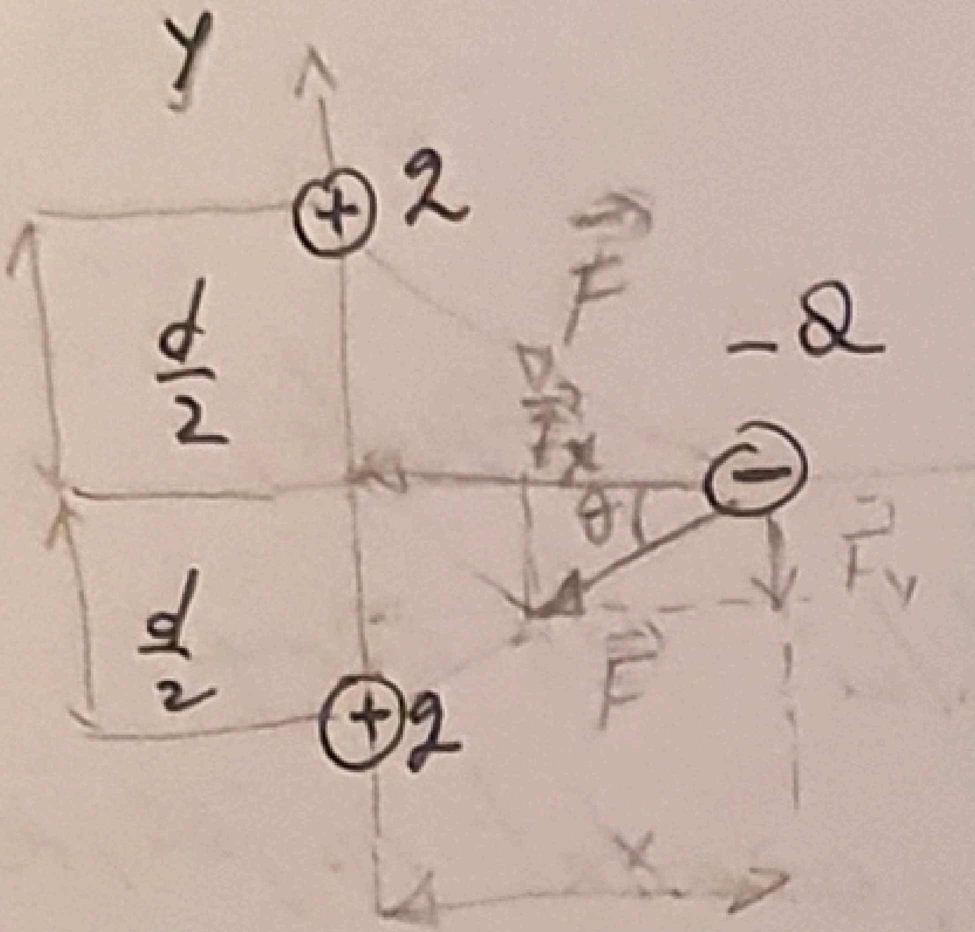
⑧ Două particule pozitive de sarcină $+q$, fixate în spațiu, se află la o distanță d una de alta. A treia particulă de sarcină $-Q$, care se poate deplasa liber, se află inițial în repaus pe bisectoarea axei care unește primele două sarcini, la distanța x de jumătatea acestei axe.

(A) Arătați că pentru $x << d$, mișcarea particulei $-Q$ este armonică simplă în lungul bisectoarei.



• Fiecare sarcină $+q$ va acționa asupra sarcinii $-Q$ cu forța de magnitudine:

$$F = k\frac{qQ}{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2} \; ; \quad x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \text{ipotenuza}.$$

• Forța rezultantă exercitată asupra $-Q$:

$$\vec{F}_R = F_x\cdot\vec{i} + F_y\vec{j}.$$

• $F_x = F\cos\theta$
$F_y = F\sin\theta$

$$\Rightarrow \vec{F}_R = (F\cos\theta + F\cos\theta)(-\vec{i}) + (F\sin\theta - F\sin\theta)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_R = -2F\cos\theta\,\vec{i} = -2k\frac{qQ}{\frac{d^2}{4}+x^2}\cos\theta\cdot\vec{i}.$$

• $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$

$$\Rightarrow \vec{F}_R = -2k\frac{qQ}{\frac{d^2}{4}+x^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\vec{i}.$$

$$\Rightarrow \vec{F}_R = -\frac{2kxqQ}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_R = -\frac{2kqQ\cdot x}{\left(\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{x^2}{\frac{d^2}{4}}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{i} = -\frac{2kxqQ}{\left(\frac{d}{2}\right)^3\left[1+\left(\frac{x}{\frac{d}{2}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{i}.$$

• pt. $x << \frac{d}{2} \Rightarrow \vec{F}_R = -\frac{2kxqQ}{\frac{d^3}{8}}\vec{i} = -\frac{16kxqQ}{d^3}\vec{i}$

• Dar: $\vec{F} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -16\frac{kqQ}{d^3}\cdot\frac{x}{m}\cdot\vec{i}$

• accelerația unui oscilator armonic: $\vec{a} = -\omega^2 x\cdot\vec{i}$

sau $a = \omega^2 x \Rightarrow$

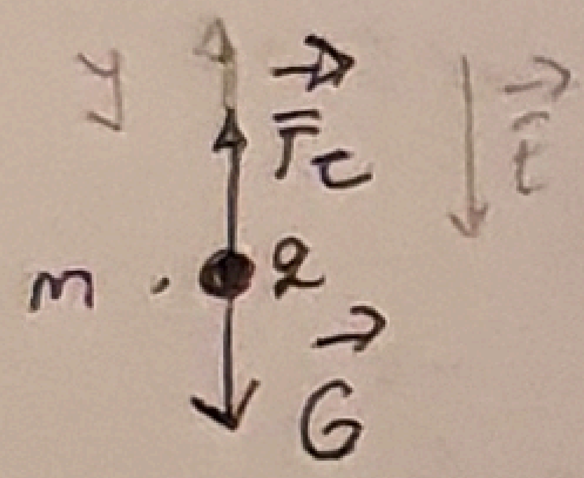
$\Rightarrow \omega^2 = \frac{16 k q Q}{m d^3} \Rightarrow \omega = 4\sqrt{\frac{kqQ}{md^3}}$

(B) Perioada mișcării armonice: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{16kqQ}{md^3}}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{md^3}{kqQ}}$

(C) Care este viteza maximă cu care particula $-Q$ ajunge în punctul care se află la jumătatea distanței dintre particulele $+q$?

• $v_{max} = \omega^2 A = 4A\sqrt{\frac{kqQ}{md^3}}$

(9) O picătură de apă cu masa $m = 3\cdot 10^{-12}\,kg$ se găsește, în timpul unei zile ploioase, în apropierea pământului. Un câmp electric atmosferic cu amplitudinea de $6\cdot 10^3\,\frac{V}{m}$, orientat în jos, se află în jurul picăturii de apă, care rămâne suspendată în aer.
Care este sarcina electrică a picăturii de apă?



