## 10. APLICAREA LEGII LUI GAUSS LA DIFERITE DISTRIBUŢII DE SARCINĂ

Legea lui Gauss este utilă pentru determinarea intensității câmpului electric atunci când distribuția de sarcină electrică are o simetrie ridicată. În cele ce urmează vom analiza câteva exemple în care distribuția de sarcină pe o suprafață este simetrică astfel încât, determinarea intensității câmpului electric cu ajutorul relației integrale (41) să fie simplificată. Atunci când alegem suprafața, vom avea avantajul că, datorită simetriei, câmpul electric rămâne constat şi astfel poate fi scos în fața integralei. Acest lucru se obține în cazul suprafețelor pentru care, pentru orice porțiune a lor, sunt îndeplinite una din următoarele condiții:

1. Valoarea intensității câmpului electric, datorită simetriei, poate fi considerată constantă pe fiecare porțiune a suprafeței.

2. Produsul $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ poate fi exprimat ca un produs simplu algebric $E \cdot dS$ deoarece $\vec{E} \parallel d\vec{S}$.

3. Produsul scalar din ecuația (41) este nul atunci când $\vec{E} \perp d\vec{S}$.

4. Câmpul electric este nul pentru orice porțiune a suprafeței.

Porțiuni diferite ale suprafeței pot satisface condiții diferite, însă este obligatoriu să îndeplinească cel puțin una din condițiile anterioare. Dacă distribuția de sarcină electrică nu prezintă suficientă simetrie, adică nu găsim o suprafață care să îndeplinească una din condițiile anterioare, Legea lui Gauss rămâne valabilă însă nu este utilă în determinarea intensității câmpului electric pentru distribuția de sarcină respectivă.

### 10.1. DISTRIBUŢIE SFERICĂ DE SARCINĂ

Să considerăm o sferă izolată de rază $a$ în interiorul căreia există o densitate volumică uniformă, $\rho$, de sarcini pozitive, sarcina totală din interiorul acesteia fiind $Q$. În continuare ne propunem să determinăm intensitatea câmpului electric în diferite puncte ale spațiului, atât în interiorul sferei, cât şi în exteriorul acesteia.

Pentru început vom determina intensitatea câmpului electric într-un punct ***P*** situat în exteriorul sferei, la distanța $r$ față de centrul acesteia, ca în figura **25.a**. Datorită simetriei sferice, în fiecare punct de pe suprafața de rază $r$

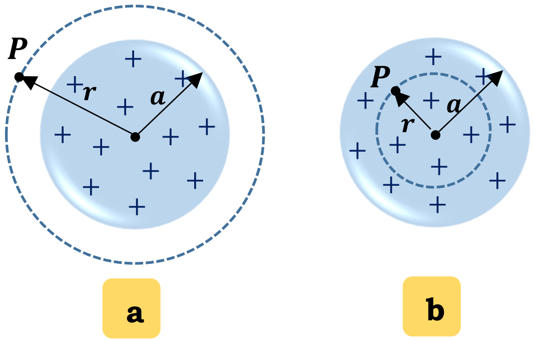



**Figura 25** O sferă izolată încărcată cu o densitate volumică uniformă de sarcină electrică. Sarcina totală din interiorul sferei este $Q$.

intensitatea câmpului electric are aceeaşi valoare. În plus, $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ astfel încât putem scrie relația (41) sub forma:

$$\phi_e = \oint E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (42)$$

relație pe care o putem rescrie şi astfel:

$$E \oint dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (43)$$

Deoarece suprafața este sferică, $\oint dS = 4\pi r^2$, astfel încât intensitatea câmpului electric în punctul ***P*** va avea expresia:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{Q}{r^2} \quad (r > a) \qquad (44)$$

Acest rezultat este identic cu cel obținut în cazul unei sarcini punctiforme pozitive. Prin urmare, câmpul electric în exteriorul unei sfere uniform încărcată cu sarcina electrică $Q$, în interiorul căreia se găseşte o densitate volumică de sarcină $\rho$, este egală cu cea generată de o sarcină punctiformă localizată în centru sferei.

Acum, vom determina intensitatea câmpului electric într-un punct ***P*** situat în interiorul sferei, la distanța $r < a$ față de centrul acesteia, ca în figura **25.b**. În această situație, sarcina $Q$ cuprinsă în interiorul acestui volum este mai mică decât sarcina $q_{int}$ din interiorul sferei. Sarcina electrică cuprinsă în volumul sferei de rază $r$ este:

$$q_{int} = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \qquad (45)$$

Înlocuind acest rezultat în relația (41) vom obține:

$$\phi_e = \oint E \cdot dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\oint dS = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\varepsilon_0} \qquad (46)$$

Deoarece suprafața este sferică, $\oint dS = 4\pi r^2$obținem pentru intensitatea câmpului electric expresia:

$$E = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (47)$$

Dar, densitatea volumică de sarcină din interiorul sferei de rază $a$ este:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \qquad (48)$$

astfel încât vom obține pentru intensitatea câmpului electric relația:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3} = kQ\frac{r}{a^3} \qquad (r < a) \qquad (49)$$

Acest rezultat diferă fată de cel obținut în cazul anterior. Se observă că atunci când $r \longrightarrow 0$ şi $E \longrightarrow 0$. Prin urmare, acest rezultat elimină problema care ar apărea atunci când $r = 0$ dacă $E$ variază cu $\frac{1}{r^2}$ în interiorul sferei la fel cum o face şi în exteriorul acesteia. Astfel dacă $E \sim \frac{1}{r^2}$ pentru $r < a$, intensitatea câmpului electric ar fi infinită când $r = 0$, rezultat imposibil din punct de vedere fizic.

