các yếu tố động lực học và tính chất của bùn cát, tuy nhiên đối với tính toán thông thường có thể lấy bằng 5.

Trong công thức của mình, Bijker (1967) đã không đưa hệ số ‘sóng đáy’ vào phần đầu của công thức (6.3). Hệ số này như tên gọi cho ta ảnh hưởng của độ gồ ghề của đáy lên dòng trầm tích, tuy nhiên một phần của ảnh hưởng của yếu tố này cũng đã được đưa vào khi sử dụng hệ số Chezy.

Hệ số Chezy được viết trong dạng phụ thuộc vào ứng suất đáy như sau:

$$\frac{C^2}{V^2} = \frac{\rho g}{\tau_c} \quad (6.5)$$

trong đó  $\tau_c$  là ứng suất đáy. Chúng ta sẽ giới thiệu kỹ đại lượng này trong một mục riêng (6.2.2).

Khi sử dụng công thức (6.5), có thể biến đổi số hạng chứa hàm mũ e trong công thức (6.3) về dạng sau:

$$\exp \left[ -0,27 \frac{\Delta D \rho g}{\mu \tau_c} \right] \quad (6.6)$$

Số hạng này thường được gọi là “tham số cơ bản” trong công thức của Kalinske- Frijlink.

Một phần của số hạng đầu trong công thức (6.3):  $BD \frac{V}{C} \sqrt{g}$  được gọi là “tham số tải” vì có thứ nguyên thể tích trên một đơn vị độ rộng và một đơn vị thời gian. Thứ nguyên này áp dụng cho dòng trầm tích với ý nghĩa dòng trầm tích đi qua tiết diện có bề ngang là 1 đơn vị.

Có thể nhận thấy rằng đại lượng có thứ nguyên vận tốc  $v_* = V \frac{\sqrt{g}}{C}$  cho ta giá trị vận tốc tại độ cao  $z'$ :  $z' = z'_0 e^{\kappa}$ , trong đó  $z'_0$  là độ nhám của đáy- độ cao tính từ đáy mà tại đó vận tốc  $V(z') = 0$ ,  $\kappa$  là hằng số Karman. Công thức trên rút ra từ điều kiện phân bố vận tốc trong lớp biên tuân theo quy luật logarit

$$V(z') = \frac{1}{\kappa} v_* \ln \left( \frac{z'}{z'_0} \right) \quad (6.7)$$

và biểu thức tính ứng suất ma sát đáy theo lý thuyết kinh điển:

$$\tau_c = \rho g \frac{V^2}{C^2} \quad (6.8)$$

Từ các công thức trên, vận tốc động lực  $v^*$  được xác định theo giá trị ứng suất đáy không đổi trong lớp biên

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}} \quad (6.9)$$

Như chúng ta đều biết tham số nhám  $z'_0$  liên quan chặt chẽ với độ gồ ghề bề mặt  $r$ . Theo các kết quả nghiên cứu thực nghiệm thì:  $z'_0 = r/33$ . Khi độ cao nhỏ hơn  $z'_0$  thì phương trình (6.7) sẽ cho ta giá trị vận tốc nhỏ hơn 0, vì phương trình này chỉ đúng cho lớp nước nằm trên  $z'_0$ . Hệ số Chezy phụ thuộc vào độ gồ ghề thông qua công thức sau

$$C = 18 \lg \frac{12h}{r} \quad (6.10)$$

Công thức Kalinske - Frijlink được phát triển và ứng dụng cho tính toán dòng di đáy cho lòng sông. Trong công thức này đã không chú ý tới ảnh hưởng của vận chuyển các chất lơ lửng. Mặt khác công thức này cũng không tính đến giới hạn bắt đầu của quá trình vận chuyển trầm tích, nghĩa là xem ứng suất tới hạn  $\tau_{bcr} = 0$ , tương đương vận tốc tới hạn  $u_{bcr} = 0$ , do đó các tính toán theo công thức này có thể làm tăng lượng trầm tích vận chuyển so với thực tế.

Đối với hai hạn chế nêu trên, người ta đã có các hướng giải quyết khác nhau nhằm nâng cao độ chính xác của các công thức tính toán.

Einstein (1950) đã đưa ra một hướng giải quyết cho các sông có cả dòng vật chất lơ lửng  $S_s$  lẫn dòng di đáy  $S_b$ . Tác giả cho rằng dòng di đáy chỉ giới hạn trong lớp có độ dày  $a$  sát đáy, độ dày này có thể xem vào khoảng từ 2 đến 3 lần đường kính của các hạt trầm tích đáy.

$$S_b = \int_0^a c(z') V(z') dz' \quad (6.11)$$

Còn dòng lơ lửng được tính cho toàn bộ lớp nước còn lại

$$S_s = \int_a^h c(z')V(z')dz' \quad (6.12)$$

Einstein đã sử dụng lý thuyết lớp biên logarit để tính  $V(z')$ . Nồng độ vật chất được tính theo phương trình khuếch tán đã được biến đổi có chú ý tới ảnh hưởng của trọng lực lên các hạt vật chất

$$Wc(z') + \mathcal{E}_z \frac{dc(z')}{dz'} = 0 \quad (6.13)$$

trong đó  $W$  là vận tốc thăng giáng của các phần tử vật chất trong nước,  $\mathcal{E}_z$  là hệ số khuếch tán.

Vận tốc thăng giáng  $W$  là một đại lượng rất khó xác định. Sau đây là các mối tương quan thực nghiệm theo kết quả quan trắc đối với cát trong nước sạch với nhiệt độ cố định. Các công thức này áp dụng chủ yếu cho đường kính trầm tích trung bình,  $D_{50}$ , biến đổi từ 50 đến 300  $\mu\text{m}$ .

Khi nhiệt độ nằm trong khoảng  $18^\circ\text{C}$  ta có

$$\lg \frac{1}{W} = 0.4949(\lg D_{50})^2 + 2.4113 \lg D_{50} + 3.7394 \quad (6.14)$$

Hệ số khuếch tán có thể sử dụng các biến tương tự như đối với lớp biên logarit, ví dụ

$$\mathcal{E}_z = \kappa v_* z' \left( \frac{h - z'}{h} \right) \quad (6.15)$$

Thay (6.15) vào (6.13) và giải phương trình tìm  $c(z')$ , ta thu được công thức biến đổi nồng độ vật chất

$$c(z') = c(b) \left( \frac{h - z'}{z'} \frac{a}{h - a} \right)^{z_*} \quad (6.16)$$

trong đó  $c(b)$  nồng độ tại một độ cao lựa chọn  $z'=b$  so với đáy, và

$$z_* = \frac{W}{\kappa V_*} \quad (6.17)$$

là tham số phi thứ nguyên.

