



高温作业专用服装设计

蔡志杰^{1,2,3}

(1. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433; 2. 上海市现代应用数学重点实验室, 上海 200433;

3. 非线性数学模型与方法教育部重点实验室, 上海 200433)

摘 要:建立了热防护服系统的偏微分方程模型, 给出了适当的初始条件、边界条件及交界面条件, 采用隐式差分格式进行计算. 在此基础上, 建立了热防护服最优参数设计的优化模型, 采用二分法求解. 最后对 2018 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题的参赛论文予以评述.

关键词:热传导方程; 定解条件; 隐式差分格式; 优化模型; 二分法

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2019)01-0044-09

1 问题的提出

在高温环境下工作时, 人们需要穿着专用服装以避免灼伤. 专用服装通常由 3 层织物材料构成, 记为 I、II、III 层, 其中 I 层与外界环境接触, III 层与皮肤之间还存在空隙, 将此空隙记为 IV 层. 图 1 是热防护服系统的示意图.

为设计专用服装, 将体内温度控制在 37°C 的假人放置在实验室的高温环境中, 测量假人皮肤外侧的温度.

为了降低研发成本、缩短研发周期, 希望利用数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况, 并解决以下问题.

问题 1 专用服装材料的某些参数值由表 1 给出, 对环境温度为 75°C 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 min 的情形开展实验, 测量得到假人皮肤外侧的温度(表 2). 建立数学模型, 计算温度分布, 并生成温度分布的 Excel 文件(文件名为 problem1.xlsx).

问题 2 当环境温度为 65°C 、IV 层的厚度为 5.5 mm 时, 确定 II 层的最优厚度, 确保工作 60 min 时, 假人皮肤外侧温度不超过 47°C , 且超过 44°C 的时间不超过 5 min.

问题 3 当环境温度为 80°C 时, 确定 II 层和 IV 层的最优厚度, 确保工作 30 min 时, 假人皮肤外侧温度不超过 47°C , 且超过 44°C 的时间不超过 5 min.

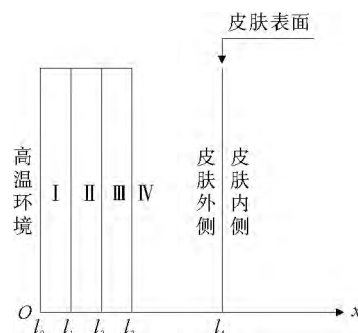


图 1 热防护服系统示意图(未按比例绘制)

表 1 专用服装材料的参数值表

分层	密度/(kg/m^3)	比热/($\text{J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$)	热传导率/($\text{W}/(\text{m} \cdot ^{\circ}\text{C})$)	厚度/mm
I 层	300.00	1 377	0.082	0.6
II 层	862.00	2 100	0.370	0.6~25
III 层	74.20	1 726	0.045	3.6
IV 层	1.18	1 005	0.028	0.6~6.4

收稿日期: 2018-10-17

通讯作者: 蔡志杰, E-mail: zhijiecai@163.com

表 2 假人皮肤外侧的测量温度表

时间/s	0	1	2	...	16	17	...	51	52	...	200	201	...	1 644	1 645	...	5 399	5 400
温度/℃	37.00	37.00	37.00	...	37.01	37.01	...	37.58	37.61	...	42.45	42.47	...	48.07	48.08	...	48.08	48.08

此问题是 2018 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题,由浙江理工大学徐定华教授提供.

2 热量传递模型

以第 I 层与高温环境之间的界面为原点,沿热防护服—皮肤方向为 x 轴正向. 记 $l_0 (=0)$ 为第 I 层与高温环境之间界面的 x 坐标, $l_j (j=1,2,3)$ 为第 j 层与第 $j+1$ 层之间交界面的 x 坐标, l_4 为第 IV 层与皮肤之间界面的 x 坐标(图 1).

