

10.2. LEGEA BIOT-SAVART

Prin analogie cu câmpul electric, putem enunța principiul superpoziției câmpului magnetic sub forma: *inducția câmpul magnetic total generat de sarcini în mișcare este egală suma vectorială a inducțiilor câmpurilor magnetice produse de fiecare sarcină individuală*. În continuare, vom utiliza acest principiu pentru a determina inducția câmpului magnetic produs de un curent ce străbate un conductor.

Să considerăm un segment dintr-un conductor de lungime $d\vec{l}$, ca în figura 23, parcurs de un curent de intensitate I . Volumul segmentului este $V = Sdl$, unde S este aria secțiunii transversale a conductorului. Cantitatea de sarcină care străbate conductorul este:

$$dQ = nqSdl \quad (27)$$

unde n reprezintă numărul de sarcini q din unitatea de volum.

Inducția câmpului magnetic elementar generat de acest element de curent, într-un punct P situat la distanța r de elementul de curent dl este:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|dQ|v_d \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n|q|Sv_d \sin\theta}{r^2} dl \quad (28)$$

Ținând cont că intensitatea curentului prin conductor este $I = n|q|Sv_d$, putem rescrie relația precedentă sub forma:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Is \sin\theta}{r^2} dl \quad (29)$$

a cărei formă vectorială este:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (30)$$

Ultimele două relații se numesc **legea Biot-Savart**. Aceste legi ne ajută să determinăm inducția câmpului magnetic total în fiecare punct din spațiu, generat de un curent ce străbate un circuit. Prin integrarea relației precedente pe întreaga lungime a conductorului obținem:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (31)$$

Aceasta relație ne va permite să calculăm câmpurile magnetice generate de conductori având forme diferite.

În figura 24 este indicat sensul liniilor câmpului magnetic generat de un conductor parcurs de curent electric. și în acest caz, sensul liniilor de câmp se determină cu regula burghiuilui drept, care este rotit în sensul curentului prin conductor.

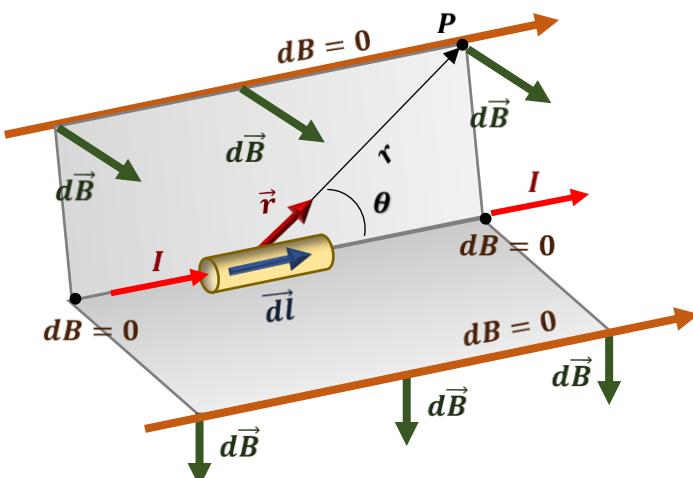


Figura 23 Inducția câmpului magnetic generat de un element de curent $d\vec{l}$.

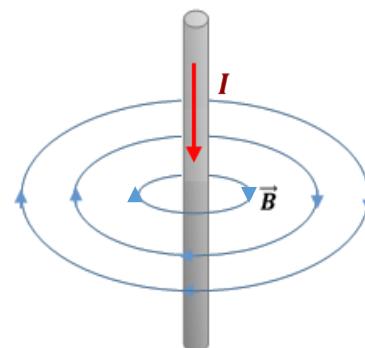


Figura 24 Sensul liniilor câmpului magnetic din jurul unui conductor parcurs de curent electric.

10.3. CÂMPUL MAGNETIC PRODUS DE UN CONDUCTOR LINIAR

Pentru început, să aplicăm legea Biot-Savart pentru a determina inducția câmpului magnetic produs de un conductor liniar. Acest calcul este esențial deoarece conductoare liniare se găsesc în toate dispozitivele electrice și electronice. În figura 25, un conductor liniar de lungime $2a$, parcurs de un curent de intensitate I care generează în punctul P situat la distanța x de conductor un câmp magnetic de inducție \vec{B} , perpendicular pe pagină, spre interiorul acesteia.

