Hello CC

3D数学 主题[2]

视觉班—3D数学从矩阵基础到矩阵与线性变换

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

矩阵基础

1.认识矩阵

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 12 \\ -5 & \sqrt{4} & 3 \\ 12 & -4/3 & -1 \\ 1/2 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

2.矩阵维度和记法

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

M_{ij} 表示M的第i行，第j列元素。

3 方阵

行数和列数相同的矩阵，称为方阵

我们的课程中，主要讨论的范畴就是在 2*2、3*3、4*4方阵

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

方阵的对角线元素就是方阵的行号和列号相同的元素；例如 3*3矩阵M的对角线元素为m_{11}、m_{22}、m_{33}。其他元素都是非对角元素。

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

矩阵基础

思考 下面A ,B 矩阵那个是单元矩阵?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

矩阵基础

4 单位矩阵

单位矩阵，是一种特殊的对角矩阵，n维单位矩阵记做 I_n。是n * n 矩阵。对象元素为1.其他元素为0。
例如 3 * 3 单位矩阵

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单位矩阵非常特殊，因为它是矩阵乘法单位元，其基本性质是用任意1个矩阵乘以单位矩阵，都将得到原矩阵。所以在某种意义上对矩阵的作用就犹如1对于标量的作用。

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

矩阵基础

5 向量作为矩阵使用

行向量 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

列向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

6 矩阵转置

一个r * c 矩阵M。M的转置记做M^T，是一个 c * r 矩阵。它的列由M的行组成。可以从另方面理解。
$M_{ij}^T = M_{ji}$,即沿着矩阵的对角线翻折。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

对向量而言，转置将使得行向量变成列向量，是列向量变成行向量。

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

矩阵基础

7 标量 与 矩阵相乘

$$kM = k\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} & km_{13} \\ km_{21} & km_{22} & km_{23} \\ km_{31} & km_{32} & km_{33} \end{bmatrix}$$

8 矩阵与矩阵相乘

例如，设A 为 4 * 2 矩阵，B 为 2 * 5 矩阵，那么结果AB 为 4 * 5 矩阵。

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}} = \underset{AB}{\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}}$$

A	B	AB
r * n	n * c	r * c
4 * 2	2 * 5	4 * 5

必须匹配

结果列

结果行

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

8 矩阵与矩阵相乘

矩阵相乘法则： 对结果中的任意元素C_{ij}，取A的第i行和第j列，将行和列中的对应元素相乘。然后将结果相加（等于A的i列和B的j列的点积）。C_{ij}就等于这个和。

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

例如

$$c_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24}$$

（C的第2行第4列的元素等于A的第2行和B的第4列的点积）

当然还有另一种助记方法：

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix} \end{array}$$

例如

$$c_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

2 * 2 矩阵相乘完整公式

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

矩阵乘法注意事项:

1.任意矩阵M乘以方阵S,不管从哪边乘，都得到与原矩阵大小相同的矩阵。当然，前提是假定乘法有意义。如果S是单位矩阵，结果就是原矩阵M，即:MI = IM = M 。

2.矩阵乘法不满足交换律，即:AB != BA

3.矩阵乘法满足结合律，即:(AB)C = A(BC)。假定ABC的维数使得其乘法有意义，要注意如果(AB)C有意义，那么A(BC)就一定有意义。

4.矩阵乘法也满足与标量或向量的结合律，即:(kA)B = k(AB) = A(kB); (vA)B = v(AB);

5.矩阵积的转置相当于先转置矩阵然后以相反的顺序乘法，即：$(AB)^T = B^T A^T$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

思考 向量与矩阵相乘结果是多少？是否具有意义？

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = ?$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

9 向量与矩阵的乘法详解

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xm_{11}+ym_{21}+zm_{31} & xm_{12}+ym_{22}+zm_{32} & xm_{13}+ym_{23}+zm_{33} \end{bmatrix}$$

1 * 3 向量 与 3 * 3矩阵相乘 = 1 * 3矩阵

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xm_{11}+ym_{12}+zm_{13} \\ xm_{21}+ym_{22}+zm_{23} \\ xm_{31}+ym_{32}+zm_{33} \end{bmatrix}$$

3 * 3矩阵 与 3 *1 向量相乘 = 3 * 1矩阵

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \text{无意义}$$

3 * 3矩阵 与 1 * 3 向量相乘 无意义

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \text{无意义}$$

3 * 1 向量 3 * 3矩阵 与相乘 无意义

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

总结

行向量左乘矩阵时，结果是行向量；
列向量右乘矩阵时，结果是列向量；
行向量右乘矩阵时，结果是无意义；
列向量左乘矩阵时，结果是无意义；

矩阵与向量相乘 注意事项：
1.结果向量中的每个元素都是原向量与矩阵中单独行或列的点积；
2.矩阵一向量乘法满足对向量加法的分配律，对于向量v,w 和 矩阵M 有，
$(v + w)M = vM + wM$;