下面用微元法来建立热防护服系统的热量传递模型. 记 t 时刻 x 处的温度为 $u(t, x)$, 任意选取一小段时间 $[t, t+\Delta t]$ 及一个微元 $[x, x+\Delta x]$, x 处的温度从 $u(t, x)$ 变化到 $u(t+\Delta t, x)$ 所需要吸收的热量为 $c\rho(u(t+\Delta t, x) - u(t, x))$, 因此, 微元 $[x, x+\Delta x]$ 在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内吸收的热量为

$$Q_1 = \int_x^{x+\Delta x} c\rho(u(t+\Delta t, x) - u(t, x))dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dt,$$

其中: c 为比热; ρ 为微元的密度.

而 Fourier 热传导定律^[1]表明: 在时间微元 Δt 内沿面积微元 ΔS 的法线方向 n 流过此面积微元的热量为 $-k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t$, 其中: $k(x, y, z)$ 为热传导率; $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为温度 u 沿 n 的方向导数. 因此, 由热传导定律, 在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内流入微元 $[x, x+\Delta x]$ 的热量为

$$Q_2 = \int_t^{t+\Delta t} \left(k(x+\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt.$$

由热量守恒定律得到

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt.$$

由 $t, \Delta t, x$ 和 Δx 的任意性可得热传导方程

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

上述方程在各层之间的区间内成立, 即在 $\bigcup_{j=1}^4 (l_{j-1}, l_j)$ 中成立, 其中, $c(x) = c_j, \rho(x) = \rho_j, k(x) = k_j$ ($x \in (l_{j-1}, l_j), j=1,2,3,4$) 均为分段常数函数.

下面确定相应的定解条件.

首先考虑初始条件. 设初始时 x 处的温度为 $u_0(x)$, 则有

$$t=0: u=u_0(x), x \in [l_0, l_4],$$

这里 $u_0(x) (=37^\circ\text{C})$ 为常数函数.

再考虑边界条件. 牛顿冷却定律^[1]表明: 物体的热流密度与物体温度及周围物体的温度之差成正比, 比例系数称为热交换系数.

在第 I 层与高温环境之间的边界 l_0 (称为左边界) 处, 由牛顿冷却定律, 由高温环境传递给第 I 层的热量为 $k_e(u_e - u)\Delta t$, 其中: k_e 为第 I 层与高温环境之间的热交换系数; u_e 为环境温度. 而由 Fourier 热传导定律, 通过 l_0 处流入第 I 层的热量又可以表示为 $-k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t$, 两者应该相等, 即

$$-k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t = k_e(u_e - u) \Delta t$$

或

$$-k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_e u = k_e u_e.$$

类似地,在第 IV 层与皮肤之间的边界 l_4 (称为右边界)处,成立边界条件

$$k_4 \frac{\partial u}{\partial x} + k_s u = k_s u_s,$$

其中: k_s 为第 IV 层与皮肤之间的热交换系数; u_s 为皮肤内侧的温度.

最后考虑不同层之间的交界面条件.在 $l_j (j=1,2,3)$ 处,温度是连续变化的,因此有交界面条件

$$u^- = u^+,$$

其中:上标“-”表示交界面 l_j 左侧的值;上标“+”表示交界面 l_j 右侧的值.另一方面,在交界面 l_j 处热流密度也是连续变化的,从而有交界面条件

$$\left(k_j \frac{\partial u}{\partial x}\right)^- = \left(k_{j+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right)^+.$$

至此,建立了热防护服系统热量传递的偏微分方程模型:

$$c_j \rho_j \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_j \frac{\partial u}{\partial x}\right), t > 0, x \in (l_{j-1}, l_j) (j=1,2,3,4), \quad (1)$$

$$t=0: u=u_0, \quad (2)$$

$$x=l_0: -k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_e u = k_e u_e, \quad (3)$$

$$x=l_4: k_4 \frac{\partial u}{\partial x} + k_s u = k_s u_s, \quad (4)$$

$$x=l_j: \begin{cases} u^- = u^+, \\ \left(k_j \frac{\partial u}{\partial x}\right)^- = \left(k_{j+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right)^+, \end{cases} j=1,2,3. \quad (5)$$

$$(6)$$

3 隐式差分格式

偏微分方程定解问题的数值求解方法通常有两种:有限元素法^[2]和有限差分法^[3].式(1)–(6)是一维偏微分方程,用有限元素法的优势不明显,用有限差分法计算比较方便.

