LINEAR ALGEBRA

선형대수 입문

원대연 지음

KYOWOOSA
교우사

머리말

《선형대수》는 수학을 전공하는 학생은 누구나 극복하여야 할 과목이다. 보통 《미분적분학》을 공부하는 학생은 《다변수 미분적분학》의 일부로 변수가 두 개 이상인 함수의 미분과 적분을 공부하기 위한 준비로 2차원 평면과 3차원 공간에 대한 《선형대수》의 기본적인 내용을 배운다. 여기서 다루는 내용 중 일부는 《선형대수》의 영역에 속하지만 3차원 공간의 두 벡터의 벡터곱처럼 오히려 학부 수준의 《선형대수》 시간에는 다루지 않는 내용들도 있다.

《선형대수》에 대한 준비가 완전하지 않으면 이 과목 이후에 배우게 되는 과목을 매우 어렵게 느끼고 심지어 중도에 포기해야만 하는 결과를 가져오게 된다. 학부 저학년 때 만난 선형대수에서 수학의 아름다움을 느끼지 못하고 수학을 포함하여 다른 자연과학과 사회과학의 여러 분야로 응용할 수 있다는 유용성을 체감하지 못 하면 선형대수가 괴물로 남을 수도 있다.

미분적분학 교재 시장에서 스튜어트의 교과서가 차지하는 것 같은 과점적인 《선형대수》 교재는 없는 것 같다. 밤하늘의 별처럼 많은 교과서들을 두고 또 하나의 책을 쓸 수 밖에 없었던 큰 이유는 내 강의에 딱 맞는 책을 찾을 수 없었기 때문이다. 지난 몇 년간의 경험을 살려 학생들이 읽어서 쉽게 이해할 수 있도록 가능하면 비형식적으로 서술하려고 노력하였다. 또 학생들의 머리를 수학적으로 구조화 시키기 위해 뒤에 나올 엄밀한 정의들을 왜 생각해야 되는지를 미리 알리기 위해 노력하였다. 따라서 정의나 어떤 개념이 공식적으로 서술되기 이전에 비형식적으로 미리 소개된 경우가 많다. 이 책을 사용하는 학생을 위하여 시각적으로 정의나 질문 등은 박스로 처리하였고 정리나 쉽게 얻을 수 있는 사실 등은 음영을 주어 처리하였다.

선형대수에 관한 책은 행렬의 연산에 관한 초보적인 수준의 책부터 추상적인 고급 수준의 책까지 다양하다. 참고 문헌에는 아주 쉬운 것은 아닌 초보 수준의 책으로 [1]과 [5], 중간 수준의 책으로 선형대수에서 강조해야 할 부분을 새롭게

제시한 책으로 [4], 학부 수준의 책으로는 가장 추상적이고 계산보다는 증명을 중시한 [2]와 [3]만을 포함시켰다. [1]과 [2]와 [3]은 출간된지 오래 되어 어느 정도 시대에 뒤떨어진 것처럼 보이지만 여전히 교과서로 유용하다. 아마존 사이트를 검색해 보면 최신의 책들을 많이 찾을 수 있고 인터넷을 검색하면 누구든지 내려받아 쓸 수 있도록 공개된 책들도 있다.

저자는 엠아이티 대학의 오픈코스웨어를 통해 알게된 [4]의 저자인 길버트 스트랑 교수의 선형대수 강의를 접하고 나서《선형대수》강의를 맡고 이런 책을 써야겠다고 결심하게 되었다. 그의 강의를 요즘은 아이튠즈유를 통하여 스마트폰으로도 쉽게 접속할 수 있지만 처음 공개 당시에는 리얼미디어로만 인코딩이 되어 있었고 컴퓨터에서만 볼 수 있었다. 이런 불편함에도 불구하고 그의 강의는 나에게 매우 혁명적인 것이었다. 《선형대수》를 전공하는 최고의 수학자가 이 시대에 필요한《선형대수》가 무엇임을 알려주는 강의였고 오래 동안 안주하고 있었던 우물 안을 벋어날 수 있는 기회를 제공해 주었다. 학생들에게도 저자와 같은 경험을 할 수 있기를 기대하지만 기기의 발달에도 불구하고 현실적으로 영어로 된 강의를 해득하는데 한계가 있기 때문에 직접 스트랑 교수의 강의를 듣는 것으로《선형대수》를 공부하는 것을 대신하라고 하기는 불가능하다. 이 책이 그의 강의를 듣고 저자처럼 새로운 눈을 뜨는데 작으나마 도움이 되기를 바란다.