Vom utiliza legea Biot-Savart pentru a determina inducția câmpului magnetic elementar $d\vec{B}$ produs de elementul de curent $d\vec{l}$, modulul elementului de curent $dl = dy$. Din figură observăm că $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și

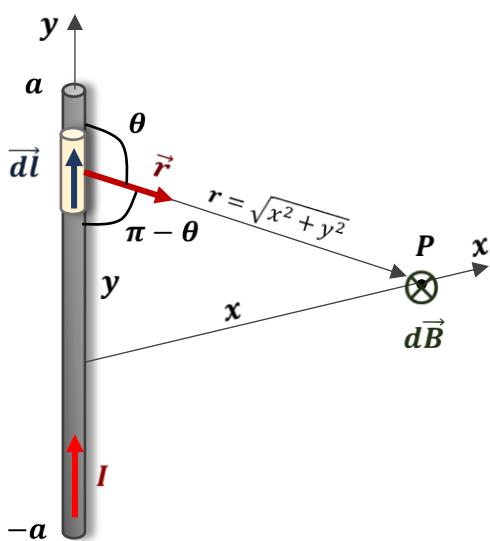


Figura 25 Câmpul magnetic din jurul unui conductor rectiliniu de lungime $2a$, parcurs de un curent electric I .

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Regula burghiuului drept ne arată că câmpul magnetic $d\vec{B}$ este orientat spre interiorul paginii, perpendicular pe aceasta. În plus, $d\vec{B}$ este același pentru toate elementele de curent $d\vec{l}$. Astfel, prin integrarea relației (31) pentru toată lungimea conductorului obținem:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{\sin\theta}{r^2} dy = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (32)$$

de unde rezultă:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (33)$$

Atunci când lungimea conductorului este mult mai mare în comparație cu distanța până la punctul P , putem să considerăm că lungimea conductorului este infinită, $a \rightarrow \infty$, iar relația precedentă devine:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (34)$$

Deoarece situația fizică prezentată are simetrie axială în lungul axei oy , \vec{B} are același modul în toate punctele de pe un cerc cu centru pe conductor și este orientat într-un plan perpendicular pe acesta. Astfel, \vec{B} este tangent în orice punct la linia câmpului magnetic, iar modulul inducției câmpului magnetic în orice punct al cercului de rază r este:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (35)$$

Spre deosebire de câmpul electric la care liniile de câmp sunt radiale, spre exteriorul distribuției liniare de sarcină pozitivă, liniile câmpului magnetic sunt cercuri concentrice în jurul sursei sale. Liniile câmpului electric produs de o sarcină încep sau se termină în sarcina respectivă (în funcție de semnul acesteia), pe când liniile câmpului magnetic sunt întotdeauna curbe închise în jurul sursei și nu au un început sau un sfârșit. Astfel, după cum

vom vedea mai târziu, fluxul magnetic prin orice suprafață închisă este nul, rezultat care exprimă legea lui Gauss în magnetism.

10.4. CÂMPUL MAGNETIC ÎN CENTRUL UNEI SPIRE CIRCULARE

Dacă analizăm un transformator, un motor electric sau un electromagnet, vom constata că acestea au în interior un număr mare de spire circulare, care sunt îmfășurate pe un cadru și care sunt foarte apropriate. Dacă un curent parcurge aceasta îmfășurare, în jurul său se stabilește un câmp magnetic. Astfel, este necesar să stabilim o expresie a inducției câmpului magnetic produs de o spiră circulară sau de N spire care formează o bobină.

Pentru a determina inducția câmpului magnetic într-un punct P situat la distanța x de centrul unei spire circulare de rază a , ca în figura 26, vom utiliza legea Biot-Savart. Pentru simplitate vom determina la început câmpul produs în punctul P situat la distanța $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ de un element de curent $d\vec{l}$, după care vom integra pentru toată spira. Astfel, câmpul magnetic elementar $d\vec{B}$ modulul dat de expresia:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{x^2 + a^2} \quad (36)$$

Componentele vectorului $d\vec{B}$ sunt:

$$dB_x = dB \cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{x^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (37)$$

$$dB_y = dB \sin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (38)$$

Câmpul total \vec{B} în punctul P va avea doar componenta B_x , care este perpendiculară pe planul spirei. Acest lucru se datorează faptului că fiecare element de curent $d\vec{l}$ îi va corespunde pe partea opusă a spirei un element de curent cu direcție opusă. Aceste două elemente contribuie în mod egal la componenta ox a lui $d\vec{B}$, dar componentele de pe axa oy sunt opuse, ceea ce face ca, componentele perpendiculare pe axa ox să se anuleze reciproc. Astfel, pentru