取时间步长为 Δt .对区间 $[l_{j-1}, l_j] (j=1,2,3,4)$,将其 m_j 等分,空间步长为 $\Delta x_j = \frac{l_j - l_{j-1}}{m_j}$.记 $x_{M_{j-1}+i} = l_{j-1} + i\Delta x_j (i=0,1,\dots,m_j; j=1,2,3,4), t_n = n\Delta t (n=0,1,2,\dots), u_i^n = u(t_n, x_i)$,其中, $M_j = \sum_{i=1}^j m_i$ 为从第 1 层到第 j 层的等分数, $M_0 = 0$.

对 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 采用一阶向后差商

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}, \quad (7)$$

对 $\frac{\partial}{\partial x} \left(k_j \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 采用二阶中心差商,注意到在 $[l_{j-1}, l_j]$ 中, $k=k_j$ 为常数,从而有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_j \frac{\partial u}{\partial x}\right) = k_j \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x_j^2}. \quad (8)$$

将式(7)和式(8)代入方程(1),得到

$$c_j \rho_j \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = k_j \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x_j^2}. \quad (9)$$

记

$$\lambda_j = \frac{k_j}{c_j \rho_j} \frac{\Delta t}{\Delta x_j^2}, \quad (10)$$

式(9)可以写为

$$-\lambda_j u_{i-1}^n + (1+2\lambda_j) u_i^n - \lambda_j u_{i+1}^n = u_i^{n-1}, i=M_{j-1}+1, M_{j-1}+2, \dots, M_j-1, j=1,2,3,4. \quad (11)$$

下面对边界条件进行处理.对式(3)中的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 采用向前差商

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_0} = \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x_1},$$

得到 $x=l_0$ 处的差分格式

$$-k_1 \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x_1} + k_e u_0^n = k_e u_e,$$

或

$$(1 + \mu_e) u_0^n - u_1^n = \mu_e u_e, \quad (12)$$

其中, $\mu_e = \frac{k_e}{k_1} \Delta x_1$.

对式(4)中的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 采用向后差商

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_4} = \frac{u_{M_4}^n - u_{M_4-1}^n}{\Delta x_4},$$

得到

$$-u_{M_4-1}^n + (1 + \mu_s) u_{M_4}^n = \mu_s u_s, \quad (13)$$

其中, $\mu_s = \frac{k_s}{k_4} \Delta x_4$.

再来处理界面条件. 在界面 $x=x_j (j=1, 2, 3)$ 上, 温度是连续的, 因此 $u_{M_j}^n$ 可以表示界面左侧的温度值, 也可以表示界面右侧的温度值. 对界面条件(6), 左侧的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 采用向后差商, 右侧的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 采用向前差商, 有

$$k_j \frac{u_{M_j}^n - u_{M_j-1}^n}{\Delta x_j} = k_{j+1} \frac{u_{M_j+1}^n - u_{M_j}^n}{\Delta x_{j+1}},$$

整理得到

$$-\nu_j u_{M_j-1}^n + (\nu_j + \nu_{j+1}) u_{M_j}^n - \nu_{j+1} u_{M_j+1}^n = 0, \quad (14)$$

其中, $\nu_j = \frac{k_j}{\Delta x_j}$.

由初始条件(2),

$$u_i^0 = u_0, \quad i=0, 1, 2, \dots, M_4. \quad (15)$$

式(11)–(15)就构成了偏微分方程定解问题(1)–(6)的隐式差分格式, 它是关于 u_i^n 的三对角线性方程组, 可以用追赶法^[4]进行求解, 计算速度非常快. 图 2 是温度随时间、空间的分布图, 图 3 是各层界面处的温度随时间的变化图, 其中, $k_e = 120.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $k_s = 8.36 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, 其他参数见问题 1.

