Aplicații: Principiul II al termodinamicii

① O mașină termică funcționează după un ciclu Carnot. Gazul cedează sursei reci o fracțiune $f = 0,6$ din căldura absorbită de la sursa caldă, care se află la o temperatură $t_1 = 227\ °C$.

Ⓐ Să se determine randamentul procesului și temperatura sursei reci.

• $\eta = 1 - \frac{|Q_R|}{Q_C} = 1 - \frac{T_R}{T_C} \Rightarrow \frac{|Q_R|}{Q_C} = \frac{T_R}{T_C}$ $\Big| \Rightarrow$

$|Q_R| = f \cdot Q_C$

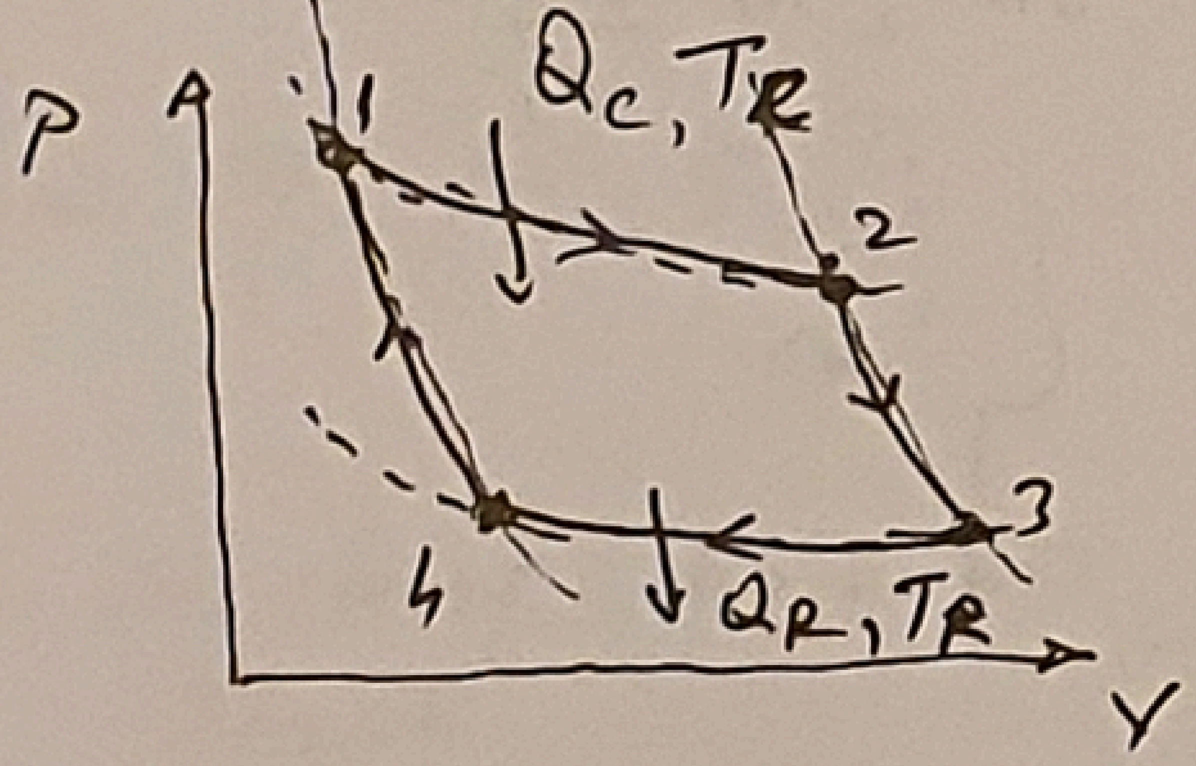
$\Rightarrow \frac{f \cdot \cancel{Q_C}}{\cancel{Q_C}} = \frac{T_R}{T_C} \Rightarrow T_R = f \cdot T_C \Rightarrow T_R = 0,6 \cdot (273 + 227)\ K$