逻辑教育
Logic education

10 行向量与列向量的使用场景

为什么要使用行向量？（偏向于书写方便）

1.在文字中使用行向量的形式更加好书写；
2.用矩阵乘法实现坐标系转换时，向量左乘矩阵的形式更加方便
3.DirectX使用的是行向量

DirectX是由微软公司创建的多媒体编程接口。由C++编程语言实现。它们旨在使基于Windows 的计算机成为运行和显示具有丰富多媒体元素（例如全色图形、视频、3D 动画和丰富音频）的应用程序的理想平台。DirectX并不是一个单纯的图形API，它是由微软公司开发的用途广泛的AP

为什么要使用列向量?

1.等式中使用列向量形式更好
2.线性代数书中使用列向量
3.多本计算机图形学都是使用的列向量
4.OpenGL 使用的是列向量

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

矩阵几何意义

1 矩阵是如何变换成向量的?

首先,向量[1,–3 –4]是如果实现位移?

位移[1,0,0],随后位移[0,–3,0],最后位移[0,0,4]

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

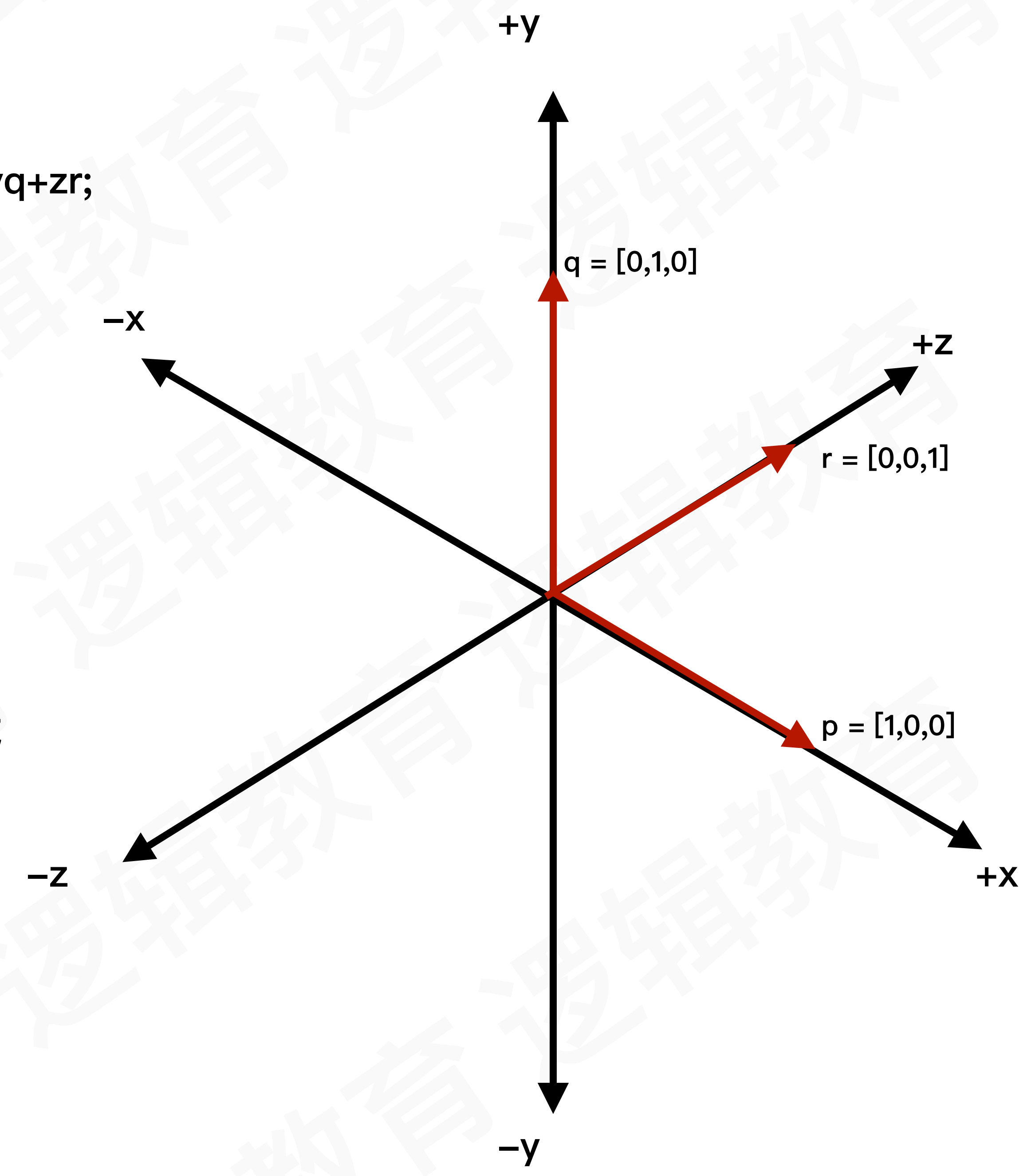
矩阵几何意义

p、q、r 定义分别指向+x,+y,+z方向的单位向量，v = xp+yq+zr;

$$M = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{bmatrix}$$

如果把矩阵的行解释为坐标的基向量，那么乘以该矩阵就是做了一次坐标转换。若aM = b,我们就可以说，M 将a向量转换成了b。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