• $\vec{F_R} = \vec{F_c} + \vec{G} = 0 \Rightarrow F_c = G$ $\Big\} \Rightarrow$

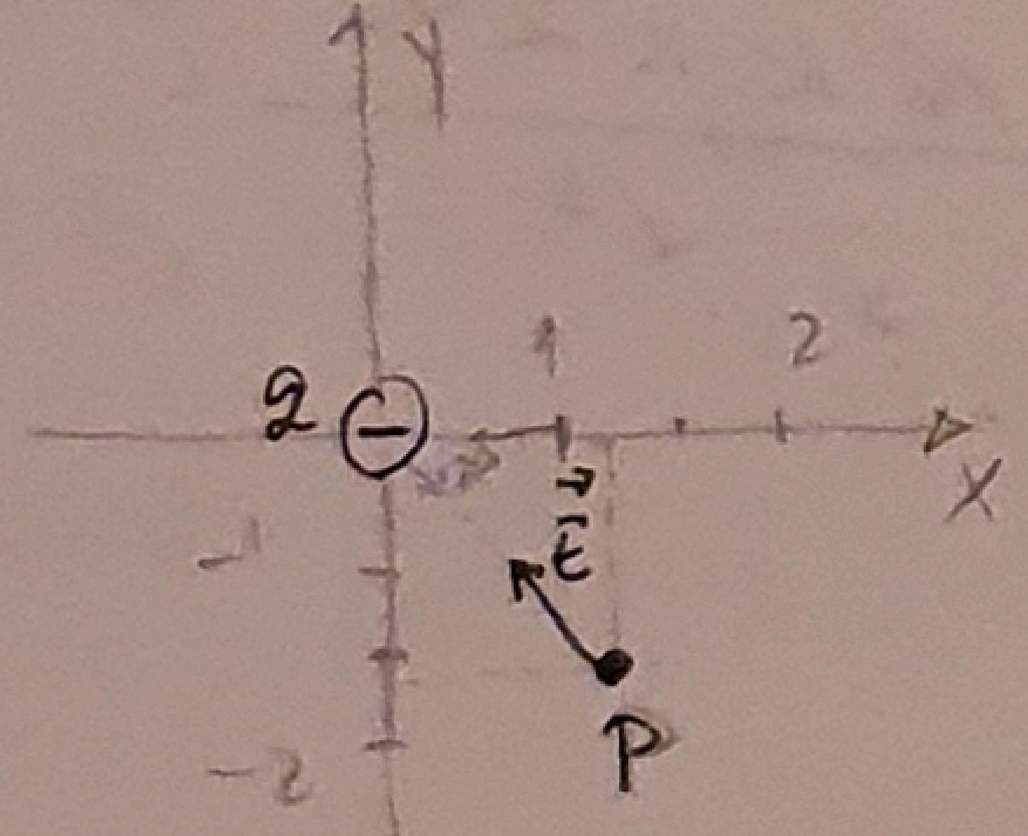
$\vec{F_c} = q\vec{E}$; $G = m\cdot g$

$F_c = q(-E)$

$\Rightarrow -qE = mg \Rightarrow q = -\frac{mg}{E} = \frac{3\cdot 10^{-12}\,kg\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{6\cdot 10^3\,\frac{V}{m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow q = -4{,}9\cdot 10^{-15}\,C$

(10) O sarcină punctiformă $q = -8\,nC$ este localizată în originea unui sistem de coordonate. Care este intensitatea câmpului electric într-un punct de coordonate $(1{,}2\,m; -1{,}6\,m)$?



• $\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ $\Big\} \Rightarrow \vec{E} = k\frac{q}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j})$

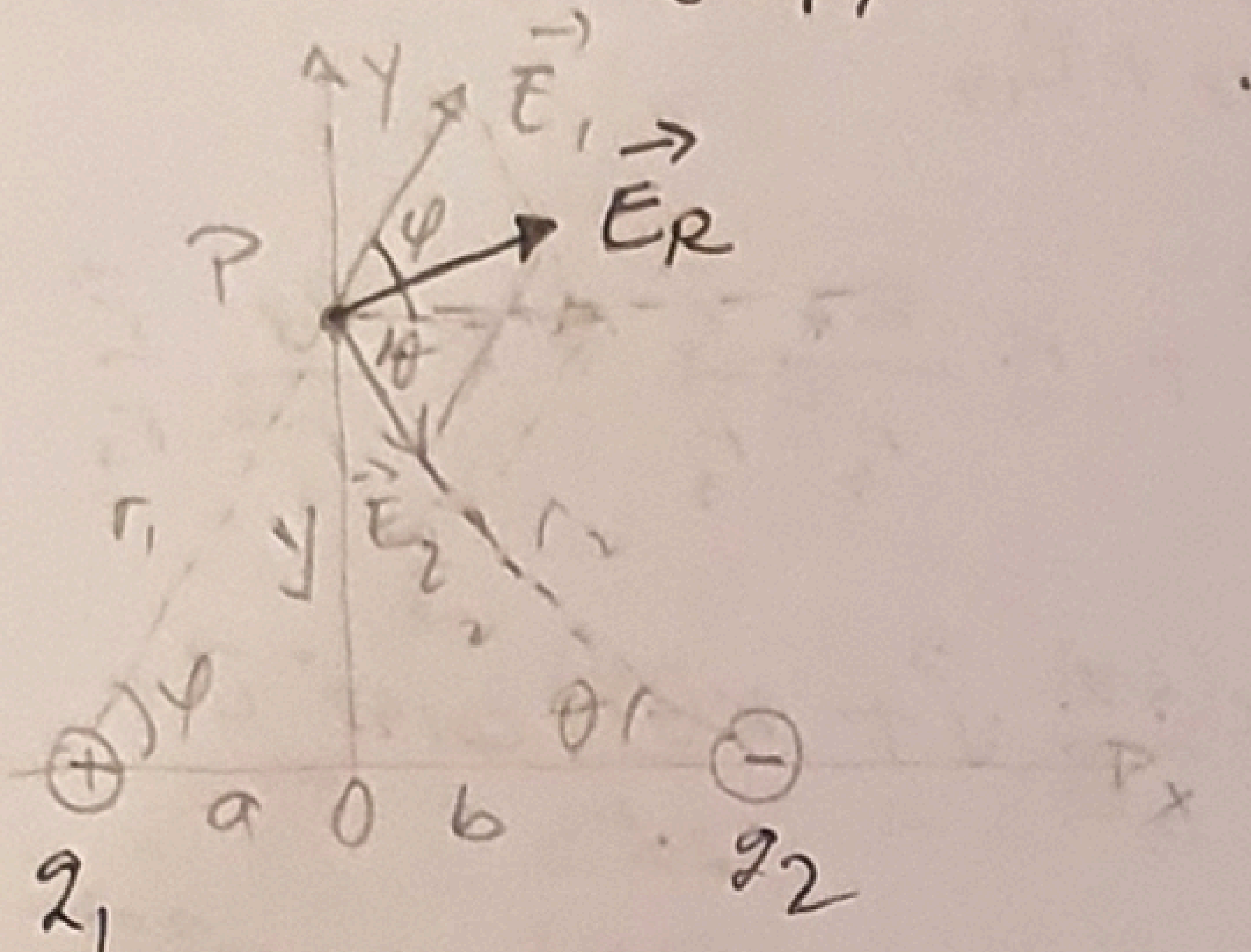
• $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $r = \sqrt{x^2+y^2} = 2\,m$

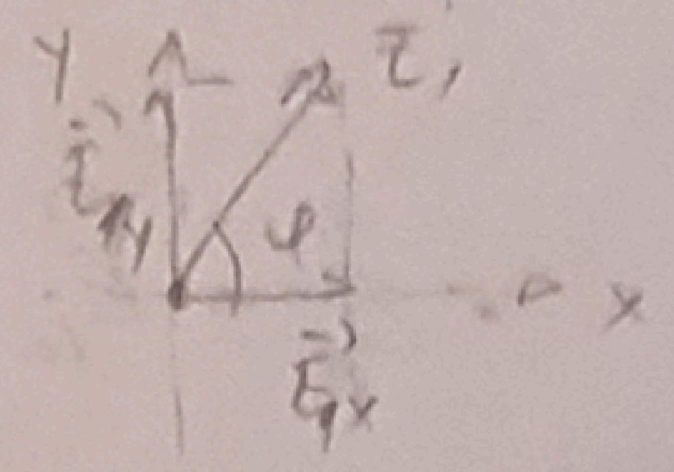
$\Rightarrow \vec{E} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{-8\cdot 10^{-9}\,C}{8\,m^3}(1{,}2\,m\,\vec{i} - 1{,}6\,m\,\vec{j})$

$\Rightarrow \vec{E} = -11\,\frac{V}{m}\,\vec{i} + 14\,\frac{V}{m}\,\vec{j}$

(11.) Două sarcini q_1 și $-q_2$ se află pe axa Ox la distanțele a și b față de origine.

(A) Care este intensitatea câmpului electric într-un punct de coordonate $(0, y)$?