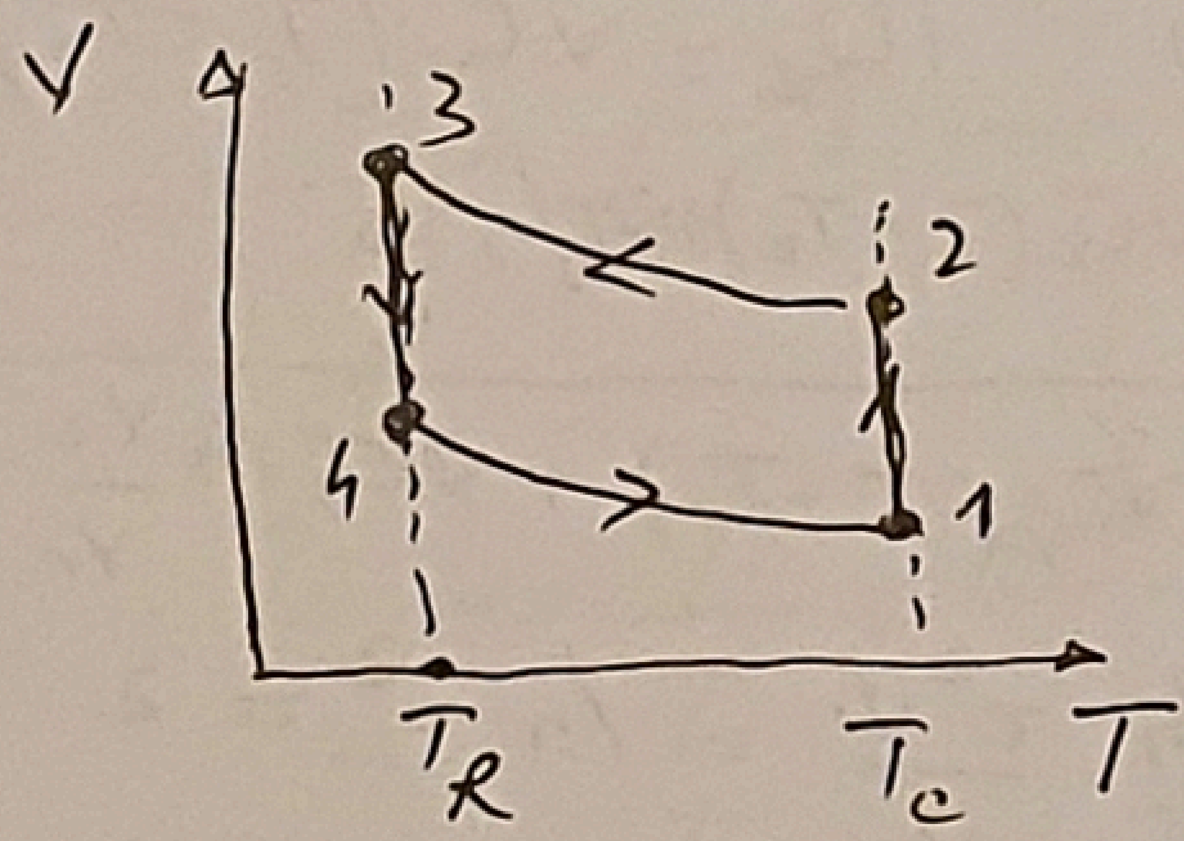
$\Rightarrow \boxed{T_R = 300\ K}$

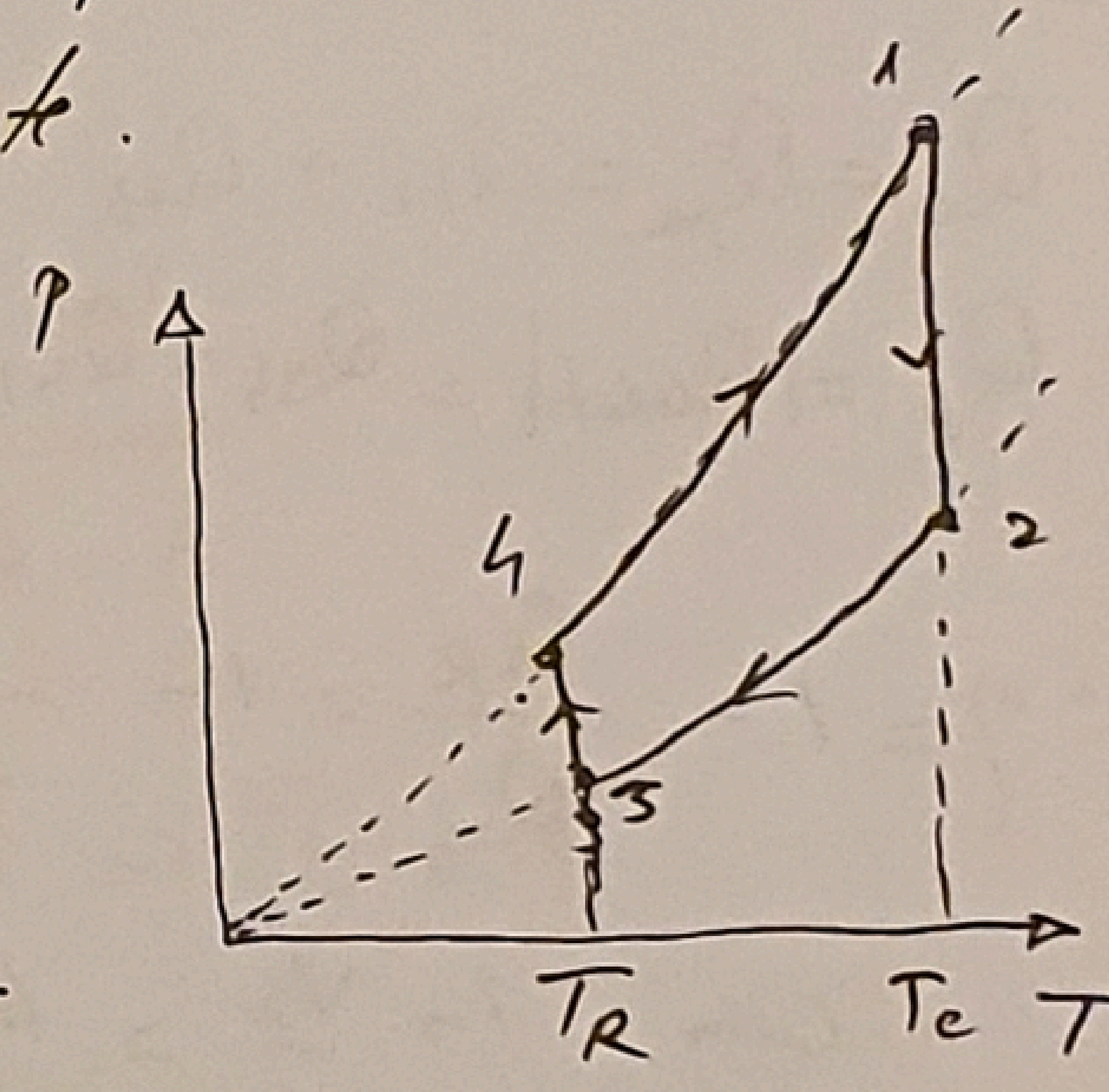
$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_R}{T_C} = 1 - \frac{300\ K}{500\ K} \Rightarrow \eta = 0,4 \Rightarrow \boxed{\eta = 40\%}$

Ⓑ Reprezentați ciclul Carnot în coordonate p-V, V-T și p-T.

• $\left.\begin{matrix} 1 \to 2 \\ 3 \to 4 \end{matrix}\right\}$ transf. izoterme ; $\left.\begin{matrix} 2 \to 3 \\ 4 \to 1 \end{matrix}\right\}$ transf. adiabate.







② Să se calculeze randamentul ciclului Carnot în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = \frac{V_4}{V_1} = 2$ și exponentul adiabatic $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$.

• din rep. grafică a ciclului Carnot:

→ transf. adiabate: $\begin{cases} T_C V_2^{\gamma-1} = T_R V_3^{\gamma-1} \\ T_R V_4^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1} \end{cases}$ (ec. Poisson)

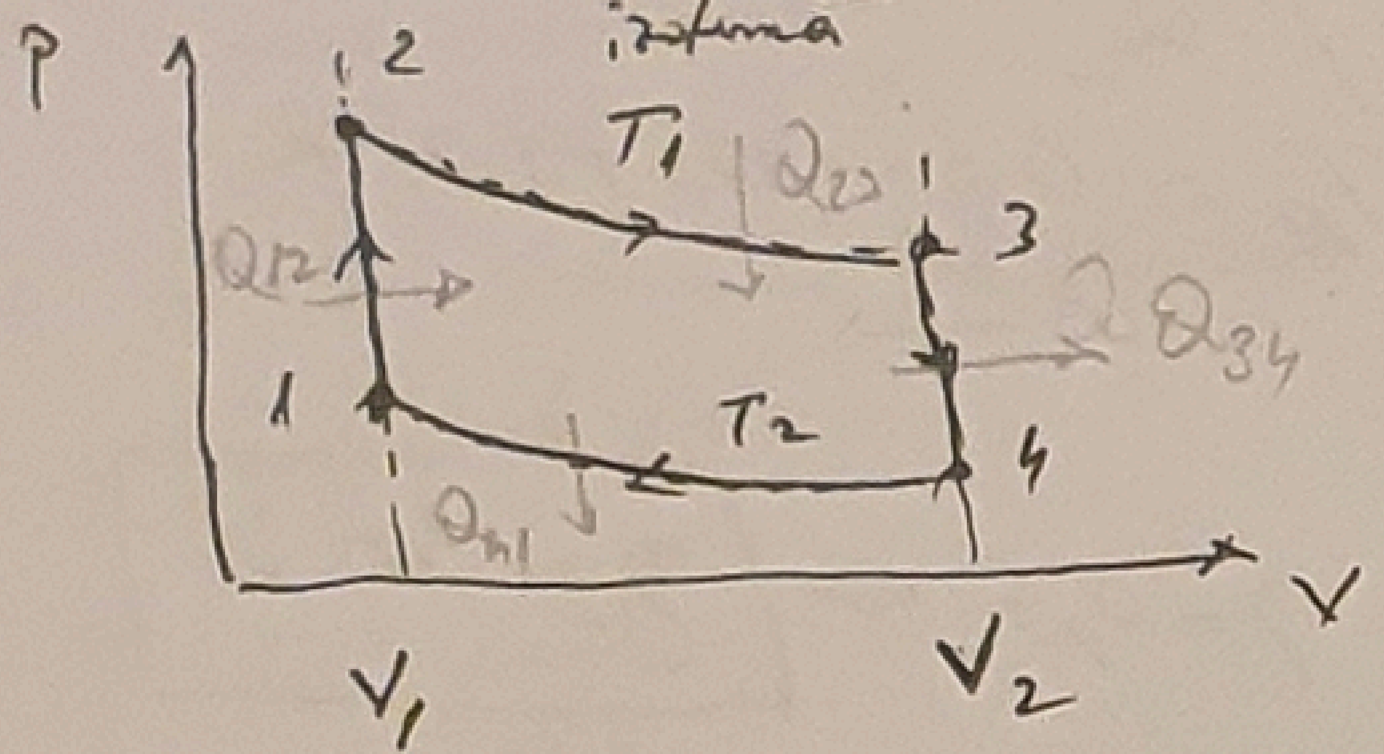
$\Rightarrow \begin{cases} \frac{T_R}{T_C} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} \\ \frac{T_R}{T_C} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \left.\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_R}{T_C}\ \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_4} = \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \eta_c = 1 - \frac{T_R}{T_C} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \Rightarrow \eta_c = 1 - \frac{1}{2^{0,4}} \Rightarrow \boxed{\eta = 24\ \%}$

(3) O mașină termică funcționează după un ciclu format din două izocore și două izoterme. Pe transf. izocore volumele sunt V_1 și $V_2 = e^2 V_1$, iar pe izoterme temperaturile sunt $T_1 = 400\,K$ și $T_2 = 300\,K$. Substanța de lucru este un gaz ideal având $C_V = \frac{5}{2}R$ și $R = 8{,}314 \frac{J}{mol\,K}$.

(A) Să se reprezinte diagrama p-V a acestui ciclu.



$V_2 > V_1$

$T_2 < T_1$

(B) Să se determine randamentul acestei mașini termice.