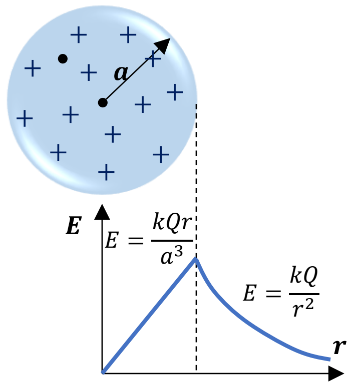



**Figura 26** Dependența intensității câmpului electric de raza sferei izolate uniform electrizată cu sarcina $Q$.

În final, să considerăm şi situația în care $r = a$. În această situație intensitatea câmpului electric din relațiile (44) şi (49) devine:

$$E = \lim_{r\to a}\left(k\frac{Q}{r^2}\right) = k\frac{Q}{a^2} \text{ şi } \qquad E = \lim_{r\to a}\left(kQ\frac{r}{a^3}\right) = k\frac{Q}{a^2} \qquad (50)$$

Prin urmare, valoarea intensității câmpului electric este acelaşi în ambele situații, fie că suprafața se apropie din exteriorul sau interiorul sferei. În figura **26** este prezentată dependența intensității câmpului electric de raza sferei. Se observă că variația valorii intensității câmpului electric este continuă.

## 10.2. DISTRIBUȚIE CILINDRICĂ DE SARCINĂ

Să considerăm situația din figura **27.a**, în care un fir infinit de lung încărcat cu o sarcină electrică pozitivă, uniform distribuită în lungul firului. Densitatea liniară de sarcină $\lambda$ este constantă şi dorim să determinăm intensitatea câmpului electric la distanța $r$ față de fir. Deoarece firul este infinit de lung, intensitatea câmpului electric este aceeaşi în toate punctele firului. În plus, datorită faptului că sarcina este distribuită uniform în lungul firului, distribuția sarcinii electrice are simetrie cilindrică şi putem să utilizăm legea lui Gauss pentru a determina intensitatea câmpului electric.

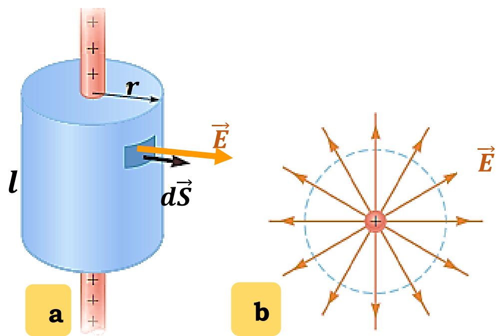



**Figura 27 (a).** Un densitate liniară de sarcină înconjurată de o suprafață cilindrică concentrică cu firul. (b). O privire de la unul din capetele cilindrului ne arată că intensitatea câmpului electric este perpendiculară în toate punctele suprafeței cilindrice.

Simetria distribuției sarcinii electrice reclamă ca $\vec{E}$ să fie perpendicular pe conductorul liniar, având o orientare spre exteriorul acestui, după cum se observă din figura **27.b**. Pentru a pune în evidentă simetria distribuției sarcini electrice să considerăm o suprafață de formă cilindrică, având raza $r$ şi lungimea $l$ şi care este coaxială cu firul conductor. Pe zonele curbate ale acestei suprafețe $\vec{E}$ are modulul constant şi este perpendicular în fiecare punct al suprafeței. Mai mult, fluxul electric la capetele cilindrului este nul deoarece $\vec{E}$ este paralel cu suprafețele respective.

Dacă considerăm că sarcina închisă în interiorul suprafeței cilindrice este $q_{int} = \lambda l$, aplicând legea lui Gauss pentru suprafața cilindrului vom obține:

$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow ES = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \qquad (51)$$

Aria suprafeței cilindrice este: $S = 2\pi r l$, astfel încât vom obține în final:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} = 2k\frac{\lambda}{r} \qquad (52)$$

Acest rezultat ne arată că intensitatea câmpului electric creat de o distribuție cilindrică de sarcină variază invers proporțional cu raza cilindrului.