이 책을 쓸 준비를 하며 가장 고민하였던 것은 서구의 용어를 어떻게 우리말로 표현할 것인가였다. 수학 용어도 가능하면 순우리말로 표현하는 것이 가장 바람직하겠지만 이미 오랫동안 사용해 왔던 한자어 용어도 무시할 수 없었다. 현실을 고려하고 대한수학회의 수학용어집을 사용하되 가능하면 쉬운 용어를 사용하려고 노력하였다.

이 책은 TEX을 이용하여 조판되었다. 저자는 15년의 터울을 두고 책 두권을 출판하면서 TEX을 이용하여 조판하였다. 그런데 처음 책을 만들 당시에 TEX의 한글 환경이 보잘 것 없었을 뿐 아니라 TEX의 여러 기능을 사용하기에는 시간이 너무 소비되어 TEX으로 한글 책을 만드는 작업이 지난한 일이었는데 최근 TEX과 특히 한글 TEX이 아주 고급스러운 수준으로 발전하여 여러 해 동안 강의하며 모아 놓았던 자료를 이용하여 쉽게 책을 쓸 수 있게 되었다. 지난 10여 년간 한글

TeX의 발전에 노력하신 분들이 없었으면 지난 강의록을 모아 책으로 만들려는 시도조차 없었을 것다. 이 분들에게 저자의 마음에서 우러나오는 감사를 드린다.

이 책이 출간 되기까지 손 그림을 컴퓨터 파일로 만드는데 교우사 편집부원들의 노고가 있었다. 작은 국내 시장 환경에도 불구하고 훌륭한 수학 서적을 지속적으로 출판하여 수학의 저변을 넓히고 이 책의 출판에도 많은 도움을 주신 교우사 오판근 사장님을 비롯한 직원 여러분들께 드리는 감사의 말을 여기에 마지막으로 기록한다.

2015년 3월
삼각산이 보이는 연구실에서
저자 씀

차 례

제 1 장

행렬과 연립일차방정식

1.1 연립일차방정식

선형대수의 기본적인 문제는 연립일차방정식의 해를 구하는 것이다. 주어진 연립일차방정식의 방정식의 개수와 미지수의 개수가 같을 수도 있고 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 크거나 반대일 수도 있다.

주어진 연립일차방정식을 기하학적인 그림으로 나타내는 방법으로 행그림과 열그림이 있는데, 행그림은 각 일차방정식을 하나씩 따로 생각하는 경우이고 열그림은 열을 하나씩 따로 생각하는 경우이다. 각 일차방정식의 해집합이 평면이나 직선 등 유클리드 공간의 부분공간으로 나타나기 때문에 방정식 을 개별적으로 다룰 때에는 편리한 점이 있지만 연립일차방정식의 해집합은 이런 평면이나 직선 등 부분공간의 교집합이므로 유클리드 공간의 부분공간으로 나타내기 쉽지않다. 오히려 연립일차방정식의 각 일차방정식을 함께 고려하는 열그림이 방정식의 해를 이해하는데 효과적이다. 이 절에서는 주어진 연립일차방정식을 대수적으로 표현하기 위해 행렬을 이용하는 방법을 공부한다.

1.1.1 연립일차방정식

미지수가 2개이고 식이 2개인 연립일차방정식

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

으로 시작하자.

(1.1)의 두 방정식의 차이는 첫 식이 원점 $(0,0)$을 지난다는 점이다 방정식의 우변이 0인 경우 원점을 지나고 그렇지 않은 경우는 원점을 지나지 않는다. 또 $x = 1$일 때 $y = 2$가 첫 방정식을 만족하고 두 점 $(0,0)$과 $(1,2)$를 지나는 직선 위의 점이 이 식을 만족한다. 즉, 첫 식의 해집합이 두 점 $(0,0)$과 $(1,2)$를 지나는 직선이다.

반면에 (1.1)의 두 번째 방정식은 원점을 지나지 않는다. $x = 0, y = 0$를 식에 대입하였을 때 등식이 성립하지 않으므로 원점 $(0,0)$은 두 번째 방정식의 해가 아니다. (1.1)의 두 번째 식에서 $y = 0$이면 $x = -3$이다. 또 $x = -1$이면 $y = 1$이다. 따라서 $(-3,0)$과 $(-1,1)$을 잇는 직선 위의 점들이 (1.1)의 두 번째 식을 만족하고 이 직선이 두 번쨰 식의 해집합이다.