$Q_c = Q_{pr.} = Q_{12} + Q_{23}$

$Q_R = |Q_{cedat}| = Q_{34} + Q_{41}$

$\Rightarrow \begin{cases} Q_C = \nu C_V (T_1 - T_2) + \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ Q_R = \nu C_V (T_1 - T_2) + \nu R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \end{cases}$

$\bullet\ \eta = 1 - \frac{Q_R}{Q_C} = 1 - \frac{\cancel{\nu} C_V (T_1 - T_2) + \cancel{\nu} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{\cancel{\nu} C_V (T_1 - T_2) + \cancel{\nu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} \Bigg\} \Rightarrow$

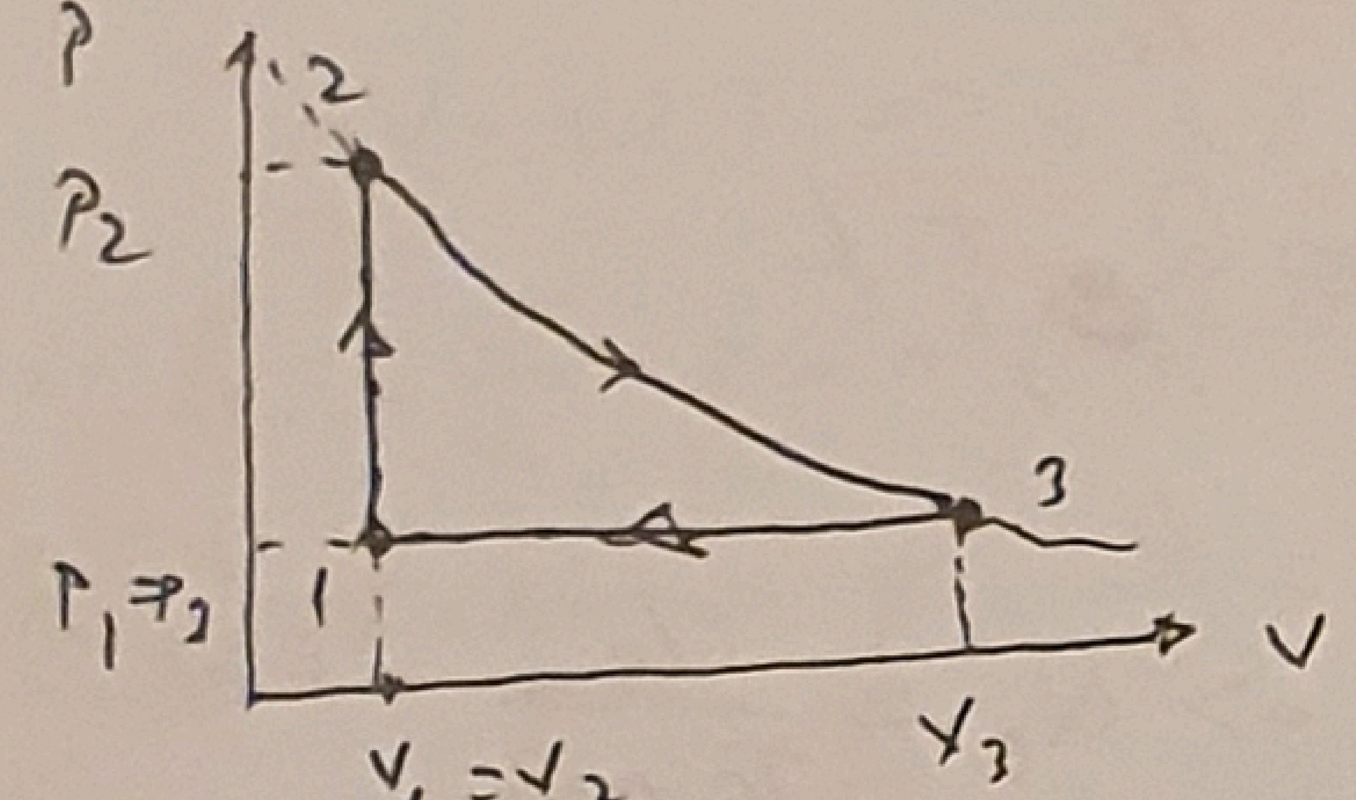
$\bullet$ Cum $\ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{e^2 V_1}{V_1} = \ln e^2 = 2$

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{\frac{5}{2}\cancel{R}(T_1 - T_2) + \cancel{R} \cdot 2 T_2}{\frac{5}{2}\cancel{R}(T_1 - T_2) + \cancel{R} \cdot 2 T_1} = 1 - \frac{\frac{5}{2} \cdot 100K + 600K}{\frac{5}{2} \cdot 100K + 800K}$

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{850\,K}{1050\,K} \Rightarrow \eta = 0{,}19 \Rightarrow \boxed{\eta = 19\ \%}$

④ O cantitate de gaz ideal parcurge un ciclu format dintr-o transf. izocoră, în care presiunea crește de $n = 8$ ori, o destindere adiabatică și o comprimare izobară. ($\gamma = 1,5$)

Ⓐ Reprezentați procesul în coordonate p-V.



1→2 : transf. izocoră
2→3 : transf. adiabatică
3→1 : transf. izobară.

Ⓑ Să se determine randamentul unei mașini termice care funcționează după un astfel de ciclu.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \eta = 1 - \dfrac{|Q_p|}{Q_c} \\ \bullet\ Q_c = Q_{primit} = Q_{12} = \nu C_V \Delta T = \nu C_V (T_2 - T_1) \\ \bullet\ Q_p = |Q_{ced}| = |Q_3| = |-\nu C_p \Delta T| \\ \quad = -\nu C_p (T_1 - T_3) = \nu C_p (T_3 - T_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{\nu C_p (T_3 - T_1)}{\nu C_V (T_2 - T_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \gamma \frac{T_1}{T_1} \cdot \frac{\left(\frac{T_3}{T_1} - 1\right)}{\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)} = 1 - \gamma \frac{\frac{T_3}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$$

• din transf. 1→2 izocoră $\Rightarrow \dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2} \Rightarrow \dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{8p_1}{T_2} \Rightarrow \dfrac{T_2}{T_1} = 8$

• din transf. 2→3 adiabatică $\Rightarrow T_2 p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3 p_3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3 p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \dfrac{T_3}{T_2} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$

$p_3 = p_1$

• dar $\dfrac{T_3}{T_1} = \dfrac{T_3}{T_2} \cdot \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \Rightarrow \dfrac{T_3}{T_1} = 4$

• $\eta = 1 - \gamma \dfrac{4-1}{8-1} \Rightarrow \eta = 1 - 1,5 \cdot \dfrac{3}{7} \simeq 0,35 \Rightarrow \boxed{\eta = 35\%}$

⑤ Un refrigerator funcționează între temperaturile $t_2 = -13°C$ și $t_1 = 27°C$. Pe parcursul unui ciclu acesta consumă o energie electrică de 2 kJ.

Ⓐ Care este căldura absorbită din exterior?