Bằng việc lấy  $b$  là độ cao của lớp sát đáy, tại mặt phân cách giữa lớp vận

chuyển đáy và lớp lơ lửng, ( $z=a$ ), kết hợp các phương trình (6.7), (6.12) và (6.16) ta có

$$S_s = \int_a^h c(a) \left( \frac{h-z'}{z'} \frac{a}{h-a} \right) z^* \frac{V_*}{\kappa} \ln \frac{z'}{z_0} dz' \quad (6.18)$$

Einstein đã xác định nồng độ  $c(a)$  từ công thức tính dòng di đáy do tác giả tự đề xuất, đồng thời tác giả cũng tách tích phân (6.18) thành hai phần trong dạng sau đây

$$S_s = 11,6 V_* a c(a) \left[ I_1 \ln \frac{33h}{r} + I_2 \right] \quad (6.19)$$

Trong đó

$$I_1 = 0,216 \frac{A^{(z^*-1)}}{(1-A)^{z^*}} \int_A^1 \left( \frac{1-\xi}{\xi} \right)^{z^*} d\xi \quad (6.20)$$

$$I_2 = 0,216 \frac{A^{(z^*-1)}}{(1-A)^{z^*}} \int_A^1 \left( \frac{1-\xi}{\xi} \right)^{z^*} \ln(\xi) d\xi \quad (6.21)$$

với  $A$  là một đại lượng phi thứ nguyên của độ gồ ghề,  $A = r/h$ , và  $\xi$  là đại lượng phi thứ nguyên của mực nước,  $\xi = z'/h$ .

Các nhà nghiên cứu sau này đã đưa ra được các số liệu về bậc đại lượng của số hạng trong dấu ngoặc vuông như là một hàm của  $A$  và  $z^*$ .

$$Q = \left[ I_1 \ln \frac{33h}{r} + I_2 \right] \quad (6.22)$$

Một số nhà nghiên cứu đã đưa ra công thức thực nghiệm tính dòng trầm tích tổng cộng do dòng chảy ổn định, trong số đó có công thức của Englund và Hansen (1967) như sau

$$S = 0,05V \frac{\tau_c^2 C}{\rho^2 g^{5/2} \Delta^2 D_{50}} \quad (6.23)$$

### 6.2.2. Công thức vận chuyển trầm tích đáy do sóng

Nếu như dòng chảy gây nên vận chuyển trầm tích chủ yếu do ứng suất ma

sát do hiệu ứng phân lớp tác động lên bề mặt đáy biển, thì sóng gây nên vận chuyển trầm tích chủ yếu thông qua dòng năng lượng sóng nguyên nhân gây nên ứng suất sóng và dòng chảy sóng trong lớp nước sát đáy.

Một trong những công thức tính toán dòng trầm tích đáy do sóng được Bijker phát triển theo hướng sử dụng các công thức hiện có đã được thiết lập cho dòng chảy ổn định (hoặc thông qua ứng suất đáy) bằng cách đưa bổ sung thêm phân biến đổi của dòng hoặc ứng suất đáy do sóng gây nên. Bijker đã lấy công thức Kalinske - Frijlink làm cơ sở để cải tiến cho trường hợp có sóng.

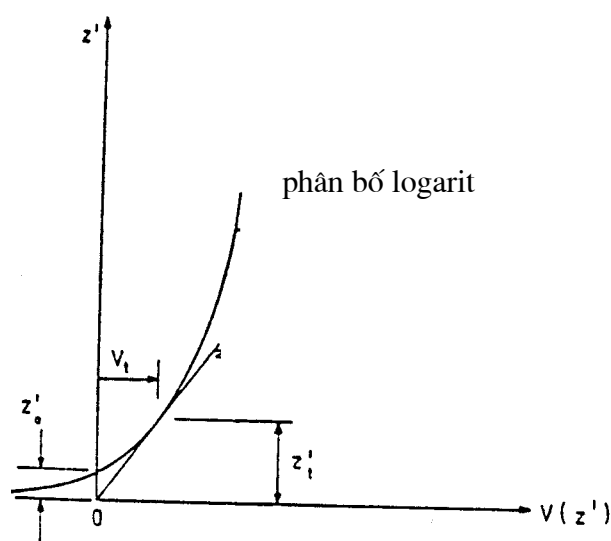
Có thể đưa ra biểu thức tính ứng suất đáy tổng hợp do dòng ổn định và sóng trong dạng sau đây

$$\tau_{cw} = \rho K^2 v_r^2 \quad (6.24)$$

với  $v_r$  là vận tốc tổng cộng tức thời.

Vấn đề đặt ra ở đây là việc xác định ứng suất trung bình cho một khoảng thời gian nhất định từ các giá trị tức thời nêu trên.

Chúng ta có thể bắt đầu từ công thức xác định vận tốc tổng cộng tức thời trong lớp nước sát đáy. Như đã trình bày ở phần trên phân bố của vận tốc dòng trong lớp nước trên đáy bao gồm lớp biên logarit ở phần trên và lớp phân bố tuyến tính từ đáy tương tự lớp biên do nhớt phân tử. Người ta cho rằng vận tốc trong lớp sát đáy có thể lấy bằng giá trị vận tốc tại độ cao nơi đường phân bố logarit và phân bố tuyến tính gặp nhau với điều kiện đường phân bố tuyến tính là tiếp tuyến của đường cong logarit. Điều này có thể thấy trên hình 6.1.



Hình 6.1. Phân bố vận tốc dòng chảy trong lớp biên sát đáy

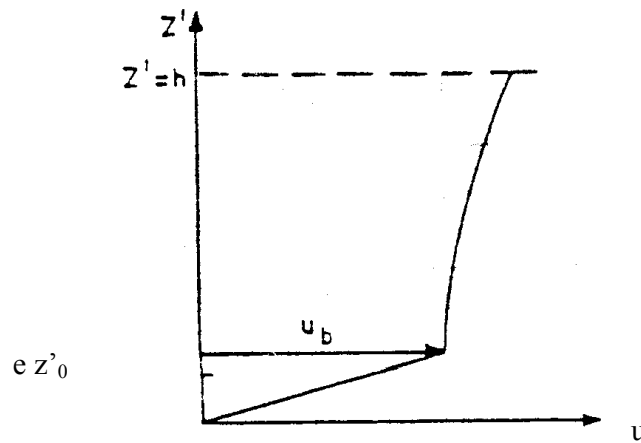


Độ cao  $z'_t$  trên hình 6.1 được xác định theo công thức sau theo Bijker:

$$z'_t = ez'_0 = \frac{er}{33}$$

trong đó  $r$  là độ cao của gò ghề.

Đối với phân bố của vận tốc trong sóng, Bijker đưa ra bức tranh phân bố trong hình 6.2 cũng với sự hiện diện của lớp biến đổi vận tốc tuyến tính sát đáy và vận tốc trong sóng gần như ít biến đổi cho toàn lớp nước.



Hình 6.2. Phân bố vận tốc sóng theo độ sâu

Vận tốc tức thời tổng cộng sẽ là tổng véc tơ của vận tốc dòng ổn định và vận tốc trong sóng tại cùng một độ cao từ đáy. Người ta lấy vận tốc tổng cộng tại độ cao  $z'_t$  làm đại lượng đặc trưng cho tác động của sóng và dòng lên quá trình vận chuyển trầm tích. Các giới hạn phân bố của các véc tơ vận tốc nêu trên được thể hiện trên hình 6.3.