Dacă firul nu ar fi infinit de lung, atunci intensitatea câmpului electric nu se poate determina cu relația precedentă. În această situație câmpul electric nu ar mai fi constant pe întreaga suprafață deoarece la capetele densității liniare de sarcină $\vec{E}$ nu mai este perpendicular pe suprafața cilindrică. La aceste capete ar exista şi o componentă paralelă cu firul a intensității câmpului electric

## 10.3. DISTRIBUȚIE SUPERFICIALĂ DE SARCINĂ

În continuare ne propunem să determinăm intensitatea câmpului electric creat de o densitate superficială de sarcină $\sigma$, uniform distribuită pe suprafață, ca în figura **28**. Vom considera că suprafața este infinit de mare, astfel încât câmpul electric să aibă aceeaşi valoare în toate punctele suprafeței. Datorită faptului că sarcina electrică este uniform distribuită pe suprafață, distribuția de sarcină este simetrică şi, prin urmare, putem utiliza legea lui Gauss pentru a determina intensitatea câmpului electric.

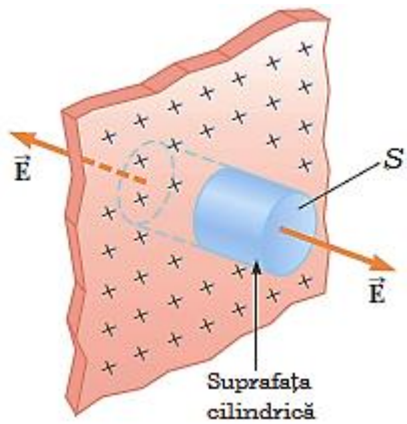



**Figura 28** O suprafață cilindrică care trece printr-o suprafață plană infinită încărcată cu sarcină pozitivă. Fluxul prin capetele cilindrului este $ES$, iar prin restul suprafeței este nul.

Datorită simetriei, $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafață, în toate punctele acesteia, având orientarea spre exteriorul suprafeței datorită faptului că aceasta este încărcată cu sarcină pozitivă. De asemenea, orientarea vectorului $\vec{E}$ de pe o parte a suprafeței este opusă celei de pe cealaltă față. Dacă alegem o suprafață cilindrică a cărei axă este perpendiculară pe suprafața plană încărcată electric, atunci câmpul electric este paralel cu suprafața cilindrului şi nu va exista nici o contribuție la câmpul electric total a aceste suprafețe. În acelaşi timp, $\vec{E}$ este perpendicular pe capetele cilindrului, iar fluxul electric la fiecare capăt este egal cu produsul $ES$. Fluxul electric total ce străbate întreaga suprafață va fi dat de suma fluxurilor ce străbate cele două capete ale suprafeței cilindrice şi este egal cu $\phi_e = 2ES$. Dacă aplicăm legea lui Gauss vom obține:

$$\phi_e = 2ES = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad (53)$$

de unde vom obține, pentru intensitatea câmpului electric creat de distribuția superficială de sarcină, relația:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (54)$$

Deoarece în relația precedentă nu apare distanța de la suprafața plană la capetele cilindrului, vom presupune că aceasta va da intensitatea câmpului electric la orice distanță față de această suprafață.

# Seminar – Câmpul electric. Potențialul electric. Capacitate electrică

① Distanța dintre protonul și electronul atomului de hidrogen este de aproximativ $5,3 \cdot 10^{-11} m$. Determinați raportul dintre forța electrică și cea gravitațională exercitată între aceste două particule.

• $F_e = k_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} = k_e \cdot \frac{|e| \cdot |-e|}{r^2} = 8,98 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} C)^2}{(5,3 \cdot 10^{-11} m)^2}$

$\Rightarrow F_e = 8,2 \cdot 10^{-8} N$

• $F_g = k_g \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = k_g \cdot \frac{m_e \cdot m_p}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{9,11 \cdot 10^{-31} kg \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} kg}{(5,3 \cdot 10^{-11} m)^2}$

$\Rightarrow F_g = 3,6 \cdot 10^{-47} N$

$\Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{8,2 \cdot 10^{-8} N}{3,6 \cdot 10^{-47} N} \cong \underline{2 \cdot 10^{39}}$

② O particulă $\alpha$ $({}_2^4He)$ are masa $m = 6,64 \cdot 10^{-27} kg$ și o sarcină de $+2e = 3,2 \cdot 10^{-19} C$. Să se compare forța de repulsie dintre două particule $\alpha$ cu cea de atracție gravitațională dintre acestea.