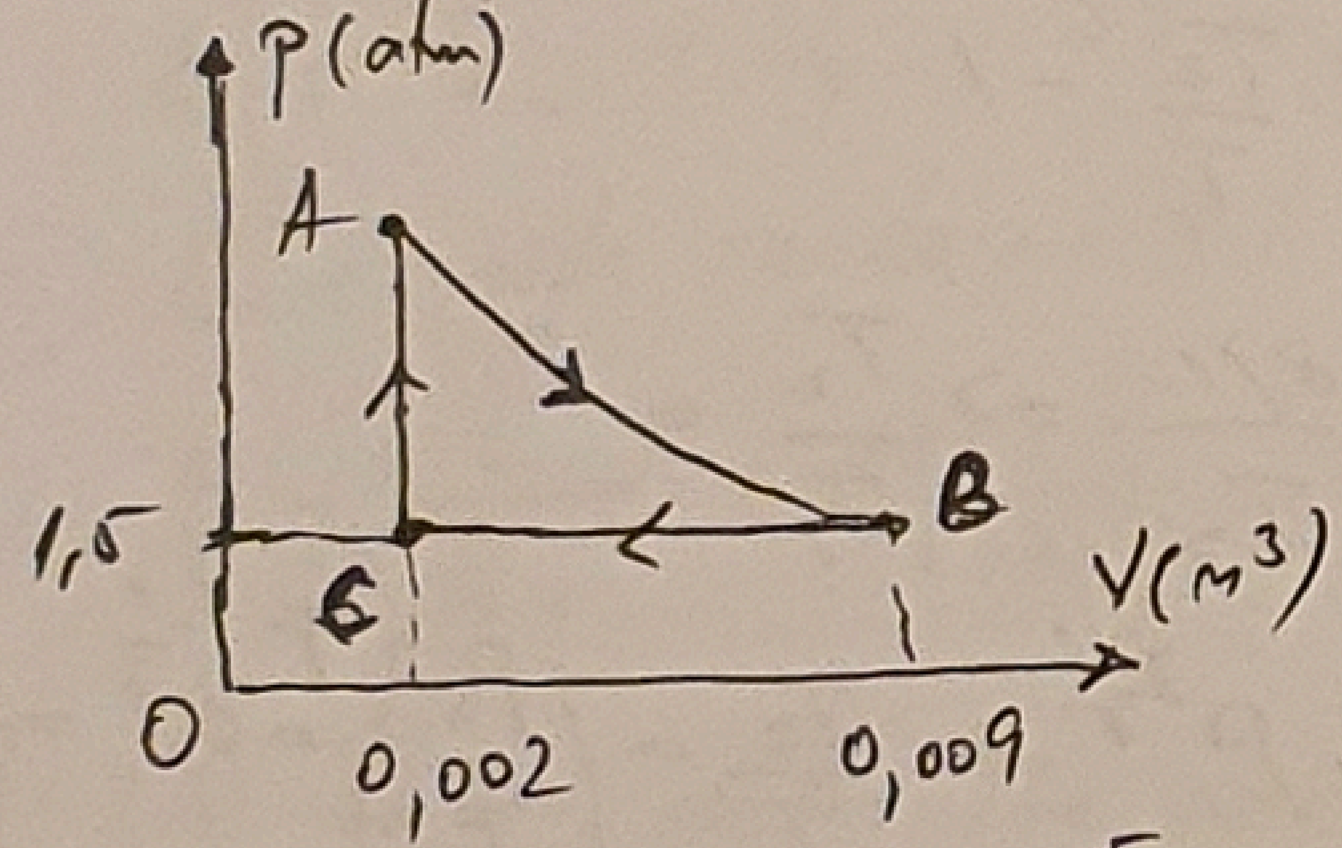
- $\eta = 1 - \frac{|Q_R|}{Q_c} = 1 - \frac{T_R}{T_c} \Rightarrow \left|\frac{Q_R}{Q_c}\right| = \frac{T_R}{T_c}$
- din legea de conservare a energiei: $Q_R = Q_c + L$
- $L = E_{el} \Rightarrow Q_R = Q_c + E_{el}$

$\Rightarrow \frac{T_R}{T_c} = \frac{Q_c + E_{el}}{Q_c} \Rightarrow \frac{T_R}{T_c} = 1 + \frac{E_{el}}{Q_c} \Rightarrow Q_c = \frac{T_c}{T_R + T_c} \cdot E_{el}$

$\Rightarrow Q_c = \frac{300\,K}{260\,K - 300\,K} \cdot 2 \cdot 10^6\,J \Rightarrow \boxed{Q_c = 15\,kJ}$

⑥ În figură, este prezentată diagrama p-V a ciclului unei mașini termice care utilizează 0,25 moli de gaz ideal având $\gamma = 1,4$. Transformarea AB este adiabată.

Ⓐ Să se determine presiunea gazului în punctul A.



transf. A → B - transf. izocoră

transf. B → C - transf. izobară

transf. A → C = transf. adiabată.

- transf A → B ⇒ $p_A V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma} \Rightarrow p_A = p_B \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma - 1}$

$\left.\begin{array}{l} p_B = 1,5\,atm = 1,515 \cdot 10^5\,Pa \\ V_B = 9 \cdot 10^{-3}\,m^3 \\ V_A = 2 \cdot 10^{-3}\,m^3 \end{array}\right\} \Rightarrow p_A = 1,515 \cdot 10^5\,Pa \cdot \left(\frac{9 \cdot 10^{-3}\,m^3}{2 \cdot 10^{-3}\,m^3}\right)^{1,4}$

$\Rightarrow \boxed{p_A = 12,44 \cdot 10^5\,Pa}$

(B) Care este cantitatea de căldură absorbită și pe ce transformare se întâmplă acest proces?

→ căldura este absorbită pe transf. A→C deoarece temp. crește.

→ transf. A→C – transf. izocoră : $Q_v = \nu C_v \Delta T$

• $pV = \nu RT \Rightarrow \nu \Delta T = \frac{V \Delta p}{R}$

$\Rightarrow Q_v = \frac{C_v}{R} \cdot V \Delta p \Rightarrow$

$\Rightarrow Q_v = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} m^3 (12,4 \cdot 10^5 Pa - 1,515 \cdot 10^5 Pa) \Rightarrow \boxed{Q_v = 5470\ J}$

Obs.: $\gamma = 1,4 \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = 1,4 \Rightarrow$ gaz biatomic $\Rightarrow C_v = \frac{5}{2}R$.

(C) Care este căldura cedată exteriorului și pe ce transf.?

→ Q este cedat pe procesul B→C deoarece temp. scade.

• B→C = transf. izobară: $Q_p = \nu C_p \Delta T \Rightarrow Q_p = \frac{C_p}{R} p \Delta V \Rightarrow$

$pV = \nu RT \Rightarrow \nu \Delta T = p \frac{\Delta V}{R}$; $C_p = \frac{7}{2} R$

$\Rightarrow Q_p = \frac{7}{2} \cdot 1,515 \cdot 10^5 Pa \cdot (2 \cdot 10^{-3} m^3 - 9 \cdot 10^{-3} m^3) \Rightarrow \boxed{Q_p = -3723\ J}$

(D) Care este lucrul mecanic efectuat?

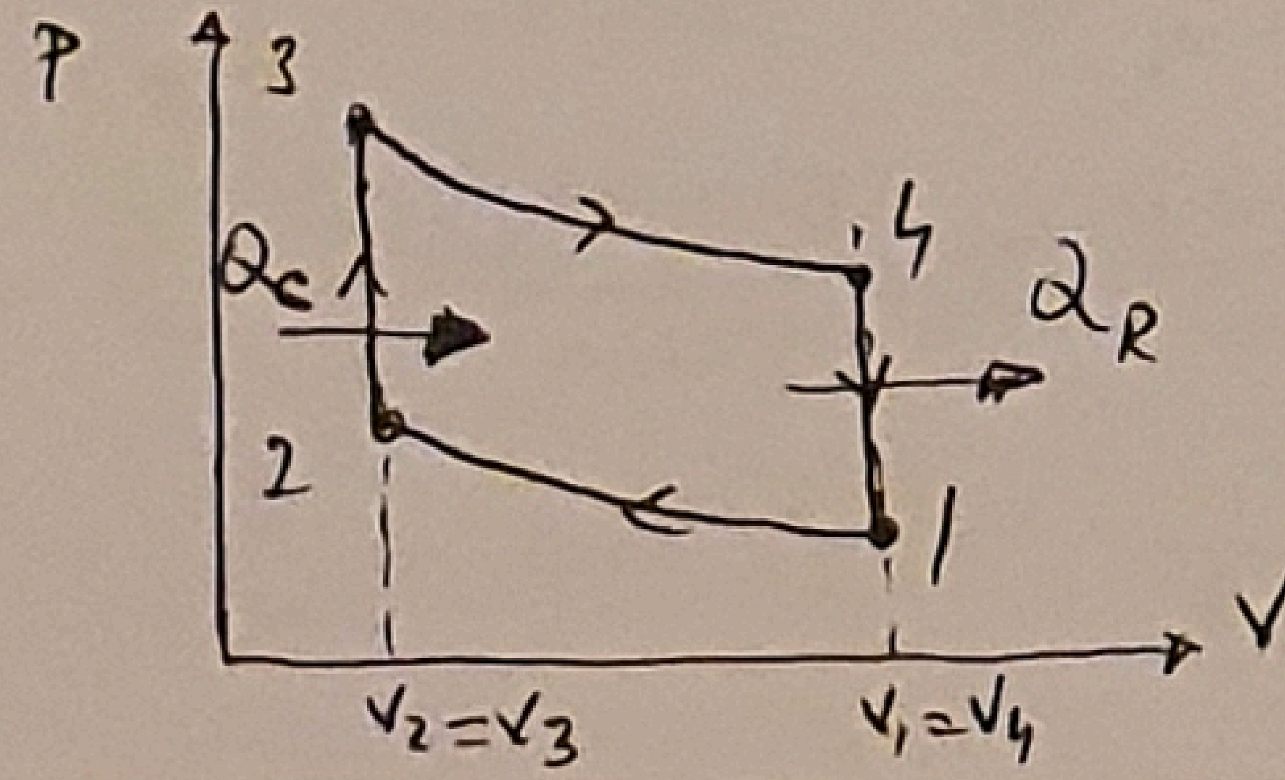
• $L = Q_v + Q_p = 5470\ J + (-3723\ J) \Rightarrow \boxed{L = 1747\ J}$

(E) Care este randamentul mașinii termice?

