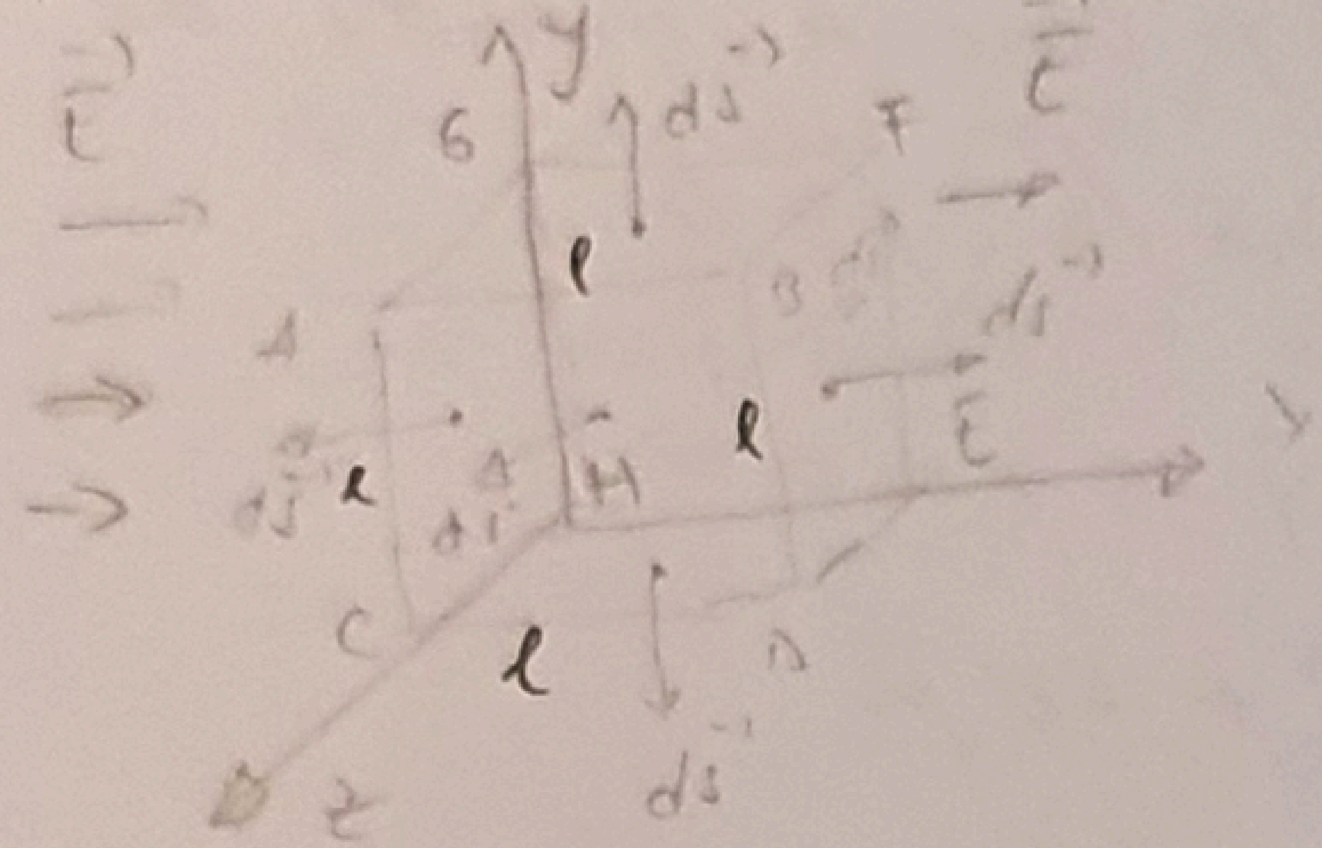
(22) Un cub de latură l este plasat într-un câmp electric uniform de intensitate $\vec{E}$, orientat ca în figură. Să se determine fluxul electric total ce străbate cubul.



• prin suprafețele ABCD și EFGH, ABGF și CDED: $\vec{E} \perp d\vec{s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi_e = \int \vec{E}\, d\vec{s} = \int E\, ds \cos\theta = 0.$$

• prin ACDG $\rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \phi_{e_1} = \int \vec{E}\, d\vec{s} = \int E \cos(180^\circ)\, ds \Rightarrow$

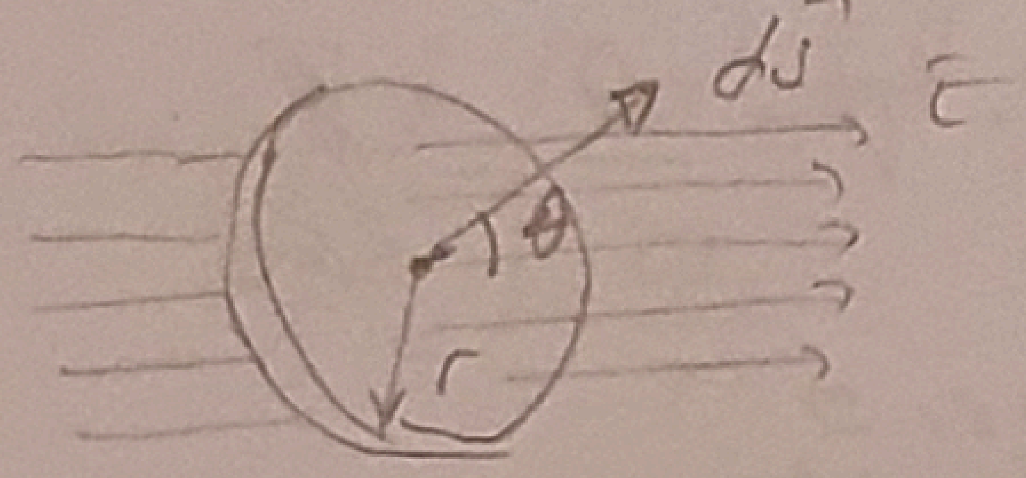
$$\Rightarrow \phi_e = -E\int ds = -E\cdot l^2$$

• prin BDEF $\rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \phi_{e_2} = \int E \cos 0^\circ\, dS = E\int ds = E l^2$

$$\Rightarrow \phi_{e_T} = \Sigma \phi_e = -El^2 + El^2 + 0 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow \phi_{e_T} = 0 \cdot \frac{N m^2}{C}.$$

(23) Un disc de rază $r = 0{,}1\,m$ este plasat într-un câmp electric uniform de intensitate $E = 2\cdot 10^3 \frac{N}{C} \left(= \frac{V}{m}\right)$ la un unghi care face unghiul de 30° cu normala la suprafață.

(A) Care este fluxul electric ce străbate discul?



$$\phi_e = \int \vec{E}\, d\vec{s} = \int E\cdot\cos\theta\, ds = E\cos\theta \int ds$$

$$\phi_e = E\cos\theta\cdot \pi r^2 = 2\cdot 10^3 \frac{N}{C}\cdot \cos 30^\circ \cdot \pi\cdot (0{,}1\,m)^2$$

$$\Rightarrow \phi_e = 54\ \frac{N\cdot m^2}{C}$$

(B) Care este fluxul prin disc dacă acesta este rotit a.î. $d\vec{s} \parallel \vec{E}$?

• dacă $\vec{E} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \phi_e = \int \vec{E}\, d\vec{s} = \int E \cos 0\, ds = E\cdot S\cdot \cos 0^\circ \Rightarrow$

$\theta = 0 \quad \Rightarrow \phi_e = 2\cdot 10^3 \frac{N}{C}\cdot \pi\cdot (0{,}1\,m)^2 \cdot 1 \Rightarrow \phi_e = 63\ \frac{N m^2}{C}.$

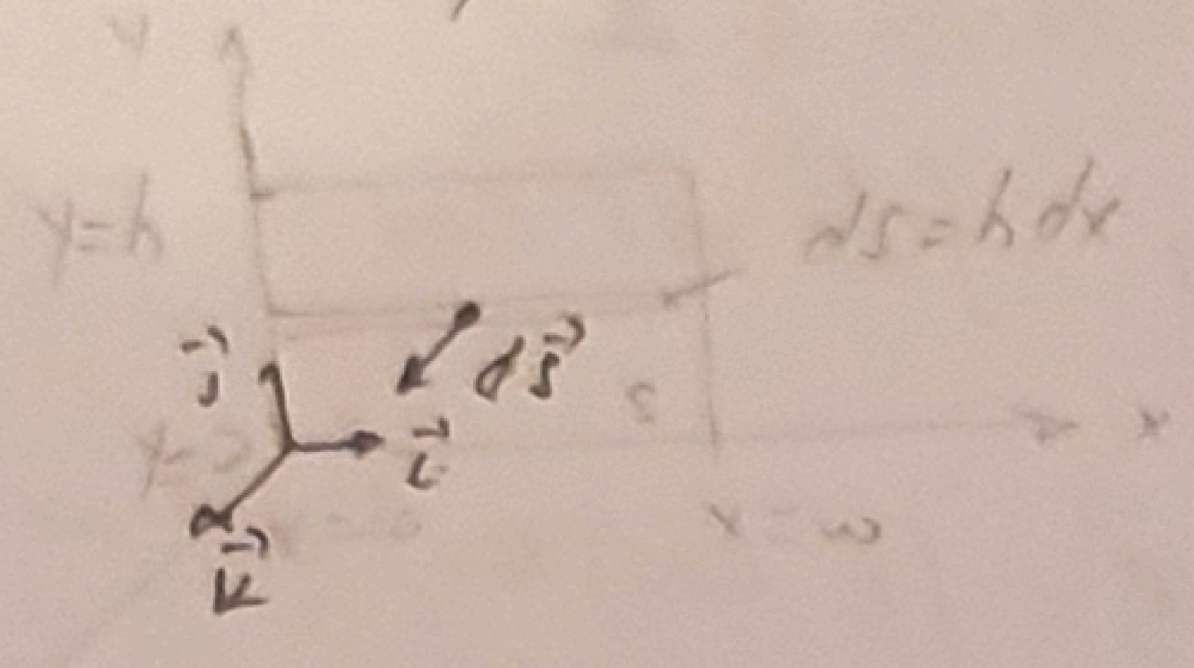
(C) Care este fluxul electric dacă discul este rotit a.î. $d\vec{s} \perp \vec{E}$?

• dacă $\vec{E} \perp ds \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \phi_e = 0.$

(24) Un câmp electric neuniform este descris de relația:

$$\vec{E} = ay\,\vec{i} + bz\,\vec{j} + cx\,\vec{k}$$

unde: a, b și c sunt constante. Să se determine fluxul electric printr-o suprafață dreptunghiulară plană xy care se întinde de la $x=0$ până la $x=w$ și de la $y=0$ până la $y=h$.



• în planul xy $\rightarrow z=0 \Rightarrow$

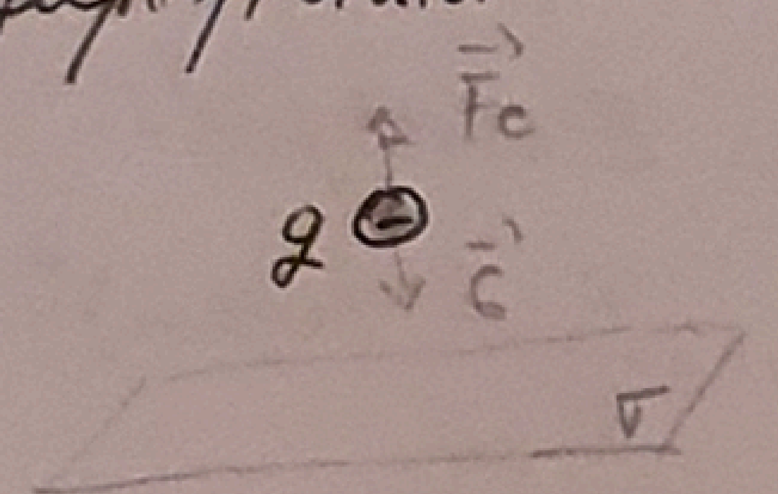
$$\Rightarrow \vec{E} = ay\,\vec{i} + cx\,\vec{k}$$

• $\Phi_e = \int \vec{E}\,d\vec{S} = \int (ay\,\vec{i} + cx\,\vec{k})\cdot(dS\cdot\vec{k}) = \int_0^h ay\,dS\,\vec{i}\cdot\vec{k} + \int_0^\omega cx\,dS\cdot\vec{k}\cdot\vec{k}.$

• cum $\begin{cases} \vec{k}\cdot\vec{k} = 0 \\ \vec{i}\cdot\vec{k} = 1 \end{cases} \Rightarrow \Phi_e = \int_0^\omega cx\,h\,dx = ch\int_0^\omega x\,dx = ch\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^\omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi_e = \frac{ch\,\omega^2}{2}$$

(25) O bucată de 10g de polistiren electrizat cu o sarcină de $-0{,}7\,\mu C$ este suspendată, în echilibru, deasupra unei suprafețe foarte mari din plastic, care are o densitate superficială de sarcină. Care este densitatea superficială de sarcină a suprafeței?