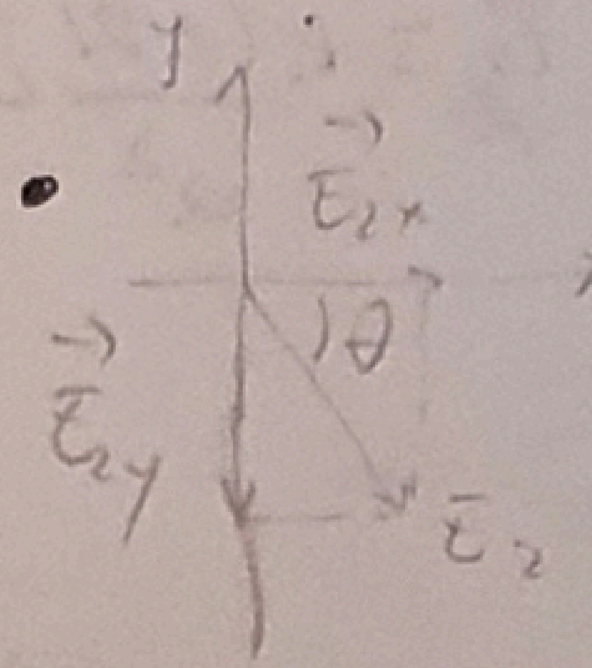




$\Rightarrow \vec{E}_1 = E_{1x} \cdot \vec{i} + E_{1y} \cdot \vec{j}$

$\vec{E}_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} \cos\varphi \, \vec{i} + k \frac{q_1}{r_1^2} \sin\varphi \, \vec{j}$

$\Rightarrow \vec{E}_1 = k \frac{q_1}{a^2+y^2} \cos\varphi \, \vec{i} + k \frac{q_1}{a^2+y^2} \cdot \sin\varphi \, \vec{j}$



$\Rightarrow \vec{E}_2 = E_{2x} \, \vec{i} + E_{2y} \, \vec{j}$

$\Rightarrow \vec{E}_2 = k \frac{|q_2|}{r_2^2} \cos\theta \, \vec{i} - k \frac{|q_2|}{r_2^2} \sin\theta \, \vec{j}$

$\Rightarrow \vec{E}_2 = k \frac{|q_2|}{b^2+y^2} \cos\theta \, \vec{i} - k \frac{|q_2|}{b^2+y^2} \cdot \sin\theta \, \vec{j}$

$\Rightarrow \vec{E}_R = E_{Rx} \cdot \vec{i} + E_{Ry} \cdot \vec{j}$

$$\vec{E}_R = \left(k \frac{q_1}{a^2+y^2} \cos\varphi + k \frac{|q_2|}{b^2+y^2} \cos\theta \right) \vec{i} + \left(k \frac{q_1}{a^2+y^2} \sin\varphi - k \frac{|q_2|}{b^2+y^2} \sin\theta \right) \vec{j}$$

(B) Care este intensitatea câmpului electric în punctul P pentru cazul $|q_1| = |q_2|$ și $a = b$?

• când $a = b \Rightarrow \theta = \varphi \Rightarrow \vec{E}_R = 2k \frac{q}{a^2+y^2} \cos\theta \, \vec{i} + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{E}_R = 2k \frac{q}{a^2+y^2} \cos\theta \, \vec{i}$.

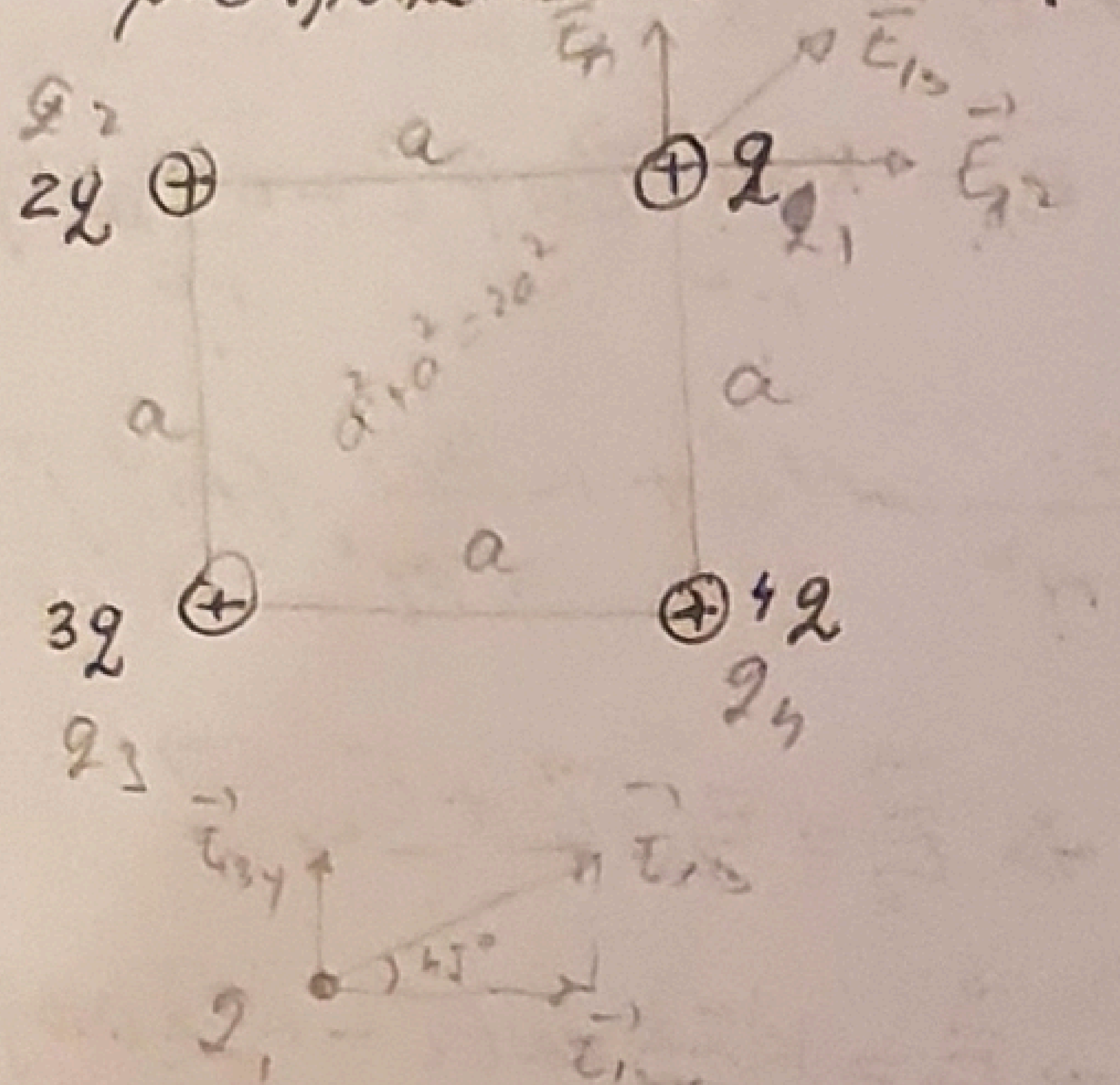
(C) Care este intensitatea câmpului electric atunci când $y \gg a$?

• $\vec{E}_R = \frac{2kq}{a^2+y^2} \cdot \frac{a}{(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{i} = \frac{2kaq}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{i} = \frac{2kaq}{(y^2)^{\frac{3}{2}} \underbrace{\left(\frac{a^2}{y^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}_{\simeq 0}} \cdot \vec{i}$

$\cos\theta = \frac{a}{(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\xrightarrow{y \gg a}$ $\boxed{\vec{E}_R = \frac{2kaq}{y^3}}$

(12) Patru particule electrizate sunt poziționate în colțurile unui pătrat de latură a.