矩阵几何意义

思考

3*3矩阵的9个数字之间有什么关系？怎样构建一个矩阵来做这个转换？

思考上面2个问题，我们可以看一下使用基向量[1,0,0]、[0,1,0]、[0,0,1]乘以矩阵M的情况：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

总结：

基向量[1,0,0]乘以矩阵M，结果是M的第一行。后面的2个方程也是一样的规律。

矩阵的每一个都能解释为转换后的基本向量。

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

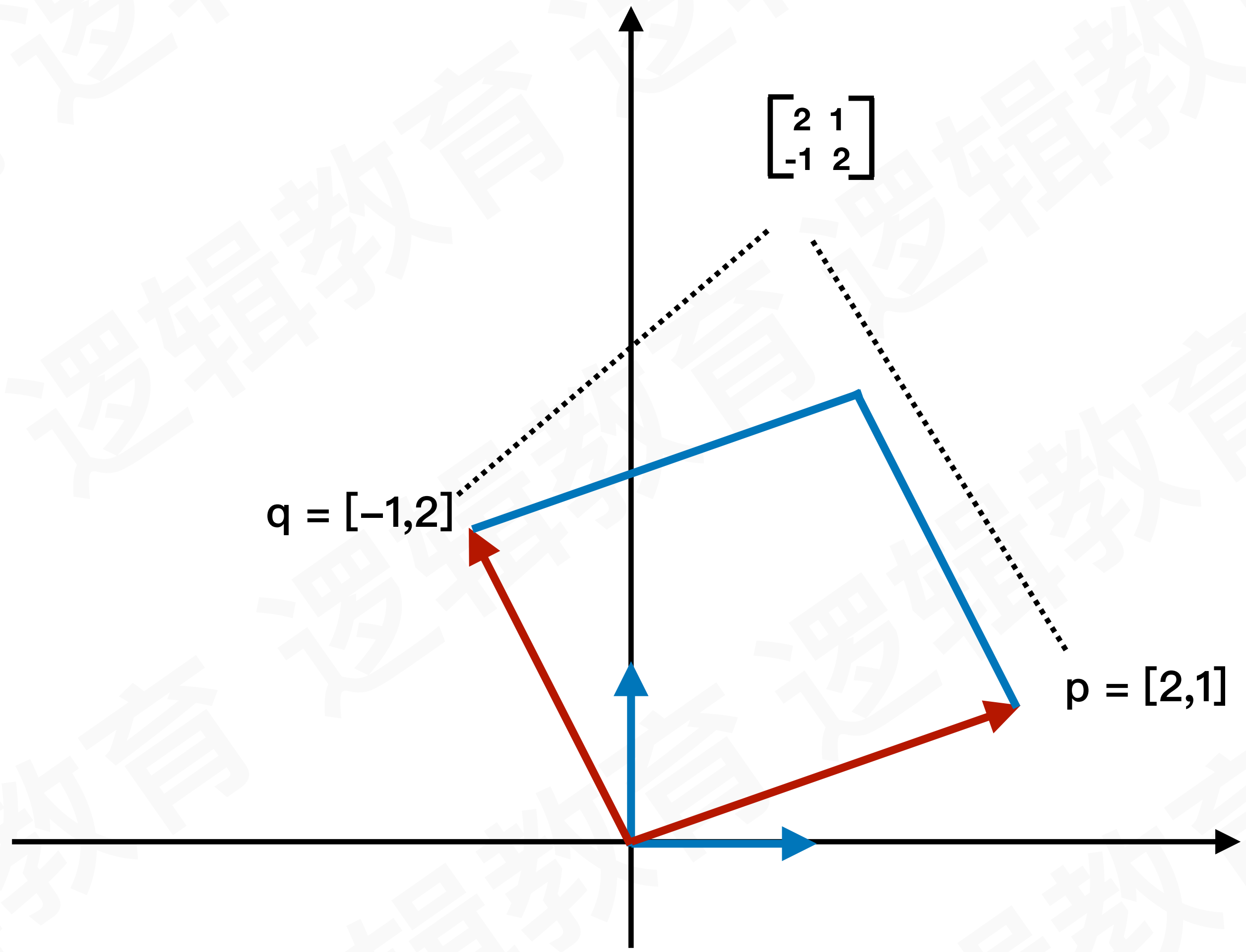
逻辑教育
Logic education

矩阵几何意义

2 * 2 矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

抽取基向量p和q
p = [2,1]
q = [–1,2]