• la echilibru: $G = F_e \Rightarrow mg = qE = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}$

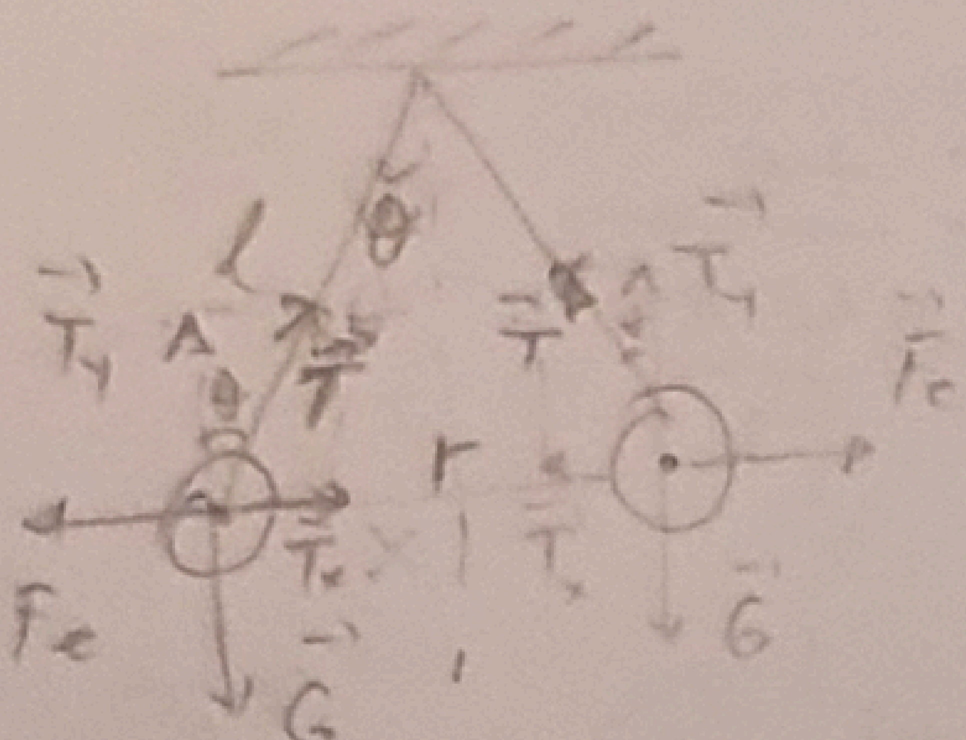
• densitatea superficială de sarcină: $\sigma = \frac{Q}{S}$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2\varepsilon_0 mg}{q} = \frac{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}\cdot 10\cdot 10^{-3}\,kg\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{|-0{,}7\cdot 10^{-6}\,C|}$$

$$\Rightarrow \sigma = 2{,}48\cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2} = 2{,}48\,\frac{\mu C}{m^2}$$

(26) Două baloane de cauciuc umplute cu aer și diametrul de 0,2 m fiecare sunt legate de două fire cu lungimi egale, în același punct. Baloanele sunt electrizate prin frecare cu o bucată de lână, astfel încât ele se vor depărta cu 0,05 m. Masa baloanelor este de 1g, iar unghiul făcut de fir cu verticala este de 10°.

(A) Care este valoarea forței de interacțiune dintre baloane?



- deoarece baloanele de cauciuc sunt electrizate cu același material se vor electriza identic, iar baloanele se vor respinge.

- $\begin{cases} Ox: T_x - F_e = 0 \\ Oy: T_y - G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\sin\theta = F_e \\ T\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_e = T\sin\theta \\ T = \dfrac{mg}{\cos\theta} \end{cases} \Rightarrow F_e = mg\,tg\,\theta = 10^{-3}kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\,tg\,10° \Rightarrow \underline{F_e = 2 \cdot 10^{-3} N}.$$

(B) Care este sarcina pe fiecare balon?

$$F_e = k_e\frac{q^2}{r^2} \Rightarrow q = r\sqrt{\frac{F_e}{k_e}} = 0{,}05m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3} N}{8{,}98 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = 0{,}237 \cdot 10^{-6} C = 237\,nC$$

(C) Care este intensitatea câmpului electric creat de fiecare balon în centrul celuilalt balon?

$$E = k_e\frac{q}{r^2} = \frac{8{,}98 \cdot 10^9 \frac{N\cancel{m^2}}{\cancel{C^2}} \cdot 237 \cdot 10^{-9} \cancel{C}}{0{,}25\,\cancel{m^2}} = 8{,}513\frac{kV}{m}$$

(D) Care este fluxul electric total al câmpului creat de fiecare balon?

- $\Phi_e = \dfrac{q}{\varepsilon_0} = \dfrac{237 \cdot 10^{-9} C}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}} \Rightarrow \Phi_e = 2{,}65 \cdot 10^5 \dfrac{Nm^2}{C}$

(27) Primul model al atomului a fost propus de J.J. Thomson care a considerat că sarcina pozitivă +e este uniform distribuită în volumul unei sfere de rază R, iar sarcina negativă −e în centrul acesteia.

(A) Utilizând legea lui Gauss arătați că electronul ar fi în echilibru în centrul sferei și că la deplasarea acestuia pe o distanță $r < R$, asupra acestuia se exercită o forță de revenire de forma $F = -kr$, unde k este o constantă.

• lg. Gauss: $\int \vec{E}\, dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

Aria sferei $S = 4\pi r^2$

$$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{+e}{\frac{4\pi R^3}{3}} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{+e}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{+e}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r$$ (orientat spre exteriorul sferei).

• $F_e = qE = -e\left(\frac{+e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) \cdot r = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r = -\underline{k}\, r.$

(B) Stabiliți o expresie pt. constanta k.

$$k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = k_e \frac{e^2}{R^3}$$

(C) Găsiți o expresie pentru frecvența mișcării oscilatorii a electronului de masă m_e la deplasarea acestuia pe distanțe mici ($< R$).

• $F = m_e \cdot a = -\frac{k e^2}{R^3} \cdot r \Rightarrow a = -\frac{k e^2}{m_e R^3} \cdot r$

• accelerația oscilatorului armonic: $a = -\omega^2 r$, $\omega = 2\pi \cdot \nu$

$$\Rightarrow \underline{\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_e e^2}{m_e R^3}}}$$

(D) Care este valoarea razei R ce corespunde unei frecvențe de $3{,}57 \cdot 10^{15}$ Hz, care reprezintă frecvența radiației liniei cea mai intense din spectrul hidrogenului.

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e \cdot e^2}{m_e \cdot R^3}} \Rightarrow R^3 = \frac{k_e \cdot e^2}{4\pi^2 \nu^2} \Rightarrow R^3 = 1{,}05 \cdot 10^{-30}\ m^3$$

$$\Rightarrow \underline{R = 1{,}02 \cdot 10^{-10}\ m}$$

(28) Un pozitron ($q_p = +e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$; $m_p = 9,1 \cdot 10^{-31}Kg$) se află în mișcare în jurul unei particule α ($q_\alpha = +2e = 3,2 \cdot 10^{-19}C$; $m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27}Kg$). Deoarece $m_\alpha \cong 7000 \cdot m_p$, putem presupune că particula α se află în repaus. Când se află la o distanță de $10^{-10}m$ față de particula α, viteza pozitronului este de $3,0 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$, depărtându-se de aceasta.

(A) Care este viteza pozitronului când se află la distanța de $2 \cdot 10^{-10}m$?

- legea de conservare a energiei: $E_{c_f} + E_{pf} = E_{c_i} + E_{pf} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m_p v_f^2}{2} + k\frac{q_p q_\alpha}{r_f} = \frac{m_p v_i^2}{2} + k\frac{q_p q_\alpha}{r_i} \Rightarrow$$

$$\frac{m_p v_f^2}{2} = \frac{m_p v_i^2}{2} + k\frac{q_p q_\alpha}{r_i} - \frac{k q_p q_\alpha}{r_f}$$

$$= \frac{9,1 \cdot 10^{-31}Kg \cdot (3 \cdot 10^6 \frac{m}{s})^2}{2} + 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{3,2 \cdot 10^{-19}C \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}C}{10^{-10}m} -$$

$$- 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{3,2 \cdot 10^{-19}C \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}C}{2 \cdot 10^{-10}m}$$

$$\Rightarrow \frac{m_p v_f^2}{2} = 4,1 \cdot 10^{-18}J + 4,61 \cdot 10^{-18}J - 2,3 \cdot 10^{-10}J = 6,41 \cdot 10^{-10}J$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,41 \cdot 10^{-10}J}{9,1 \cdot 10^{-31}Kg}} \Rightarrow \boxed{v_f = 3,8 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}$$

(B) Care este viteza pozitronului la o distanță foarte mare de particula α?

- la distanță mare $r_f \to \infty \Rightarrow E_{pf} = 0 \Rightarrow E_{cf} + 0 = E_{c_i} + E_{p_i}$

$$\Rightarrow E_{cf} = \frac{m v_f^2}{2} = 4,1 \cdot 10^{-18}J + 4,61 \cdot 10^{-18}J = 8,71 \cdot 10^{-18}J$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,71 \cdot 10^{-18}J}{9,1 \cdot 10^{-31}Kg}} \Rightarrow \boxed{v_f = 4,4 \cdot 10^6 \frac{m}{s^2}}$$

(C) Să se refacă calculele de la punctul (A) dacă particula este un electron ($q_e = -e$).

- deoarece $q_e = -e$, electronul este atras de particula α și viteza acestuia scade pe măsură ce se depărtează.

• deoarece substituim $+e \rightarrow -e$: $E_{p_i} = -4,61\cdot 10^{-18}\,J$.

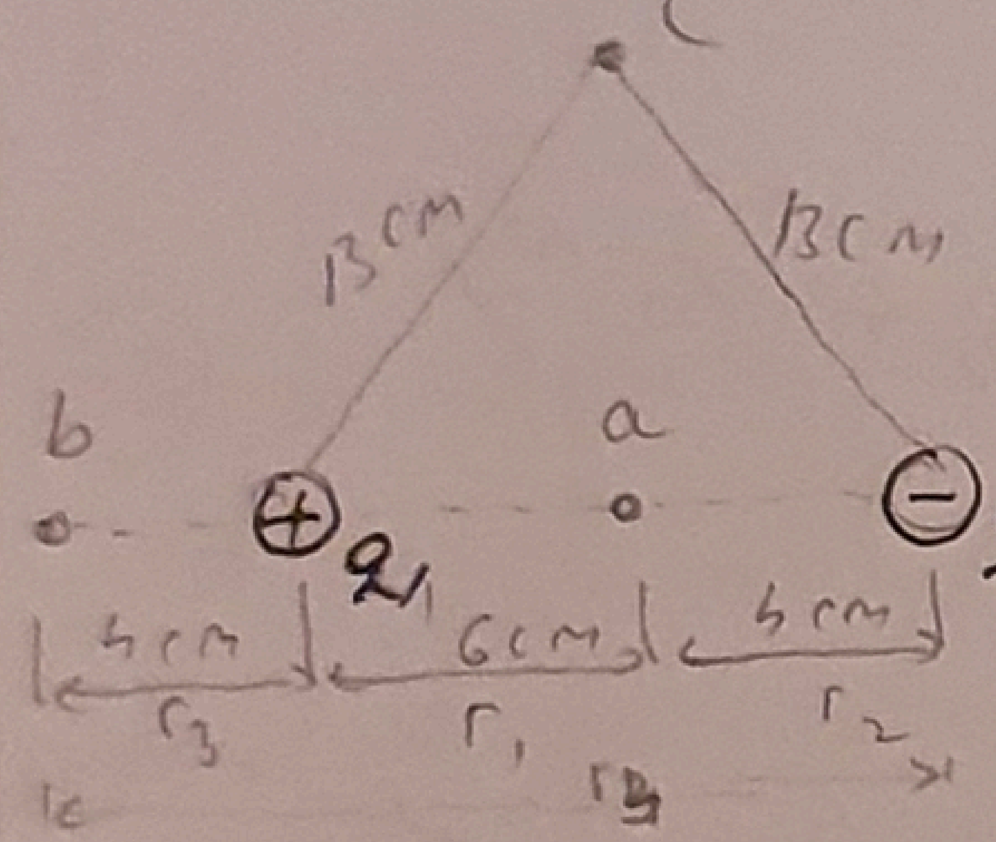
• $E_{c_f} + E_{p_f} = E_{c_i} + E_{p_i}$

$$\frac{mv_f^2}{2} + \underbrace{\frac{k\, q_e\, q_\alpha}{r_f}}_{= E_{p_f} = -2,3\cdot 10^{-18}\,J} = \frac{mv_i^2}{2} + E_{p_i} \Rightarrow \frac{mv_f^2}{2} = \underbrace{\frac{mv_i^2}{2}}_{=4,1\cdot 10^{-18}\,J} + E_{p_i} - E_{p_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_f^2}{2} = 4,1\cdot 10^{-18}\,J + (-4,61\cdot 10^{-18}\,J) - (-2,3\cdot 10^{-18}\,J) = 1,79\cdot 10^{-18}\,J$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\cdot 1,79\cdot 10^{-18}\,J}{m}} \Rightarrow \boxed{v_f = 2\cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}} < v_i\ !$$

(29) Un dipol electric format din sarcinile $q_1 = 12\,nC$ și $q_2 = -12\,nC$, plasate la o distanță de 10 cm una de alta. Să se determine potențialul electric în punctele a, b și c din figură.