(A) Care este intensitatea câmpului electric în locul în care este poziționată sarcina q_1?



$$\bullet\ \vec{E}_R = \vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} + \vec{E}_{14}$$

$$\vec{E}_R = k\frac{q_2}{r_1^2}\frac{\vec{r_1}}{r} + k\frac{q_4}{r_4^2}\frac{\vec{r_4}}{r_4} + k\frac{q_3}{r_3^2}\frac{\vec{r}}{r_3}$$

$$\vec{E}_R = k\frac{(2q)}{a^2}\vec{i} + k\frac{(4q)}{a^2}\vec{j} + k\frac{(3q)}{2a^2}\cos 45^\circ\,\vec{i} + k\frac{(3q)}{2a^2}\sin 45^\circ\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_R = k\frac{q}{a^2}\left[2\vec{i} + 4\vec{j} + \frac{3}{2}\cos 45^\circ\,\vec{i} + \frac{3}{2}\sin 45^\circ\,\vec{j}\right]$$

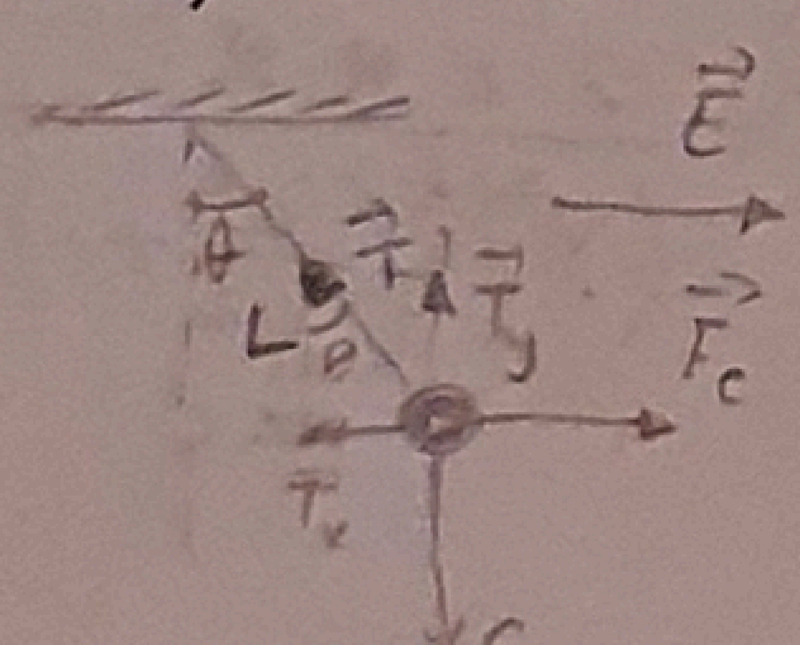
$$\vec{E}_R = k\frac{q}{a^2}\left[\left(2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left(4 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]$$

$$\vec{E}_R = k\frac{q}{a^2}\left(3{,}06\,\vec{i} + 5{,}06\,\vec{j}\right)$$

(B) Care este forța exercitată asupra sarcinii q_1?

$$\vec{F}_R = q_1\vec{E}_R = k\frac{q^2}{a^2}\left(3{,}06\,\vec{i} + 5{,}06\,\vec{j}\right)$$

(13) O bilă de plastic cu masa $m = 2g$ este suspendată de un fir cu lungimea $L = 20cm$ și se află într-un câmp electric de intensitate $E = 10^3\,\frac{V}{m}$, orientat ca în figură. Dacă bila se află în echilibru când firul face unghiul de 15° cu verticala, care este sarcina bilei?



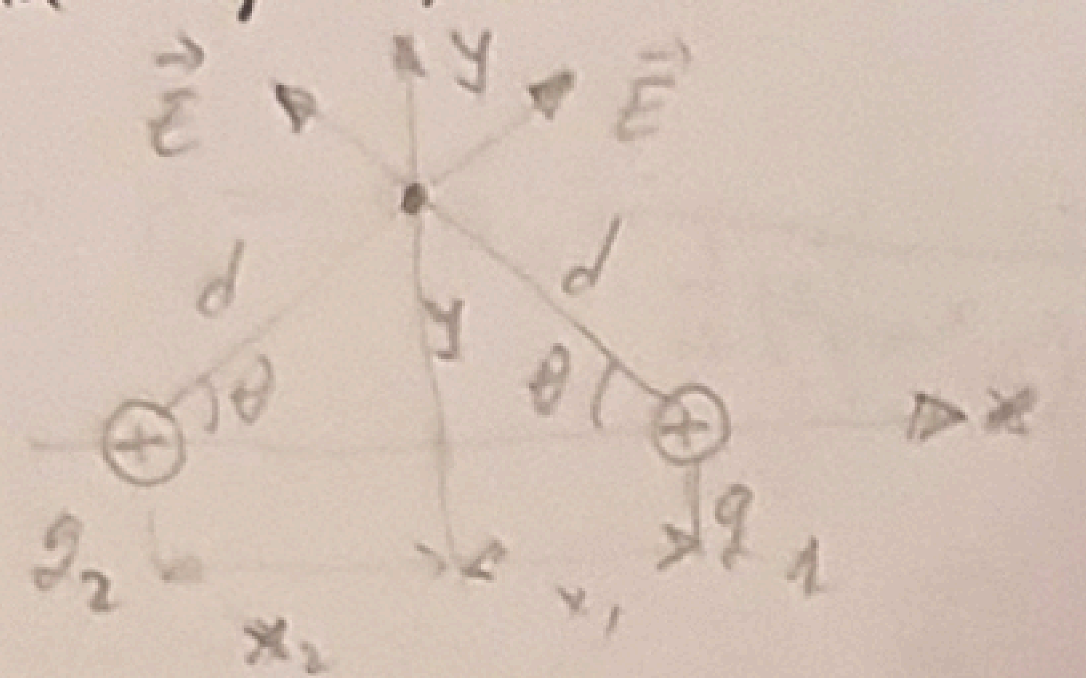
$$\vec{F}_R = \vec{T} + \vec{G} + \vec{F}_e = 0 \quad \text{(la echilibru)}.$$

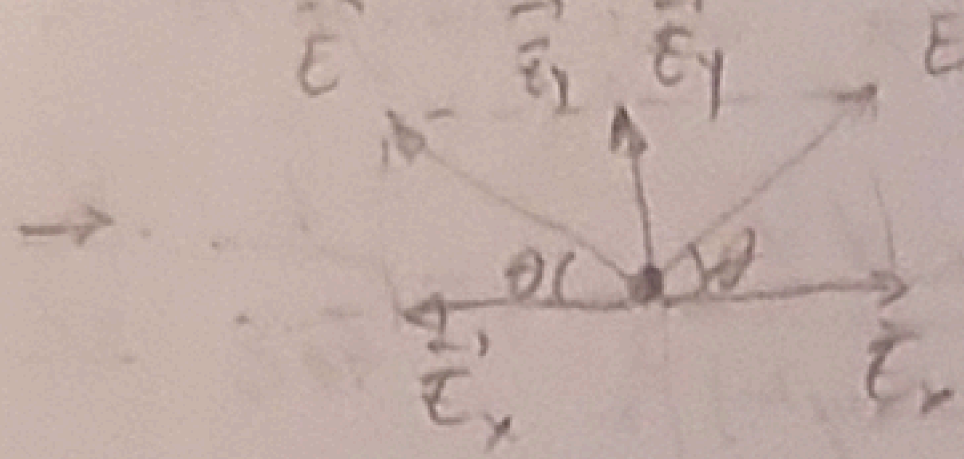
$$Ox:\ \vec{F}_e + \vec{T}_x = 0 \qquad Oy:\ \vec{T}_y + \vec{G} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_e - T\sin\theta = 0 \\ T\cos\alpha - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} qE = T\sin 15^\circ \\ T = \frac{mg}{\cos 15^\circ} = 8 = \end{cases} \Rightarrow q = \frac{mg}{E}\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 5{,}25\cdot 10^{-6}\,C = 5{,}25\,\mu C.$$

(14) Două sarcini punctiforme având sarcinile egale $q_1 = q_2 = 2\mu C$ sunt poziționate în lungul axei Ox, în pozițiile $x_1 = 1m$ și $x_2 = -1m$ față de originea sistemului de coordonate.

(A) Să se determine intensitatea câmpului electric într-un punct de pe axa Oy situat la distanța $y = 0{,}5m$ față de origine?