蓝色箭头表示单元向量

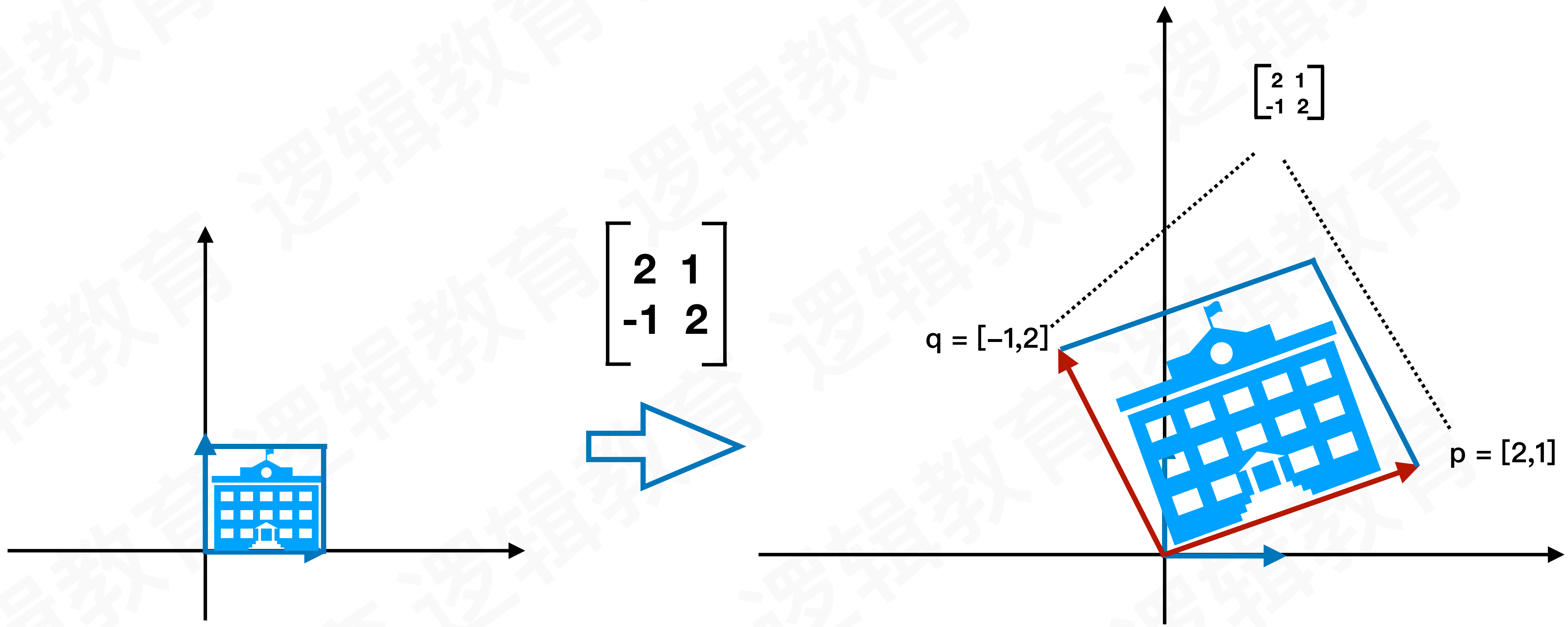
蓝色线段与基向量q,p构成
平行四边形更便于理解变化
对其他向量的影响

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

矩阵几何意义

二维矩阵的几何意义



从单元矩阵到矩阵M， 不仅旋转坐标系，还会拉伸它

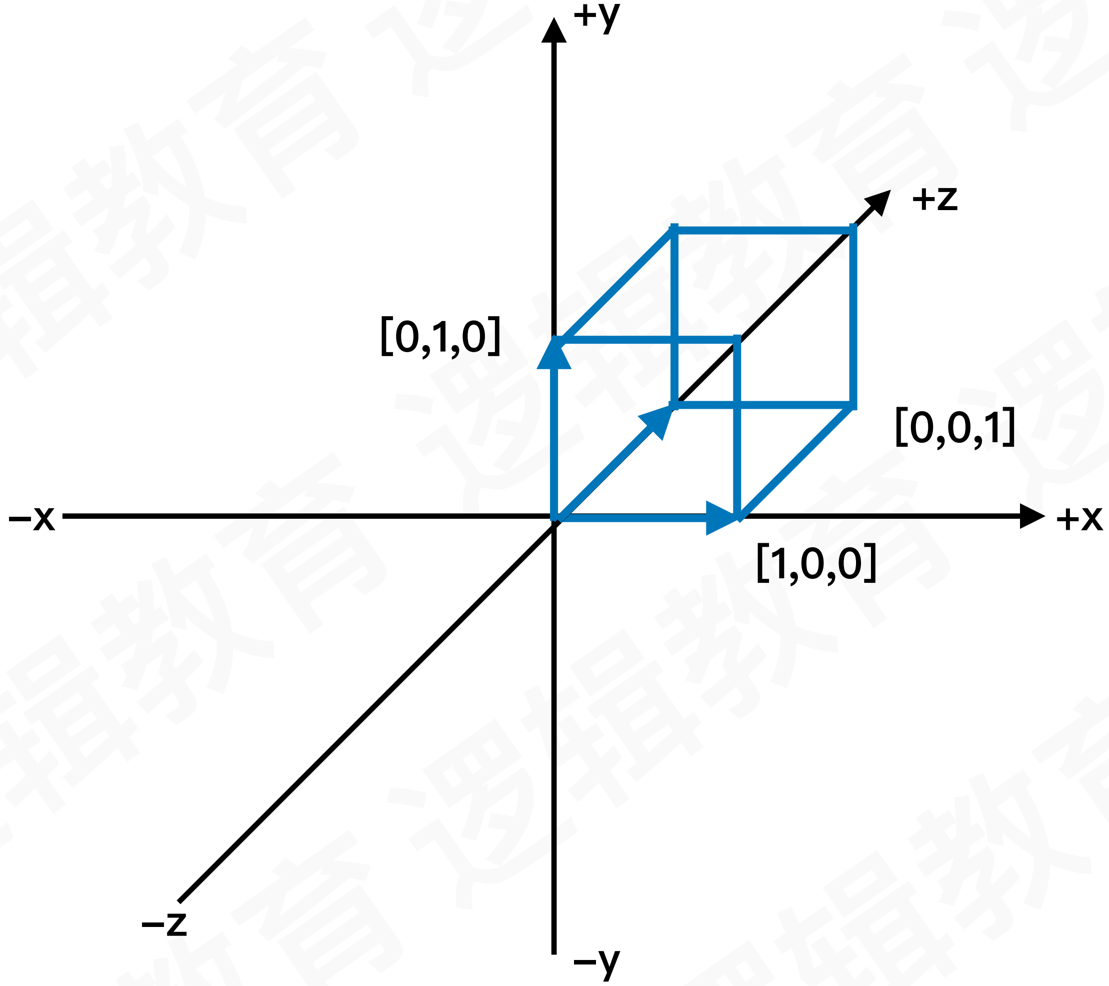
蓝色箭头表示单元向量

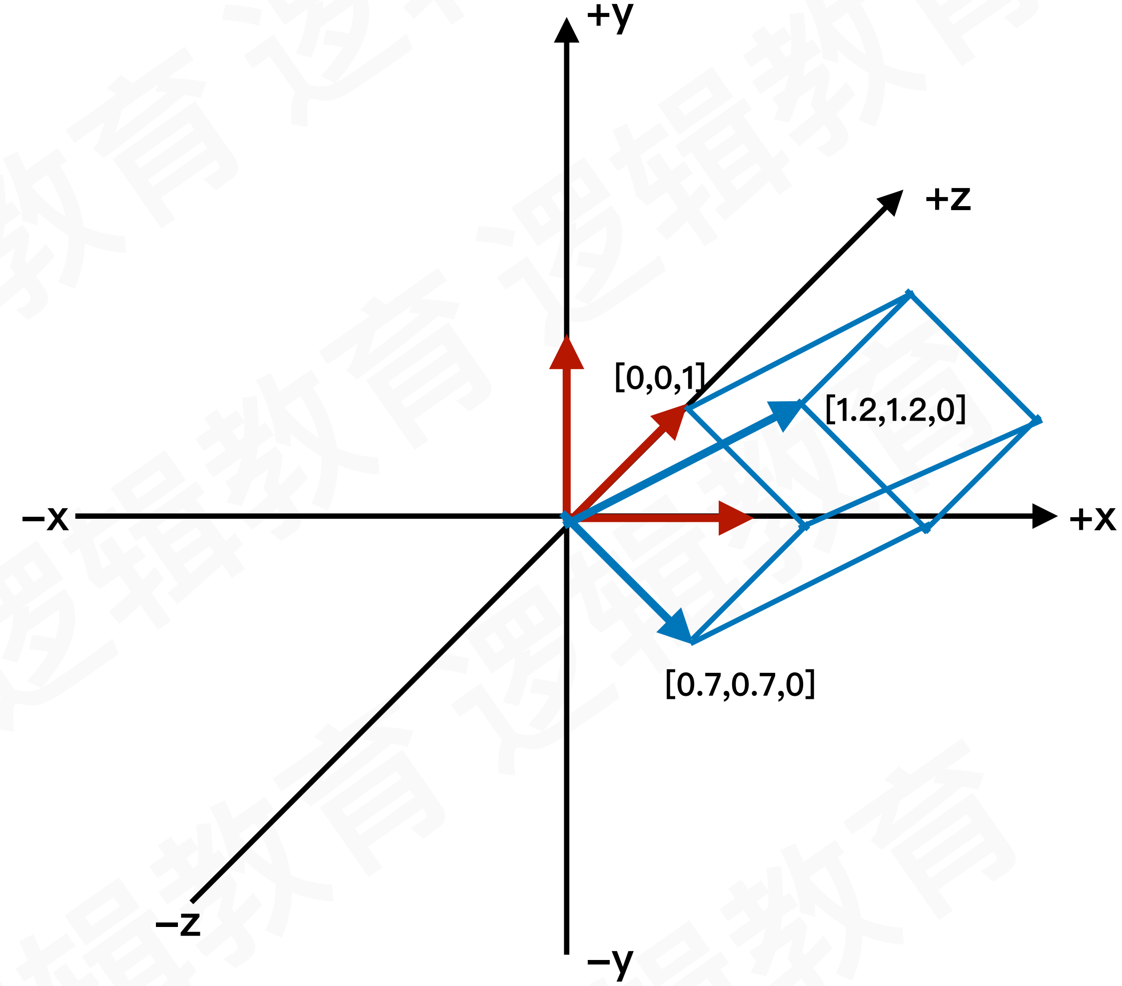