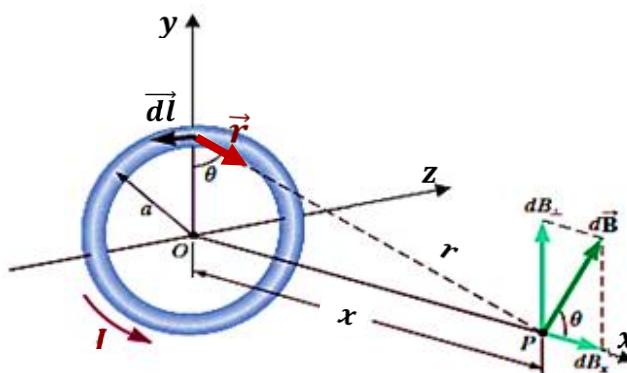


Figura 26 Câmpul magnetic produs de o spiră circulară de rază a , parcurs de un curent electric I .

a determina inducția câmpului magnetic vom integra relația precedenta pentru toate elementele de curent $d\vec{l}$ ale spirei circulare și vom obține:

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a dl}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \int dl \quad (39)$$

deoarece dl trebuie integrat pe toată circumferința cercului, $\int dl = 2\pi a$, vom obține:

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (40)$$

După cum am mai precizat, direcția vectorului \vec{B} este dată de regula burghiului drept.

Rezultatul precedent poate fi generalizat și în cazul unei bobine formate din N spire circulare, de raze egale. Dacă spirele sunt apropriate astfel încât putem considera că toate sunt egal depărtate de punctul P , putem scrie:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (40)$$

Acest rezultat ne arată de ce se folosesc bobine cu un număr cât mai mare de spire pentru a obține câmpuri magnetice puternice. Dacă s-ar utiliza o singura spiră pentru a produce același câmp magnetic ar trebui ca intensitatea curentului să fie foarte mare, ceea ce ar face ca spira să nu reziste unui asemenea curent. Analizând graficul dependenței inducției câmpului magnetic de distanța x , figura 27, se observă ca o valoare maximă a inducției B_x corespunde lui $x = 0$, adică este maxim în centrul spirei:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \quad (41)$$

Pe măsură ce ne depărtăm de centrul spirei, inducția câmpului magnetic se diminuează.

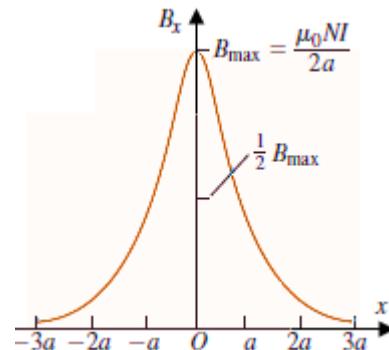


Figura 27 Dependența inducției câmpului magnetic de distanța x față de centru spirei.

Seminar : Cimp magnetic

① O particula cu sarcina $q = -1,25 \cdot 10^{-8} C$ se deplaseaza cu o viteza instantane $\vec{v} = (4,19 \cdot 10^5 \frac{m}{s})\vec{i} + (-3,85 \cdot 10^5 \frac{m}{s})\vec{j}$.

(A) Care este forta exercitata asupra partculii de un cimp magnetic de inducere $\vec{B} = (1,5 T)\vec{k}$?

$$\bullet \vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} = -1,25 \cdot 10^{-8} C \left[\left(4,19 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \right) \vec{i} + \left(-3,85 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \vec{j} \right) \right] \times 1,5 T \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_m = -1,25 \cdot 10^{-8} C \cdot \left[\left(5,88 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \right) \vec{i} \times \vec{k} - \left(5,39 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \cdot T \right) \vec{j} \times \vec{k} \right]$$

$$\text{Cum } \vec{i} \times \vec{i} = 0 \Rightarrow \vec{F}_m = \left(-6,68 \cdot 10^{-4} N \right) \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

② Care este forta exercitata asupra partculii de un cimp magnetic de inducere $\vec{B} = 1,5 T \vec{k}$?

$$\bullet \vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} = -1,25 \cdot 10^{-8} C \cdot \left[\left(4,19 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \cdot 1,5 T \right) \vec{i} \times \vec{k} + \left(-3,85 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \cdot 1,5 T \right) \vec{j} \times \vec{k} \right]$$

$$\text{dor: } \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \Rightarrow \vec{F}_m = \left(6,68 \cdot 10^{-4} N \right) \vec{i} + \left(3,27 \cdot 10^{-4} N \right) \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

② Un grup de particule se deplaseaza intr-un cimp magnetic de inducere si direcchia neconosciute. Observati ca un protot, care se deplaseaza cu $1,5 \frac{km}{s}$ in sensul pozitiv al axei ox este supus acțiunii unei forțe $F_{pro} = 2,25 \cdot 10^{-16} N$ orientata in sensul pozitiv al axei oy, iar un electron care se deplaseaza cu viteza $v = 3,75 \frac{km}{s}$ in sensul negativ al axei ox este supus acțiunii unei forțe $F_{ele} = 0,75 \cdot 10^{-16} N$ orientata tot in sensul pozitiv al axei oy.