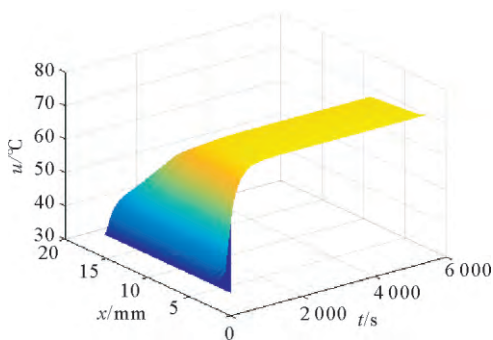


图 2 温度随时间、空间的分布图(彩图见封三)

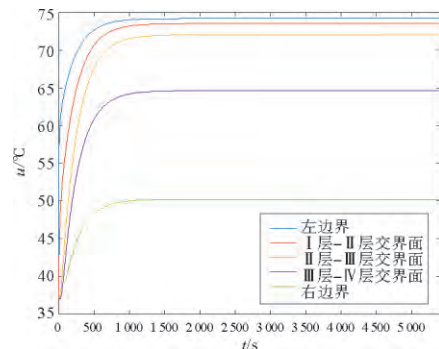


图 3 各层界面处的温度随时间的变化图(彩图见封三)

4 稳态模型

经过充分长的时间后, 温度的变化趋于稳定, 此时温度 u 不随时间的推移而变化, 即 u 不依赖于时

间 t , 而只是空间变量 x 的函数: $u=u(x)$, 因此 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$. 这样, 式(1)–(6)可改写为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (l_{j-1}, l_j) (j=1, 2, 3, 4), \quad (16)$$

$$x=l_0: -k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_e u = k_e u_e, \quad (17)$$

$$x=l_4: k_4 \frac{\partial u}{\partial x} + k_s u = k_s u_s, \quad (18)$$

$$x=l_j: \begin{cases} u^- = u^+, \\ \left(k_j \frac{\partial u}{\partial x} \right)^- = \left(k_{j+1} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^+, \end{cases} \quad j=1, 2, 3. \quad (19)$$

$$x=l_j: \begin{cases} u^- = u^+, \\ \left(k_j \frac{\partial u}{\partial x} \right)^- = \left(k_{j+1} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^+, \end{cases} \quad j=1, 2, 3. \quad (20)$$

显然, 由方程(16), 对每个区间 $(l_{j-1}, l_j) (j=1, 2, 3, 4)$, $u(x)$ 都是 x 的线性函数

$$u(x) = a_j x + b_j, \quad x \in (l_{j-1}, l_j) (j=1, 2, 3, 4). \quad (21)$$

由交界面条件(19)和(20), 有

$$\begin{aligned} a_j l_j + b_j &= a_{j+1} l_j + b_{j+1}, \\ k_j a_j &= k_{j+1} a_{j+1}, \end{aligned} \quad j=1, 2, 3,$$

由此得到

$$a_2 = \frac{k_1}{k_2} a_1, \quad (22)$$

$$a_3 = \frac{k_1}{k_3} a_1, \quad (23)$$

$$a_4 = \frac{k_1}{k_4} a_1 \quad (24)$$

及

$$b_2 = a_1 l_1 + b_1 - a_2 l_1, \quad (25)$$

$$b_3 = a_2 l_2 + b_2 - a_3 l_2, \quad (26)$$

$$b_4 = a_3 l_3 + b_3 - a_4 l_3. \quad (27)$$

将式(25)–(27)相加, 可得

$$b_4 = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 - a_2 l_1 - a_3 l_2 - a_4 l_3 + b_1. \quad (28)$$