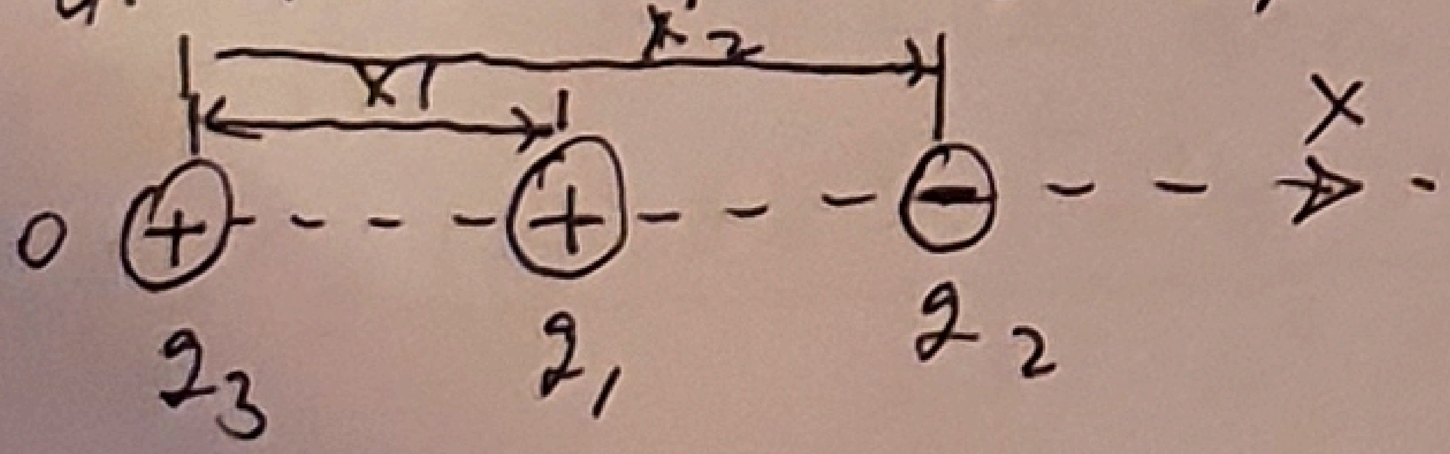
• $F_e = k_e \frac{q^2}{r^2}$

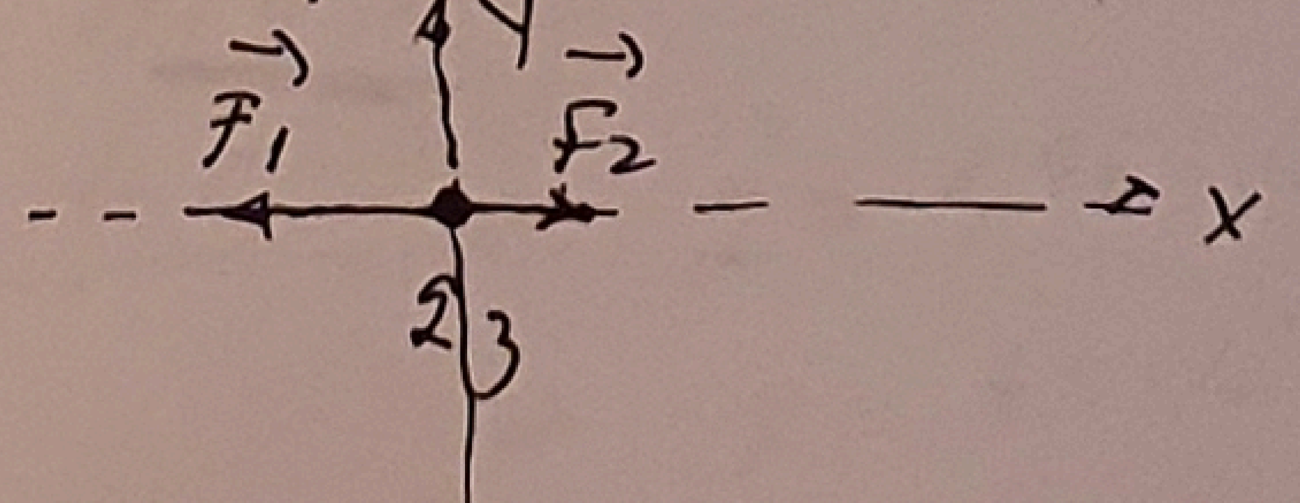
• $F_g = k_g \cdot \frac{m^2}{r^2}$

$\Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{k_e}{k_g} \cdot \frac{q^2}{r^2} = \frac{8,98 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}} \cdot \frac{(3,2 \cdot 10^{-19} C)^2}{(6,64 \cdot 10^{-27} kg)^2}$

$\Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \underline{3,1 \cdot 10^{35}}$

③ Două sarcini punctiforme $q_1 = 1 nC$ și $q_2 = -3 nC$ se află la distanțele $x_1 = 2 cm$ și $x_2 = 4 cm$ față de o sarcină $q_3 = 5 nC$ aflată în originea unui sistem cartezian. Care este forța electrică totală exercitată de sarcinile $q_1$ și $q_2$ asupra sarcinii $q_3$?