Công thức tính vận tốc tức thời tổng cộng có thể viết như sau

$$v_r^2 = v_t^2 + (p u_b)^2 + 2 p u_b v_t \sin \phi \quad (6.25)$$

trong đó  $v_t$  là vận tốc dòng ổn định ở độ cao  $z'_t$  kể từ đáy,

$\phi$  là góc giữa hướng sóng và dòng chảy,

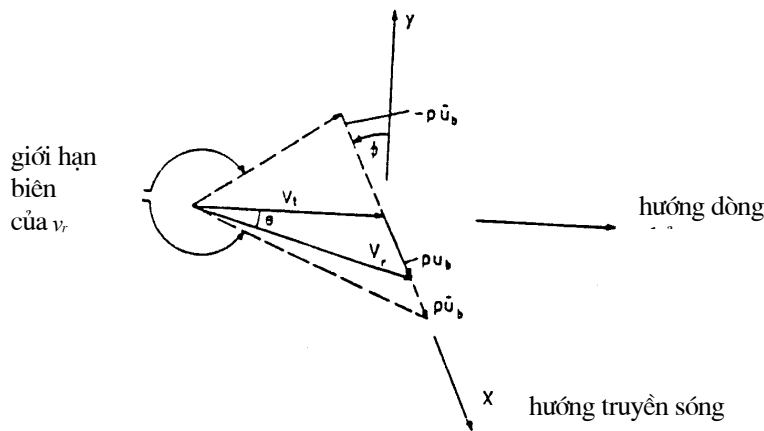
$p u_b$  là vận tốc do sóng tại độ cao  $z'_t$  với  $u_b$  là vận tốc tức thời của sóng tại lớp sát đáy.

Giá trị của  $p$  theo đánh giá của nhiều tác giả vào khoảng 0,45.

Giá trị vận tốc tức thời của sóng tại lớp sát đáy được xác định theo công thức (Madsen, 1976):

$$u_b = \frac{\omega H}{2 \sinh(kh)} \cos(\omega t) = \tilde{u}_b \cos(\omega t) \quad (6.26)$$

với  $H$  là độ cao sóng (thông thường lấy theo độ cao sóng đặc trưng  $H_s$ ),  $h$  là độ sâu,  $k$  là số sóng và  $\omega$  là tần số sóng.



Hình 6.3. Phân bố của các véc tơ vận tốc tại độ cao  $z'_t$  từ đáy biển

Một cách gần đúng có thể tính được biên độ vận tốc sóng theo công thức sau

$$\tilde{u}_b = \frac{\omega H}{2kh} \quad (6.27)$$

và nếu lấy  $H = \gamma h$  với  $\lambda = 2\pi/k = (gh)^{1/2} T$  thì

$$\tilde{u}_b = \frac{\gamma}{2} \sqrt{gh} \quad (6.28)$$

Giá trị của biên độ vận tốc sóng có thể tính bằng cách lấy trung bình cho một chu kỳ sóng ( $\omega = 0, 2\pi$ ). Trong khi lấy trung bình cho một chu kỳ sóng ta chú ý tới các đẳng thức sau:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$$

và

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}$$

Như vậy, sau khi thay công thức (6.27) vào (6.26) và tiến hành biến đổi ta thu được biểu thức sau

$$\overline{\mathbf{v}_r^2} = \mathbf{v}_t^2 + \frac{1}{2} \left( p \tilde{\mathbf{u}}_b \right)^2 = \mathbf{v}_t^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{p \tilde{\mathbf{u}}_b}{\mathbf{v}_t} \right)^2 \right)$$

Thay biểu thức thu được vào công thức (6.24) và lấy  $\tilde{\mathbf{u}}_b = \overline{\mathbf{u}}_b$  ta có

$$\overline{\tau_{cw}} = \rho \kappa^2 \mathbf{v}_t^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho \overline{\mathbf{u}}_b}{\mathbf{v}_t} \right)^2 \right] \quad (6.29)$$

Đễ dàng thấy rằng phần đầu của công thức (6.29) là ứng suất do dòng chảy.

$$\rho \kappa^2 \mathbf{v}_t^2 = \tau_c \quad (6.30)$$

Có thể biến đổi (6.29) về dạng sau

$$\overline{\tau_{cw}} = \tau_c + \frac{1}{2} \tau_w \quad (6.31)$$

trong đó

$$\tau_w = \rho \kappa^2 \left( \overline{p u_b} \right) \quad (6.32)$$

là ứng suất đẩy do sóng.

Theo các công trình nghiên cứu thì p không phải luôn cố định mà phụ

thuộc vào các đặc trưng sóng, theo Bijker và Jonson (1966) thì mỗi phụ thuộc này có thể lấy như sau:

$$p = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{f_w}{2}} \quad (6.33)$$

với  $f_w$  là hệ số ma sát sóng, theo Swart (1974) thì hệ số này phụ thuộc vào biên độ sóng  $a_b$  và độ nhám đáy  $r$ :

$$f_w = \exp \left[ -5,977 + 5,213 \left( \frac{a_b}{r} \right)^{-0,194} \right] \quad (6.34)$$

$$(a_b = \frac{H}{2} \frac{1}{\sin kh}) \quad (6.35)$$

Theo Kamphius thì độ nhám của đáy  $r$  có thể lấy từ 2 đến 3 lần đường kính  $D_{90}$ .

Công thức (6.31) cũng có thể viết dưới dạng

$$\overline{\tau_{cw}} = \tau_c \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \xi \frac{u_b}{V} \right)^2 \right) \quad (6.36)$$

trong đó  $\xi$  là một tham số liên quan tới hiệu ứng ma sát do sóng

$$\xi = \frac{\rho \kappa C}{\sqrt{g}} = \frac{C \sqrt{f_w}}{\sqrt{2g}}$$

### 6.2.3. Công thức vận chuyển trầm tích đáy tổng cộng do sóng và dòng chảy

Kết quả rút ra tại các phần vừa qua là ứng suất đáy và vận tốc đáy liên quan tới dòng trầm tích vận chuyển tại đây. Chúng ta có thể thay các biểu thức này vào công thức Kalinske -Frijlink, cho rằng dòng trầm tích vận chuyển do ứng suất (hoặc vận tốc tương ứng) đáy gây nên. Như vậy ta có

$$S_b = \frac{BDV\sqrt{g}}{C} \exp \left[ \frac{-0,27\Delta D\rho g}{\mu \tau_c \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \xi \frac{u_b}{V} \right)^2 \right]} \right] \quad (6.37)$$

hoặc

$$S_b = \frac{BDV\sqrt{g}}{C} \exp \left[ \frac{-0,27\Delta D C^2}{\mu V^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \xi \frac{u_b}{V} \right)^2 \right]} \right] \quad (6.38)$$

Theo các công thức này dễ nhận thấy rằng với sự hiện diện của sóng thông qua vận tốc  $u_b$ , dòng trầm tích đáy sẽ tăng lên.