蓝色线段与基向量q,p构成
平行四边形更便于理解变化
对其他向量的影响

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

矩阵几何意义

三维矩阵的几何意义





单元3D矩阵 图形 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.7 & -0.7 & 0 \\ 1.2 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

矩阵几何意义

总结

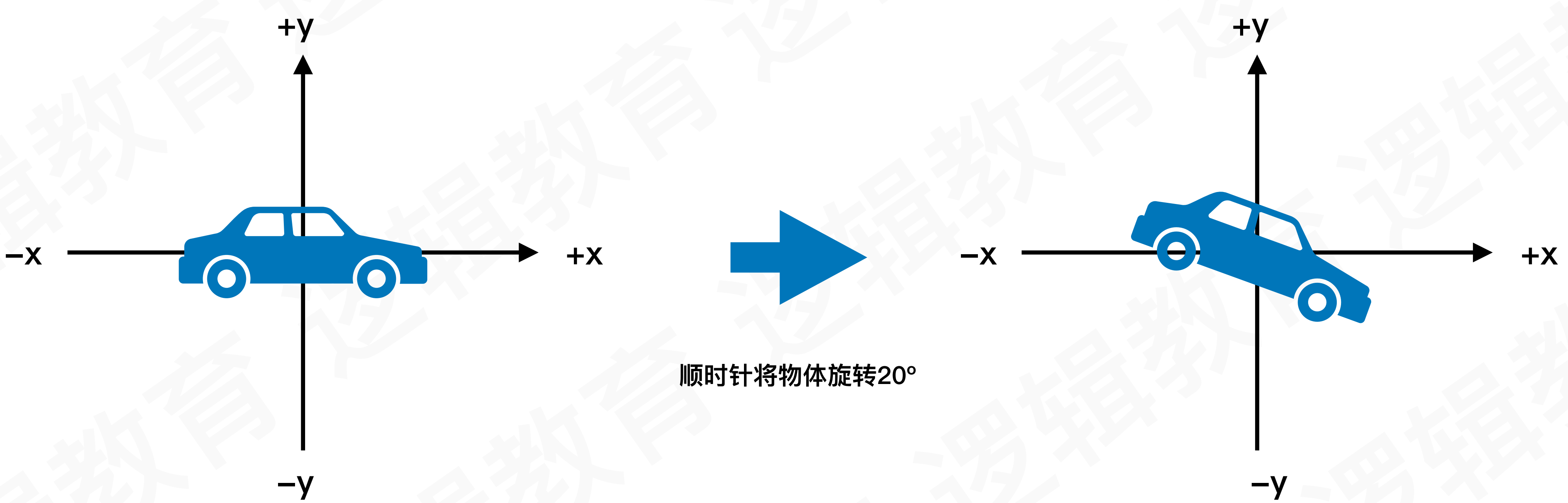
1.方阵的行能被解释为坐标系的基向量；
2.为了将向量从原坐标系变换到新坐标系，用它乘以一个矩阵。
3.从原坐标系到这些基向量定义的新坐标系的变化是一种线性变换。线性变换保持直线和平行线。但角度、长度面积或体积可能会改变。
4.零向量乘以任何矩阵仍然得到零向量。因此，方阵所代表的线性变换的原点和原坐标系原点一致。变换不包含原点。
5.可以通过想象变换后的坐标系的基向量来想象矩阵。这些基向量在2D中构成L形。在3D构成“三角架”型。用一个盒子以及辅助更有助于理解