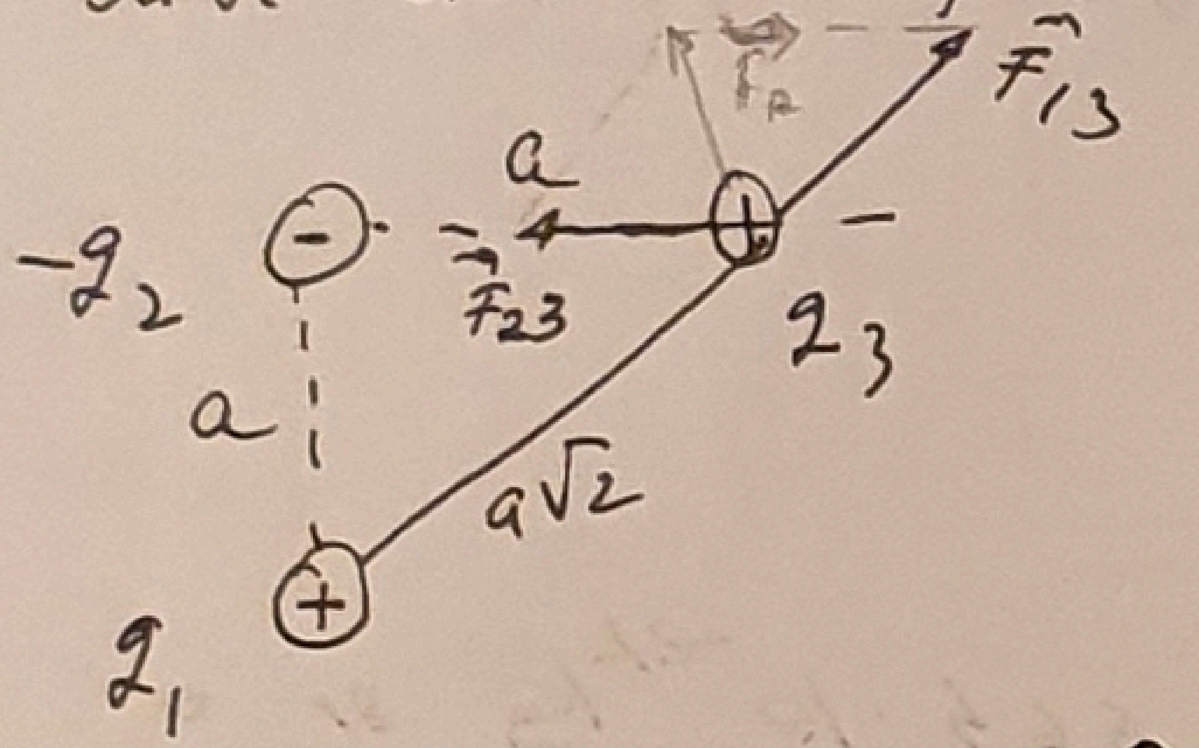



- $F_{13} = k\dfrac{|q_1 q_3|}{r_{13}^2} = 9\cdot10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\dfrac{1\cdot10^{-9}C\cdot5\cdot10^{-9}C}{(2\cdot10^{-2}m)^2} = 1{,}12\cdot10^{-4}\,N$
- $F_{23} = k\dfrac{|q_2 q_3|}{r_{23}^2} = 9\cdot10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\dfrac{3\cdot10^{-9}C\cdot5\cdot10^{-9}C}{(4\cdot10^{-2}m)^2} = 0{,}84\cdot10^{-4}\,N$

$\vec{F}_R = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = F_{13}\cdot\vec{i} + F_{23}\cdot\vec{i} = -1{,}12\cdot10^{-4}N\,\vec{i} + 0{,}84\cdot10^{-4}N\,\vec{i}$

$\Rightarrow \vec{F}_R = -0{,}28\cdot10^{-4}N\,\vec{i}$

(4) Trei sarcini punctiforme $q_1 = q_3 = 5\mu C$ şi $q_2 = -2\mu C$ sunt aşezate în vârfurile unui triunghi dreptunghic de latură $a = 0{,}1\,m$. Să se determine forța rezultantă exercitată asupra sarcinii $q_3$.