Bijker cho rằng dòng trầm tích di đáy chỉ tồn tại trong một lớp có độ dày tương đương độ gồ ghề  $r$ . Cho rằng nồng độ vật chất trong lớp này không đổi theo độ sâu, vậy ta có

$$C_b = \frac{S_b}{\int_0^r V(z') dz'} \quad (6.39)$$

Tích phân theo độ sâu của vận tốc dựa vào phân bố của dòng chảy. Xuất phát từ công thức phân bố logarit, khi độ cao từ đáy nhỏ hơn tham số nhám  $z'_0$ , vận tốc có giá trị âm vì vậy thông thường gần đáy ta cho vận tốc phân bố theo quy luật tuyến tính với điều kiện vận tốc triệt tiêu ( $V=0$ ) tại  $z'=0$ . Để bảo đảm tính liên tục, đường thẳng phân bố này trùng với tiếp tuyến của đường phân bố logarit. Độ cao của điểm tiếp tuyến của hai đường đó được xác định theo công thức sau:

$$z'_t = e z'_0 = \frac{er}{33} \quad (6.40)$$

Nếu ký hiệu vận tốc tại độ cao  $z'_t$  là  $V_t$ , thì gradien vận tốc tại điểm đó sẽ là

$$\left. \frac{dV(z')}{dz'} \right|_{z'=z'_t} = \frac{V_t}{z'_t} \quad (6.41)$$

Sử dụng các biểu thức này ta có

$$\int_0^r V(z') dz' = \frac{1}{2} z'_t V_t + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}} \int_{z'_t}^r \ln \frac{z'}{z'_t} dz' \quad (6.42)$$

Tiến hành lấy tích phân và sử dụng định nghĩa  $z'_t$  thông qua  $r$  ta thu được biểu thức đối với tích phân

$$\int_0^r V(z') dz' = 6,34 \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}} r = 6,34 V_* r \quad (6.43)$$

Công thức (6.39) bây giờ có dạng

$$c_b = \frac{S_b}{6,34 \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}}} \quad (6.44)$$

Nồng độ này được xem không biến đổi trong lớp có độ dày  $r$ .

### 6.3. TÁC ĐỘNG CỦA SÓNG LÊN DÒNG VẬT CHẤT LƠ LỬNG VÀ DÒNG TRẦM TÍCH TỔNG CỘNG

#### 6.3.1. Dòng vật chất lơ lửng

Trong phần trên, chúng ta đã chứng minh rằng phân bố thẳng đứng của nồng độ các chất lơ lửng phụ thuộc chủ yếu vào ứng suất đáy thông qua tham số  $z^*$  (công thức (6.17) và (6.18)). Bijker đã đưa ra một phương pháp đơn giản tính tác động của sóng lên dòng trầm tích lơ lửng bằng cách biến đổi ứng suất đáy.

Cho rằng ứng suất tổng cộng tác động lên công thức vận chuyển bùn cát tương tự như ứng suất nhớt, công thức (6.16) sẽ biến đổi về dạng sau đây với việc chọn khoảng cách  $a = r$  và nồng độ  $c(a) = c_b$ .

$$c(z') = c_b \left[ \frac{r}{h-r} \frac{h-z'}{z'} \right] \frac{W \sqrt{\rho}}{\kappa \sqrt{\tau_c} \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{u_b}{V} \right)^2}} \quad (6.45)$$

Tốc độ vận chuyển các chất lơ lửng sẽ là

$$S_s = \int_r^h c(z') V(z') dz' \quad (6.46)$$

Với việc sử dụng các công thức xác định nồng độ và vận tốc thay vào phương trình (6.46) ta có thể biến đổi phương trình này về dạng sau đây:

$$S_s = 1,83Q S_b \quad (6.47)$$

Như vậy dòng vật chất lơ lửng phụ thuộc trực tiếp vào dòng trầm tích di đáy. Giá trị của hệ số tỷ lệ Q được xác định theo công thức (6.22) là một hàm của  $A = r/h$  và  $z^*$ .

Công thức tính  $z^*$  cũng cần được biến đổi phù hợp với ứng suất tổng cộng do dòng chảy ổn định và sóng:

$$z^* = \frac{W\sqrt{\rho}}{\kappa\sqrt{\tau_c} \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{u_b}{V} \right)^2}} \quad (6.48)$$

### 6.3.2. Dòng trầm tích tổng cộng

Sau khi đã thiết lập công thức tính dòng trầm tích di đáy và dòng vật chất lơ lửng, ta dễ dàng thu được công thức tính dòng trầm tích tổng cộng:

$$S = S_b + S_s = S_b(1 + 1,83Q) \quad (6.49)$$

Công thức này thường được gọi là công thức Bijker, được sử dụng rộng rãi trong thực tế tính toán.

Tuy nhiên, để tính toán dòng trầm tích, một số tham số cần được xác định bằng phương pháp thực nghiệm, ví dụ tham số sóng đáy

$$\mu = \left( \frac{C}{C'} \right)^{3/2} \quad (6.50)$$

trong đó C là hệ số Chezy được xác định theo công thức (6.12), còn C' là một hệ số Chezy khác được xác định trên cơ sở tính chất vật liệu đáy:

$$C' = 18 \lg \frac{12h}{D_{90}} \quad (6.51)$$

trong đó  $D_{90}$  là đường kính hạt 90% (90% trọng lượng của chất đáy).

### 6.3.3. Những hạn chế trong tính toán dòng trầm tích hiện có

Cơ sở của các công thức do Bijker đề xuất, chủ yếu dựa vào quy luật phân bố logarit trong lớp biên, điều này có thể thoả mãn đối với trường hợp

dòng chảy ổn định, song đối với dòng chảy sóng và dòng tổng cộng điều kiện này không phải lúc nào cũng có thể đáp ứng.

Mặt khác, việc cho rằng vận chuyển trầm tích đáy chỉ xảy ra trong một lớp mỏng giới hạn bởi kích thước gồ ghề  $r$  cũng cần được xem xét kỹ hơn. Vấn đề xác định độ dày của lớp này cũng là một bài toán khó, Bijker cho rằng, có thể lấy  $r$  bằng nửa độ cao của sóng đáy. Nhưng các kết quả nghiên cứu sau này cho thấy rằng độ nhám bề mặt đáy có thể lớn hơn độ cao sóng đáy từ 2 đến 4 lần. Khi độ dày lớp sát đáy này tăng lên thì điều kiện không đổi của nồng độ theo độ sâu trong lớp này khó có thể chấp nhận được. Sự biến đổi này cũng gây ảnh hưởng tới độ cao và mật độ quy chuẩn trong khi nghiên cứu dòng vật chất lơ lửng.

Công thức do Bijker đưa ra cho kết quả khá phù hợp đối với các vùng bờ biển có trầm tích đáy tương đối đều và dòng chảy sóng chỉ có hướng dọc bờ.

Trong các công thức trên, nếu có các giá trị vận tốc hay ứng suất đáy khác 0 thì dòng trầm tích đáy sẽ xuất hiện, trong khi theo lý thuyết, thì trầm tích đáy chỉ bắt đầu dịch chuyển khi mà vận tốc hay ứng suất đáy lớn hơn những giá trị tới hạn nào đó.

Tương quan giữa dòng vật chất lơ lửng và trầm tích di đáy cũng có sự biến đổi phức tạp trong một giới hạn khá rộng có thể từ 1 đến 50 lần. Các hệ số thực nghiệm và bán thực nghiệm trong những công thức trên đây cũng có sự biến động đáng kể, ví dụ, hệ số  $B$  trong các công thức trên (6.37, 6.38) có thể lấy giá trị từ 1 đến 5.

Giá trị vận tốc thẳng giáng  $W$ , sử dụng để tính dòng lơ lửng thông qua việc giải phương trình khuếch tán đã được đơn giản hoá, cũng cần được chú ý thay đổi cho phù hợp đối với các mô hình tính toán dòng trầm tích vận chuyển và biến đổi đường bờ.