$\eta = \frac{L}{Q_v} = \frac{1747\ J}{5470\ J} \Rightarrow \eta = 0,319 \Rightarrow \boxed{\eta \approx 32\ \%}$

(7) (A) Să se determine randamentul unui motor Otto care are raportul de compresie $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2} = 9,5$ și $\gamma = 1,4$.

• Motorul Otto funcționează după un ciclu format din două adiabate și două izocore.



• transf. 1→2 (adiabatică): $\begin{cases} T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \\ Q_{12} = 0 \end{cases}$

• transf 2→3 (izocoră): $\begin{cases} \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{V_3} \\ Q_c = Q_{23} = \nu C_v \Delta T > 0 \end{cases}$

• transf. $3 \to 4$ (adiabată) $\begin{cases} T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1} \\ Q_{34} = 0 \end{cases}$

• transf. $4 \to 1$ (izocoră): $\begin{cases} \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_4}{T_4} \\ Q_R = Q_{41} = -\nu C_V \Delta T < 0. \\ \quad = -\nu C_V (T_1 - T_4) \end{cases}$

• $\eta = 1 - \frac{|Q_R|}{Q_c} = 1 - \frac{\nu C_V (T_4 - T_1)}{\nu C_V (T_3 - T_2)} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{T_2\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)}$

• transf. $1 \to 2 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$

• transf $3 \to 4 \Rightarrow \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$

$\xrightarrow[V_2 = V_3]{V_1 = V_4} \begin{cases} \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_4}{V_2}\right)^{\gamma-1} \\ \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_4}\right)^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \Rightarrow \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

• Cum $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2} = 9{,}5 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \varepsilon^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{9{,}5^{0{,}4}} \Rightarrow \boxed{\eta = 0{,}593 \Rightarrow \eta = 59{,}3\%}$

(B) Dacă motorul obține 10 kJ de căldură prin arderea combustibilului, care este căldura cedată mediului exterior?

$\eta = 1 - \frac{|Q_R|}{Q_c} \Rightarrow |Q_R| = Q_c(1 - \eta) = 10\ kJ\,(1 - 0{,}593) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|Q_R| = 4065\ J}$

⑧ Motorul Otto al unui ~~rot~~ automobil Mercedes Benz SLK are un raport de compresie $\varepsilon = 8,8$.

Ⓐ Considerând $\gamma = 1,4$, care este randamentul ideal al acestui motor?

$$\eta = 1 - \frac{|Q_r|}{Q_c} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma} \Rightarrow \eta = 1 - 8,8^{-0,4} \Rightarrow \boxed{\eta_M = 58\%}$$

Ⓑ Motorul unui Dodge Viper GTZ are un raport de compresie $\varepsilon = 9,6$. Care este creșterea randamentului ideal ce rezultă din creșterea compresiei?

$$\eta = 1 - \varepsilon^{1-\gamma} = 1 - (9,6)^{-0,4} \Rightarrow \eta_\Delta = 59,5\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_\Delta - \eta_M = 1,5\%.$$

⑨ Motorul unui avion are mai mulți cilindri funcționează la $2,5 \cdot 10^3 \frac{rot}{min}$ și consumă, din benzina arsă, o energie de $7,89 \cdot 10^3$ J și evacuează $4,55 \cdot 10^3$ J pentru fiecare rotație a arborelui cotit.

Ⓐ Câți litri de combustibil consumă într-o oră de funcționare dacă (căldura de ardere) puterea calorică a combustibilului este de $4,03 \cdot 10^7 \frac{J}{l}$?

• Energia furnizată în fiecare oră: $E_h = 7,89 \cdot 10^3 \frac{J}{rot} \cdot 2500 \frac{rot}{min} \cdot \frac{60\ min}{1h}$

$$E_h = 1,18 \cdot 10^9 \frac{J}{h}$$

• Cantitatea de combustibil: $C_l = \frac{E_h}{P_c} = \frac{1,18 \cdot 10^9 \frac{J}{h}}{4,03 \cdot 10^7 \frac{J}{l}} \Rightarrow C_l = 29,4 \frac{l}{h}$

Ⓑ Dacă se neglijează frecarea, care este puterea mecanică furnizată de motor?

$$\left.\begin{aligned} & P = \frac{Q_c}{\Delta t} \\ & Q_c = E + |Q_r| \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \frac{E_{motor}}{\Delta t} + \frac{|Q_r|}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{puterea utilă: } P_u = \frac{E_{motor}}{\Delta t} = \frac{Q_c}{\Delta t} - \frac{Q_r}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow P_u = \left(\frac{7,89 \cdot 10^3 J}{rotație} - \frac{4,58 \cdot 10^3 J}{rotație}\right) \cdot 2500 \frac{rot}{min} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} \Rightarrow \boxed{P_u = 1,38 \cdot 10^5 W}$$

$$\bullet\ P_u = 1,38 \cdot 10^5 W \cdot \frac{1\ CP}{736\ W} \Rightarrow \boxed{P_u = 185\ CP}$$

c) Care este momentul forței exercitat de arborele cotit?

$$P_u = \omega M \Rightarrow M = \frac{P_u}{\omega} = \frac{1{,}38\cdot10^5\ W}{2500\ \frac{rot}{min}} \Rightarrow \frac{1{,}38\cdot10^5\ \frac{J}{s}}{2500\ \frac{rot}{60s}\cdot 2\pi\ \frac{rad}{rot}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 527\ N\cdot m}$$

d) Care este puterea transferată exteriorului de sistemul de răcire și esapament?

$$P_{predata} = \frac{Q_R}{\Delta t} = \frac{4{,}58\cdot10^3\ J}{rot}\cdot\frac{2500\ rot}{60s} \Rightarrow \boxed{P_{pred.} = 1{,}91\cdot10^5\ W}$$

(10) O pompă de căldură are un coeficient de performanță $K_c = 3{,}8$ și operează consumând o energie electrică de $7{,}03\cdot10^3\ W$.

a) Care este energia furnizată locuinței pe durata a 8h de funcționare?

$$\cdot\ K_c = \frac{|Q_c|}{L} \Rightarrow |Q_c| = K_c\cdot L = K_c\cdot\frac{P}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Q_c| = 3{,}8\cdot\frac{7{,}03\cdot10^3\ W}{8\cdot3600\ s} \Rightarrow \boxed{|Q_c| = 7{,}69\cdot10^8\ J}$$

b) Care este energia transferată de la aerul atmosferic?

$$L = |Q_c| + |Q_R| \Rightarrow |Q_R| = |Q_c| - L = |Q_c| - \frac{|Q_c|}{K_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Q_R| = |Q_c|\left(1 - \frac{1}{K_c}\right) = 7{,}69\cdot10^8\ J\left(1-\frac{1}{3{,}8}\right) \Rightarrow \boxed{|Q_R| = 5{,}67\cdot10^8\ J}$$

(11) Un motor care funcționează după un ciclu Carnot furnizează o putere de 150 kW. Acesta schimbă căldură cu două rezervoare termice, unul aflat la $t_R = 20°C$ și celălalt la $t_C = 500°C$.

a) Care este energia furnizată motorului, sub formă de căldură, în fiecare oră?

$$\cdot\ \eta = \frac{L}{Q_c} = 1 - \frac{|Q_R|}{Q_c} = 1 - \frac{T_R}{T_c} \Bigg\} \Rightarrow Q_c = \frac{L}{\eta} = \frac{L}{1-\frac{T_R}{T_c}} \Rightarrow$$

$$L = E_{el} = P_{el}\cdot\Delta t$$

$$\Rightarrow Q_c = \frac{P_{el}\cdot\Delta t}{1-\frac{T_R}{T_c}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_c = \frac{150\cdot10^3\ W\cdot3600\ s}{1-\frac{293\ K}{773\ K}} \Rightarrow \boxed{Q_c = 8{,}7\cdot10^8\ J}$$

(B) Care este energia (sub formă de căldură) ejectată în fiecare oră?