• $\vec{E}_R = \vec{E} + \vec{E} = (E_x \vec{i} + E_y \vec{j}) + (E_x(-\vec{i}) + E_y \vec{j}) = 2E_y \vec{j}$
$= 2E\sin\theta \cdot \vec{j}$

$\Rightarrow \vec{E}_R = 2k\frac{q}{d^2}\cdot \vec{j}\cdot \sin\theta$

$d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow d = \sqrt{x^2+y^2}$

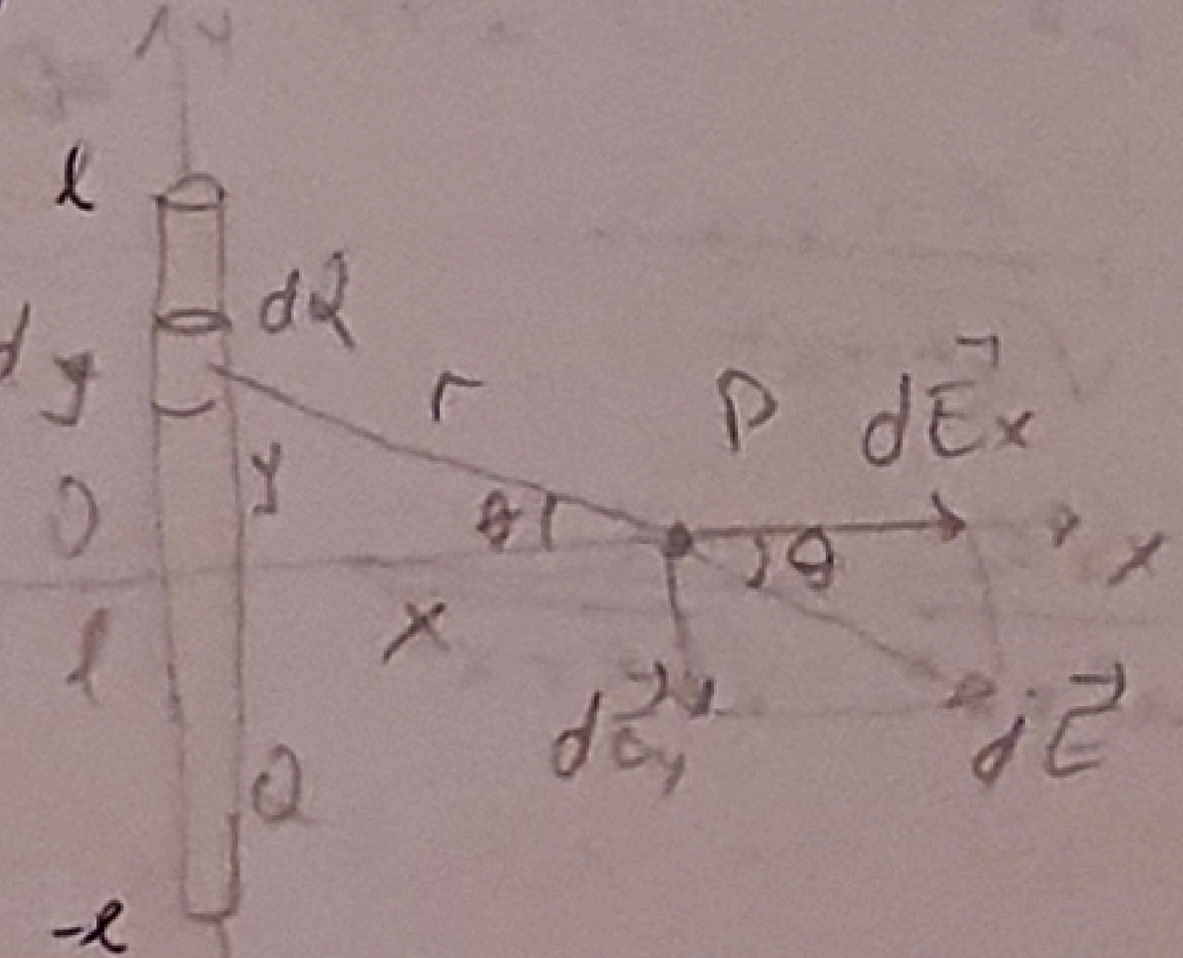
$\Rightarrow \vec{E}_R = 2k\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \sin\theta \cdot \vec{j}$

$\Rightarrow \vec{E}_R = \frac{2\cdot 8{,}98\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{(1m)^2 + (0{,}5m)^2}} \Rightarrow \vec{E}_R = \left(1{,}29\cdot 10^4 \frac{V}{m}\right)\cdot \vec{j}$

(B) Să se determine forța exercitată asupra unei sarcini $q = -3\mu C$ plasată în punctul $y = 0{,}5m$.

• $\vec{F}_e = q\vec{E} = \left(-3\cdot 10^{-6}C \cdot 1{,}29\cdot 10^4 \frac{V}{m}\right)\cdot\vec{j} = \left(-3{,}86\cdot 10^{-2}N\right)\cdot \vec{j}$.

(15) O sarcină pozitivă Q este distribuită uniform în lungul unei bare de lungime ℓ. Să se determine intensitatea câmpului electric într-un punct P situat la distanța x de centrul barei.



• Densitatea liniară de sarcină: $\lambda = \frac{Q}{2\ell}$

• $dQ = \lambda\, dy = \frac{Q}{2}\cdot\frac{dy}{\ell}$

• $dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2\ell(x^2+y^2)}$

• $dE_x = dE\cos\theta$; $\cos\theta = \frac{x}{r}$

• $dE_y = -dE\sin\theta$; $\sin\theta = \frac{y}{r}$

$$\Rightarrow \begin{cases} dE_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2l} \cdot \frac{dy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2l} \frac{x\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ dE_y = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2l} \frac{dy}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2l} \cdot \frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

• Integrăm pe toată bara de lungime l:

$$\bullet\ E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2l} \int_{-l}^{l} \frac{x\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2l} \cdot \frac{2l}{x \cdot (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+l^2}} = \frac{kQ}{x\sqrt{x^2+l^2}}$$

$$\bullet\ E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2l} \int_{-l}^{l} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

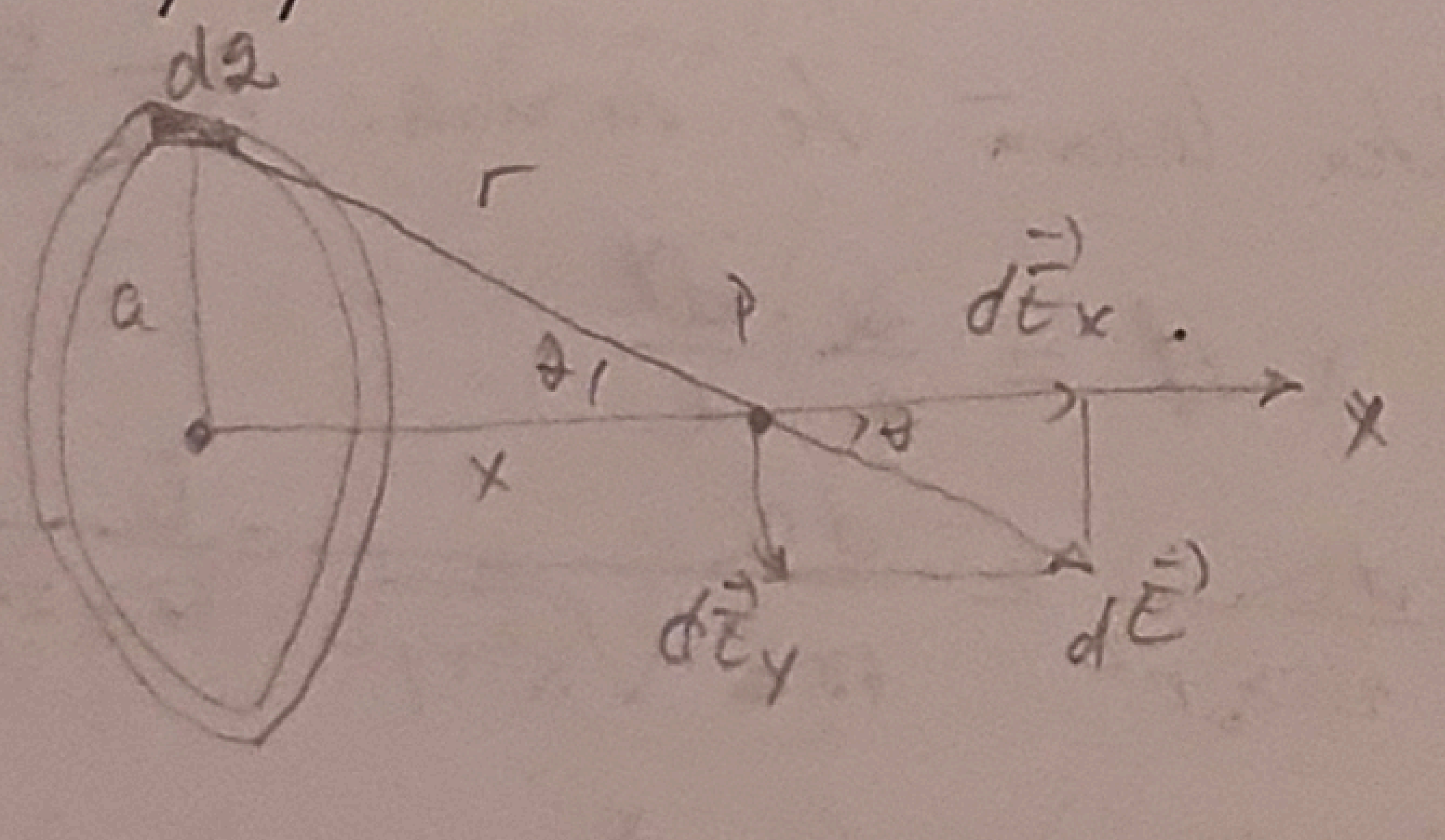
• Intensitatea rezultantă: $\vec{E}_R = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} = k \frac{Q}{x\sqrt{x^2+l^2}} \cdot \vec{i}$