Những công thức dạng Bijker - Kalinske - Frijlink hoàn toàn có khả năng sử dụng trong tính toán và mô hình hoá hiện tượng bồi xói cửa sông, ven biển, nếu như được bổ sung và sửa đổi một số hạn chế như đã nêu.

## 6.4. NHỮNG CÔNG THỨC VÀ MÔ HÌNH THÔNG DỤNG TÍNH TOÁN DÒNG TRẦM TÍCH VÀ BIẾN ĐỔI ĐỊA MẠO

### 6.4.1. Những công thức cổ điển tính toán dòng trầm tích

Nhìn chung các công thức cổ điển tính toán dòng trầm tích đã được xây dựng để tính toán vận chuyển cát tại các bãi biển. Những công thức này được xây dựng trên cơ sở các khảo sát thực địa trên các bãi biển với nguyên nhân chủ yếu là sóng tác động lên đáy và bờ. Một trong những quy luật thực nghiệm được sử dụng là quan hệ mật thiết giữa dòng cát vận chuyển dọc bờ và năng



lượng sóng tập trung trên một đơn vị độ dài đường bờ. Công thức biểu thị mối quan hệ này có thể viết

$$S = A U' \quad (6.52)$$

trong đó A là hệ số tỷ lệ, đồng thời cũng là tham số chuyển đổi thứ nguyên,

$U'$  là thành phần tỷ lệ với dòng năng lượng đi vào bờ trên một đoạn có độ dài là một đơn vị. Thông thường  $U'$  được tính theo năng lượng tại đới sóng đổ:

$$U' = (E C_n)_b \sin \alpha_b \cos \alpha_b \quad (6.53)$$

trong đó  $(E C_n)_b$  là dòng năng lượng sóng trong đới sóng đổ,  $\alpha_b$  là góc tới của sóng tại giới hạn ngoài của đới sóng đổ. Công thức tính toán này đã được sử dụng rộng rãi trong tính toán vận chuyển trầm tích dọc bờ như công thức CERC. Tuy nhiên các công thức dạng này chỉ cho ta các đặc trưng mang tính chất trung bình đối với các đường bờ thẳng, độ dốc đều và trầm tích đáy cũng tương đối đơn giản.

#### 6.4.2. Công thức tính toán dòng trầm tích đối với vùng bờ có các yếu tố thủy động lực phức tạp

Để tính toán dòng trầm tích cho điều kiện vùng bờ và các yếu tố thủy động lực phức tạp, chúng ta cần chú ý tới cấu trúc không gian của các trường thủy thạch động lực.

Trước hết, cần chi tiết hoá các nhân tố sử dụng trong công thức Kalinske-Frijlink, sau khi đã được xây dựng cho tính toán dòng tổng hợp do cả sóng lẫn dòng chảy mà Bijker đã phát triển thành công cụ tính toán khá hiệu quả. Để khắc phục nhược điểm của công thức này trong việc xác định điều kiện bắt đầu có vận chuyển trầm tích, chúng ta có thể sử dụng cách tiếp cận của Piter-Mayer được thể hiện qua công thức sau đối với dòng trầm tích đáy:

$$Q_b = \frac{8}{\sqrt{\rho}} (\tau_0 - \tau_{cr})^{3/2} \quad (6.54)$$

Trong công thức này, chúng ta thấy rằng dòng di đáy chỉ xuất hiện khi ứng suất đáy lớn hơn ứng suất tới hạn. Giá trị ứng suất tới hạn cần được xác định cho từng loại trầm tích có kích thước cụ thể đối với điểm tính. Giá trị vận tốc tới hạn  $V_{cr}$  [mm/s] được Rance đưa ra trong dạng sau đây

$$V_{cr} = \begin{cases} 26,3 + 7,4D & D \geq 0,5mm \\ 14 + 32D & 0,5mm > D > 0,03 \end{cases} \quad (6.55)$$

Như vậy chúng ta có thể thu được công thức tính toán mới trên cơ sở các công thức (6.54), (6.55) và các công thức tính ứng suất đáy do sóng và dòng đã được trình bày ở phần trên.

Vấn đề tính toán ảnh hưởng của dòng chảy có thể gặp khó khăn do chưa có được một phương pháp tính toán dòng chảy tổng hợp có độ chính xác cao. Trong nhiều trường hợp có thể tính riêng biệt dòng trầm tích do sóng và do dòng chảy ổn định. Để nâng cao độ chính xác cần lấy giá trị dòng tổng hợp bằng tổng các thành phần và đưa vào công thức tính dòng trầm tích.

Đối với đới sóng đổ, dòng chảy sóng sẽ đóng một vai trò quan trọng. Việc tính trường dòng chảy sóng chúng ta có thể sử dụng các mô hình sóng, tuy nhiên công thức phân bố dòng chảy sóng của Longuet- Higgins theo hướng vuông góc bờ hoàn toàn có khả năng đáp ứng yêu cầu này. Việc tính toán trường dòng chảy ổn định chủ yếu dựa vào các mô hình hoàn lưu 3D nhằm xác định vận tốc dòng chảy trong lớp sát đáy.

#### 6.4.3. Cơ sở lý thuyết của các mô hình biến đổi địa mạo

Tất cả các mô hình biến đổi địa mạo (địa đáy, đòng bờ) đều dựa trên cơ sở giải phương trình cân bằng khối lượng trầm tích. Có thể viết phương trình này trong dạng ngắn gọn sau đây:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \text{div}S + P - D \quad (6.56)$$

trong đó  $t$  là biến thời gian (s);  $S$  là tốc độ vận chuyển trầm tích tổng cộng ( $m^3/m/s$ );  $z$  là khoảng cách tính từ đáy (m),  $P$  là lượng trầm tích tách từ đáy trên một đơn vị diện tích và 1 đơn vị thời gian và  $D$  là lượng trầm tích lắng đọng.

Mô hình này được gọi là mô hình 3 chiều tính toán biến động, nó có thể được giải trên cơ sở giải kết hợp các dòng  $S$ ,  $P$ ,  $D$  trên không gian. Trong dải ven bờ dòng trầm tích  $S$  thường được chia ra thành 2 phần theo các hướng dọc bờ và vuông góc bờ, các công thức và mô hình tính toán các đặc trưng đó đã được trình bày ở phần trên, chúng ta cũng thấy được sự phức tạp của vấn đề này.

Trong khi nhiều vấn đề lý thuyết còn chưa được giải quyết, có thể sử dụng các công thức tính toán vận chuyển trầm tích hiện có nhằm tính toán phân bố không gian của các thành phần vế phải của phương trình (6.56) và từ đó thiết lập các mô hình tính toán và dự báo biến động địa mạo đới bờ.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Cảnh Cầm và nnk. Thủy lực. NXB ĐH và THCN. Hà Nội, 1987.
2. Nguyễn Tài. Thủy lực. NXB Xây dựng, Hà Nội, 1997.
3. Doronin Iu.P. (chủ biên) Động lực học biển, NXB KT-TV Leningrad, 1981.
4. Nihoul J.C.J. and Jamart B. (editors) , Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics. EOS, Amsterdam- Oxford, 1987.
5. Nihoul J.C.J. Hydrodynamic models of shallow continental seas. Etienne RIGA, 1982.
6. Phillips O.M. The dynamics of the upper ocean. Cambridge University Press, London-New York, 1977.
7. Roy Lewis. Dispersion in estuaries and coastal waters. John Wiley & sons, 1997.
8. Job Dronkers & Maarten Scheffers. Physics of estuaries and Coastal seas. Balkema, 1998.
9. Kyoshi Horikawa. Coastal Engineering, University of Tokyo Press, 1978
10. CERC. Shore Protection Manual. CERC 1984
11. Mei C.C. The applied dynamics of Ocean Surface Waves. World Scientific Press, 1994.