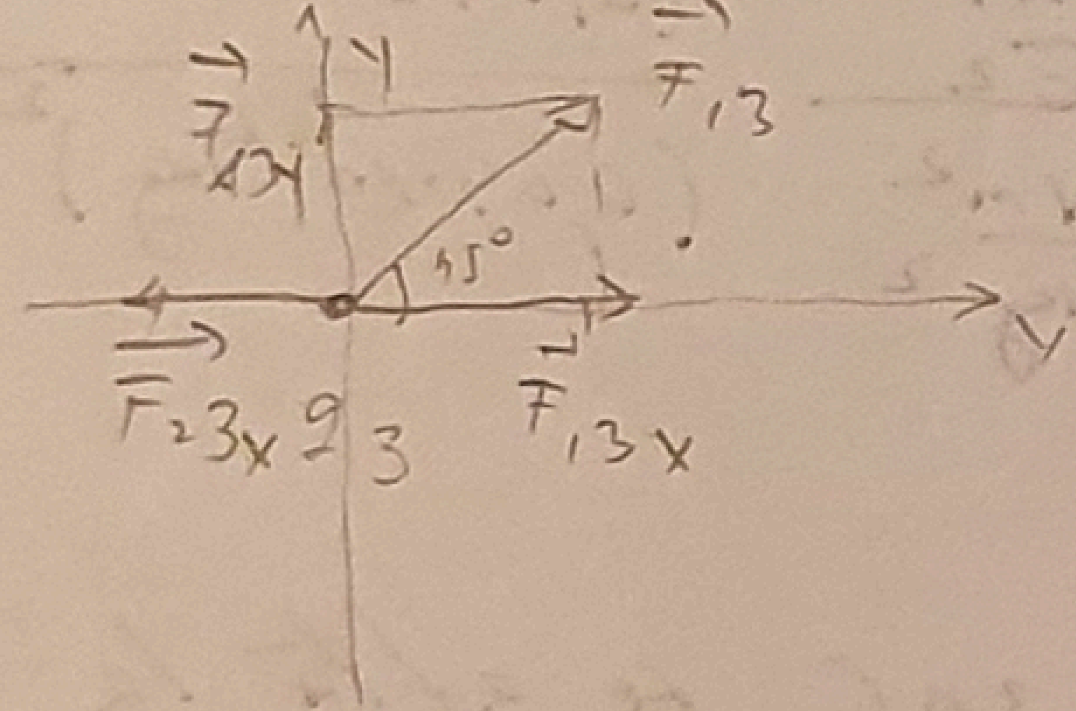

- $F_{13} = k\dfrac{|q_1 q_3|}{(a\sqrt{2})^2} = 8{,}98\cdot10^9\dfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\dfrac{5\cdot10^{-6}C\cdot5\cdot10^{-6}C}{(0{,}1m\cdot\sqrt{2})^2}$

$\Rightarrow F_{13} = 11{,}2\,N$

- $F_{23} = k\cdot\dfrac{|q_2 q_3|}{a^2} = 8{,}98\cdot10^9\dfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\dfrac{2\cdot10^{-6}C\cdot5\cdot10^{-6}C}{(0{,}1m)^2}$

$\Rightarrow F_{23} = 8{,}99\,N.$

$\vec{F}_R = F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} = (F_{13x} + F_{23x})\,\vec{i} + (F_{13y} + F_{23y})\,\vec{j}$




$F_{13x} = F_{13}\cos\alpha = 11{,}2\,N\cdot\cos45^\circ = 7{,}95\,N$

$F_{23x} = 8{,}99\,N$

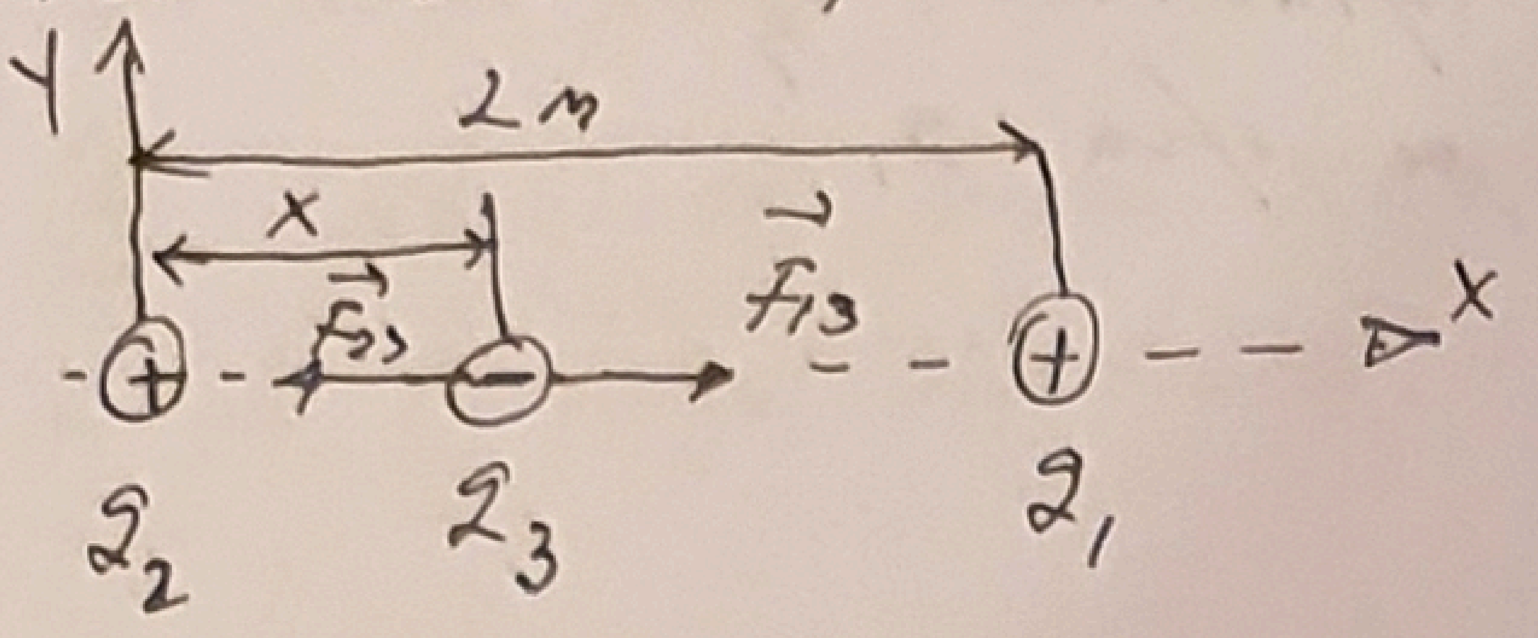
$F_{13y} = F_{13}\sin\alpha = 11{,}2\,N\cdot\sin45^\circ = 7{,}95\,N$

$F_{23y} = 0\,N$

$\Rightarrow \vec{F}_R = [7{,}95N + (-8{,}99N)]\,\vec{i} + (7{,}95N + 0N)\,\vec{j}$