• în punctul a: $V_A = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2}$

$$\Rightarrow V_A = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{12\cdot 10^{-9}\,C}{6\cdot 10^{-2}\,m} + 9\cdot 10^9\cdot\frac{-12\cdot 10^{-9}\,C}{4\cdot 10^{-2}\,m}$$

$$\Rightarrow V_A = -900\,V$$

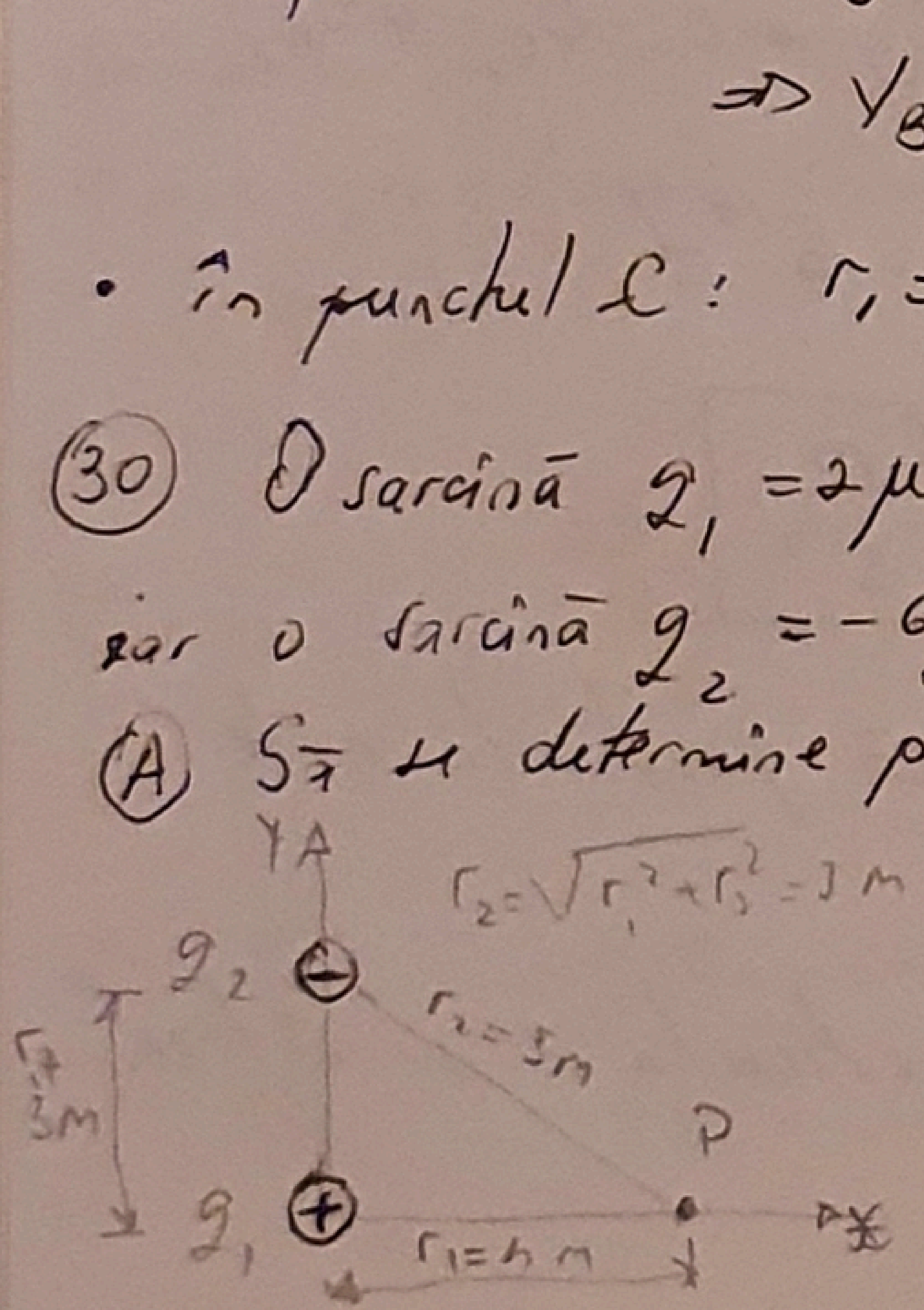
• în punctul b: $V_B = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right) = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{12\cdot 10^{-9}\,C}{4\cdot 10^{-2}\,m} + \frac{(-12\cdot 10^{-9}\,C)}{14\cdot 10^{-2}\,m}\right)$

$$\Rightarrow V_B = 1930\,V$$

• în punctul c: $r_1 = r_2 \Rightarrow V_c = k_e\left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_1}\right) \Rightarrow V_c = 0$

(30) O sarcină $q_1 = 2\,\mu C$ este localizată în originea unui sistem de coordonate, iar o sarcină $q_2 = -6\,\mu C$ este localizată la 3 m în lungul axei Oy.

(A) Să se determine potențialul electric într-un punct de coordonate (4 m, 0 m).



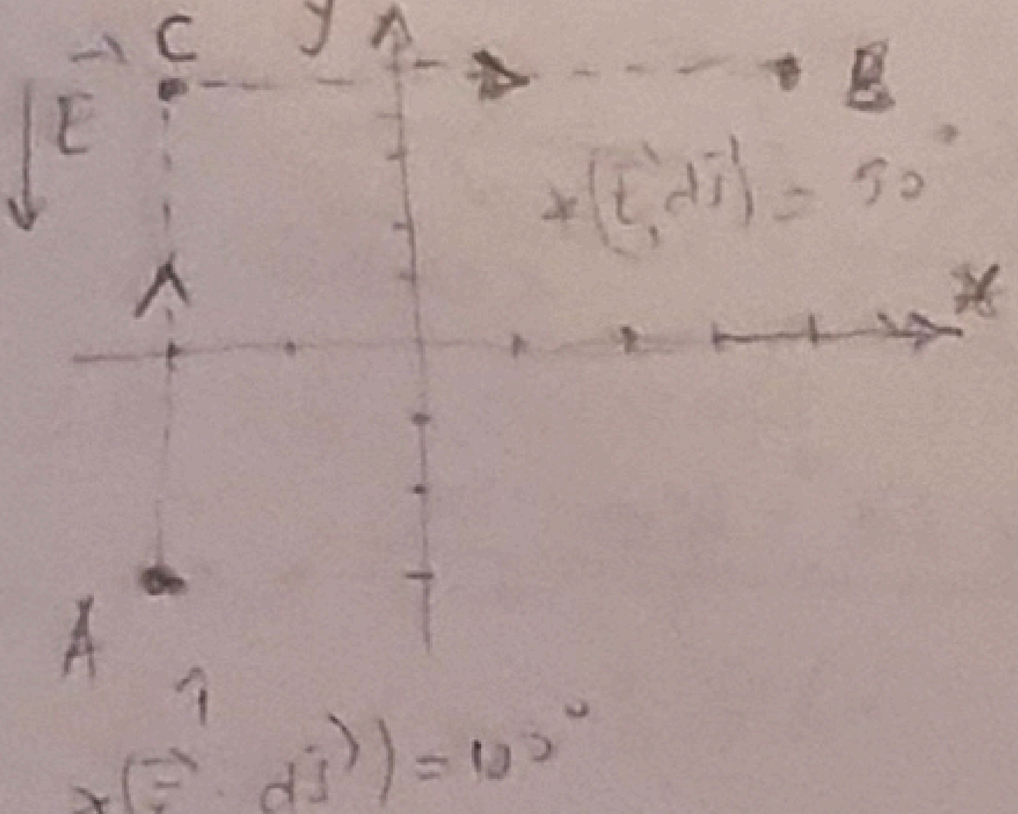
$$V_P = k_e\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{2\cdot 10^{-6}\,C}{4\,m} + \frac{-6\cdot 10^{-6}\,C}{5\,m}\right)$$

$$\Rightarrow V_P = -6,29\cdot 10^3\,V.$$

(B) Determinați variația de energie potențială electrică a sistemului de sarcini atunci când în sistem este adusă o sarcină $q_3 = 3\mu C$ care se deplasează de la infinit în punctul P.

- inițial q_3 se află la infinit $\Rightarrow E_{p_i} = 0$
- $\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = q_3 V_P - 0 = 3\cdot 10^{-6} C \cdot (-6,29\cdot 10^{3} V) = -1,89 \cdot 10^{-2} J$.

(31) Un câmp electric uniform cu intensitatea $E = 325 \frac{V}{m}$ este orientat în sensul negativ al axei oy. Coordonatele a două puncte sunt: $A(-0,2; -0,3)$ m și $B(0,4; 0,5)$ m. Să se determine diferența de potențial $V_B - V_A$ în lungul liniei punctate din figură.

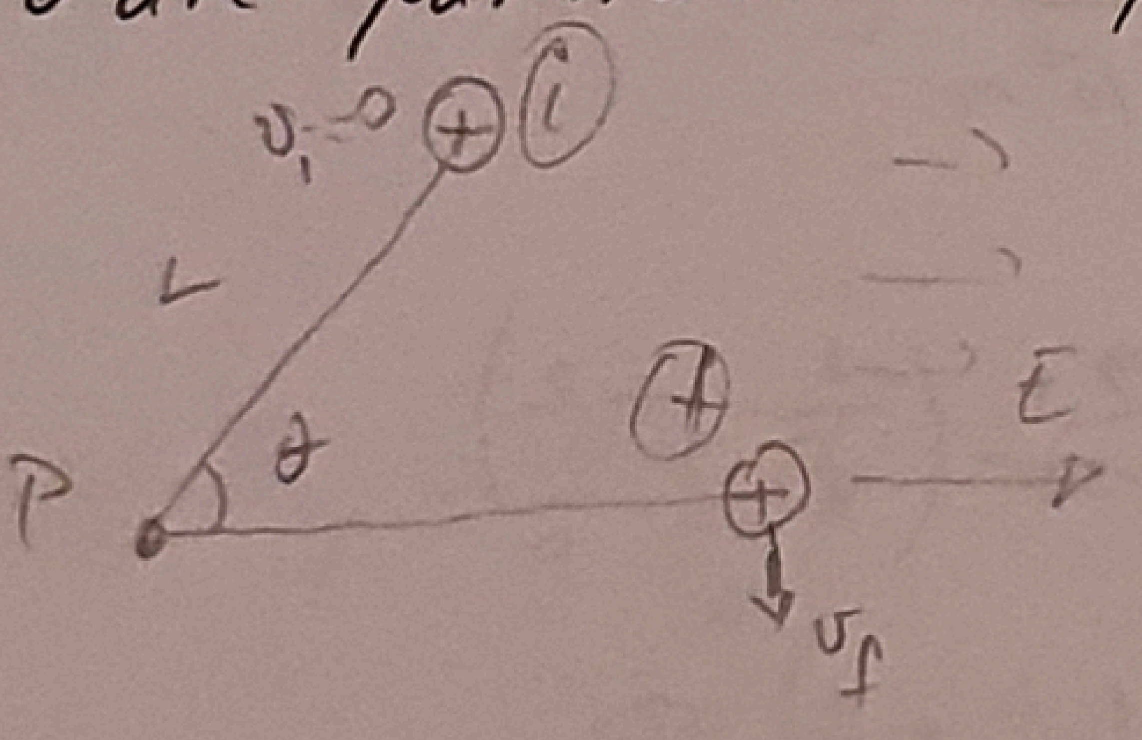


$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} = -\int_A^C \vec{E}\, d\vec{s} - \int_C^B \vec{E}\, d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = -E\cos 180° \int_{-0,3}^{0,5} dy - E\cos 90° \int_{-0,2}^{0,4} dx$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = 325 \frac{V}{m} \cdot 0,8\, m = 260 V.$$

(32) O particulă cu sarcina $q = 2\mu C$ și masa $m = 0,01$ kg este legată de un fir cu lungimea $L = 1,5$ m, legat într-un punct P. Particula și firul se pot mișca fără frecare pe o suprafață orizontală. Particula pleacă din repaus când direcția ~~dintre~~ unghiul dintre direcția firului și cea a câmpului aplicat este $\theta = 60°$. Dacă intensitatea câmpului aplicat este $E = 300 \frac{V}{m}$, să se determine viteza pe care o are particula când firul este paralel cu direcția câmpului.