## PHỤ LỤC

### MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ TEN XƠ VÀ GIẢI TÍCH TEN XƠ

#### 1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ VEC TƠ VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI TOẠ ĐỘ

##### 1.1. Hệ toạ độ và biến đổi toạ độ

Hệ toạ độ

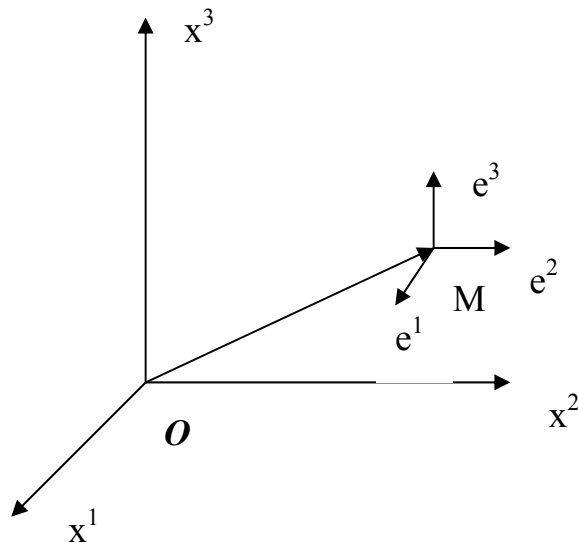
Trong hình học Ôclit chúng ta cho rằng các đại lượng  $y^1, y^2, y^3$  các các toạ độ trong hệ Đề-các trực giao. Các đại lượng

$$x^\alpha = x^\alpha(y^1, y^2, y^3) \quad (1)$$

được xác định như các toạ độ cong  $x^\alpha$  trong miền  $V$  nếu như hàm (1) cho phép biến đổi nghịch đảo

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, x^3) \quad (2)$$

Mặt  $x^\alpha = \text{const}$  được gọi là mặt tạo độ và đường cong mà trên đó chỉ có một toạ độ duy nhất biến đổi được gọi là đường toạ độ.



Hình 1. Hệ toạ độ và véc tơ cơ sở của hệ toạ độ

Cho điểm cố định O là gốc tọa độ và bán kính véc tơ  $\overrightarrow{OM}$ , người ta đưa ra định nghĩa các véc tơ cơ sở  $e_1, e_2, e_3$  như sau:

$$\overrightarrow{e}_\alpha = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^\alpha} \quad (3)$$

Theo định nghĩa trong hình học giải tích đây chính là các véc tơ tiếp tuyến với đường tọa độ  $x^\alpha$  tại điểm M.

Đối với các véc tơ  $\overrightarrow{a}$  bất kỳ ta có thể phân tích về dạng thành phần thông qua các véc tơ cơ sở:

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{e}_1 + a_2 \overrightarrow{e}_2 + a_3 \overrightarrow{e}_3$$

Bên cạnh các véc tơ cơ sở  $\overrightarrow{e}_\alpha$  người ta còn đưa ra định nghĩa về đối véc tơ cơ sở  $\overrightarrow{e}^\alpha$  theo mối tương quan hàm như sau:

$$\overrightarrow{e}_\alpha \overrightarrow{e}^\alpha = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

$$\text{trong đó } \delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 0 \leftrightarrow \alpha \neq \beta \\ 1 \leftrightarrow \alpha = \beta \end{cases}$$

Trong trường hợp đó véc tơ  $\overrightarrow{a}$  bất kỳ ta có thể phân tích về dạng thành phần thông qua các véc tơ cơ sở  $\overrightarrow{e}^\alpha$  như sau:

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{e}^1 + a_2 \overrightarrow{e}^2 + a_3 \overrightarrow{e}^3 = a_\alpha \overrightarrow{e}^\alpha$$

Các thành phần  $a_\alpha$  được gọi là các thành phần covariant và  $a^\alpha$  tương ứng là contravariant. Đối với hệ tọa độ Đề-các thì các thành phần này hoàn toàn tương đương. Trong các công thức có chứa tích các số hạng kèm theo chỉ số, nếu các chỉ số trùng nhau thì đó là tổng của các thành phần với các chỉ số biến đổi từ 1 đến 3.

Tại điểm M từ hai hệ véc tơ cơ sở ta có thể thu được một ma trận đối xứng:

$$m_{\alpha\beta} = \overrightarrow{e}_\alpha \overrightarrow{e}_\beta \quad \text{và} \quad m^{\alpha\beta} = \overrightarrow{e}^\alpha \overrightarrow{e}^\beta$$

Từ các biểu thức này ta có:

$$m_{\alpha\beta} \vec{a}^\alpha = \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta \vec{a}^\alpha = \vec{a}^\alpha \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \vec{a}^\alpha \vec{e}_\beta = a_\alpha \vec{e}^\alpha \vec{e}_\beta = a_\beta \vec{e}^\beta \vec{e}_\beta = a_\beta$$

và tương tự

$$m^{\alpha\beta} a_\beta = a^\alpha, \quad m^{\alpha\beta} e_\beta = e^\alpha, \quad m_{\alpha\beta} e^\alpha = e_\beta.$$

Đồng thời ta cũng thu được:

$$m_{\alpha\beta} m^{\omega\beta} = \delta_{\alpha}^{\omega}$$

điều này cho ta thấy hai ma trận  $m_{\alpha\beta}$  và  $m^{\omega\beta}$  nghịch đảo nhau.

Trên các cơ sở định nghĩa và hệ quả nêu trên chúng ta có thể đưa ra biểu thức tích vô hướng hai véc tơ như sau:

$$\vec{a} \vec{b} = m_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = m^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta = a_\alpha b^\alpha.$$

Ta cũng có thể viết công thức tính khoảng cách giữa hai điểm  $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$  và  $M(x^\alpha)$ , biết rằng

$$\vec{ds} = \vec{OM'} - \vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha = \vec{e}_\alpha dx_\alpha$$

từ đó

$$ds^2 = m_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Biến đổi toạ độ

Cho rằng cũng trong miền  $V$  nêu trên ta có thể xác định một hệ toạ độ khác liên quan tới  $x^\alpha$  theo các hệ thức mới:

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, x^3) \text{ và } x^\alpha = x^\alpha(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \quad (4)$$

Như vậy tương tự như trên ta cũng thu được các véc tơ cơ sở và các ma trận cơ sở tương ứng  $e_{\alpha'}, e^{\alpha'}, m_{\alpha'\beta'}, m^{\alpha'\beta'}$  cùng với các thành phần véc tơ  $a^{\alpha'}, a_{\alpha'}$

Dựa vào định nghĩa véc tơ cơ sở ta có các biểu thức liên quan giữa hai hệ toạ độ nêu trên

$$\overrightarrow{e_{\alpha'}} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \overrightarrow{e_{\alpha}} \quad (5)$$

và ngược lại

$$\overrightarrow{e_{\alpha}} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \overrightarrow{e_{\alpha'}} \quad (6)$$

Tuy các thành phần toạ độ của một véc tơ phụ thuộc vào hệ toạ độ lựa chọn, nhưng bản thân véc tơ là không đổi vì vậy đối với một véc tơ bất kỳ ta có:  $\overrightarrow{a} = a_{\alpha'} \overrightarrow{e_{\alpha'}} = a_{\alpha} \overrightarrow{e_{\alpha}}$ .