$\cdot |Q_R| = |Q_c| - E_{el} = |Q_c| - P_{el} \cdot \Delta t$

$\Rightarrow |Q_R| = 8{,}7 \cdot 10^8 J - 1{,}5 \cdot 10^5 W \cdot 3600 s \Rightarrow \boxed{|Q_R| = 3{,}3 \cdot 10^8 J}$

(12) O potcoavă cu masa de 1 kg este luată dintr-o forjă în care a fost încălzită la 900°C. După aceea, potcova de fier este aruncată în 4 kg de apă aflată la 10°C. Dacă presupunem că nu există pierderi de căldură în exterior, să se determine variația entropiei totale a sistemului potcoavă–apă ($c_{Fe} = 448 \frac{J}{kg \cdot °C}$; $c_{apă} = 4186 \frac{J}{kg \cdot °C}$)

$\cdot$ La echilibru: $Q_c + Q_r = 0 \Rightarrow m_{Fe} \cdot c_{Fe} \cdot (t_f - 900°C) = m_{apă} \cdot c_{apă} (t_f - 10°C)$

$\Rightarrow t_f (m_{Fe} c_{Fe} - m_{apă} c_{apă}) = 900°C \cdot m_{Fe} c_{Fe} - 10°C \, m_{apă} c_{apă}$

$$\Rightarrow t_f = \frac{900°C \cdot 1kg \cdot 448 \frac{J}{kg \cdot °C} - 10° \, 4kg \cdot 4186 \frac{J}{kg \cdot °C}}{1kg \cdot 448 \frac{J}{°C} - 4kg \cdot 4186 \frac{J}{°C}}$$

$\Rightarrow t_f = 33{,}2°C \Rightarrow \boxed{T_f = 306{,}3 K}$

$$\cdot \, dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{apă} + \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{Fe} \Rightarrow \Delta S = \int_{T_i = 283K}^{T_f = 306{,}3K} \frac{m_{apă} c_{apă} \, dT}{T} + \int_{T_i = 1173K}^{T_f = 306{,}3K} \frac{m_{Fe} c_{Fe} \, dT}{T}$$

$\delta Q = m c \, dT$

$$\Rightarrow \Delta S = m_{apă} \cdot c_{apă} \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)\Bigg|_{283K}^{306{,}3K} + m_{Fe} c_{Fe} \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)\Bigg|_{1173K}^{306{,}3K}$$

$$\Rightarrow \Delta S = 4kg \cdot 4186 \frac{J}{kg\,K} \cdot \ln \frac{306{,}3 K}{283 K} + 1kg \cdot 448 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot \ln \frac{306{,}3K}{1173K}$$

$\Rightarrow \boxed{\Delta S = 717 \frac{J}{K}}$

(13) Care este variația de entropie care apare când un cub de gheață cu masa de 27,9 g aflat la $-12\,°C$ este transformat în aburi la $115\,°C$? $\left(c_{gheață} = 2090 \frac{J}{kg \cdot °C}\right)$

• Solid

$$\Delta S_1 = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T_i = 0°C}^{T_f = 0°C} \frac{mc\,dT}{T} = mc \ln\frac{T_f}{T_i} = 27,9 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 2090 \frac{J}{kg \cdot °C} \ln\frac{273K}{261K}$$

$(-12° - 0°C)$

$$\Rightarrow \Delta S_1 = 2,62 \frac{J}{K}$$

• topire $\Delta S_2 = \frac{Q}{T} = \frac{m\lambda_t}{T} = \frac{27,9 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 3,33 \cdot 10^5 \frac{J}{kg}}{273K} = 34 \frac{J}{K}$.

• lichid $(273K - 373K)$: $\Delta S_3 = \int_i^f \frac{m\,c_{apă}}{T} dT = m c_{apă} \cdot \ln\frac{T_f}{T_i} \Rightarrow$

$(0° - 100°)C$

$$\Rightarrow \Delta S_3 = 27,9 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 4186 \frac{J}{kg \cdot °C} \cdot \ln\frac{373K}{273K} = 36,5 \frac{J}{K}.$$

• fierbere $\Delta S_4 = \frac{m\lambda_v}{T} + m\,c_{vapori} \ln\frac{T_f}{T_i}$

$$= \frac{27,9 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 2,26 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}}{373K} + (27,9 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 2010 \frac{J}{kg \cdot °C} \cdot \ln\frac{388K}{373K}$$

$$\Rightarrow \Delta S_4 = 171,21 \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{Total} = \sum_{i=1}^{4} \Delta S \Rightarrow \boxed{\Delta S_{Total} = 244 \frac{J}{K}}.$$

(14) Să se determine creșterea de entropie a universului când se adaugă 20g de lapte aflat la 5°C într-o cană de 200g de cafea aflată la 60°C. Vom presupune că $c_{lapte} = c_{cafea} = 4,2 \frac{J}{g \cdot °C}$.

• $T_1 = 278K$

$T_2 = 333K$.

$$\Delta S = m_l c_{lapte} \int_i^f \frac{dT}{T} + m_c c_{cafea} \int_i^f \frac{dT}{T}$$

$$= 20g \cdot 4,2 \frac{J}{g \cdot °C} \cdot \ln\frac{328K}{278K} + 200g \cdot 4,2 \frac{J}{g \cdot °C} \cdot \ln\frac{328K}{333K}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S = 1,18 \frac{J}{K}}$$

(15) Un sistem ce conține ν moli de gaz ideal având căldura molară la presiune constantă C_p trece prin două procese reversibile. Inițial are presiunea p_i și volumul V_i, expandează izoterm, după care se contractă adiabatic până când ajunge într-o stare finală în care presiunea este p_i și volumul $3V_i$. Care este variația de entropie în procesul izoterm?

• transf. izotermă: $p_i V_i = p_2 V_2$

• transf. adiabată: $p_2 V_2^{\gamma} = p_i (3V_i)^{\gamma}$

$\Rightarrow \dfrac{p_i V_i}{V_2} \cdot V_2^{\gamma} = p_i (3V_i)^{\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_i V_i V_2^{\gamma-1} = p_i (3V_i)^{\gamma} \Rightarrow V_2^{\gamma-1} = 3^{\gamma} \cdot V_i^{\gamma-1} \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_i} = 3^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

• pe transf. izotermă: $L = \int_1^2 p\,dV = \nu R T_i \int_1^2 \dfrac{dV}{V} \Rightarrow L = \nu R T_i \ln \dfrac{V_2}{V_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = \nu R T_i \ln 3^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow \nu R T_i \left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right) \ln 3$.

Obs pe transf. izotermă: $\Delta U = 0$, gazul se expandează $\Rightarrow L = Q \Rightarrow S$ crește.

$\Rightarrow \Delta S = \dfrac{Q}{T} = \dfrac{\nu R \cancel{T_i}}{\cancel{T_i}} \dfrac{\gamma}{\gamma-1} \ln 3 \Rightarrow$