- lg. de conservare a energiei:

$$E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_f} + E_{p_i} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} E_p &= qU \\ U &= -\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = -E\cdot L\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

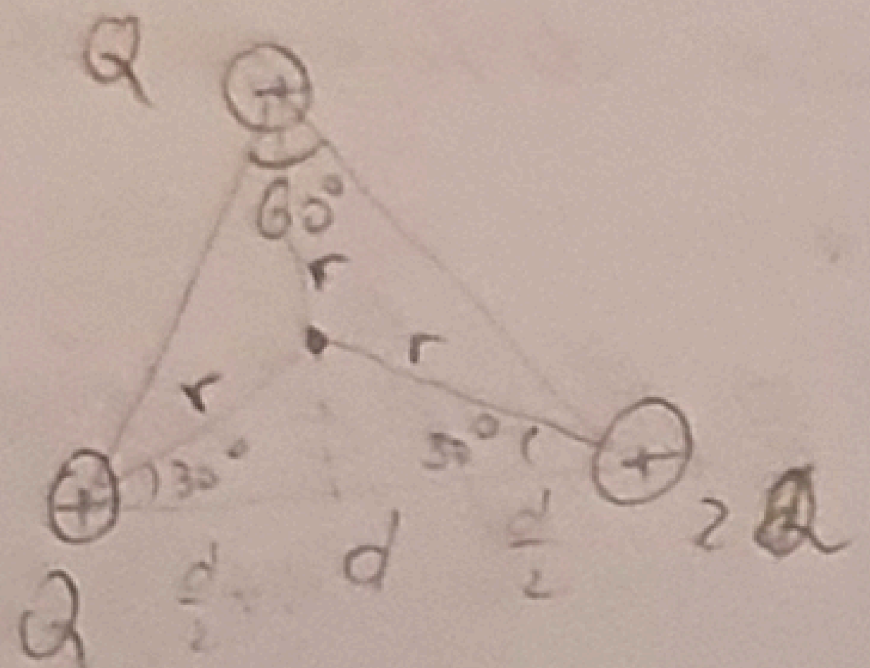
$$\Rightarrow \begin{cases} E_{p_i} = -qEL\cos\theta = -qEL\cos 60° \\ E_{pf} = -qEL\cos\theta = -qEL\cos 0° = -qEL \end{cases} \quad (2)$$

• din (1) și (2) ⇒ $0 - qEL\cos\theta = \frac{mv_f^2}{2} - qEL$ ⇒

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2qEL(1-\cos\theta)}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 10^{-6}C\cdot 300\frac{V}{m}\cdot 1{,}5\,m\,(1-\cos 60^\circ)}{0{,}01\ kg}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_f = 0{,}3\ \frac{m}{s}$$

(33) Trei sarcini pozitive $q_1 = q_2 = Q = 1\mu C$ și $q_3 = 2Q$ se află în colțurile unui triunghi echilateral. Să se determine expresia potențialului electric în centrul triunghiului, cu latura de 0,2 m.



• $V = k_e \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}$

• din triunghi: $\cos 30^\circ = \frac{\frac{d}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{d}{2\cos 30^\circ}$

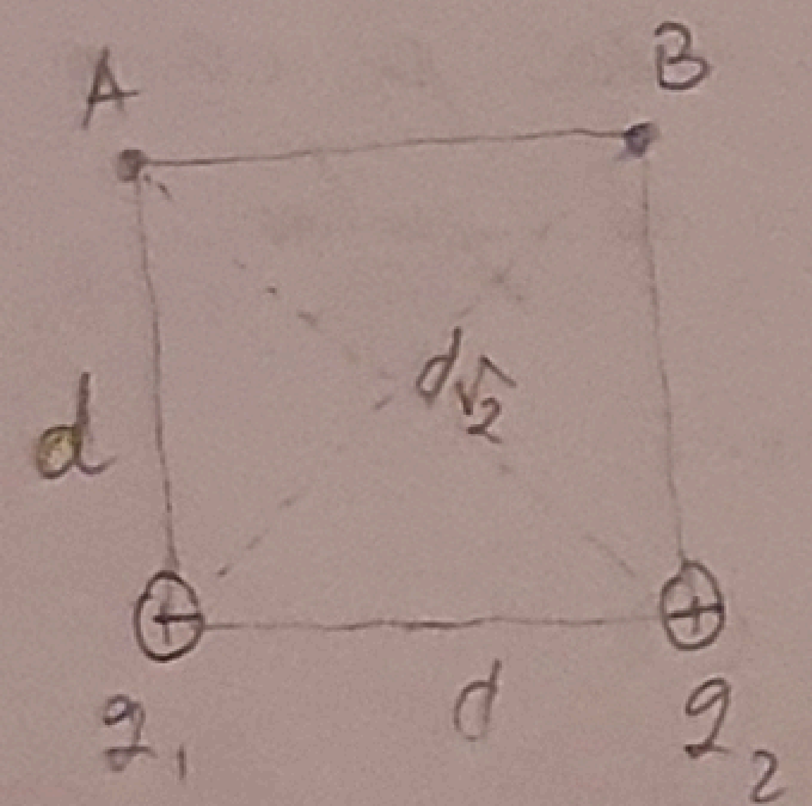
$$\Rightarrow V = k_e\left(\frac{Q}{\frac{d}{2\cos 30^\circ}} + \frac{Q}{\frac{d}{2\cos 30^\circ}} + \frac{2Q}{\frac{d}{2\cos 30^\circ}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{2\cos 30^\circ}{d}\cdot k_e\cdot Q\,(1+1+2) = 8\,\frac{\cos 30^\circ\cdot k_e\cdot Q}{d}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 10^{-6}C}{0{,}2\ m} = 3{,}11\cdot 10^5\ V.$$

(34) Două sarcini pozitive $q_1 = 5nC$ și $q_2 = 2q_1$ sunt separate de o distanță $d = 2cm$, și se găsesc în colțurile unui pătrat, ca în figură.

(A) Determinați potențialul electric în punctele A și B.



• $V_A = k_e\left(\frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{d\sqrt{2}}\right) = k_e\left(\frac{q_1}{d} + \frac{2q_1}{d\sqrt{2}}\right) = \frac{k_e q_1}{d}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Rightarrow V_A = 8{,}98\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 5\cdot 10^{-9}C\,\frac{1}{2\cdot 10^{-2}m}\,(1+\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \boxed{V_A = 5{,}43\ KV}$$

• $V_B = k_e\left(\frac{q_1}{d\sqrt{2}} + \frac{2q_1}{d}\right) = \frac{k_e q_1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\right)$

$$\Rightarrow V_B = \frac{8{,}98\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 5\cdot 10^{-9}\,C}{2\cdot 10^{-2}\,m}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_B = 6{,}08\ KV}$$

(B) Să se determine diferența de potențial dintre punctele B și A.

- $U = V_B - V_A = k_e \frac{Q}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\right) - k_e \frac{Q}{d}\left(1+\sqrt{2}\right) = k_e \frac{Q}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow U = V_B - V_A = 8{,}98 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9} C}{2 \cdot 10^{-2} m}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{U = V_B - V_A = 658\,V}$

(35) Două sarcini identice q sunt legate la capetele unui resort și de masă neglijabilă. Cele două sarcini sunt menținute în repaus la distanța d una de alta, după care sunt eliberate în același timp. Sistemul oscilează pe o suprafață orizontală, fără frecare, oscilațiile fiind amortizate. Mișcarea oscilatorie încetează când particulele se află la distanța $3d$ una de alta. Considerând sistemul particule-resort ca fiind unul izolat, determinați creșterea energiei potențiale a resortului în timpul oscilațiilor.

- în starea finală se atinge starea de echilibru:

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow -2d \cdot k_{resort} + \frac{k_e q^2}{(3d)^2} = 0 \Rightarrow k_{resort} = \frac{k_e q^2}{18 d^3}$$

- legea de conservare a energiei

$$\underline{\Delta E_p + \Delta U_{int} = 0} \quad (1) \quad ; \quad \Delta E_p = E_{pf} - E_{pi}$$

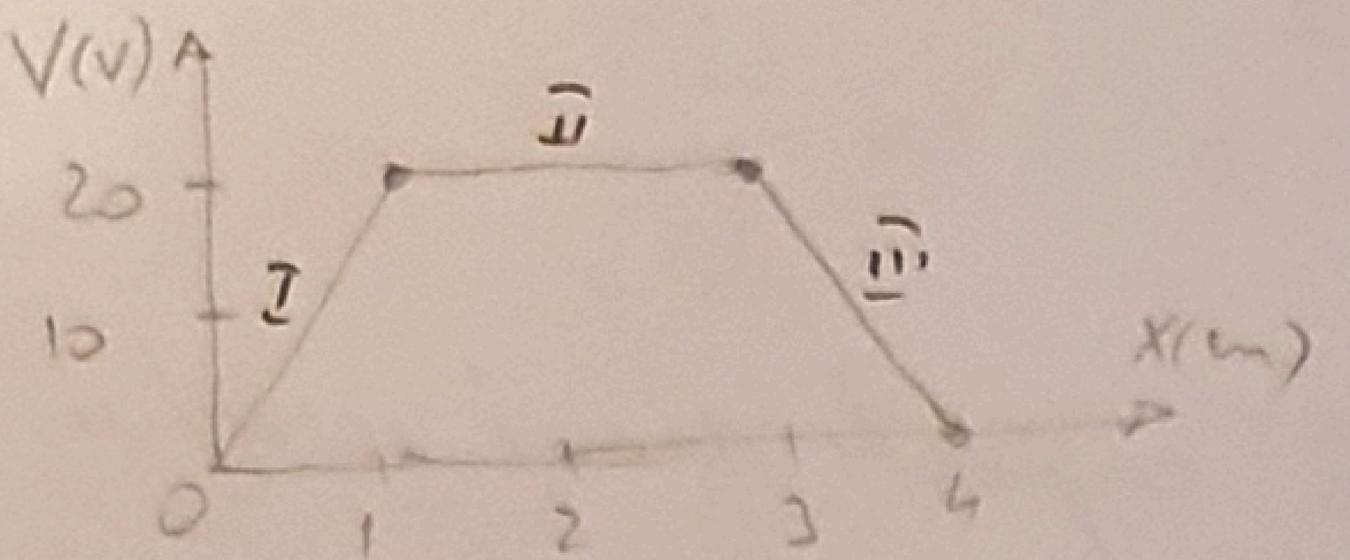
- în starea finală: $E_{ci} + E_{pi} = \underset{=0}{E_{cf}} + E_{pf}$

$$qV + \frac{k_e x^2}{2} = E_{pf} \Rightarrow E_{pf} = q \cdot \frac{k_e q}{3d} + \frac{1}{2} \frac{k_e q^2}{18 d^3} \cdot (2d)^2$$

$\Rightarrow E_{pf} = \frac{4}{9} \frac{k_e q^2}{d} \quad (2)$

. din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{4}{9} \frac{k_e q^2}{d} - \frac{k_e q^2}{d} + \Delta U_{int} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta U_{int} = \frac{5}{9} \frac{k_e q^2}{d}}$

(36) În figură este reprezentat potențialul electric dintr-o regiune a spațiului, în funcție de poziție, câmpul electric fiind paralel cu axa OX. Să se realizeze graficul dependenței câmpului electric din regiunea respectivă în funcție de poziție.