Sử dụng công thức (6) ta có:

$$a^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} a^{\alpha} \quad (7)$$

và hoàn toàn tương tự

$$a_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} a_{\alpha} \quad (8)$$

Như vậy giữa hai hệ toạ độ nêu trên tồn tại một ma trận chuyển đổi A như sau:

$$A^{\alpha}_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \quad \text{và} \quad A^{\alpha'}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}$$

Các công thức (7) và (8) cũng là điều kiện để tập hợp 3 số  $a^{\alpha}$ ,  $a_{\alpha}$  và  $a^{\alpha'}$ ,  $a_{\alpha'}$  là các thành phần của một véc tơ  $\overrightarrow{a}$ .

Để làm rõ điều này chúng ta dẫn ra một ví dụ chứng minh rằng ba đại lượng đạo hàm riêng theo các biến toạ độ của một đại lượng vô hướng  $\varphi$  bất kỳ là các thành phần của một véc tơ. Ta có thể viết

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}}$$

và

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha'}}$$

Như vậy chúng hoàn toàn tuân theo các điều kiện (7) và (8) do đó 3 đại lượng  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}}$  là thành phần của một véc tơ, véc tơ đó được gọi là gradient của hàm vô hướng  $\varphi$  và thông thường được viết trong dạng sau:

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} e^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} e^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} e^3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} e^{\alpha}$$

Phụ thuộc vào tính chất của bài toán người ta có thể chọn các tọa độ covariant hoặc contravariant.

## 2. TEN-XƠ VÀ MỘT SỐ PHÉP TÍNH TOÁN TEN-XƠ

### 2.1. Định nghĩa về ten-xơ

Trong khi nghiên cứu và giải quyết các bài toán vật lý và cơ học, các khái niệm về đại lượng vô hướng và véc tơ chưa cho phép mô tả được đầy đủ tất cả các yếu tố và đặc trưng cơ bản. Ví dụ, khi một véc tơ lực tác động lên một bề mặt bất kỳ tại một điểm M, ta cần phải biết véc tơ pháp tuyến của bề mặt tại điểm đó. Chúng ta đã biết lực tác động lên bề mặt theo hướng  $x^{\alpha}$  sẽ được xác định theo véc tơ sức căng hay áp lực theo hướng đó:

$$\overrightarrow{F^{\alpha}} = \overrightarrow{p^{\alpha}} \cdot \overrightarrow{n} = p^{\alpha}_{\beta} n^{\beta} = p^{\alpha}_{.1} n^{.1} + p^{\alpha}_{.2} n^{.2} + p^{\alpha}_{.3} n^{.3}$$

Như vậy để xác định đầy đủ lực mặt tác động lên một điểm M của bề mặt ta cần 9 đại lượng  $p^{\alpha}_{\beta}$ . chín đại lượng này có thể viết trong hệ tọa độ  $x^{\alpha'}$  theo quy luật đã được trình bày trong các công thức (7) và (8) trên cơ sở cho rằng các thành phần của véc tơ có thể thay đổi phụ thuộc vào hệ tọa độ nhưng bản thân véc tơ lại không đổi:



$$p_{\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} p_{\beta}^{\alpha}$$

Điều này hoàn toàn tương tự trong phép chuyển đổi ngược lại của hệ tọa độ.

Tương tự như khi đưa ra định nghĩa véc tơ đối với tập hợp 3 đại lượng  $a^{\alpha}$ , người ta cũng đưa ra khái niệm ten-xơ bậc hai cho 9 đại lượng  $p_{\beta}^{\alpha}$ . Thông thường ten-xơ bậc hai được viết trong dạng  $\vec{p}$ . Điều này cũng có thể áp dụng đối với 27 đại lượng  $q_{\gamma}^{\alpha\beta}$ :

$$q_{\gamma'}^{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} q_{\gamma}^{\alpha\beta} \quad (10)$$

là thành phần của một ten-xơ bậc ba.

Điều kiện tương tự (10) là cơ sở để đưa ra định nghĩa ten-xơ các bậc khác nhau, trong đó ta dễ dàng nhận thấy các đại lượng vô hướng là ten-xơ bậc không và véc tơ là ten-xơ bậc nhất.

## 2.2. Một số tính chất cơ bản của ten-xơ

a. Hai ten-xơ được xem là bằng nhau nếu như trong cùng một hệ tọa độ các thành phần tương ứng của các ten-xơ đó như nhau.

b. Ten-xơ được xem là đối xứng theo các cặp chỉ số trên hoặc dưới tương ứng nếu như khi hoán vị chúng các thành phần đó không thay đổi giá trị:  $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$ . Nếu như khi hoán vị các thành phần đó chỉ đổi dấu mà không thay đổi giá trị tuyệt đối thì ten-xơ đó được gọi là bất đối xứng:  $A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$ .

c. Tổng hai ten-xơ cùng loại được xác định theo công thức sau:

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} = A_{\beta\gamma}^{\alpha} + B_{\beta\gamma}^{\alpha}$$

d. Tích của hai ten-xơ  $\vec{A}$  và  $\vec{B}$  là ten-xơ  $\vec{C}$  có các thành phần như sau:

$$C_{\alpha\beta\gamma\omega}^{\gamma\nu\mu} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} B_{\gamma\omega}^{\nu\mu}$$

e. Khi có các chỉ số trùng nhau là biểu thức tổng theo các chỉ số đó và kết quả cho ta một ten-xơ mới:

$$A_{\nu}^{\beta\lambda} = A_{\nu\alpha}^{\alpha\beta\lambda}$$

f. Với một ten-xơ  $\vec{\vec{B}}$  bất kỳ nếu ta có:

$$A_{\beta\gamma}^{\alpha} B^{\beta\gamma} = C^{\alpha}$$

với  $\vec{\vec{C}}$  là ten-xơ thì các đại lượng  $A_{\beta\gamma}^{\alpha}$  cũng là thành phần của một ten-xơ  $\vec{\vec{A}}$ .

### 2.3. Một số ten-xơ đặc trưng

a. Ten-xơ  $\vec{\vec{\delta}}$

Dựa vào phép biến đổi các công thức liên quan tới các thành phần  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  ta có:

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \delta_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\alpha'}^{\beta'} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}$$

(trong khi biến đổi đã cho các chỉ số  $\alpha = \beta$  trong thành phần  $\delta_{\beta}^{\alpha}$ ).