$\vec{F}_R = -1{,}04N\,\vec{i} + 7{,}95N\,\vec{j}$

⑤ Trei sarcini punctiforme $q_1 = 15\mu C$, $q_2 = 6\mu C$ și $q_3$ sunt așezate ca în figură, în lungul axei ox. Distanța dintre sarcinile $q_1$ și $q_2$ este 2 m. La ce distanță trebuie să se afle sarcina $q_3$ astfel încât rezultanta forțelor care acționează asupra sa să fie nulă?




$$\vec{F}_R = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = F_{13}\cdot\vec{i} + F_{23}\vec{i} = 0$$

$$\Rightarrow k_e \frac{q_1 q_3}{(2m-x)^2}\vec{i} - k_e\cdot\frac{q_2 q_3}{x^2}\cdot\vec{i} = 0$$

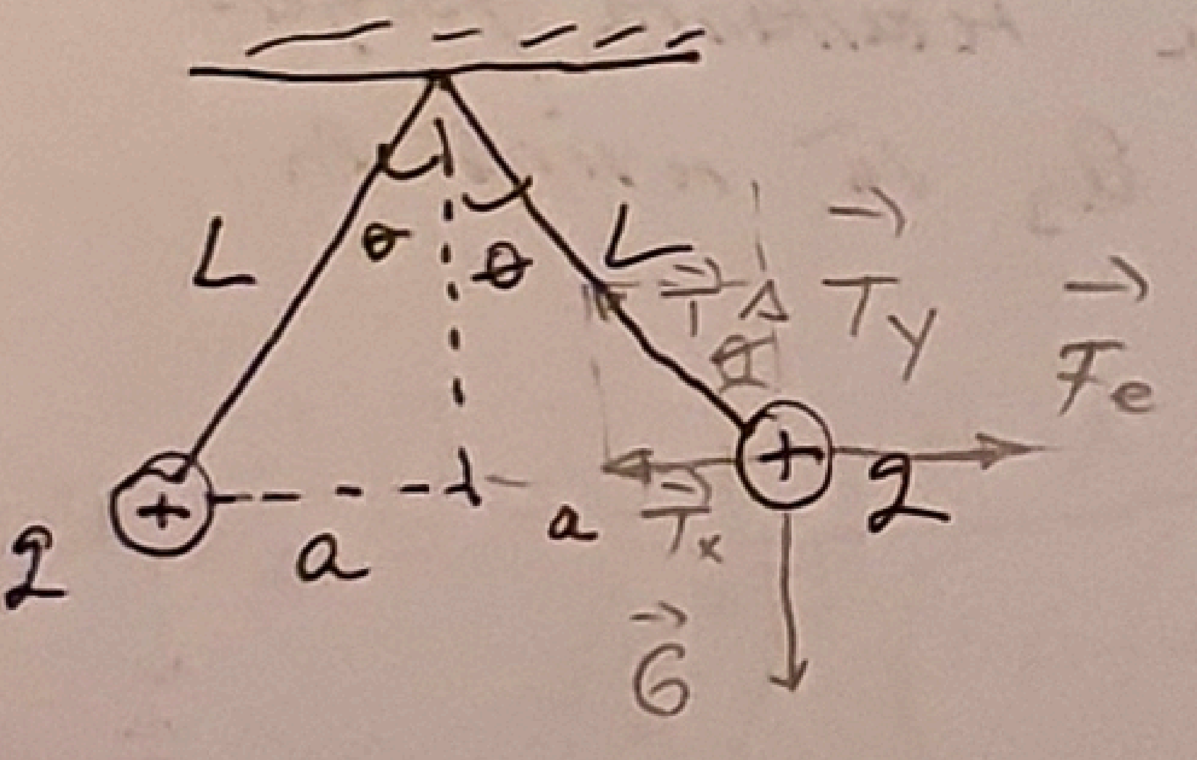
$$\Rightarrow \frac{q_1}{(2m-x)^2} = \frac{q_2}{x^2} \Rightarrow q_1 x^2 = q_2(2m-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\sqrt{q_1} = (2m-x)\cdot\sqrt{q_2} \Rightarrow x\sqrt{q_1} = 2m\sqrt{q_2} - x\sqrt{q_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}) = 2m\sqrt{q_2} \Rightarrow x = \frac{2m\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2m\sqrt{6\cdot10^{-6}C}}{\sqrt{15\cdot10^{-6}C}+\sqrt{6\cdot10^{-6}C}} \Rightarrow \underline{x = 0,775\,m}$$

⑥ Două sfere identice încărcate electric, fiecare având masa de $3\cdot10^{-2}$ kg se află în echilibru, ca în figură. Lungimea L a corzii de care sunt prinse sferele este de 0,15 m, iar unghiul $\theta = 5°$. Să se determine sarcina cu care sunt încărcate fiecare sferă.