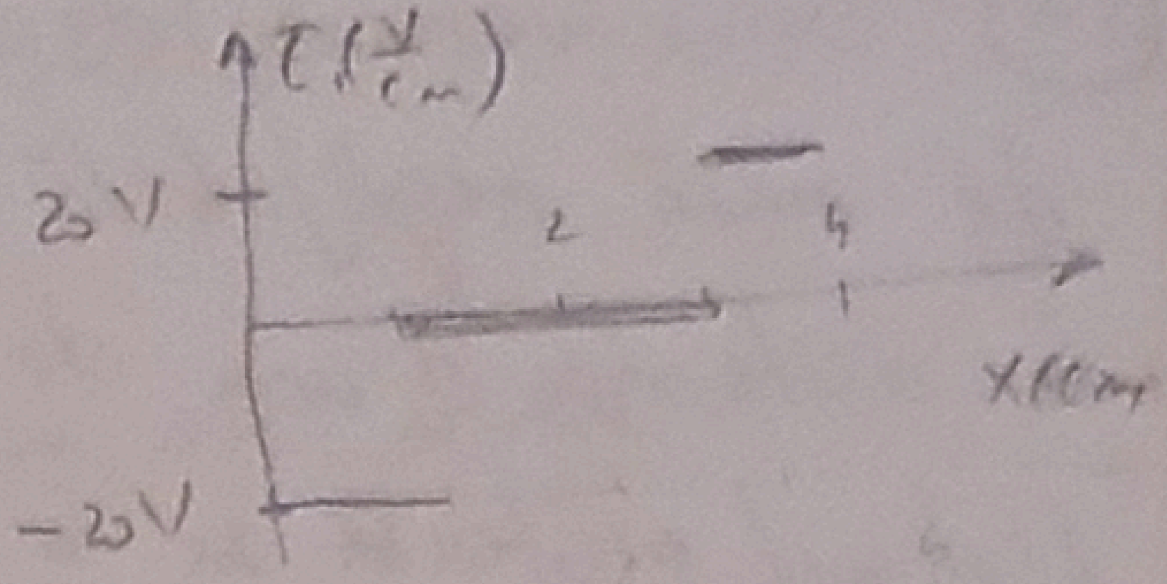


$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \rightarrow E_x = -\frac{V}{\Delta x} = -\frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

• pt. zona I: $E_x = \frac{-\Delta V}{\Delta x} = \frac{20V - 0V}{1cm} = -20\ \frac{V}{cm}$

• pt. zona II: $E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{0}{2cm} = 0\ \frac{V}{cm}$

• zona III: $E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{0V - 20V}{1cm} = 20\ \frac{V}{cm}$



(37) Într-o anumită regiune a spațiului potențialul electric este descris de relația: $V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$. (V) $[x, y, z] \rightarrow m$

(A) Deduceți relațiile componentelor intensității câmpului electric din această regiune și a intensității totale a câmpului.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -5 + 6xy$$

$$E_y = \frac{-\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 2z^2 \Rightarrow$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -4yz$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

$$\vec{E} = (-5 + 6xy)\vec{i} + (3x^2 - 2z^2)\vec{j} - 4yz\vec{k}$$

(B) Care este valoarea intensității câmpului electric într-un punct de coordonate (1; 0, -2) m?

$(x; y; z) \rightarrow (1; 0; -2)$ (m)

• $E_x = -5 + (6 \cdot 1 \cdot 0) = -5\ \frac{V}{m}$

• $E_y = 3 \cdot 1^2 - 2(-2)^2 = -5\ \frac{V}{m}$

• $E_z = -4 \cdot 0 \cdot (-2) = 0\ \frac{V}{m}$

$\Rightarrow E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$

$\Rightarrow E = 7{,}07\ \frac{V}{m}.$

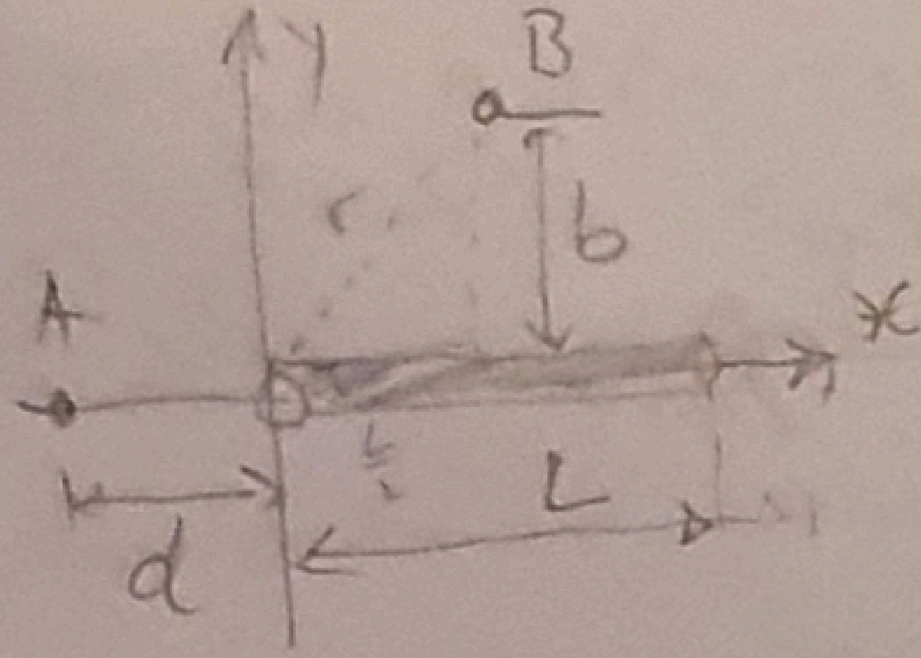
(38) O bară de lungime L este orientată în lungul axei OX și este încărcată cu o densitate neuniformă de sarcină liniară $\lambda = \alpha x$, unde α este o constantă pozitivă.

(A) Care este unitatea de măsură a constantei α?

• $[\lambda]_{SI} = \frac{[Q]_{SI}}{[x]_{SI}} \Rightarrow [\lambda]_{SI} = 1\,\frac{C}{m}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{x} \Rightarrow [\alpha]_{SI} = 1\,\frac{C}{m^2}$

(B) Să se determine potențialul electric în punctul A situat la distanța d, în stânga barei.



• pt. un element de lungime dx putem scrie:

$$\lambda\, dx = (\alpha x)\, dx$$

• potențialul creat în punctul A creat de acest element este:

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\alpha x\, dx}{d+x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int dV = \int_0^L k_e \frac{\alpha x}{d+x}\, dx$$

• facem schimbarea de variabilă: $u = d+x \Rightarrow du = dx$

• la $x=0 \Rightarrow u = d$

la $x = L \Rightarrow u = d+L$ $\Rightarrow V = \int_d^{d+L} k_e \frac{\alpha(u-d)}{u}\, du \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = k_e\alpha \int_d^{d+L} \frac{u}{u}\, du - k_e\alpha \int_d^{d+L} \frac{d}{u}\, du \Rightarrow V = k_e\alpha\, u\Big|_d^{d+L} - k_e\alpha d \ln u\Big|_d^{d+L}$$

$$\Rightarrow V = k_e\alpha\left[L - d\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)\right].$$

(C) Să se determine potențialul electric în punctul B situat la distanța b pe bisectoarea perpendiculară pe bară.

• $V = \int k_e \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{\alpha x\, dx}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}}$

• facem schimbarea de variabilă: $z = \frac{L}{2} - x \Rightarrow x = \frac{L}{2} - z \Rightarrow dx = -dz$

$$\Rightarrow V = k_e \alpha \int \frac{\left(\frac{L}{2}-z\right)(-dz)}{\sqrt{b^2+z^2}} = -\frac{k_e \alpha L}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{b^2+z^2}} + k_e \alpha \int \frac{z\,dz}{\sqrt{b^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{k_e \alpha L}{2} \cdot \ln\left(z+\sqrt{b^2+z^2}\right) + k\alpha \sqrt{b^2+z^2}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{k_e \alpha L}{2} \ln\left[\left(\frac{L}{2}-x\right)+\sqrt{b^2+\left(\frac{L}{2}-x\right)^2}\right]\Bigg|_0^L + k_e \alpha \sqrt{b^2+\left(\frac{L}{2}-x\right)^2}\Bigg|_0^L$$

$$\Rightarrow V = -\frac{k_e \alpha L}{2} \ln\left[\frac{\frac{L}{2}-L+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+b^2}}{\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+b^2}}\right] + k_e \alpha \left[\sqrt{\left(\frac{L}{2}-L\right)^2+b^2} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+b^2}\right]$$

$$\Rightarrow V = -\frac{k_e \alpha L}{2} \cdot \ln\left[\frac{\sqrt{b^2+\frac{L^2}{4}}-\frac{L}{2}}{\sqrt{b^2+\frac{L^2}{4}}+\frac{L}{2}}\right]$$

(40) Armăturile unui condensator plan au aria de 2 m² și sunt plasate în vid, la o distanță de 5 mm una de alta. Între cele două armături se aplică o diferență de potențial de 10 kV.

(A) Ce valoare au capacitatea și sarcina de pe fiecare armătură?

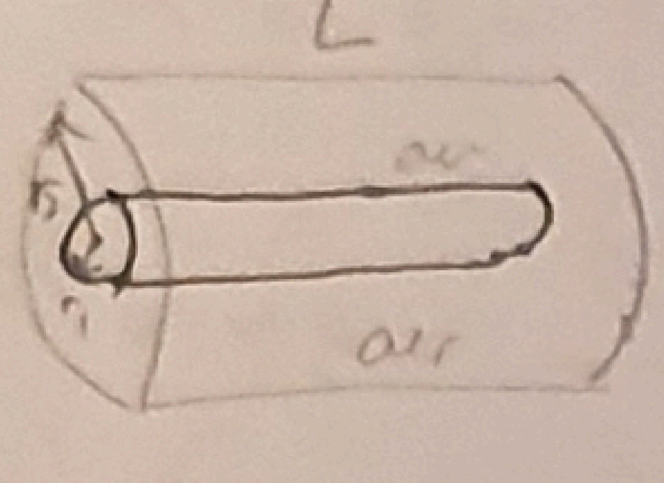
- $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot \frac{2\,m^2}{5 \cdot 10^{-3}\,m} \Rightarrow C = 3{,}54 \cdot 10^{-9} F = 3{,}54\,nF$
- $C = \frac{Q}{U} \Rightarrow Q = C \cdot U = 3{,}54 \cdot 10^{-9} F \cdot 10 \cdot 10^3 V = 3{,}54 \cdot 10^{-5} C = 35{,}4\,\mu C$

(B) Care este intensitatea câmpului electric dintre armături?

- $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{3{,}54 \cdot 10^{-5} C}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 2\,m^2} \Rightarrow E = 2 \cdot 10^6 \frac{V}{m} \left(\frac{N}{C}\right)$
- sau: $U = E\,d \Rightarrow E = \frac{U}{d} = \frac{10 \cdot 10^3 V}{5 \cdot 10^{-3} m} \Rightarrow E = 2 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$

(41) Un condensator cilindric format dintr-un conductor interior cu raza de 0,25 cm, înconjurat de un alt conductor. Între aceste două conductoare se află aer, lungimea condensatorului fiind de 12 cm, iar capacitatea acestuia este de 36,7 pF.

(A) Care este raza conductorului exterior?



• pt. condensatorul cilindric: $C = \dfrac{2\pi \varepsilon_0 L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{2\pi \varepsilon_0 L}{C} \Rightarrow r_2 = r_1 \cdot \exp\left[\dfrac{2\pi \varepsilon_0 L}{C}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 = 0{,}25\ cm \cdot \exp\left[\dfrac{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 12 \cdot 10^{-2}\ m}{36{,}7 \cdot 10^{-12}\ F}\right]$

$\Rightarrow r_2 = 0{,}25\ cm \cdot \exp[0{,}182] \Rightarrow \boxed{r_2 = 0{,}3\ cm} = 3 \cdot 10^{-3}\ m$

(B) Dacă condensatorul este încărcat la o tensiune de 125 V, care este densitatea de sarcină liniară a condensatorului?

• $\lambda = \dfrac{Q}{L} = \dfrac{C \cdot U}{L} = \dfrac{36{,}7 \cdot 10^{-12}\ F \cdot 125\ V}{12 \cdot 10^{-2}\ m} \Rightarrow \boxed{\lambda = 3{,}82 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m} = 38{,}2 \frac{nC}{m}}$

(42) Un condensator sferic este încărcat cu o sarcină de 3,3 nC când este alimentat la o tensiune de 220 V. Între armăturile condensatorului este vid, iar raza sferei exterioare este de 4 cm.

(A) Care este raza sferei interioare?

• capacitatea condensatorului sferic: $C = 4\pi \varepsilon_0 \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$, $C = \dfrac{Q}{U}$ $\Rightarrow \dfrac{Q}{U} = 4\pi \varepsilon_0 \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (r_2 - r_1) Q = 4\pi \varepsilon_0 U r_1 r_2 \Rightarrow Q r_2 - Q r_1 = 4\pi \varepsilon_0 U r_1 r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q r_2 = Q r_1 + 4\pi \varepsilon_0 U r_1 r_2 \Rightarrow r_1 = \dfrac{Q r_2}{Q + 4\pi \varepsilon_0 U \cdot r_2} \Rightarrow$

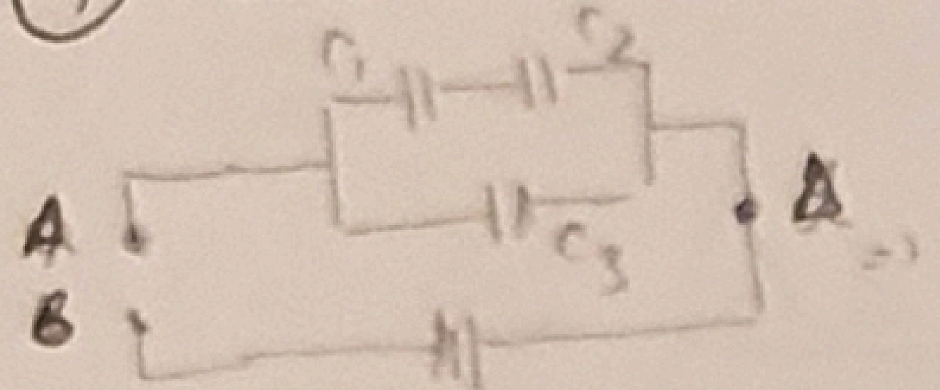
$\Rightarrow r_1 = \dfrac{3{,}3 \cdot 10^{-9}\ C \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ m}{3{,}3 \cdot 10^{-9}\ C + 4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 220\ V \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ m} \Rightarrow \boxed{r_1 = 3{,}09 \cdot 10^{-2}\ m}$

(B) Ce valoare are intensitatea câmpului electric în exteriorul sferei interioare?