由边界条件(17)和(18), 有

$$\begin{aligned} -k_1 a_1 + k_e (a_1 l_0 + b_1) &= k_e u_e, \\ k_4 a_4 + k_s (a_4 l_4 + b_4) &= k_s u_s, \end{aligned}$$

由此得到

$$b_1 = u_e - \left(l_0 - \frac{k_1}{k_e} \right) a_1 \quad (29)$$

及

$$(k_4 + k_s l_4) a_4 + k_s b_4 = k_s u_s. \quad (30)$$

将式(22)–(24)及式(28)–(29)代入式(30), 得到关于 a_1 的方程

$$\left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_e} + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{k_j} (l_j - l_{j-1}) \right) a_1 = \frac{1}{k_1} (u_s - u_e),$$

由此解得

$$a_1 = \frac{\frac{1}{k_1} (u_s - u_e)}{\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_e} + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{k_j} (l_j - l_{j-1})}.$$

最后由式(22)–(24)及式(29), (25)–(27)求得 $a_j (j=2, 3, 4)$ 和 $b_j (j=1, 2, 3, 4)$.

利用稳态模型精确解的公式,可以验证隐式差分格式的计算结果.图4显示了用稳态模型(16)–(20)计算的热防护服系统各点处的温度与用非稳态模型(1)–(6)计算的热防护服系统各点处在终止时刻的温度的绝对误差,其中, $k_e = 120.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $k_s = 8.36 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$,其他参数见问题1.可以看到,最大误差为 8.9548×10^{-10} ,几乎没有误差.

5 热交换系数的确定

第I层与高温环境之间的热交换系数 k_e 和皮肤与第IV层之间的热交换系数 k_s 是未知的,需要利用测量得到的假人皮肤外侧的温度来确定.记测量得到的温度为 u_M^{n*} ,表示 $t=t^n$ 时测量得到的假人皮肤外侧的温度,那么确定热交换系数 k_e 和 k_s 的数学模型可以归结为如下的优化问题:

$$\min E(k_e, k_s) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (u_M^n - u_M^{n*})^2,$$

其中: u_M^n 表示 $t=t^n$ 时假人皮肤外侧的计算温度;而 $M(=M_4)$ 表示差分格式中的剖分总数,其所在的位置恰好是在假人皮肤外侧处.

由式(21)可以得到皮肤外侧稳态时的温度为

$$u(l_4) = \frac{\frac{1}{k_s}}{\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_e} + \sum_{j=1}^4 \frac{l_j - l_{j-1}}{k_j}} u_e + \frac{\frac{1}{k_e} + \sum_{j=1}^4 \frac{l_j - l_{j-1}}{k_j}}{\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_e} + \sum_{j=1}^4 \frac{l_j - l_{j-1}}{k_j}} u_s. \quad (31)$$

记 $u_M = u(l_4)$,由式(31)可得

$$\left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_e} + \sum_{j=1}^4 \frac{l_j - l_{j-1}}{k_j} \right) u_M = \frac{1}{k_s} u_e + \left(\frac{1}{k_e} + \sum_{j=1}^4 \frac{l_j - l_{j-1}}{k_j} \right) u_s,$$

即

$$\frac{1}{k_s} = \frac{u_M - u_s}{u_e - u_M} \left(\frac{1}{k_e} + \sum_{j=1}^4 \frac{l_j - l_{j-1}}{k_j} \right).$$

这就得到了 k_s 和 k_e 的关系,从而热交换系数的确定问题就转化为单参数的辨识问题:

$$\min E(k_e) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (u_M^n - u_M^{n*})^2.$$

6 第II层厚度的最优设计

记 $u(t, x)$ 为式(1)–(6)的解,则 t 时刻皮肤外侧的温度为 $u(t, l_4)$.