• Dacă $l >> x \Rightarrow \vec{E}_R = k \cdot \frac{\lambda \cdot 2l}{x \cdot (l^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x^2}{l^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \vec{i} \Rightarrow \vec{E}_R = \frac{2k\lambda}{x} \cdot \vec{i}$

$Q = \lambda \cdot 2l$

$$\Rightarrow \vec{E}_R = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \cdot \vec{i}$$

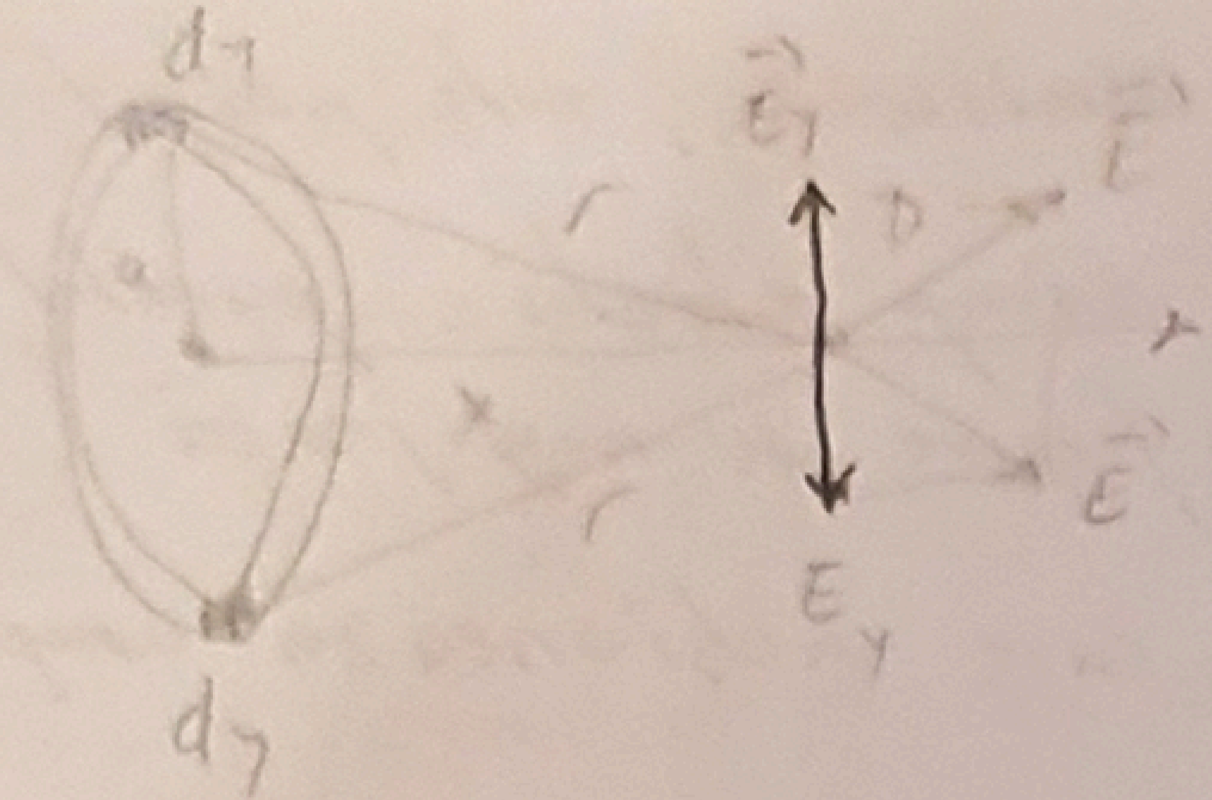
(16) Un inel de rază a este încărcat uniform cu o sarcină Q. Să se determine intensitatea câmpului electric generat de inel într-un punct P aflat la distanța x de centrul său, punct situat pe o axă perpendiculară pe planul inelului.



$$\bullet\ dE_x = k \frac{dq}{r^2} \cdot \cos\theta = k \frac{dq}{a^2+x^2} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\bullet\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\Rightarrow dE_x = k \frac{dq}{a^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$



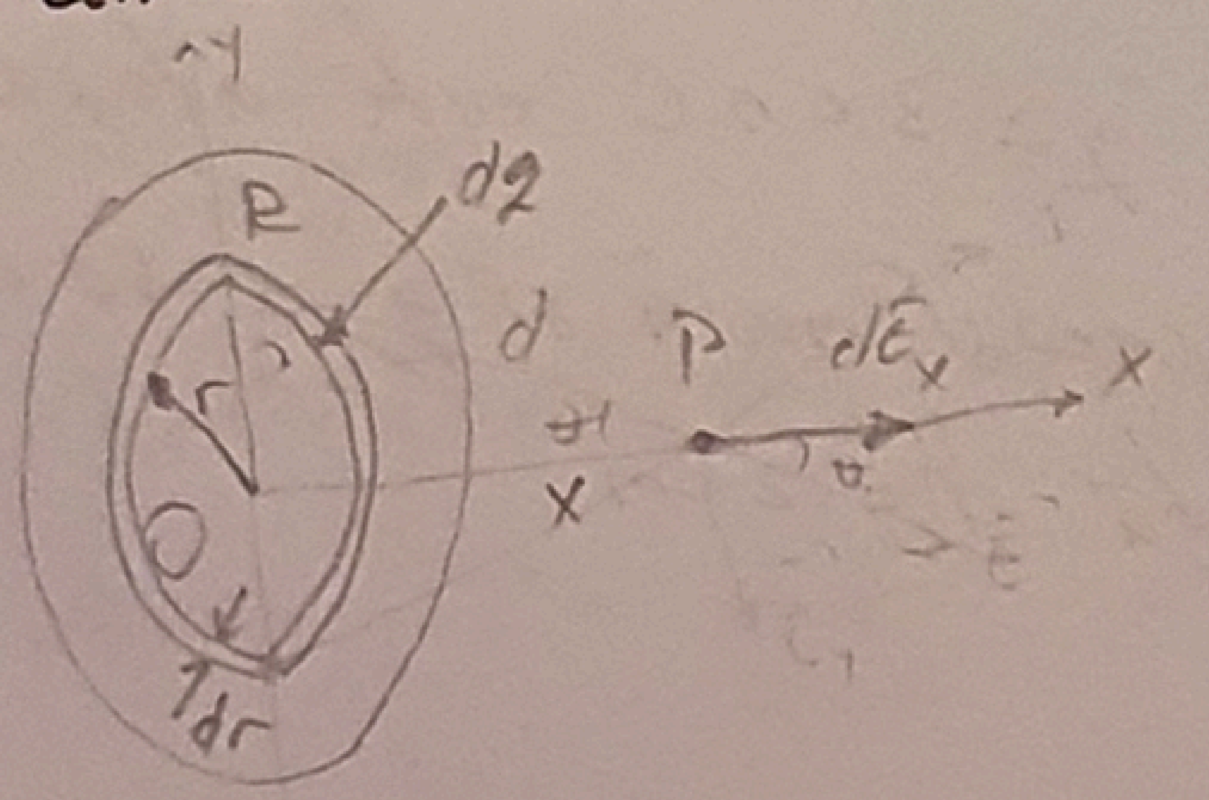
• $d\vec{E}_y = 0$ deoarece componenta perpendiculară a segmentului de sus este anulată de componenta perpendiculară a segmentului de jos

$$\Rightarrow \vec{E}_R = E_x \vec{i} = \int_Q \frac{kx\,dq}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{i} = \frac{kx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int_Q dq = \frac{kxQ}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