• $E = \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r_1^2} = k \dfrac{Q}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{N m^2}{C^2} \cdot \dfrac{3{,}3 \cdot 10^{-9}\ C}{(3{,}09 \cdot 10^{-2}\ m)^2} \Rightarrow \boxed{E = 3{,}12 \cdot 10^4 \frac{V}{m}}$

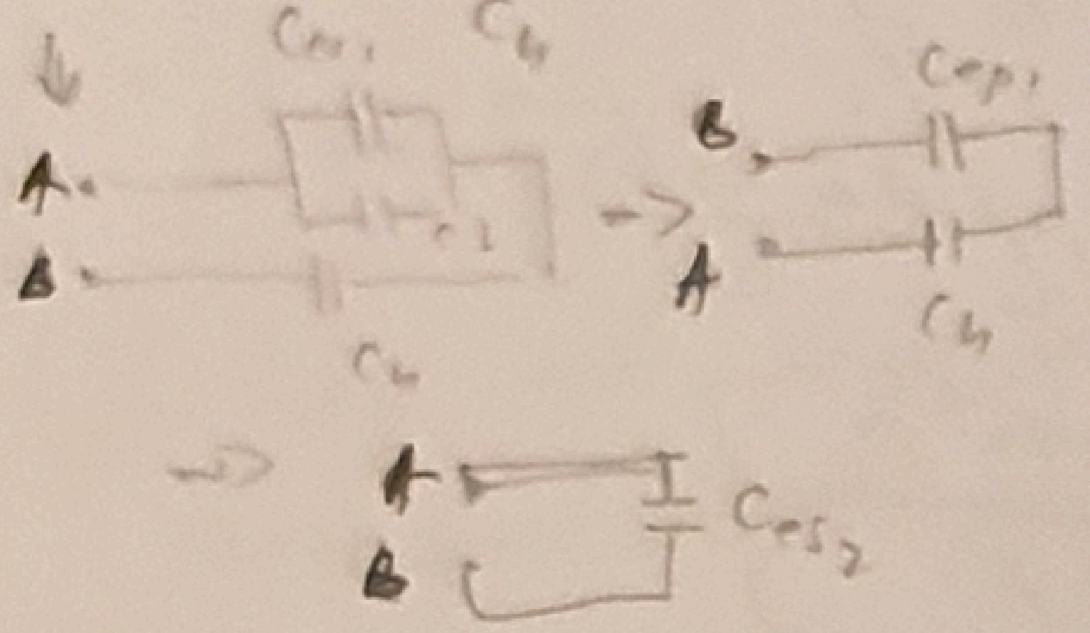
(43) Condensatoarele din fig. au o capacitate de $4\mu F$. La bornele grupării se aplică o tensiune de $28V$.

(A) Care este sarcina pe fiecare condensator și capacitatea echivalentă?



- $C_{es_1} = \dfrac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{4 \cdot 10^{-6}F \cdot 4 \cdot 10^{-6}F}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-6}F} = 2 \cdot 10^{-6}F$

- $C_{ep_1} = C_{es_1} + C_3 = 2 \cdot 10^{-6}F + 4 \cdot 10^{-6}F = 6 \cdot 10^{-6}F$



- $C_{es_2} = \dfrac{C_{ep_1} \cdot C_4}{C_{ep_1} + C_4} = \dfrac{6 \cdot 10^{-6}F \cdot 4 \cdot 10^{-6}F}{6 \cdot 10^{-6}F + 4 \cdot 10^{-6}F} = 2{,}4 \cdot 10^{-6}F$

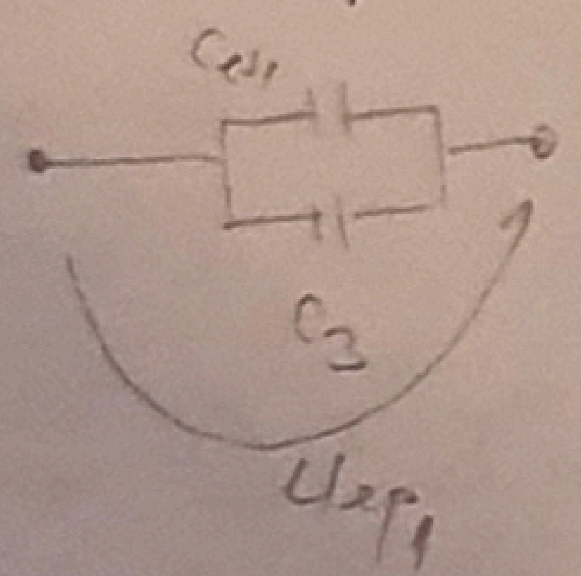
- $V_{AB} = 28V \Rightarrow Q_{es_2} = C_{es_2} \cdot V_{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow Q_{es_2} = 2{,}4 \cdot 10^{-6}F \cdot 28V \Rightarrow Q_{es_2} = 67{,}2 \cdot 10^{-6}C = 67{,}2\mu C$

- $Q_{es_1} = Q_4 = Q_{ep_1} = 67{,}2\mu C$ (• sarcina este aceeași pt. condensatoarele legate în serie).

- $C_4 = \dfrac{Q_4}{U_4} \Rightarrow V_4 = \dfrac{Q_4}{C_4} = \dfrac{67{,}2\mu C}{4\mu C} \Rightarrow U_4 = 16{,}8V$

- $C_{ep_1} = \dfrac{Q_{ep_1}}{U_{ep_1}} \Rightarrow U_{ep_1} = \dfrac{Q_{ep_1}}{C_{ep_1}} \Rightarrow U_{ep_1} = \dfrac{67{,}2\mu C}{6\mu C} \Rightarrow U_{ep_1} = 11{,}2V.$



- $C_3 = \dfrac{Q_3}{U_3}$
- $U_3 = U_{ep_1}$

$\Rightarrow Q_3 = C_3 \cdot U_{ep_1} = 44{,}8\mu C$

- $C_{es_1} = \dfrac{Q_{es_1}}{U_{ep_1}} \Rightarrow Q_{es_1} = C_{es_1} \cdot U_{ep_1} = 2 \cdot 10^{-6}F \cdot 11{,}2V = 22{,}4\mu F$

$\Rightarrow Q_{es_1} = Q_1 = Q = 22{,}4\mu F$ (cond. legate în serie au aceeași sarcină Q).

$\Rightarrow U_1 = \dfrac{Q_1}{C_1} = 5{,}6V$; $U_2 = \dfrac{Q_2}{C_2} = 5{,}6V$

(B) Care este diferența de potențial între punctele A și Δ.

- din fig $\Rightarrow U_{AΔ} = U_{ep_1} = 11{,}2V.$

(44) Un condensator plan care are între armături distanța de 1,5 mm aer, este încărcat cu o sarcină de 0,018 μC la o diferență de potențial de 200 V.

(A) Care este aria fiecărei armături?

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} \\ \cdot\ C = \dfrac{Q}{U} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \Rightarrow S = \frac{Q d}{\varepsilon U} = \frac{0{,}018\cdot 10^{-6}C \cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}m}{8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{F}{m}\cdot 200V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 0{,}0152\ m^2} = 152\ cm^2$$

(B) Care este tensiunea maximă care poate fi aplicată fără a apare fenomenul de străpungere a dielectricului (aerului)?

- $U = E \cdot d$
- în aer $E = 3\cdot 10^{6}\ \frac{V}{m}$ - intensit. c.e. la care apare străpungerea dielectricului
- $U = 3\cdot 10^{6}\ \frac{V}{m} \cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}\ m \Rightarrow \boxed{U = 4{,}5\cdot 10^{3}\ V}$

(C) Care este energia stocată de condensator?

$$E_{pe} = \frac{QU}{2}\left(= \frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{0{,}018\cdot 10^{-6}C \cdot 220V}{2} = 1{,}8\cdot 10^{-6}\ J = \boxed{1{,}8\ \mu J}$$

(45) Un condensator plan, între armăturile căruia este vid, are aria armăturilor S și distanța dintre acestea x. Pe armături sunt sarcinile +Q și -Q. Condensatorul este deconectat de la sursa de tensiune, a.î. sarcina de pe armături rămâne constantă.

(A) Care este energia totală stocată de condensator?

$$\cdot\ C = \frac{\varepsilon_0 S}{x} \Rightarrow E_{pe} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{x Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

(B) Dacă armăturile sunt deplasate pe o distanță adițională dx, care este modificarea în energia stocată?

- La deplasare tensiunea devine: $E_{pe} = \dfrac{(x+dx)Q^2}{2\varepsilon_0 S}$

$$\Rightarrow dE_{pe} = \frac{(x+dx)Q^2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{xQ^2}{2\varepsilon_0 S} \Rightarrow dE_{pe} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}dx.$$

(C) Care este forța de atracție dintre armături?

- $L = F\cdot dx = \Delta E_{pe} \Rightarrow F = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$

46. Anumite celule din corpul uman au la partea interioară un strat de sarcină negativă, iar la partea exterioară un strat de sarcină pozitivă, egală ca valoare. Densitatea superficială de sarcină pe fiecare suprafață este de $\sigma = \pm 0{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{C}{m^2}$, grosimea pereților celulei este de 5 nm, și se află în aer.

A) Care este intensitatea câmpului electric dintre cele două straturi superficiale de sarcină?

$$E = \frac{Q}{\varepsilon S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \frac{C}{m^2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}} \Rightarrow \boxed{E = 5{,}6 \cdot 10^{7} \frac{V}{m}}$$

B) Care este diferența de potențial dintre pereții celulei?

$$U = E \cdot d = 5{,}6 \cdot 10^{7} \frac{V}{m} \cdot 5 \cdot 10^{-9} m \Rightarrow \boxed{U = 0{,}28 V}$$

C) Presupunând că celula este o sferă, având volumul $V_c = 10^{-16} m^3$, să se determine energia electrică stocată în pereții celulei.

- $V_c = \frac{4\pi R_c^3}{3} \Rightarrow R_c = \sqrt[3]{\frac{3V_c}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-16} m^3}{4\pi}} \Rightarrow R_c = 2{,}9 \cdot 10^{-6} m$
- volumul pereților: $V_p = S \cdot h = 4\pi R^2 \cdot h = 4\pi \cdot (2{,}9 \cdot 10^{-6} m)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-9} m \Rightarrow$

h = grosimea pereților = 5 nm

$\Rightarrow V_p = 5{,}3 \cdot 10^{-19} m^3$

- $w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 5{,}6 \cdot 10^{7} \frac{V}{m}}{2} \Rightarrow w_e = 1{,}39 \cdot 10^{4} \frac{J}{m^3}$
- $w_e = \frac{E_{pc}}{V_p} \Rightarrow E_{p_c} = w_e \cdot V_p = 1{,}39 \cdot 10^{4} \frac{J}{\cancel{m^3}} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-19} \cancel{m^3}$

$\Rightarrow \boxed{E_{p_c} = 7 \cdot 10^{-10} J}$

D) În realitate, pereții celulei nu sunt înconjurați de aer, ci de un fluid care are constanta dielectrică $K = 5{,}4$. Care sunt valorile lui E și U în acest caz?

$$E' = \frac{E}{K} = \frac{5{,}6 \cdot 10^{7} \frac{V}{m}}{5{,}4} \Rightarrow \boxed{E' \approx 10^{7} \frac{V}{m}}$$

$$U' = \frac{U}{K} = \frac{0{,}28 V}{5{,}4} \Rightarrow \boxed{U' = 0{,}052 V}$$

(47) Tastele anumitor tastaturi de computer au o mică placă metalică care joacă rolul unei armături a unui condensator plan, umplut cu aer. Atunci tasta este apăsată, distanța dintre armături scade și astfel se modifică capacitatea, aceasta crescând. Circuitul electronic ~~...~~ al tastaturii detectează schimbarea capacității și astfel știe care tastă a fost apăsată. Aria plăcuței are valoarea de 42 mm², iar distanța dintre armături este de 0,7 mm, înainte ca tasta să fie apăsată.

(A) Care este valoarea capacității înainte de apăsarea tastei?