(A) Care este valoarea inducției cimpului magnetic si orientarea acestuia?

$$\bullet \text{protot: } \vec{F}_p = q \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_p \cdot \vec{j} = q \cdot v_p \cdot \vec{i} \times \vec{B} \quad \rightarrow$$

$$\bullet \text{dar } \vec{F}_p \perp (\vec{v}, \vec{B}) \Rightarrow B_y = 0 \Rightarrow \vec{B} = B_x \vec{i} + B_z \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_p \cdot \vec{j} = q \cdot v_p \cdot \vec{i} \times (B_x \vec{i} + B_z \vec{k}) = -2 v_p \cdot B_z \cdot \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -2 \text{ Vp} \vec{B}_T \Rightarrow B_2 = -\frac{\vec{F}_T}{2 \text{ Vp}} = -\frac{925 \cdot 10^{-6} \text{ N}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow B_2 = -0,937 \text{ T.}$$

• reacție: $\vec{E}_c = 2 \text{ Vp} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_c \cdot \vec{j} = 2 \text{ Vp} \cdot (-\vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_z \vec{k})$

$$\vec{E} + (\vec{v}, \vec{B}) \Rightarrow \vec{B} = B_x \vec{i} + B_z \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_c \cdot \vec{j} = -2 \text{ Vp} \cdot B_x \cdot \vec{j} \Rightarrow B_x = \frac{-F_c}{2 \text{ Vp}} = -\frac{0,5 \cdot 10^{-16} \text{ N}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5,75 \cdot 10^3 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow B_x = 1,11 \text{ T}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = (1,11 \text{ T}) \vec{i} - (0,937 \text{ T}) \vec{k}$$

• modul: $B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = \sqrt{(1,11 \text{ T})^2 + (-0,937 \text{ T})^2} = 1,46 \text{ T.}$

• orientare: $\tan \theta = \frac{B_z}{B_x} = \frac{-0,937 \text{ T}}{1,11 \text{ T}} = -0,838 \Rightarrow \theta = \arctan(-0,838) = -40^\circ$

(B) Care este modulul și orientarea forței magnetice care acționează asupra unei reacții cu re depărtare cu $3,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ în sensul negativ al axei Oy ?

$$\vec{F} = 2 \text{ Vp} \times \vec{B} = 2 \cdot v (-\vec{j}) \times (B_x \vec{i} + B_z \vec{k}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -2v [B_x \cdot (-\vec{k}) + B_z \cdot \vec{i}]$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 3,2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot [1,11 \text{ T} (-\vec{k}) + (-0,937 \text{ T}) \cdot \vec{i}]$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -5,728 \cdot 10^{-16} \text{ N} \vec{i} - 5,728 \cdot 10^{-16} \text{ N} \vec{k}$$

• modul: $F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{(-5,728 \cdot 10^{-16} \text{ N})^2 + (-5,728 \cdot 10^{-16} \text{ N})^2} \Rightarrow$