• dacă $x = 0 \Rightarrow \vec{E}_R = 0$

• dacă $x \gg a \Rightarrow \vec{E}_R = \frac{kxQ}{(x^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \vec{E}_R = \frac{kQ}{x^2}$.

(17) Un disc de rază R este electrizat uniform având densitatea de sarcină superficială σ. Să se determine intensitatea câmpului electric într-un punct P situat la distanța x pe perpendiculara pe centrul discului.



• sarcina electrică din elementul dr:

$$dq = \sigma dS = \sigma(2\pi r\,dr) = 2\pi\sigma r\,dr$$

• $dE_x = k\frac{dq}{d^2}\cos\theta = \frac{k \cdot 2\pi r\,dr}{x^2+r^2}\cdot \Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow dE_x = \frac{2\pi k x \sigma\, r\,dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E_x = \int_0^R dE_x = 2\pi k x \sigma \int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x = 2\pi k x \sigma\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 2\pi k\sigma\left[1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

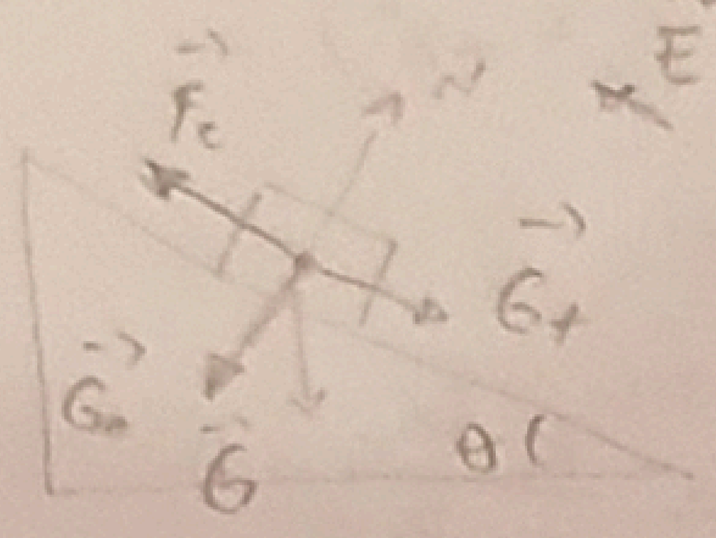
• $\vec{E}_R = E_x\vec{i} + \underbrace{E_y}_{=0}\cdot\vec{j} = 2\pi k\sigma\left[1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\cdot\vec{i}$

• pt. $R \gg x \Rightarrow \vec{E}_R = 2\pi k\sigma = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\vec{i} \Rightarrow \vec{E}_R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$

• pt. $R \to \infty \Rightarrow E_R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

(18) Un corp de masă m electrizat, având sarcina Q, este plasat pe un plan înclinat izolat, de unghi θ. Un câmp electric paralel cu planul acționează asupra corpului. Forța de frecare se neglijează.

(A) Deduceți o expresie a câmpului electric care acționează asupra corpului și îl menține în repaus.



• $\vec{F_R} = \vec{F_e} + \vec{G} + \vec{N} = 0$

Ox: $\vec{G_t} + \vec{F_e} = 0 \Rightarrow QE = mg\sin\theta \Rightarrow E = \frac{mg\sin\theta}{Q}$

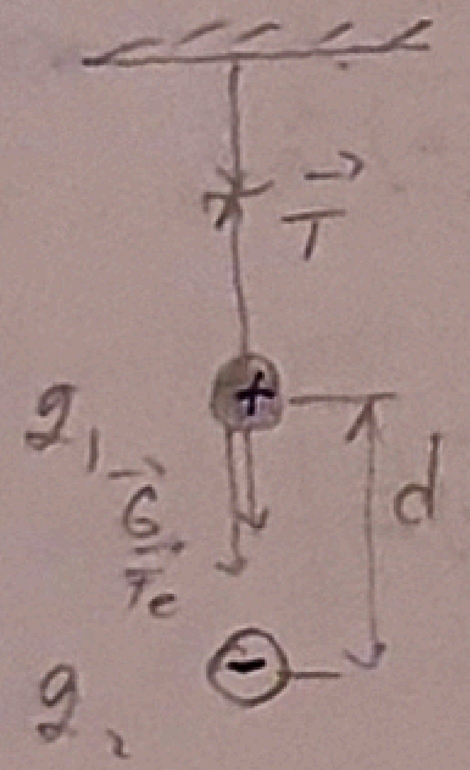
(B) Dacă $m = 5,4\ g$; $Q = -7\ \mu C$ și $\theta = 25^\circ$, determinați valoarea intensității câmpului electric și direcția acestuia pt. ca corpul să rămână în repaus.

• $E = \frac{mg}{Q}\sin\theta = \frac{5,4\cdot10^{-3}\ kg \cdot 9,81\ \frac{m}{s^2}}{-7\cdot10^{-6}\ C}\sin 25^\circ = -3,19\cdot10^{3}\ \frac{V}{m}$

$\vec{E} = E_x\cdot\vec{i} = 3,19\cdot10^{-3}\ \frac{V}{m}\ (-\vec{i}) \Rightarrow \vec{E}$ este orientat în ~~jos~~ sus, paralel cu planul.

(19) O sferă de masă $m = 7,5\ g$ și sarcină $q_1 = 32\ nC$ este atașată de un fir suspendat. O a doua sferă, cu aceeași masă și $q_2 = -58\ nC$ este poziționată sub prima sferă la o distanță $d = 2\ cm$.

(A) Care este tensiunea în fir?



$\vec{F_R} = \vec{T} + \vec{G} + \vec{F_e} = 0 \Rightarrow T - mg - k\frac{|q_1 q_2|}{d^2} = 0$

$\Rightarrow T = mg + \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = 7,5\cdot10^{-3}\ kg\cdot 9,81\ \frac{m}{s^2} + \frac{8,98\cdot10^{9}\ \frac{Nm^2}{C^2}\cdot|32\cdot10^{-9}\ C\cdot -58\cdot10^{-9}\ C|}{(2\cdot10^{-2}\ m)^2}$

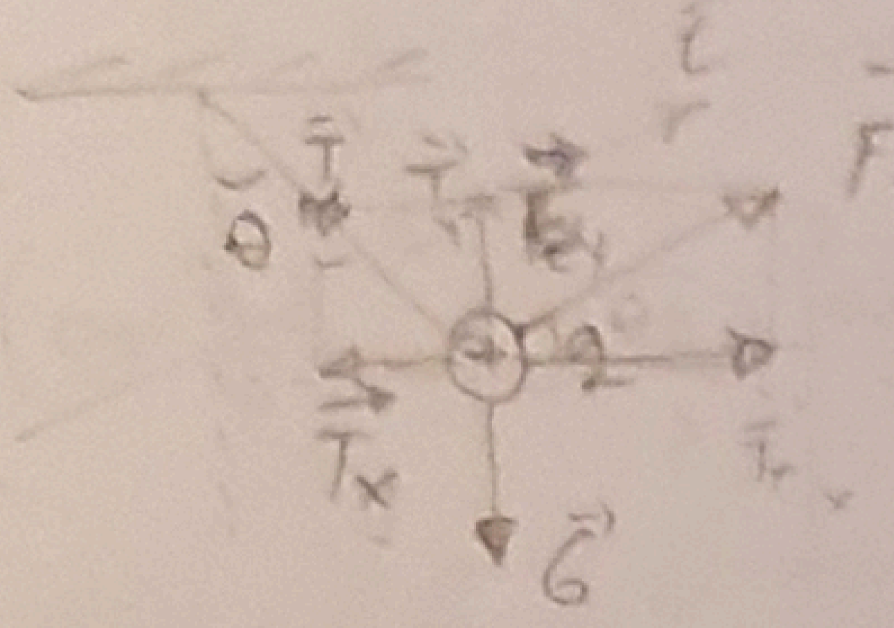
$\Rightarrow T = 0,115\ N$.