记 $T(=60 \text{ min}=3600 \text{ s})$ 为工作时间,此时皮肤外侧的温度不能超过 $u_{\max}(=47^\circ\text{C})$,即

$$u(T, l_4) \leq u_{\max}.$$

记 t^* 为允许超过 $u^*(=44^\circ\text{C})$ 的最长时间($t^*=5 \text{ min}=300 \text{ s}$),则

$$u(T - t^*, l_4) \leq u^*.$$

第II层的厚度为 $l_2 - l_1$,由于 l_1 是固定的,因此第II层厚度最小就是 l_2 最小.由此,第II层厚度的最优设计模型可以归结为

$$\min l_2 \quad (32)$$

$$\text{s. t. } u(T, l_4) \leq u_{\max}, \quad (33)$$

$$u(T - t^*, l_4) \leq u^*, \quad (34)$$

$$d_{2\min} \leq l_2 - l_1 \leq d_{2\max}, \quad (35)$$

其中: $u(t, x)$ 是热量传递模型(1)–(6)的解; $d_{2\min}(=0.6 \text{ mm})$ 为第II层的最小允许厚度; $d_{2\max}(=25 \text{ mm})$ 为

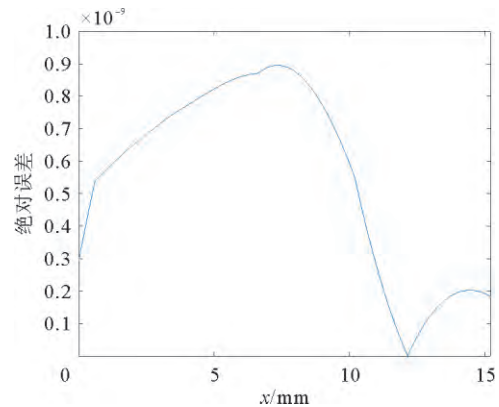


图4 稳态模型与非稳态模型的计算误差图

第 II 层的最大允许厚度.

显然,热防护服系统的温度分布与第 II 层的厚度有关,为了明确表示这种依赖关系,记温度为 $u(t, x; l_2)$. 图 5 显示了皮肤外侧的温度与第 II 层厚度之间的关系,其中,参数采用问题 2 中给出的参数值. 从图 5 中可以看到,皮肤外侧的温度随第 II 层厚度的增加而减小,因此可以用二分法求解优化问题 (32)–(35).

算法 记第 II 层的厚度为 $d_2 (=l_2 - l_1)$, 计算精度为 ϵ .

第 1 步 令 $d_2 = 0.6$ mm, 用隐式差分格式计算系统的温度分布 $u(t, x)$. 若 $u(t, x)$ 满足约束条件 (33)–

(34), 则第 II 层的最小厚度即为 0.6 mm, 算法结束; 否则, 令 $d_{\min} = 0.6$ mm, 转第 2 步.

第 2 步 令 $d_2 = 25$ mm, 用隐式差分格式计算系统的温度分布 $u(t, x)$. 若 $u(t, x)$ 不满足约束条件 (33)–(34), 则无论如何选取第 II 层的厚度都无法满足约束条件 (33)–(34), 即所用材料不能满足要求, 算法结束; 否则, 令 $d_{\max} = 25$ mm, 转第 3 步.

第 3 步 若 $d_{\max} - d_{\min} < \epsilon$, 算法结束; 第 II 层的最优厚度为 d_{\max} . 否则, 转第 4 步.

第 4 步 令 $d = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2}$, 用隐式差分格式计算系统的温度分布 $u(t, x)$:

1) 若 $u(t, x)$ 满足约束条件 (33)–(34), 令 $d_{\max} = d$, 转第 3 步;

2) 若 $u(t, x)$ 不满足约束条件 (33)–(34), 令 $d_{\min} = d$, 转第 3 步.

7 第 II 层和第 IV 层厚度的最优设计

第 II 层和第 IV 层厚度的最优设计模型为

$$\min l_2 \quad (36)$$

$$\min l_4 - l_3 \quad (37)$$

$$\text{s. t. } u(T, l_4) \leq u_{\max}, \quad (38)$$

$$u(T - t^*, l_4) \leq u^*, \quad (39)$$

$$d_{2\min} \leq l_2 - l_1 \leq d_{2\max}, \quad (40)$$

$$d_{4\min} \leq l_4 - l_3 \leq d_{4\max}, \quad (41)$$

其中, $u(t, x)$ 是热量传递模型 (1)–(6) 的解.