Hoàn toàn tương tự có thể viết công thức đối với  $\delta_{\beta}^{\alpha}$ :

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}$$

Như vậy theo định nghĩa thì  $\vec{\vec{\delta}}$  cũng là một ten-xơ.

b. Ten-xơ metric  $\vec{\vec{m}}$

Chúng ta có thể chứng minh một cách hoàn toàn tương tự các công thức thành phần  $m_{\alpha\beta}$  và  $m^{\omega\beta}$  đã dẫn ra trên đây.

c. Ten-xơ  $\vec{\varepsilon}$

Ten-xơ  $\vec{\varepsilon}$  được xác định bởi các thành phần theo các công thức sau:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{\alpha\beta\gamma}, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{m} e_{\alpha\beta\gamma}$$

trong đó: m là định thức của ma trận  $m_{\alpha\beta}$ :  $m = |m_{\alpha\beta}|$ ,

$$e^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 0 & (i) \\ 1 & (ii) \\ -1 & (iii) \end{cases}$$

với các điều kiện tương ứng: (i) nếu như hai chỉ số bằng nhau; (ii) nếu như 3 chỉ số tạo thành hoán vị chẵn 1,2,3 và (iii) – ba chỉ số tạo thành hoán vị lẻ 1,2,3.

Dựa vào định nghĩa này ta có thể chứng minh rằng tích véc tơ của hai véc tơ cũng là một véc tơ. Thực vậy:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a^\alpha \vec{e}_\alpha) \times (b^\beta \vec{e}_\beta) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta \vec{e}_\gamma$$

Trong khi biến đổi đã sử dụng định nghĩa tích hỗn hợp ba véc tơ

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

và định nghĩa của các véc tơ cơ sở:

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \vec{e}_3$$

### 3. MỘT SỐ QUY TẮC VÀ PHÉP TÍNH TEN-XƠ

#### 3.1. Đạo hàm

- Đạo hàm của một tổng các ten-xơ bằng tổng các đạo hàm
- Đạo hàm của một tích tuân theo quy luật sau:

$$\nabla \chi (A_{\beta}^{\alpha} B_{\mu}^{\gamma}) = (\nabla \chi A_{\beta}^{\alpha}) B_{\mu}^{\gamma} + A_{\beta}^{\alpha} (\nabla \chi B_{\mu}^{\gamma})$$

- Đạo hàm của các ten-xơ  $\vec{m}$ ,  $\vec{\delta}$ ,  $\vec{\varepsilon}$  bằng không.

#### 3.2. Một số toán tử đạo hàm ten-xơ

- Divergence (div)

$$\text{div}(\vec{a}) = \nabla \alpha a^{\alpha} = \frac{\partial a^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} a^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{m} a^{\alpha})$$

trong đó  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  là ký hiệu Cristofel:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{e}_{\gamma} = \frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$$

hay

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} m^{\gamma\chi} \left( \frac{\partial m_{\chi\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial m_{\chi\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial x^{\chi}} \right)$$

Như vậy div của một véc tơ là một đại lượng vô hướng.

áp dụng toán tử div đối với một ten-xơ bậc hai cho ta một véc tơ:

$$\nabla \alpha a^{\alpha\beta} = \frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\chi\alpha}^{\chi} a^{\alpha\beta} + \Gamma_{\chi\nu}^{\beta} a^{\chi\nu} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{m} a^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\beta} a^{\nu\mu}$$

- Gradient

Như đã trình bày ở phần trước gradient của một đại lượng vô hướng là một véc tơ. Có thể viết trong dạng khai triển sau:

$$\overrightarrow{\nabla \varphi} = \nabla \alpha \varphi \overrightarrow{e}^{\alpha} = m^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} \overrightarrow{e}_{\beta}$$

Như vậy áp dụng toán tử gradient làm tăng bậc ten-xơ, gradient của một véc tơ là một ten-xơ bậc hai với các thành phần của  $\overrightarrow{\nabla a}$  là  $\nabla \alpha a_{\beta}$ .

c. Laplace

Laplace của một đại lượng vô hướng cũng là một đại lượng vô hướng

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= m^{\alpha\beta} \nabla \alpha \nabla \beta \varphi = m^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} - m^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\chi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\chi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial}{\partial x^{\chi}} \left[ \sqrt{m} m^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\beta}} \right] = \text{div}(\overrightarrow{\nabla \varphi}) \end{aligned}$$

Laplace của một véc tơ là một véc tơ:  $\Delta \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla}(\text{div} \overrightarrow{a}) - \text{rot}(\text{rot} \overrightarrow{a})$ , trong đó rot của một véc tơ được hình thành từ một ten-xơ bất đối xứng sau đây:

$$\nabla \alpha a_{\beta} - \nabla \beta a_{\alpha}.$$

Các thành phần của véc tơ rot được xác định như sau:

$$\omega^{\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (\nabla \beta a_{\gamma} - \nabla \gamma a_{\beta}) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla \beta a_{\gamma}$$

Với  $\alpha = 1$ , ta thu được thành phần thứ nhất của véc tơ rot:

$$\omega^1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \text{ là thành phần thứ nhất của xoáy vận tốc } \overrightarrow{\omega}.$$

### 3.3. Một số thí dụ tính toán ten-xơ trong hệ tọa độ trực giao

Theo định nghĩa, đối với hệ tọa độ trực giao ta có:

$$m_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq j \\ h_i^2 & \text{khi } i = j \end{cases}$$

trong đó  $h_i$  là độ dài của véc tơ cơ sở tương ứng thường được gọi là hệ số Lamê. Hệ số này được xác định từ ten-xơ  $\vec{m}$  như sau:

$$h_i = \sqrt{m_{ii}}$$

Khi chuyển từ hệ tọa độ Đề các  $\alpha'$  sang hệ tọa độ mới  $\alpha$  ta có:

$$m_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} m_{\alpha\beta}$$

và từ đây khi  $i=j$

$$m_{ii} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}$$

Sử dụng kết quả trên có thể đưa ra ví dụ đối với công thức tính div:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_2 h_3 \hat{a}_1)}{\partial x^1} + \frac{\partial (h_3 h_1 \hat{a}_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial (h_1 h_2 \hat{a}_3)}{\partial x^3} \right\}$$

trong đó  $\hat{a}_\alpha$  là thành phần của véc tơ  $\vec{a}$  theo các véc tơ cơ sở mới xác định theo công thức sau:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{m_{11}}} \vec{e}_1, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{m_{22}}} \vec{e}_2, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{m_{33}}} \vec{e}_3$$

Có thể viết biểu thức  $\text{div} \vec{a}$  cho hệ tọa độ cầu trên cơ sở các công thức trên đây.

Chúng ta đều biết tương quan giữa tọa độ Đề các và tọa độ cầu được mô tả như sau:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

Ta có thể tìm được giá trị hệ số Lamê theo định nghĩa:  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$ ,  $h_3 = r \sin \theta$ . Như vậy vận tốc trong hệ tọa độ cầu sẽ là:

$$v_1 = v_r = h_1 \frac{\partial x^1}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t}$$

$$v_2 = v_\theta = h_2 \frac{\partial x^{2'}}{\partial t} = r \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$v_3 = v_\varphi = h_3 \frac{\partial x^{3'}}{\partial t} = r \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

và đối với div

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) \right]$$

Hoàn toàn tương tự ta có thể viết các phương trình thủy nhiệt động lực trong các hệ tọa độ khác nhau sử dụng các công thức và toán tử cơ bản của giả tích ten-xơ.