연립일차방정식의 해는 주어진 식을 동시에 만족해야하므로 위에서 구한 두 해집합의 교집합이 가 이 연립일차방정식의 해집합이 된다. $x = 1, y = 2$이 (1.1)의 두 식을 동시에 만족시키므로 점 $(1,2)$가 이 연립일차방정식의 해이다. 물론 해집합이 이 것보다 더 클 수 있다.

이 연립일차방정식 (1.1)을 방정식의 계수로 얻어진 행렬을 이용하면

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

으로 표현할 수 있다. 아직 (1.2)의 좌변의 두 행렬의 곱을 엄밀하게 정의하지는 않았지만 곱하는 행렬이 열벡터이거나 행벡터인 경우는 대체로 계산하는 방법을 알고 있다고 가정하자.

여기서 각 방정식의 해집합은 2차원 xy 평면 위의 직선이 되고 연립방정식의 해집합은 이 두 직선의 교집합이 된다. 이 때 이 교집합은 공집합이거나 한 점이거나 직선이 된다.

1.1.2 행그림과 열그림

다시 연립일차방정식 (1.1) 또는 (1.2)으로 돌아가 이 방정식의 해집합을 그림으로 나타내 보자. 이 연립방정식의 해집합은 두 직선의 교집합이 되는데 각 식의 해집합인 직선을 2 차원 평면에 나타내면 그림 1.1와 같다.

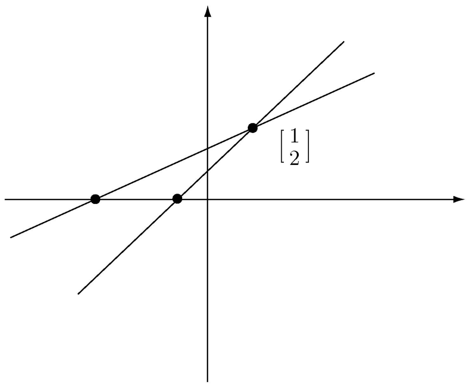

그림 1.1: 행그림

각각의 직선이 행렬의 행이 나타내는 일차방정식의 해집합이므로 이 그림을 행그림(row picture)이라고 부른다.

이제 같은 방정식을 x와 관련된 부분과 y와 관련된 부분을 따로 생각하여

두 개의 방정식을 동시에

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

로도 표현할 수 있다. 즉, $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$이 적당한 상수 x와 y에 대하여 $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$의 x배와 $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$의 y배 배의 합으로 표현된다. §1.1.1의 계산에 의해

$$1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

이다. 2 차원 평면 위에 세 벡터 $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$의 관계를 나타내면 그림 1.2와 같다.

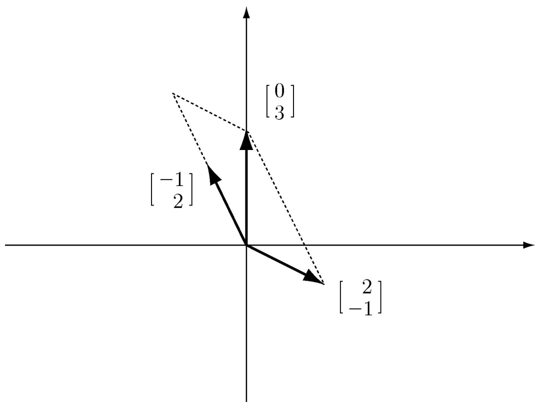

그림 1.2: 열그림

여기서 두 벡터 $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$는 연립일차방정식 (1.2)의 열벡터이므로 이

그림을 열그림(column picture)이라고 한다.

이 경우 두 벡터 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$의 일차결합이 평면 전체를 생성하게 된다. 이런 경우 연립일차방정식 (1.2)의 우변에 상관없이 항상 방정식의 해가 존재하게 된다. 이런 사실이 앞으로 연립일차방정식의 해의 존재성의 판정에 기본이 된다.

1.1.3 연립일차방정식의 행렬 표현

§1.1.2에서 미지수가 2개이고 방정식이 2개인 연립일차방정식인 경우는 행그림과 열그림을 그리기가 쉬웠다. 이제 미지수와 방정식의 개수를 크게하여 미지수가 3개이고 방정식이 3개인 연립일차방정식을 생각해보자.

보기 1.1.1. 다음 방정식의 해를 구해보자.

$$\begin{aligned} 2x - \ y \qquad &= \ \ 0 \\ -x + 2y - \ z &= -1 \\ -3y + 4z &= \ \ 4 \end{aligned} \tag{1.4}$$

이 방정식을 행렬을 이용하여

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

로 표현할 수 있다. 이 방정식의 행그림 사실상 그리기 어렵고 열그림은 그림 1.3과 같다.