这是一个双目标优化问题, 应作进一步处理. 可以用加权的方法将双目标优化转化为单目标优化问题来求解, 但这种方法不是最好的.

对问题作进一步的分析, 皮肤外侧的温度关于第 II 层和第 IV 层的厚度都是单调递减的, 第 IV 层的厚度越大, 皮肤外侧的温度就会越低, 从而第 II 层的厚度就可以适当地减小. 而第 IV 层的厚度增加, 所需要的服装材料没有明显的变化. 因此, 可以将第 IV 层的厚度取为最大值 $l_4 = l_{4\max} (=6.4$ mm), 利用第 6 节的二分法求第 II 层的最优厚度 (36), (38)–(39).

如果第 II 层的最优厚度在允许的范围 $[d_{2\min}, d_{2\max}]$ (即 $[0.6, 25]$) 之内, 那么这就是第 II 层和第 IV 层的最优厚度组合.

如果第 II 层的最优厚度大于 $d_{2\max} = 25$ mm, 那么这种材料不能使用, 因为第 II 层和第 IV 层均取最大值, 都不能使皮肤外侧的温度降到允许的范围.

如果第 II 层的最优厚度小于 $d_{2\min} = 0.6$ mm, 那么固定 $d_2 = d_{2\min}$, 求解优化问题 (37)–(39), 得到第 IV 层的最小厚度, 这组参数就是第 II 层和第 IV 层的最优厚度组合.

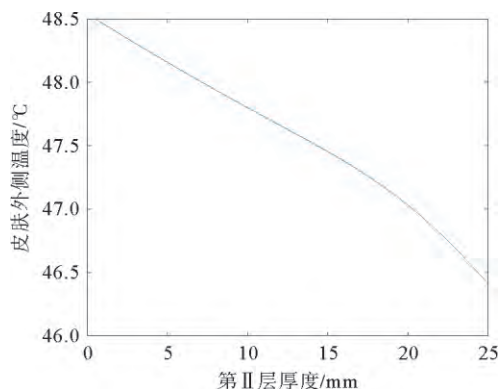


图 5 皮肤外侧的温度随第 II 层厚度的变化图

8 竞赛论文的评述

在论文的评阅过程中发现了一些问题,本节对其作简要评述.

8.1 边界条件

常用的偏微分方程的边界条件有3类:

第一类边界条件是已知边界处的温度: $u|_r=\mu$ (已知函数);

第二类边界条件是已知边界处的热流密度: $\frac{\partial u}{\partial n}|_r=\mu$ (已知函数).

而热防护服问题对应的是已知外界物体的温度,这个物体与所考虑的系统之间存在温度差,从而产生了热量交换.这种情形不适合用第一、二类边界条件,而应该采用第三类边界条件(参见式(3)–(4)).

8.2 差分格式

热传导方程的差分格式有显式格式和隐式格式.相当一部分参赛队采用显式差分格式进行求解.

显式差分格式对时间 t 的导数采用向前差商

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t},$$

从而得到递推形式

$$u_i^{n+1} = \lambda_j u_{i+1}^n + (1 - 2\lambda_j) u_i^n + \lambda_j u_{i-1}^n,$$

其中, λ_j 由式(10)给出.

显式差分格式的计算比较简单,只需循环赋值,不需要求解线性代数方程组.但是,显式差分格式是条件稳定的,必须满足条件 $\lambda_j \leq \frac{1}{2}$,显式差分格式才是稳定的.现在 $\Delta t = 1$ s, $\Delta x = 5 \times 10^{-5}$ m, λ_j 远大于 $\frac{1}{2}$,显式差分格式是不稳定的.要使得显式差分格式稳定,就要减小 Δt ,例如,取 $\Delta t < 10^{-4}$,计算量非常大.