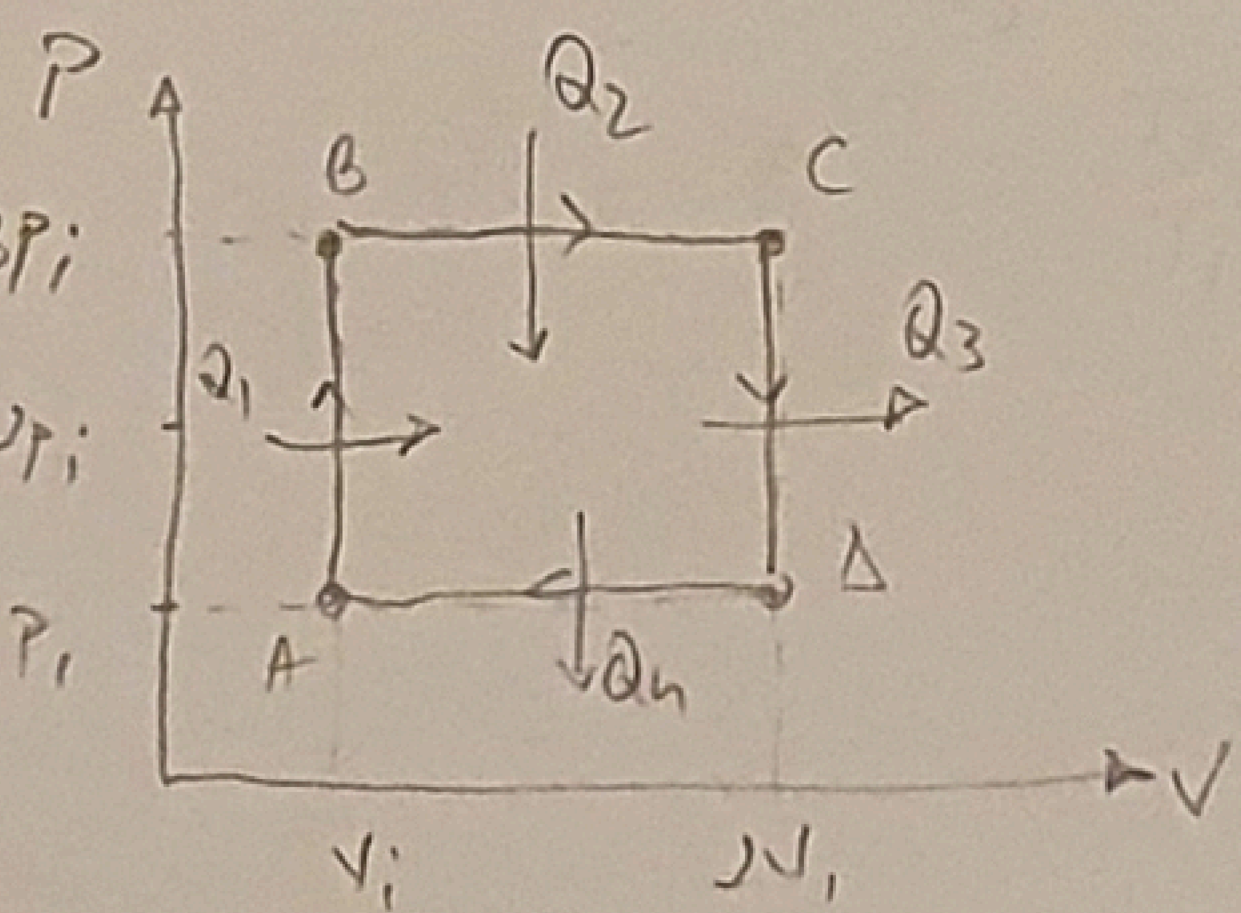
• cum $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} \Rightarrow C_p = \gamma C_V = C_V + R \Rightarrow C_V(\gamma-1) = R \Rightarrow C_V = \dfrac{R}{\gamma-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma-1} \Rightarrow \dfrac{\gamma}{\gamma-1} = \dfrac{C_p}{R}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta S = \nu C_p \ln 3}$

(16) Un mol de gaz ideal monoatomic suferă transformarea ciclică din figură. În punctul A, pres., temp. și volumul au valorile p_i, V_i și T_i.

(A) Care este energia totală primită de gaz pe parcursul ciclului?



• în A: $p_i V_i = \nu R T_i$; $\nu = 1$ mol

• în B: $3p_i V_i = \nu R T_B \Rightarrow T_B = 3T_i$

• în C: $3p_i (2V_i) = \nu R T_C \Rightarrow T_C = 6T_i$

• în Δ: $p_i (2V_i) = \nu R T_\Delta \Rightarrow T_\Delta = 2T_i$

• $Q_{AB} = \nu C_v (T_B - T_A) = \nu C_v (3T_i - T_i) \Rightarrow Q_{AB} = 3\nu R T_i$

• $Q_{BC} = \nu C_p (T_C - T_B) = \nu C_p (6T_i - 3T_i) \Rightarrow Q_{BC} = 7{,}5\,\nu R T_i$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ Q_c}}{Q_{primit}} = Q_{AB} + Q_{BC} = 3\nu R T_i + 7{,}5\,\nu R T_i \Rightarrow \boxed{Q_c = Q_{primit} = 10{,}5\,\nu R T_i}$$

(B) Care este energia care părăsește sistemul pe parcursul ciclului?

• $Q_{CD} = \nu C_v (T_D - T_C) = \nu C_v (2T_i - 6T_i) \Rightarrow Q_{CD} = -6\nu R T_i$

• $Q_{DA} = \nu C_p (T_A - T_D) = \nu C_p (T_i - 2T_i) \Rightarrow Q_{DA} = -2{,}5\,\nu R T_i$

$$\Rightarrow |Q_R| = Q_{cedat} = |Q_{CD} + Q_{DA}| = |-6\nu R T_i - 2{,}5\,\nu R T_i| \Rightarrow \boxed{|Q_R| = 8{,}5\,\nu R T_i}$$

(C) Care este randamentul unei mașini termice care ar funcționa după un astfel de ciclu?

$$\eta = 1 - \frac{|Q_R|}{Q_c} = \frac{Q_c - |Q_R|}{Q_c} = \frac{10{,}5\,\nu R T_i - 8{,}5\,\nu R T_i}{10{,}5\,\nu R T_i} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\eta = 0{,}19 \\ \eta = 19\%\end{array}}$$

(D) Comparați randamentul de la punctul precedent cu cel al unui ciclu Carnot care ar opera între aceleași temperaturi extreme.

$$\eta_c = 1 - \frac{T_R}{T_C} = 1 - \frac{T_i}{6T_i} \Rightarrow \eta_c = 0{,}833 \rightarrow \boxed{\eta_c = 83{,}3\%}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_c \gg \eta}$$

Seminar: ***PRINCIPIILE MECANICII STATISTICE***

1. Calculați înălțimea h a unei atmosfere izoterme la care presiunea scade de două ori față de cea de la suprafața Pământului. Se cunoaşte: presiunea atmosferică la suprafața Pământului p_0, $R = 8{,}314\, J/mol \cdot K$, aerul atmosferic se află la temperatura $t = 20°C$, masa molară a aerului $\mu = 29 \cdot 10^{-3} kg/mol$, $g = 9{,}81\, m/s$, iar aerul atmosferic este considerat gaz ideal.

Rezolvare

Utilizând expresia formulei barometrice şi ținând cont $p(h) = \frac{p_0}{2}$, că diferența de presiune între cele două puncte va fi:

$$\frac{p_0}{2} = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

Logaritmând această relație obținem:

$$h = \frac{RT}{\mu g} ln2 = 5900\ m$$

Obs: Experimental se constată că înălțime al care presiunea scade la jumătate față de cea normală este inferioară lui 5900 m. Acest fapt se datorează variației temperaturii în vecinătatea solului (atmosfera nu este izotermă la suprafața Pământului), iar presiunea scade atunci când ne îndepărtăm de sol.

2. Dacă presupunem că procesul de variație a presiunii atmosferice cu înălțimea este adiabatic, să se determine variația temperaturii cu înălțimea. Se consideră $\mu = 29 \cdot 10^{-3} kg/mol$, $g = 9{,}81\, m/s$, $R = 8{,}314\, J/mol \cdot K$ şi $\gamma = 7/5$.

Rezolvare

Variația presiunii atmosferice între două straturi de aer este dată de formula barometrică:

$$dp = -\frac{\mu g}{RT} \cdot p \cdot dh \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \cdot dh$$

Din ecuația adiabatei:

$$p^{1-\gamma} T^{\gamma} = const. \Rightarrow p^{\frac{1}{\gamma}-1} T = const.$$

de unde: $\frac{dT}{T} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{dp}{p} = 0$

Astfel, va rezulta:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} = -\frac{\mu g}{RT} \cdot dh \ \Longrightarrow\ \frac{dT}{dh} = -\frac{\mu g}{RT} \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \cong -9{,}74\ \frac{K}{km}.$$

3. Determinați procentul de moleculele de azot care au viteza cuprinsă în intervalul $(v_p,\ v_p + \Delta v)$, unde $v_p = 487\ m/s$ este viteza cea mai probabilă, iar $\Delta v = 20 m/s$.

Rezolvare

Scriem legea de distribuție Maxwell-Boltzmann sub forma:

$$\frac{\Delta n}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m v_p^2}{2k_B T}} \cdot v_p^2 \Delta v$$

sau $\frac{\Delta n}{n} = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v_p^2}{2RT}} \cdot v_p^2 \Delta v$

unde $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$. Astfel, putem scrie:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4 v_p^2}{\sqrt{\pi} v_p^3} e^{-\frac{v_p^2}{v_p^2}} \Delta v = \frac{4 \Delta v}{\sqrt{\pi}\, v_p} = 0{,}034 = 3{,}4\%.$$

Se observă că rezultatul nu depinde de tipul gazului considerat.

4. Să se determine procentul de molecule dintr-un gaz a căror viteze sunt cuprinse între viteza cea mai probabilă și viteza pătratică medie. Se cunoaște valoarea integralei: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = 0{,}078$.