• din figură, la echilibru, rezultă:

Ox: $F_c - T_x = 0 \Rightarrow F_c = T_x = T\sin\theta$ $\Rightarrow$

Oy: $T_y - G = 0 \Rightarrow G = T_y = T\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{F_c}{G} = tg\,\theta \Rightarrow F_c = mg\,tg\,\theta$$

$$\Rightarrow \frac{k q^2}{(2a)^2} = mg\,tg\,\theta \Rightarrow q^2 = \frac{(2a)^2\cdot mg\,tg\,\theta}{k} \Bigg\} \Rightarrow$$

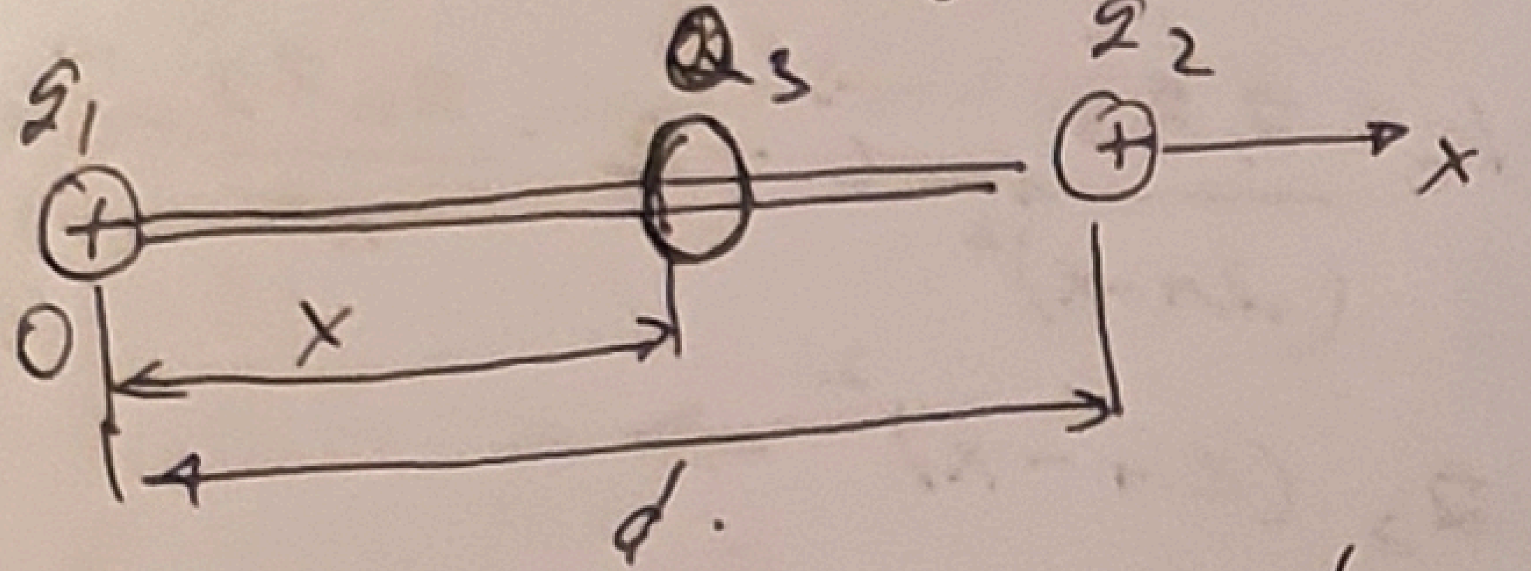
• din fig: $\sin\theta = \frac{a}{L} \Rightarrow a = L\sin\theta = 0,15m\cdot\sin5° = 0,013m$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{(0,026m^2)\cdot3\cdot10^{-2}kg\cdot9,81\frac{m}{s^2}\cdot tg\,5°}{8,98\cdot10^9\frac{Nm^2}{C^2}} \Rightarrow q^2 = 1,96\cdot10^{-15}C^2$$

$$\Rightarrow q = 4,5\cdot10^{-8}C$$

⑦ Două sfere având sarcinile $q_1 = 3q$ și $q_2 = q$ sunt fixate la capetele unei bare izolate de lungime $d = 1{,}5\ m$. O a treia sferă electrizată poate culisa în lungul barei.

Ⓐ În ce poziție sfera a treia se află în echilibru, dacă considerăm că originea se găsește pe sfera $q_1$?




• forța rezultantă care acționează asupra sferei $q_3$ este nulă la echilibru $\Rightarrow \vec{F}_R = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0 \Rightarrow k\dfrac{q_2 q_3}{(d-x)^2}\vec{i} + \dfrac{k q_1 q_3}{x^2}(-\vec{i}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{q_2}{(d-x)^2} = \frac{q_1}{x^2} \Rightarrow \frac{q}{(d-x)^2} = \frac{3q}{x^2} \Rightarrow d - x = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = x\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) \Rightarrow d = 1{,}57x \rightarrow x = 0{,}063 d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0{,}063 \cdot 1{,}5\ m \Rightarrow \underline{x = 0{,}95\ m}$$

Ⓑ Sfera 3 se poate afla într-o stare de echilibru stabil?

R: Da, dacă sarcina $Q_3$ este pozitivă, deoarece când aceasta este deplasată față de poziția de echilibru rezultanta forțelor va avea sens opus deplasării și va obliga sfera $Q_3$ să revină în poziția de echilibru.