(B) Dacă firul suportă o tensiune maximă de 0,18N, care este cea mai mică valoare a lui d pentru care firul nu se rupe?

• din $T - mg - k\frac{|q_1 q_2|}{d^2} = 0 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{k|q_1||q_2|}{T - mg}} \Rightarrow d = 1,25\cdot10^{-2}\ m$.

(20) O sferă electrizată din plută cu masa $m = 1g$ este suspendată de un fir subțire și este plasată într-un câmp ~~magnetic~~ electric de intensitate $\vec{E} = 3\cdot10^5 \frac{V}{m}\vec{i} + 5\cdot10^5 \frac{V}{m}\vec{j}$. Sfera este în echilibru când $\theta = 37°$ (θ = ∢ făcut de fir cu verticala).

(A) Care este sarcina sferei?



• $\vec{E} = 3\cdot10^5 \frac{V}{m}\vec{i} + 5\cdot10^5 \frac{V}{m}\vec{j}$

• $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$

• Ox: $F_{cx} - T_x = 0 \Rightarrow qE_x = T\sin\theta \Rightarrow T = \frac{qE_x}{\sin\theta}$ $/\Rightarrow$

• Oy: $T_y + F_{cy} - G = 0 \Rightarrow T\cos\theta + qE_y = mg$

$\Rightarrow \frac{qE_x}{\sin\theta}\cdot\cos\theta + qE_y = mg \Rightarrow q\left(\frac{E_x}{tg\theta} + E_y\right) = mg \Rightarrow$

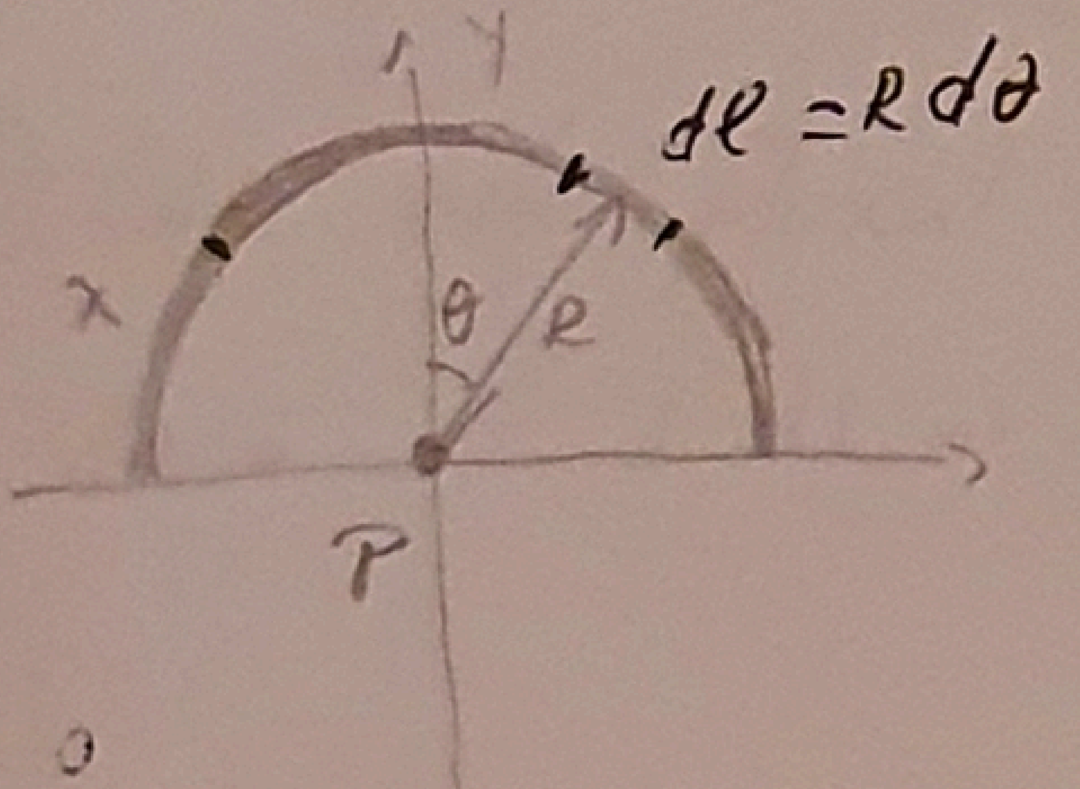
$\Rightarrow q = \frac{mg}{\frac{E_x}{tg\theta} + E_y} = \frac{10^{-3}kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{\frac{3\cdot10^5\frac{V}{m}}{tg\,37°} + 5\cdot10^5\frac{V}{m}} \Rightarrow q = 1{,}09\cdot10^{-8}C$

$q = 10{,}9\,nC$

(B) Determinați tensiunea în fir.

• din: $T = \frac{qE_x}{\sin\theta} \Rightarrow T = \frac{1{,}09\cdot10^{-8}C\cdot3\cdot10^5\frac{V}{m}}{\sin 37} \Rightarrow T = 5{,}44\cdot10^{-3}N$

(21) O linie de sarcini pozitive se formează pe un semicerc de rază $R = 60cm$. Densitatea liniară de sarcină pe unitatea de lungime este descrisă de relația $\lambda = \lambda_0\cos\theta$. Dacă sarcina totală este de $12\mu C$, să se determine forța exercitată asupra unei sarcini de $3\mu C$ plasată în centrul semicercului.



• sarcina ~~totală~~ distribuită pe semicerc este:

$Q = \int\lambda\,dl = \int_{-90°}^{90°}\lambda_0\cos\theta\,R\,d\theta = \lambda_0 R\sin\theta\Big|_{-90°}^{90°} \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = \lambda_0 R[1-(-1)] \rightarrow Q = 2\lambda_0 R \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{Q}{2R} = \frac{12\cdot10^{-6}C}{2\cdot60\cdot10^{-2}m} \Rightarrow \lambda_0 = 10\frac{\mu C}{m}$

• forța exercitată de un element dl al semicercului este:

$$dF_{e_y} = k\frac{q\,dQ}{R^2} = k\frac{q}{R^2}\cdot\lambda\,dl\cos\theta = \frac{kq}{\cancel{R^2}R}\cdot\lambda_0\cos^2\theta\,\cancel{R}\,d\theta$$

$$\Rightarrow F_{e_y} = \int_{-90^\circ}^{90^\circ}\frac{kq\lambda_0\cos^2\theta\,d\theta}{R} = \frac{kq\lambda_0}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta \Rightarrow$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$$

$$\Rightarrow F_{e_y} = \frac{kq\lambda_0}{R}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{kq\lambda_0}{R}\left[\left(\frac{\pi}{4}+0\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+0\right)\right]$$

$$\Rightarrow F_{e_y} = \frac{\pi k q\lambda_0}{2R} = \frac{3{,}14\cdot 8{,}98\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 3\cdot 10^{-6}C\cdot 10\cdot 10^{-6}\frac{C}{m}}{2\cdot 60\cdot 10^{-2}m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{e_y} = 0{,}706\,N. \rightarrow \text{vectorial: } \vec{F_{ey}} = -0{,}706\,N\,\vec{j}$$

• $F_x = 0$ deoarece cele două capete ale semicercului acționează cu forțe care se anulează reciproc.