而隐式差分格式(11)是无条件稳定的,从而时间步长 Δt 不需要取得非常小.

8.3 解析解

热传导方程的初边值问题可以用分离变量法求得解析解,但这是有限制条件的.热防护服问题是一个多层介质问题,与单层问题相比,情况复杂得多,不同层的介质之间有交界面条件,因此无法用分离变量法得到解析解.部分参赛队没有仔细阅读偏微分方程教材中关于分离变量法的求解过程,直接采用教材中的解析解公式来求解,得到了错误的结果.

还有一部分参赛队采用Fourier变换求解,这是对初值问题求解的方法,空间变量的范围要求在 $(-\infty, +\infty)$.而热防护服问题定义在有界区域(一维情形是有界区间)范围内,不是在全空间中有定义的,Fourier变换是无法进行的.因此,这种方法也是不适用的.

8.4 检验

绝大多数队对模型和方法没有进行检验.热交换系数是未知的,需要利用皮肤外侧的温度测量值反算出来.温度测量值不可避免地带有一定的误差,反演算法也会带来计算误差,这就导致热交换系数不是精确的.那么,热交换系数的误差对热防护服厚度的设计是否有影响,影响有多大,这就成为一个非常重要的问题.如果热交换系数的微小误差,导致热防护服厚度有很大的变化,那么这个模型和算法就不能使用了.

检验的方法是,对测量值加上一定水平的随机误差,计算得到新的热交换系数,然后通过优化模型求得热防护服的最佳厚度,并与原来的最佳厚度进行比较,考察最优厚度是否有很大的变化.

参考文献

- [1]谷超豪,李大潜,陈恕行,等.数学物理方程[M].3版.北京:高等教育出版社,2015.
- [2]石钟慈,王鸣.有限元方法[M].北京:科学出版社,2010.

[3] 陈文斌, 程晋, 吴新明, 等. 微分方程数值解[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2014.

[4] 韩旭里. 数值计算方法[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2008.

Special Clothing Design Under High Temperature Environment

CAI Zhijie^{1,2,3}

(1. School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Shanghai Key Laboratory of Contemporary Applied Mathematics, Shanghai 200433, China;

3. Key Laboratory of Nonlinear Mathematical Models and Methods of Ministry of Education, Shanghai 200433, China)

Abstract: In this paper, the partial differential equation model of “high temperature environment—thermal protective clothing—air layer—skin” system is established. The appropriate initial conditions, boundary conditions and interface conditions are given. The implicit difference scheme is used to solve the problem. Based on that, an optimization model for optimal parameter design of thermal protective clothing is established and solved by bisection method. Finally, some comments on the students’ papers of Problem A in CUMCM 2018 are given.

Key words: heat conduction equation; deterministic conditions of solution; definite condition; implicit difference scheme; bisection method

作者简介

蔡志杰(1968—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 应用数学专业, 主要研究方向是工业应用数学、应用偏微分方程.

(上接第 13 页)

Dynamic System of Microbial Culture Described by Impulsive Differential Equations

ZHANG Tongqian¹, GAO Ning¹, WANG Junling¹, JIANG Zhichao²

(1. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology,

Qingdao, Shandong 266590, China; 2. Department of Sciences, North China of Aerospace Engineering,

Chengde, Hebei 065000, China)

Abstract: The chemostat is an experimental device for microbial culture in the laboratory and is widely used in bioengineering and biotechnology. This paper reviews the research process of the chemostat, introduces the research results of chemostats by domestic and foreign scholars in recent years, and focuses on the research results of the chemostat dynamical model described by impulsive differential equations.

Key words: chemostat model; ordinary differential equation; impulsive effect; delay effect; stochastic effect

作者简介

张同迁(1980—), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师. 主要研究方向是生物数学.

高 宁(1994—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向是生物数学.

王俊玲(1995—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向是生物数学.

江志超(1980—), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向是生物数学中的动力学问题.