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

矩阵和线性变换

变换物体&变换坐标系



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

矩阵和线性变换

变换物体优点

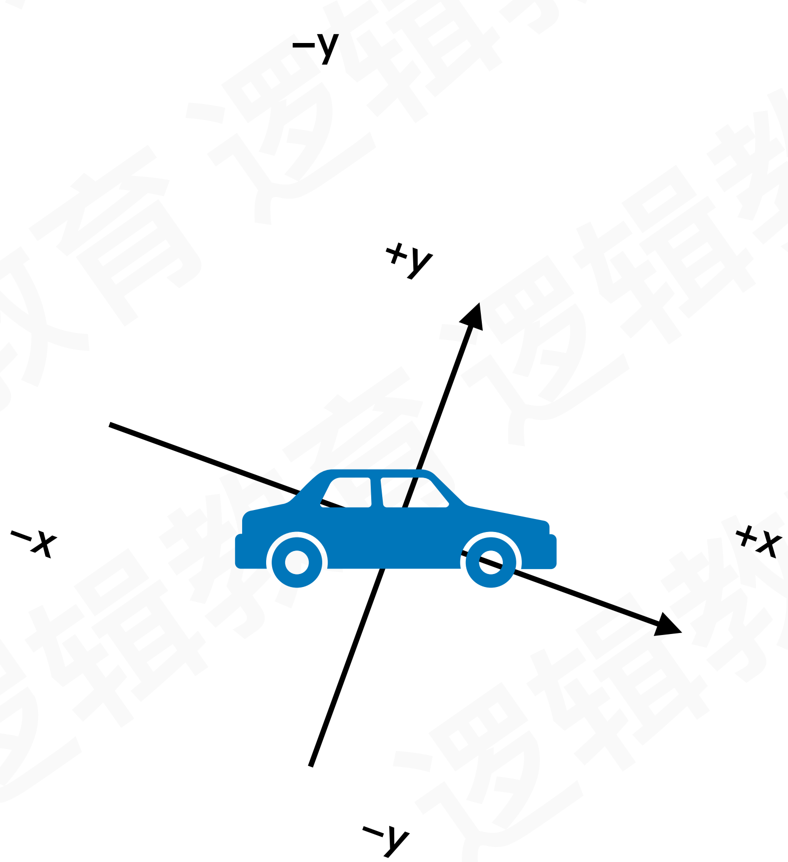
变换物体，是最直接的变化。比如，渲染一辆车，需要将点从车的物体坐标变换到世界坐标接着到照相机坐标系

将车旋转到世界坐标系，在世界坐标系中做碰撞检测，但这需要大量的资源。因为模型有大量的顶点数据，计算量偏大。

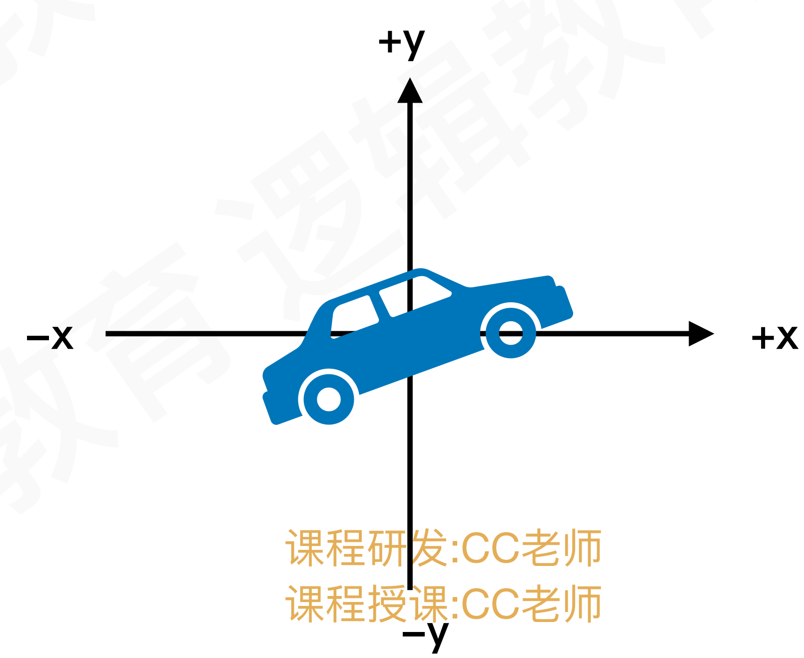
可以选择变换物体坐标系、也可以选择变换坐标系。在某一些情况选择合适的即可。2种变换实际上上等价的。将物体变换一个量等价于将坐标系变换一个相反的量。

变换坐标系优点

比如，如果此时2台车撞击。我们知道世界坐标中的撞击位置和撞击路线。想像一下，世界坐标系被转换到和车的物体坐标系重合的位置，而此时同时被撞击车、车、撞击路线不动。这样就能得到撞击车和撞击路线在车的物体坐标系的坐标。接下来就可以判断是汽车是否相撞。