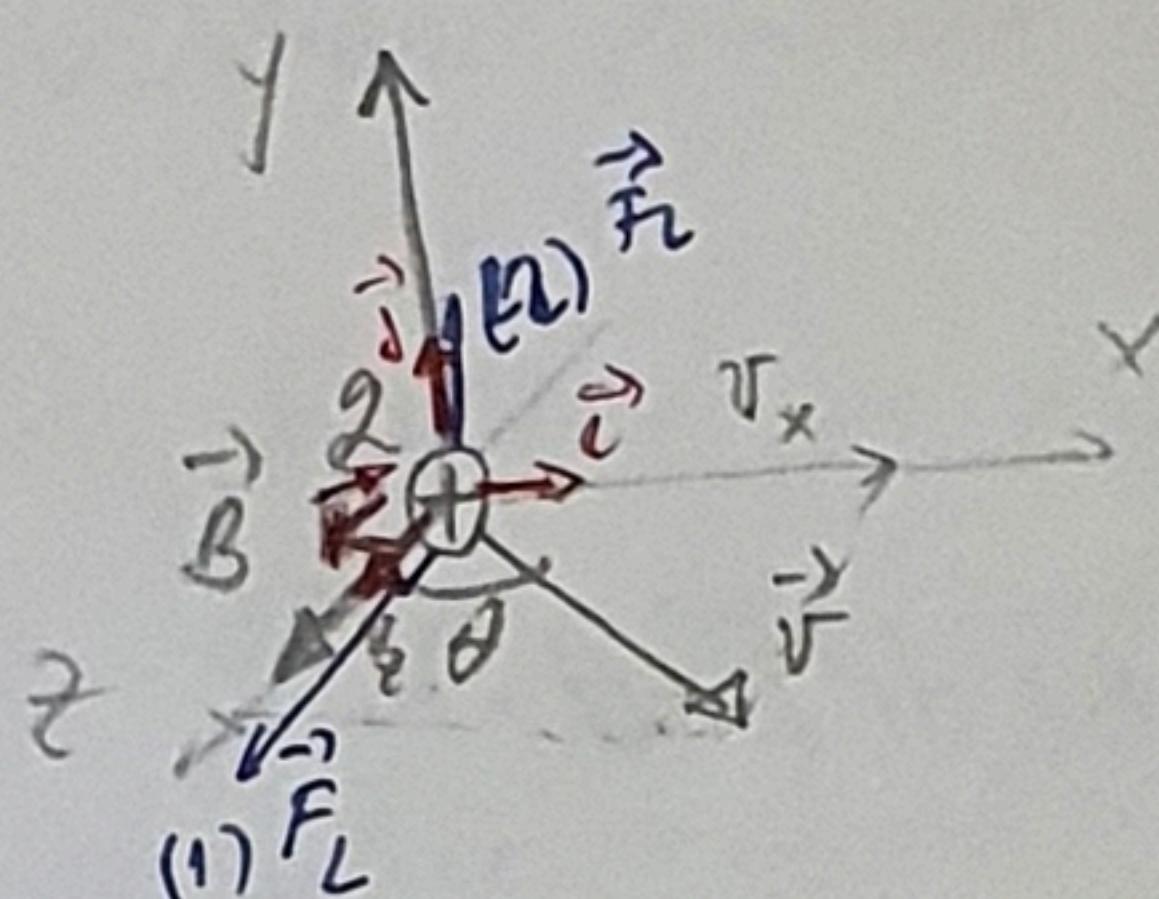
$$\Rightarrow F = 7,47 \cdot 10^{-16} \text{ N.}$$

• orientare: $\tan \theta = \frac{F_z}{F_x} = \frac{-5,728 \cdot 10^{-16} \text{ N}}{-5,728 \cdot 10^{-16} \text{ N}} = 1,19 \Rightarrow \theta = \arctan(1,19) = 50^\circ$

Campul magnetic

① Un fascicul de protoni ($z_p = 1,6 \cdot 10^{-19} C$) se deplasează cu viteză $v = 3 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$ într-un câmp magnetic uniform și inducție $B = 2 T$, orientat în lungul axei oz . Orientarea vectorului viteză este astfel încât unghiul $\theta = 30^\circ$ făcut de ea cu oz . Determinați forța exercitată asupra fiecărui proton.

(R)



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_z \hat{k} = (v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{k}$$

$$\vec{B} = 2T \hat{k}$$

$$\vec{F} = q [(v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{k}] \times 2T \hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 1,6 \cdot 10^{-19} C \left[(3 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \sin 30^\circ) \hat{i} + (3 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \cos 30^\circ) \hat{k} \right] \times 2T \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 1,6 \cdot 10^{-19} C \left(1,5 \cdot 10^5 \hat{i} + 0,46 \cdot 10^5 \hat{k} \right) \times 2T \hat{k} \Rightarrow$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}; \quad \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -4,8 \cdot 10^{-14} \hat{N} \hat{j} \Rightarrow \vec{F} \text{ este orientat în sensul negativ al axei } oy \text{ și } F = 4,8 \cdot 10^{-14} N.$$

② Ce se întâmplă dacă în locul fasciculului de protoni ar fi un fascicul de electroni.

(R) Aceeași $z_p = -2e$, forța Lorentz ar avea sens opus ceea ce determinate anterior. Astfel, acuzația ar fi orientată în sensul pozitiv al axei oy și or area același modul

$$F = 4,8 \cdot 10^{-14} N.$$