Rezolvare

Scriem legea de distribuție Maxwell-Boltzmann sub forma:

$$f(v)\Delta v = \frac{\Delta n}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_p}^{v_T} e^{-\frac{m v^2}{2k_B T}} \cdot v^2 dv$$

Notăm: $\alpha = e^{-\frac{m}{2k_B T}}$, $x = v\sqrt{\alpha}$

și obținem: $f(v)\Delta v = \frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{1}^{1{,}22} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0{,}078 = 0{,}176$

sau $f(v)\Delta v = \frac{\Delta n}{n} = 17{,}6\%$.

5. Calculați energia cinetică de translație cea mai probabilă, $E_{c,p}$ a moleculelor unui gaz ideal.

Rezolvare

Scriem funcția de distribuție Maxwell-Boltzmann a distribuției moleculelor după energie sub forma:

$$f(E_c)dE_c = 2\pi \left(\frac{1}{\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_c} \cdot e^{-\frac{E_c}{k_B T}} dE_c$$

Din condiția ca $\frac{f(E_c)}{dE_c} = 0$ rezultă:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{E_c}} - \frac{\sqrt{E_c}}{k_B T}\right) e^{-\frac{E_c}{k_B T}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{c,p} = \frac{k_B T}{2}$$

6. Probabilitatea $\mathrm{d}\mathcal{P}(x,y)$ ca variabilele x şi y să ia valori cuprinse în intervalele $x, x+\mathrm{d}x$ şi $y, y+\mathrm{d}y$ este:

$$\mathrm{d}\mathcal{P}(x,y) = C\exp\left[-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9}$$

Să se determine: a) constanta de normare şi b) expresiile valorilor medii $\langle x\rangle$ şi $\langle y\rangle$, ştiind că variabilele x şi y iau valori cuprinse în intervalul $(-\infty,+\infty)$. Se dau integralele de tip Poisson: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ şi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\exp\left(-a(x-b)^2\right)\mathrm{d}x = b\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Rezolvare.

a) Constanta C se calculează din condiţia de normare:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\mathcal{P}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C\exp\left[-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1. \tag{10}$$

Ținând cont de integrala de tip Poisson din relaţia (10) obţinem:

$$C\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = C\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = C\pi = 1.$$

Rezultă $C = \dfrac{1}{\pi}$.

b) Pe baza proprietăţilor probabilităţilor

$$\mathcal{P}(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\mathcal{P}(x,y)\mathrm{d}y = C\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x, \tag{11}$$

iar valoarea medie a variabilei x este:

$$\langle x\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\mathcal{P}(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$

În mod analog se obţine $\langle y\rangle == \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\mathcal{P}(y)\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y = 0$.

6. Să se calculeze a) masa coloanei de aer din atmosfera Pământului având secţiunea $S = 1\,\mathrm{m}^2$ şi înălţimea $h = 1000m$ şi b) greutatea acesteia la înălţime infinită. Se consideră că temperatura $T = 280\,\mathrm{K}$, acceleraţia gravitaţională $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2$ şi că acestea nu variază cu înălţimea. Se cunoaşte: $R = 8314{,}33\,\mathrm{J/kmol\cdot K}$ şi $p(0) = 10^5\,\mathrm{N/m}^2$.

Rezolvare.

a) Stim că densitatea este dată de relația: $\rho = \dfrac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = \rho S y \Rightarrow$ masa de aer cuprinsă între cotele $y, y+\mathrm{d}y$ va fi:

$$\mathrm{d}m = \rho(y) S \mathrm{d}y, \tag{5}$$

unde densitatea ρ a gazului variază cu înălţimea după legea:

$$\rho(y) = \rho(0) \cdot \exp\left(-\frac{mgy}{kT}\right), \tag{6}$$

$\rho(0)$ fiind densitatea la suprafaţa Pământului.

Din ecuaţia termică de stare pentru gazele ideale pentru N molecule : $pV = NkT$, ţinând cont că volumul este $V = \dfrac{m}{\rho} \Rightarrow p \cdot \dfrac{m}{\rho} = kT$ (pentru $N = 1$) $\Rightarrow \dfrac{m}{kT} = \dfrac{\rho}{p}$ (7)

Ţinând seama de relaţiile (7) şi (6) densitatea ρ a gazului variază cu înălţimea după relaţia :

$$\rho(y) = \rho(0) \cdot \exp\left(-\frac{\rho(0) g y}{p(0)}\right). \tag{8}$$

Dacă înlocuim relaţia (8) în relaţia (5) masa totală a coloanei de aer este:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^h \rho S dy = \int_0^h \rho(0) \cdot \exp\left[-\frac{\rho(0) g y}{p(0)}\right] S dy = S\rho(0) \int_0^h \exp\left(-\frac{\rho(0) g y}{p(0)}\right) dy = \\ &= S\rho(0) \cdot \left(-\frac{p|0|}{\rho(0) g}\right) \exp\left[-\frac{\rho(0) g y}{p(0)}\right]\Bigg|_0^h = \frac{Sp(0)}{g}\left(1 - \exp\left[-\frac{\rho(0) g h}{p(0)}\right]\right) \end{aligned} \tag{9}$$

b) În cazul când $h \to \infty$ masa totală de aer din relaţia (9) devine $m = \dfrac{Sp(0)}{g}$, iar greutatea acesteia:

7. Să se calculeze a) raportul concentraţiilor hidrogenului $(\mu_1 = 2\ \text{kg/kmol})$ faţă de bioxidul de carbon $(\mu_2 = 44\ \text{kg/kmol})$ funcţie de înălţime şi b) înălţimea la care acest raport este trei presupunând că la nivelul solului cele două gaze au aceleaşi concentraţii. Se consideră că temperatura $T = 280\ \text{K}$, acceleraţia gravitaţională $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ şi că acestea nu variază cu înălţimea. Se cunoaşte: $R = 8314{,}33\ \text{J/kmol} \cdot \text{K}$.

Rezolvare.

Concentraţiile celor două gaze variază cu înălţimea după legea:

$$n_1(h) = n_1(0) \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = n_1(0) \exp\left(-\frac{\mu_1 g h}{RT}\right) \tag{11}$$

$$n_2(h) = n_2(0) \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = n_2(0) \exp\left(-\frac{\mu_2 g h}{RT}\right) \tag{12}$$

Observaţie: din ecuaţia termică de stare $pV = NkT$ şi $pV = \nu RT = \dfrac{m}{\mu} RT$, pentru $N = 1$ se obţine: $\dfrac{m}{k} = \dfrac{\mu}{R}$.

Raportul concentraţiilor hidrogenului faţă de bioxidul de carbon funcţie de înălţime este dat de relaţia:

$$\frac{n_1(h)}{n_2(h)} = \frac{n_1(0)}{n_2(0)} \cdot \exp\left[\frac{gh}{RT}(\mu_2 - \mu_1)\right] \tag{13}$$

b)

$$\frac{n_1(h)}{n_2(h)} = 3\,,\ n_1(0) = n_2(0) \ \Rightarrow\ \exp\left[\frac{gh}{RT}(\mu_2 - \mu_1) = 3\right] \ \Rightarrow \text{ înălţimea este:}$$

$$h = \frac{RT\ln 3}{g(\mu_2 - \mu_1)}.$$

4. Să se afle raportul, $\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}$ dintre numărul de molecule cu vitezele cuprinse în intervalul $(v_p, v_p + \Delta v)$ şi numărul de molecule cu vitezele cuprinse în intervalul $\left(\sqrt{\langle v^2\rangle}, \sqrt{\langle v^2\rangle} + \Delta v\right)$, unde v_p şi $\sqrt{\langle v^2\rangle}$ reprezintă viteza cea mai probabilă şi respectiv viteza pătratică medie.

Rezolvare.

Ţinând seama de funcţia de distribuţie a vitezelor Maxwell:

$$\Delta N = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} N\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2\Delta v\,, \tag{14}$$

rezultă:

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\right]\frac{v_1^2}{v_2^2}\,, \tag{15}$$

unde

$$v_1^2 = v_p^2 = \frac{2kT}{m} \text{ şi } v_2^2 = \left\langle v^2\right\rangle = \frac{3kT}{m}. \tag{16}$$

Înlocuind relaţiile (16) în (15), se obţine:

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{2}{3}\exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\right] = \frac{2}{3}\exp\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}1.$$