R: $C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 42 \cdot 10^{-6} m^2}{0{,}7 \cdot 10^{-3} m} \Rightarrow \boxed{C = 5{,}31 \cdot 10^{-13} F} = 0{,}531\, pF$

(B) Dacă circuitul poate detecta o variație de capacitate de 0,25 pF, cât ar trebui să fie deplasată (apăsată) tasta pentru ca circuitul să detecteze ~~...~~ tasta apăsată?

• valoarea capacității corespunzătoare apăsării: $C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d'} \Rightarrow d' = \frac{\varepsilon_0 S}{C'} \Big\} \Rightarrow$

$\rightarrow$ dar $C' = C + 0{,}25\, pF = 0{,}78\, pF$

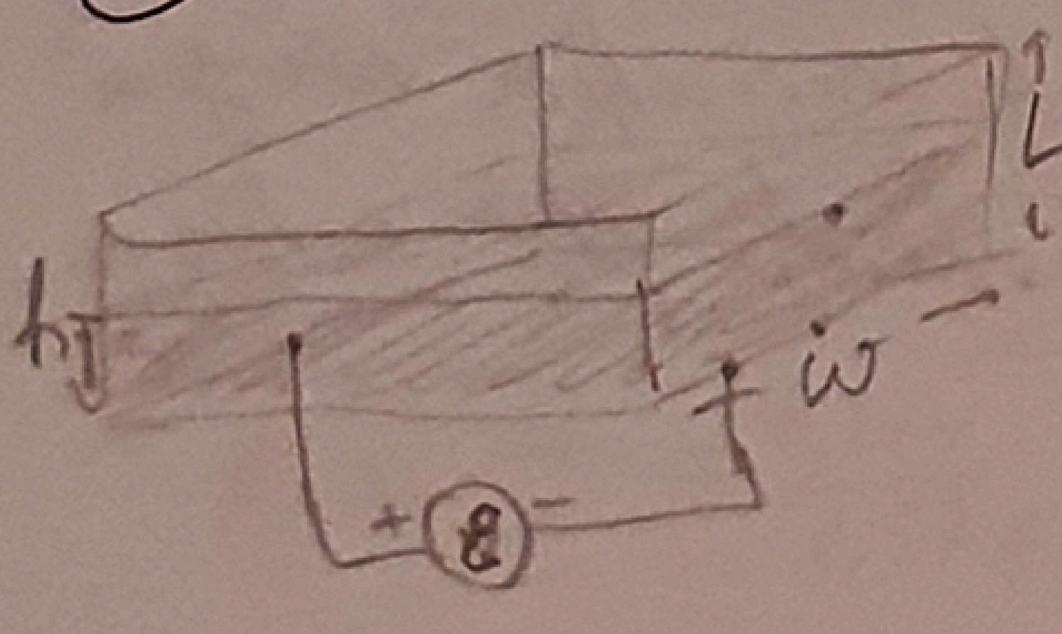
$\Rightarrow d' = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 42 \cdot 10^{-6} m^2}{0{,}78 \cdot 10^{-12} F} \Rightarrow d' = 4{,}76 \cdot 10^{-4} m$

$\Rightarrow$ dist. pe care trebuie deplasată tasta: $x = d - d' = 7 \cdot 10^{-4} m - 4{,}76 \cdot 10^{-4} m$

$\Rightarrow \boxed{x = 0{,}22\, mm}$

(48) Un rezervor de combustibil utilizează un condensator pentru a determina nivelul combustibilului. Valoarea efectivă a constantei dielectrica K_{ef} se modifică de la 1 când rezervorul este gol, la o valoare K când rezervorul este plin. Circuitul electronic al automobilului sesizează modificarea valorii constantei dielectrice atunci când între plăcile condensatorului se modifică combinația aer-combustibil. Dimensiunile unei armături sunt: w - lungimea, L - lățimea și h - este înălțimea lichidului dintre armături.

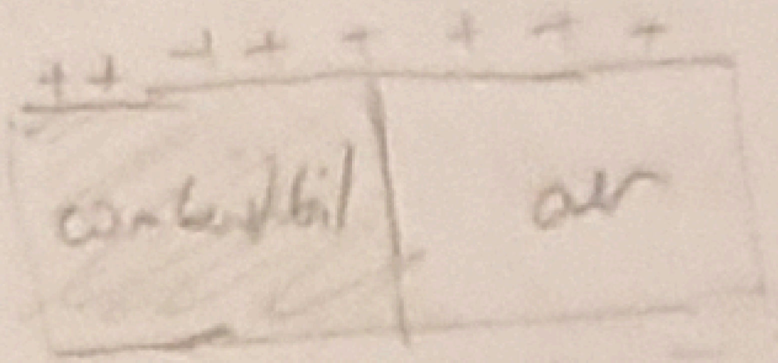
(A) Să se deducă o expresie a constantei dielectrice K_{ef} în funcție de h.



• $C_{ef} = K_{ef} \cdot \frac{\varepsilon S}{d} \Big\} \Rightarrow C_{ef} = K_{ef} \frac{\varepsilon w \cdot L}{d}$ (1)

• $S = w \cdot L$

• putem considera combinația aer-combustibil ca o grupare de două conducatoare legate în paralel; capacitatea echiv.:



$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 w (L-h)}{d} + \frac{k\varepsilon_0 w h}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 w L}{d}\left(1 + \frac{kh}{L} - \frac{h}{L}\right) \quad (2)$$

• din (1) și (2) → $K_{ef} = 1 + \frac{kh}{L} - \frac{h}{L}$

(B) Care este valoarea constantei dielectrice pentru o jumătate de rezervor, $\frac{1}{4}$ plin și $\frac{3}{4}$ plin, considerând că $K_{benzină} = 1,95$?

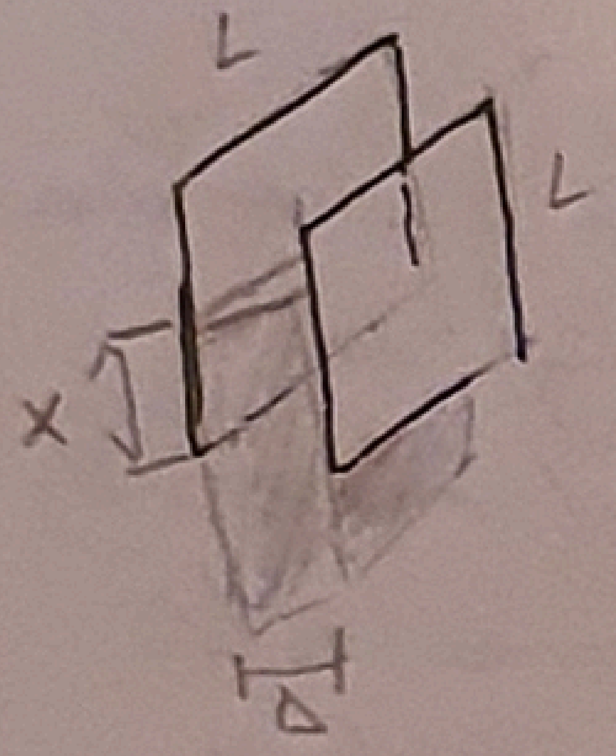
• $\frac{1}{4}$ plin → $h = \frac{L}{4} \Rightarrow K_{ef} = 1 + k\cdot\frac{\frac{L}{4}}{L} - \frac{\frac{L}{4}}{L} \Rightarrow K_{ef} = 1 + \frac{1}{4}(k-1)$

$\Rightarrow K_{ef} = 1,237$

• $\frac{1}{2}$ plin $\Rightarrow h = \frac{L}{2} \Rightarrow K_{ef} = 1,48$

• $\frac{3}{4}$ plin $\Rightarrow h = \frac{3L}{4} \Rightarrow K_{ef} = 1,71$

(49) Două armături pătrate sunt separate de distanța Δ și au latura L. Un strat dielectric de constantă K și dimensiunile $L\times L\times\Delta$ este introdus pe o distanță x în spațiul dintre armături.



(A) Care este capacitatea sistemului?

→ consid. sist. ca fiind 2 conducatoare legate în paralel.

→ aria armăturii primului: $S_1 = L\cdot(L-x)$

→ aria armăturii conducatorului II: $S_2 = L\cdot x$

• $C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S_1}{\Delta} + \frac{k\varepsilon_0 S_2}{\Delta} = \frac{\varepsilon_0 L(L-x)}{\Delta} + \frac{k\varepsilon_0 L\cdot x}{\Delta}$

$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 L}{\Delta}[(L-x) + kx] \Leftrightarrow C = \frac{\varepsilon_0 L}{\Delta}[L + x(k-1)]$

(B) Dacă presupunem că, conductorul este legat la o baterie ce menține o diferență de potențial constantă. Care este variația energiei stocate la introducerea materialului dielectric pe distanța dx între armături?

• $dE_{p_e} = \frac{dC \cdot U^2}{2}$

$C = \frac{\varepsilon_0 L}{\Delta}[L + (k-1)x] \Rightarrow dC = \frac{\varepsilon_0 L}{\Delta}[k\,dx - dx]$ $\Big/ \Rightarrow$

$\Rightarrow dE_{p_e} = \frac{\varepsilon_0 L \cdot U^2}{2\Delta}[k\,dx - dx] \Rightarrow \boxed{dE_{p_e} = (k-1)\frac{\varepsilon_0 L \cdot U^2}{2\Delta} \cdot dx.}$

(C) Dacă înainte de introducerea dielectricului pe distanța dx condensatorul este deconectat de la baterie, a.î. sarcina de pe armături rămâne constantă, să se determine sarcina de pe armături.

• $C = \frac{Q}{U} \Rightarrow Q = C \cdot U = \frac{\varepsilon_0 L \cdot U}{\Delta}[L + (k-1)x]$

(50) Un fir de Cu - ϕ-10 - utilizat pentru a alimenta un bec are un diametru de 1,02 mm și este parcurs de un curent de 1,67 A. Densitatea de electroni liberi din fir este de $8,5 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$.

(A) Ce valoare are densitatea de curent și viteza de drift a electronilor?

• $J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{I}{\frac{\pi d^2}{4}} \Rightarrow J = \frac{4 \cdot 1,67 A}{\pi \cdot (1,02 \cdot 10^{-3} m)^2} \Rightarrow \boxed{J = 2,04 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}}$

• $J = n|q|v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{n|q|} \Rightarrow v_d = \frac{2,04 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}}{8,5 \cdot 10^{28} m^{-3} \cdot |-1,6 \cdot 10^{-19} C|}$

$\Rightarrow \boxed{v_d = 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} = 0,15 \frac{mm}{s}}$

(B) Care este intensitatea câmpului electric în fir, cunoscând că rezistivitatea Cu este $\rho = 1,72 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$?

• $E = \frac{J}{\sigma} = \rho \cdot J = 1,72 \cdot 10^{-8}\ \Omega m \cdot 2,04 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2} \Rightarrow \boxed{E = 0,035 \frac{V}{m}}$

(C) Care este diferența de potențial dintre două puncte din fir situate la o distanță de 50 m și rezistența acestei porțiuni?

• $U = E \cdot d = 0,035 \frac{V}{m} \cdot 50 m \Rightarrow \boxed{U = 1,75 V}$

$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1,72 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot 50 m}{\pi (1,02 \cdot 10^{-3} m)^2} \Rightarrow \boxed{R = 1,05\ \Omega}$

• $R = \frac{U}{I} = \frac{1,75 V}{1,67 A} \Rightarrow \boxed{R = 1,05\ \Omega}$

(51) Intensitatea curentului printr-un fir variază după o relație de forma:

$I = 55A - \left(0,65\frac{A}{s^2}\right)\cdot t^2$.

(A) Care este sarcina electrică ce trece prin secțiunea transversală a firului de la $t_i = 0s$ la $t_f = 8s$?

$\cdot\ I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I\,dt \Rightarrow Q = \int_i^f \left[55A - \left(0,65\frac{A}{s^2}\right)t^2\right]dt \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = \left[(55A)t - \left(0,65\frac{A}{s^2}\right)\cdot\frac{t^3}{3}\right]_{0s}^{8s} \Rightarrow Q = 55A\cdot 8s - 0,217\frac{A}{s^2}\cdot(8s)^3$

$\Rightarrow \boxed{Q = 330\,C}$

(B) Ce valoare constantă a curentului va transporta aceeași sarcină, în același interval de timp?

$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{330\,C}{8s} \Rightarrow \boxed{I = 41\,A}$

(52) Un fir cilindric de wolfram cu lungimea de 15cm și diametrul de 1mm este utilizat într-un dispozitiv în care temperatura variază de la 20°C la 120°C. Prin acesta va trece un curent de 12,5A, la toate temp.