원점 $(x = 0, y = 0, z = 0)$는 (1.4)의 아래 두 방정식을 만족하지 않으므로

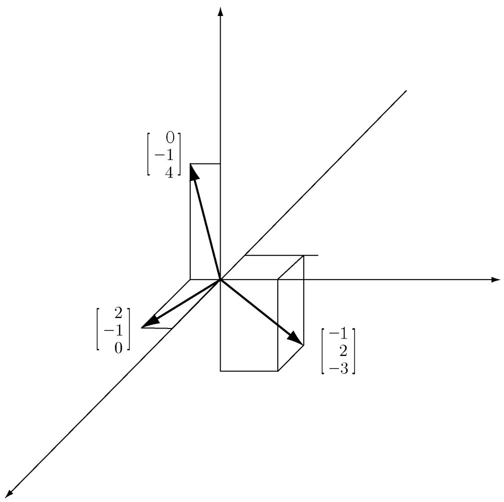

그림 1.3: 열그림

연립일차방정식의 해가 될 수 없다.

(1.4)의 두 번째 식에서 $x = 1$일 때 $y = 0, z = 0$이면 해가 된다. $z = 1$일 때 $x = y = 0$도 해가 된다. 이제 제 삼의 해를 구하기 위해 $x = 0, z = 0$라고 하면 $y = -1/2$이다. 이 방정식의 해집합은 이 세 점을 지나는 평면인데 이 평면을 그리기가 쉽지 않다.

(1.4)의 첫 번째 식의 해집합의 z는 아무 값이라도 된다. 이 해집합도 평면이 되는데, 이 두 평면의 교집합은 직선이다.

(1.4)의 세 번째 식의 해집합도 z는 아무 값이라도 된다. 이 해집합도 평면이 되는데, 이 평면과 위 직선이 만나는 점이 연립일차방정식의 해집합이다. 이 경우 세 평면이 서로 평행이 아니기 때문에 한 점에서 만나고 이 점이 연립일차방정식의 해집합이다. 따라서 (1.4)의 해가 유일하게 존재한다.

보기 1.1.1에서 관찰한 바에 의하면 각각의 방정식의 해집합은 3 차원 공간인 xyz 공간의 평면이 된다. 연립방정식의 해집합은 각각의 해집합인 세 평면의 교집합이다. (1.4)의 경우 두 평면이 만나면 직선이 되고 평면과 직선이 만나면 한 점이 되므로 이 연립방정식의 해집합은 한 점이다. 즉, (1.4)의 해가 유일하게

존재한다. 이 연립방정식의 행그림을 3 차원 공간에 그리기는 쉬운 일이 아닌데 열그림은 비교적 간단하게 그릴 수 있었다.

연립방정식 (1.4)은

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

로 표현할 수 있다. 세 개의 열벡터를 $\mathbb{R}^3$에 그리면, 방정식의 해를 구하는 문제는 다음 문제와 같다.

이 열벡터들의 적당한 일차결합이 우변의 벡터가 될 수 있는가?

이 방정식의 우변은 특별한 벡터이기 때문에 어떤 일차결합이 이 벡터가 되는지 쉽게 알 수 있다. 세 번째 열벡터가 우변이다. 따라서 이 점 $(0, 0, 1)$이 행그림의 세 평면이 만나는 점이다. 즉,

$$x = 0, \;\; y = 0, \;\; z = 1$$

이 이 방정식의 해가 된다.

보기 1.1.2. 이제 계수행렬은 그대로 두고 우변의 벡터에 변화를 주자. 첫 두 열벡터의 합을 우변이라고 하자.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

이때 새로운 방정식의 해가 무엇이 될 지는 명백하다.

행그림에서는 3개의 새로운 평면을 얻게 되고 $(1, 1, 0)$에서 세 평면이 만나게 된다. 열그림에서는 같은 세 개의 열벡터의 일차결합을 생각하면 된다.

이제 보기 1.1.1과 보기 1.1.2에서 살펴 보았던 바를 일반화하여 앞으로 체계적으로 생각할 문제를 만들어 보자. 연립일차방정식을 행렬을 이용하여

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

로 나타내기로 한다.

지금까지 살펴 보았던 문제 중의 하나는 다음과 같다.

> 행렬 A가 주어졌을 때 모든 $\boldsymbol{b}$에 대해서 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해가 항상 존재하게 될까?

해가 존재하면 §1.3에서 배우게 될 가우스 소거법을 이용하여 해를 구할 수 있다. 이 문제를 일차결합의 문제로 바꾸면 다음과 같다.