(A) Care va fi intensitatea câmpului electric în fir, dacă rezistivitatea wolframului este: $\rho_{20} = 5,25\cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot m$? $(\alpha = 4,5\cdot 10^{-3}\,{}^\circ C^{-1})$

$\left.\begin{aligned} J &= \sigma E = \frac{E}{\rho} \\ J &= \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \rho\frac{I}{\pi\frac{d^2}{4}} = \rho_0\left[1 + \alpha(t - t_0)\right]\cdot\frac{4I}{\pi d^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = (5,25\cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot m)\left[1 + 4,5\cdot 10^{-3}\,{}^\circ C^{-1}\cdot 100^\circ C\right]\cdot\frac{4\cdot 12,5A}{\pi(1\cdot 10^{-3}m)^2}$

$\Rightarrow \boxed{E = 1,21\,\frac{V}{m}}$

(B) Care este rezistența firului și diferența de potențial aplicată la capetele acestuia? $(\rho_{120} = 7,61\cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot m)$

$\cdot\ R = \rho\frac{L}{S} = \frac{7,61\cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot m\cdot 15\cdot 10^{-2}m}{\frac{\pi}{4}\cdot(1\cdot 10^{-3}m)^2} \Rightarrow \boxed{R = 0,0145\,\Omega}$

$\cdot\ U = E\cdot L = 1,21\frac{V}{m}\cdot 15\cdot 10^{-2}m \Rightarrow \boxed{U = 0,182\,V}$

• $dE_{p_c} = \frac{dC \cdot U^2}{2}$

$C = \frac{\varepsilon_0 L}{\Delta}[L + (k-1)x] \Rightarrow dC = \frac{\varepsilon_0 L}{\Delta}[k\,dx - dx]$ / $\Rightarrow$

$\Rightarrow dE_{p_e} = \frac{\varepsilon_0 L \cdot U^2}{2\Delta}[k\,dx - dx] \Rightarrow \boxed{dE_{p_c} = (k-1)\frac{\varepsilon_0 L \cdot U^2}{2\Delta} \cdot dx}$

(c) Dacă înainte de introducerea dielectricului pe distanța dx condensatorul este deconectat de la baterie, a.î. sarcina de pe armături rămâne constantă, să se determine sarcina de pe armături:

• $C = \frac{Q}{U} \Rightarrow Q = C \cdot U = \frac{\varepsilon_0 L \cdot U}{\Delta}[L + (k-1)x]$

(50) Un fir de Cu - Φ-10 - utilizat pentru a alimenta un bec are un diametru de 1,02 mm și este parcurs de un curent de 1,67 A. Densitatea de electroni liberi din fir este de $8,5 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$.

(A) Ce valoare are densitatea de curent și viteza de drift a electronilor?

• $J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{I}{\frac{\pi d^2}{4}} \Rightarrow J = \frac{4 \cdot 1,67 A}{\pi \cdot (1,02 \cdot 10^{-3} m)^2} \Rightarrow \boxed{J = 2,04 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}}$

• $J = n|q|v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{n|q|} \Rightarrow v_d = \frac{2,04 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}}{8,5 \cdot 10^{28} m^{-3} \cdot |-1,6 \cdot 10^{-19} C|}$

$\Rightarrow \boxed{v_d = 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} = 0,15 \frac{mm}{s}}$

(B) Care este intensitatea câmpului electric în fir, cunoscând că rezistivitatea Cu este $\rho = 1,72 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$?

• $E = \frac{J}{\sigma} = \rho \cdot J = 1,72 \cdot 10^{-8}\ \Omega m \cdot 2,04 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2} \Rightarrow \boxed{E = 0,035 \frac{V}{m}}$

(C) Care este diferența de potențial dintre două puncte din fir situate la o distanță de 50 m și rezistența acestei porțiuni?

• $U = E \cdot d = 0,035 \frac{V}{m} \cdot 50 m \Rightarrow \boxed{U = 1,75 V}$

• $R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1,72 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot 50 m}{\pi (1,02 \cdot 10^{-3} m)^2} \Rightarrow \boxed{R = 1,05\ \Omega}$

• $R = \frac{U}{I} = \frac{1,75 V}{1,67 A} \Rightarrow \boxed{R = 1,05\ \Omega}$

(51) Intensitatea curentului printr-un fir variază după o relație de forma:
$I = 55A - \left(0{,}65\frac{A}{s^2}\right)\cdot t^2$.

(A) Care este sarcina electrică ce trece prin secțiunea transversală a firului de la $t_i = 0s$ la $t_f = 8s$?

$\cdot\ I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I\,dt \Rightarrow Q = \int_i^f \left[55A - \left(0{,}65\frac{A}{s^2}\right)t^2\right]dt \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = \left[(55A)t - \left(0{,}65\frac{A}{s^2}\right)\cdot\frac{t^3}{3}\right]_{0s}^{8s} \Rightarrow Q = 55A\cdot 8s - 0{,}217\frac{A}{s^2}\cdot(8s)^3$

$\Rightarrow \boxed{Q = 330\,C}$

(B) Ce valoare constantă a curentului va transporta aceeași sarcină, în același interval de timp?

$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{330\,C}{8s} \Rightarrow \boxed{I = 41\,A}$

(52) Un fir cilindric de wolfram cu lungimea de 15cm și diametrul de 1mm este utilizat într-un dispozitiv în care temperatura variază de la 20°C la 120°C. Prin acesta va trece un curent de 12,5A, la toate temp.

(A) Care va fi intensitatea câmpului electric în fir, dacă rezistivitatea wolframului este: $\rho_{20} = 5{,}25\cdot10^{-8}\,\Omega\cdot m$? $(\alpha_0 = 4{,}5\cdot10^{-3}\,°C^{-1})$

$\left.\begin{array}{l} J = \sigma E = \frac{E}{\rho} \\ J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow E = \rho\cdot\frac{I}{\frac{\pi d^2}{4}} = \rho_0\left[1 + \alpha(t - t_0)\right]\cdot\frac{4I}{\pi d^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = (5{,}25\cdot10^{-8}\,\Omega\cdot m)\left[1 + 4{,}5\cdot10^{-3}\,°C^{-1}\cdot 100°C\right]\cdot\frac{4\cdot 12{,}5A}{\pi(1\cdot10^{-2}m)^2}$

$\Rightarrow \boxed{E = 1{,}21\,\frac{V}{m}}$

(B) Care este rezistența firului și diferența de potențial aplicată la capetele acestuia? $(\rho_{120} = 7{,}61\cdot10^{-8}\,\Omega\cdot m)$

$\cdot\ R = \rho\frac{L}{S} = \frac{7{,}61\cdot10^{-8}\,\Omega\cdot m\cdot 15\cdot10^{-2}m}{\frac{\pi}{4}\cdot(1\cdot10^{-2}m)^2} \Rightarrow \boxed{R = 0{,}0145\,\Omega}$

$\cdot\ U = E\cdot L = 1{,}21\frac{V}{m}\cdot 15\cdot10^{-2}m \Rightarrow \boxed{U = 0{,}182\,V}$

(52) Capacitatea de stocare a bateriei unui automobil este de 50 A·h, adică poate furniza un curent de 50 A pentru o oră.

(A) Care este energia a poate fi furnizată de o baterie de 12 V și 60 A·h, dacă rezistența internă a acesteia este neglijabilă?

• $E_c = \frac{P}{\Delta t} = \frac{U \cdot I}{\Delta t} = \frac{12V \cdot 60A}{3600s} \Rightarrow \boxed{E_c = 2,6 \cdot 10^6 J}$

(B) Care este volumul de benzină care are puterea calorică egală cu energia furnizată de baterie? $\left(\rho_{benzină} = 900 \frac{kg}{m^3}\right)$

• $P_c = \frac{Q}{M}$; $P_c = 46 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$ (benzina).

• $m = \frac{E_c}{P_c} = \frac{2,6 \cdot 10^6 J}{46 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}} \Rightarrow m = 0,0565 kg.$

• $m = \rho \cdot V \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{0,0565 kg}{900 \frac{kg}{m^3}} \Rightarrow \boxed{V = 6,3 \cdot 10^{-5} m^3 = 0,063 \ell}$

(53) O rezistență de nichelină (nicrom) utilizată într-un element de încălzire are o rezistență de 28 Ω și este conectată la o baterie care are t.e.m de 96 V și rezistența internă de 1,2 Ω. Acest element este introdus într-un recipient de aluminiu cu masa de 0,13 kg care conține 0,2 kg de apă. Care este intervalul de timp pentru a crește temperatura recipientului cu apă de la 21,2°C la 34,5°C? (Variația rezistenței nichelinei cu temperatura se neglijează).

• $Q = RI^2 \Delta t = P \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{Q}{P}$

• $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{96V}{28\Omega + 1,2\Omega} \Rightarrow I = 3,288 A$

• $P = RI^2 = 28\Omega \cdot (3,288 A)^2 \Rightarrow P = 302,6 W.$

• recipient de Al: $Q_1 = m c_{Al} \Delta T = 0,13 kg \cdot 910 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 13,3 K = 1573,29 J$

• apă: $Q_2 = m c_{apă} \Delta T = 0,2 kg \cdot 4190 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 13,3 K = 11145,4 J$

• $Q_T = Q_1 + Q_2 = 12718,69 J$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{Q}{P} = \frac{12718,69 J}{302,6 W} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 42 s}$

(54) Un rezistor cu rezistența R este conectat la o baterie care are t.e.m $\varepsilon = 12\,V$ și rezistența internă $r = 0,4\,\Omega$. Pentru ce valori ale lui R puterea disipată pe rezistor este de 80 W?

• $P = RI^2 = R\cdot\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} \Rightarrow \varepsilon^2 R = P(R+r)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon^2 R = P(R^2+r^2+2Rr) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\varepsilon^2 R}{P} - R^2 - r^2 - 2Rr = 0 \Rightarrow R^2 + \left(2r - \frac{\varepsilon^2}{P}\right)R + r^2 = 0$

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \qquad x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

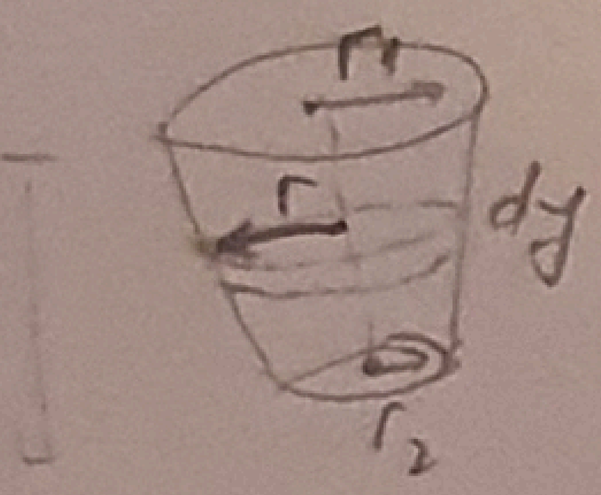
$$\Rightarrow R = \frac{-\left(2r-\frac{\varepsilon^2}{P}\right) \pm \sqrt{\left(2r-\frac{\varepsilon^2}{P}\right)^2 - 4r^2}}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(12V)^2}{(80W)} - 2(0,4\Omega)\right] \pm \sqrt{\left(2(0,4\Omega)^2 - \frac{(12V)^2}{80W}\right)^2 - 4(0,4\Omega)^2}\right\}$$

$\Rightarrow R = 0,5\,\Omega \pm 0,3\,\Omega \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 0,8\,\Omega \\ R_2 = 0,2\,\Omega \end{cases}$

(55) Un material cu rezistivitatea ρ are forma unui trunchi de con cu înălțimea h și razele r_1 și r_2 ale suprafețelor circulare ale capetelor. Care este rezistența conului măsurată între cele două capete?

(A)



• Împărțim conul în discuri de grosime dy și calculăm rezistența unui disc.

• raza r a discului situat la distanța y de fața superioară este: $r = r_2 + \frac{y}{h}(r_1-r_2) = r_2 + \beta y$

• rezistența discului: $dR = \rho\frac{dy}{S} = \frac{\rho\, dy}{\pi r^2} = \frac{\rho\, dy}{\pi(r_2+\beta y)^2}$

$$\Rightarrow R = \int dR = \frac{\rho}{\pi}\int_0^h \frac{dy}{(r_2+\beta y)^2} = \frac{\rho}{\pi}\left[-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{r_2+\beta y}\right]_0^h =$$

$$= -\frac{\rho}{\beta\pi}\left[\frac{1}{r_2+\beta h} - \frac{1}{r_2}\right] \Rightarrow R = \frac{\rho}{\pi\beta}\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right] \Rightarrow$$

• dar: $\beta = \frac{r_1-r_2}{h} \Rightarrow r_2+\beta h = r_1$

$$\Rightarrow R = \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{h}{r_1-r_2}\right)\left(\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}\right) \Rightarrow \boxed{R = \frac{\rho h}{\pi r_1 r_2}}$$