> 행렬의 열벡터의 일차결합이 3차원 공간을 메울 수 있는가?

행렬 A에 벡터 $\boldsymbol{x}$를 곱하면 A의 열벡터의 일차결합을 얻는다. 보기 1.1.1와 보기 1.1.2의 행렬은 뒤에서 정의하게 될 정칙행렬(non-singular matrix)이다. 이 경우 행렬이 가역행렬이어서 방정식의 해가

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

로 유일하게 존재한다.

이 문제의 답이 아니오인 경우, 즉 방정식의 해가 존재하지 않는 경우는 행렬 A의 열벡터의 어떤 일차결합도 $\boldsymbol{b}$가 되지 않는 경우이다. 예를 들어 행렬 A의 3개의 열벡터가 한 평면 위에 있는 경우, 즉, 이 열벡터의 모든 일차결합의 집합이 한 평면인 경우다. 이 때 $\boldsymbol{b}$가 이 평면에 속하면 방정식의 해가 존재하고 대부분의 경우처럼 $\boldsymbol{b}$가 평면에 속하지 않으면 방정식의 해가 존재하지 않는다. 이때 주어진 행렬 A는 가역행렬이 아니다.

이제 역으로 다음 문제를 생각해 보자.

> $\boldsymbol{b}$가 주어졌을 때 어떤 행렬 A에 대해서 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해가 항상 존재하게 될까?

이 질문에 대한 해답은 행렬 A의 열벡터를 포함하는 공간이 열쇠를 쥐고 있다. $\boldsymbol{b}$가 이 공간에 있으면 이 방정식의 해가 존재고 $\boldsymbol{b}$가 이 공간에 있지 않은 경우 이 방정식의 해가 존재하지 않는다. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해가 항상 존재하지 않는 경우를 특이 경우(singular case)라고 하고 이런 행렬 A를 특이행렬(singular matrix)이라고 한다.

이제 방정식의 개수와 미지수의 개수를 늘려 9개씩이라고 해보자. 방정식의 계수 행렬의 열벡터가 일차독립이 아닌 경우, 예를 들어 9번째 열벡터가 8번째 열벡터와 같다면 9개 열벡터의 일차결합을 만들 때 9번째 열벡터는 더 이상 새로운 것을 만들지 못하고 일차결합으로 표현할 수 없는 $\boldsymbol{b}$가 존재한다. 쉽게 그림을 그릴 수는 없지만 9차원 공간의 9개의 벡터의 일차결합이 선형대수의 중심적인 역할을 한다.

마지막으로 방정식을 행렬을 이용해서 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 라고 하자. 여기서 행렬의 곱 $A\boldsymbol{x}$를 2가지 방법으로 생각해보자. 우선

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

이다. 여기에서 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$은 행렬 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$의 열벡터이고 좌변의 행렬의 곱을 계산한 것이 행렬의 열벡터의 결합(combination)으로 표현된다. 다음으로 열벡터를 생각하여

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 12, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 7$$

이다. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$이면 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$가 이 방정식의 해이다.

1.1.4 연습 문제

문제 1.1.1. 영행렬이 아닌 3×3 행렬로 $A^2 \neq 0$이지만 $A^3 = 0$인 행렬 A를 구하시오.

문제 1.1.2. (1) 다음 행렬 A의 역행렬을 구하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(2) A의 역행렬을 이용하여 다음 방정식의 해를 구하시오.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

문제 1.1.3. 연립일차방정식

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ x + y &= 6 \end{aligned}$$

의 행그림와 열그림을 그리시오.

문제 1.1.4. 소거법을 이용하여 방정식

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 43 \\ -7x - 4y &= 14 \end{aligned}$$

의 해를 구하시오.

문제 1.1.5. 소거법을 이용하여 방정식

$$\begin{aligned} 4x + 4y - 5z &= -25 \\ -5x - 2y + 4z &= 14 \\ 4x + 5y + 6z &= 35 \end{aligned}$$

의 해를 구하시오.

문제 1.1.6. 벡터 $\begin{bmatrix} -15 \\ -11 \end{bmatrix}$를 $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}$의 일차결합으로 표시하시오.

문제 1.1.7. 행렬 $A = \begin{bmatrix} x & -8 \\ y & 5 \end{bmatrix}$가 $A^2 = A$을 만족할 x와 y를 구하시오.

문제 1.1.8. 방정식 $-8x + 9y + 5z = -3$의 해를 모두 구하시오.

문제 1.1.9. $\mathbb{R}^3$의 벡터로 $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$에 수직인 벡터를 모두 구하시오.