将坐标系顺时针旋转20°
等价于逆时针旋转车20°



逻辑教育
Logic education

三角函数表

[0 1]
[–1 0]
[0 –1]
[1 0]

[1,0]
[0,1]
[-1,0]
[0,-1]

	0 0°	π/2 90°	π 180°	3π/2 270°	2π 360°
sin∂	0	1	0	-1	0
cos∂	1	0	-1	0	1
tan∂	0	不存在	0	不存在	0
cot∂	不存在	0	不存在	0	不存在

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

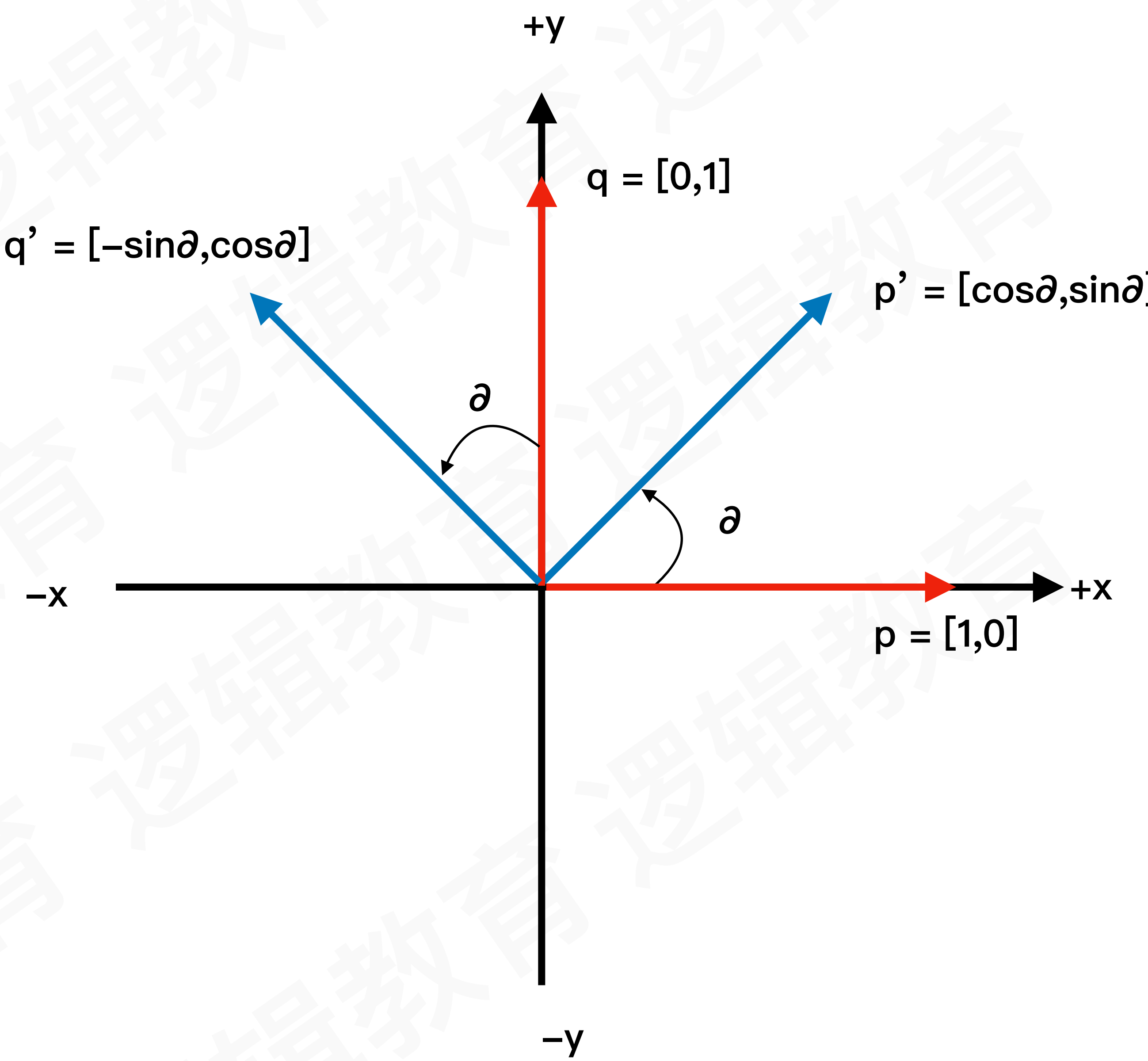
旋转—2D

2D旋转矩阵的构成

$$R(\partial) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\partial & \sin\partial \\ -\sin\partial & \cos\partial \end{bmatrix}$$

思考 将上述公式，用自己的方式证明（推演出来）

[1,0]
[0,1]
[-1,0]
[0,-1]



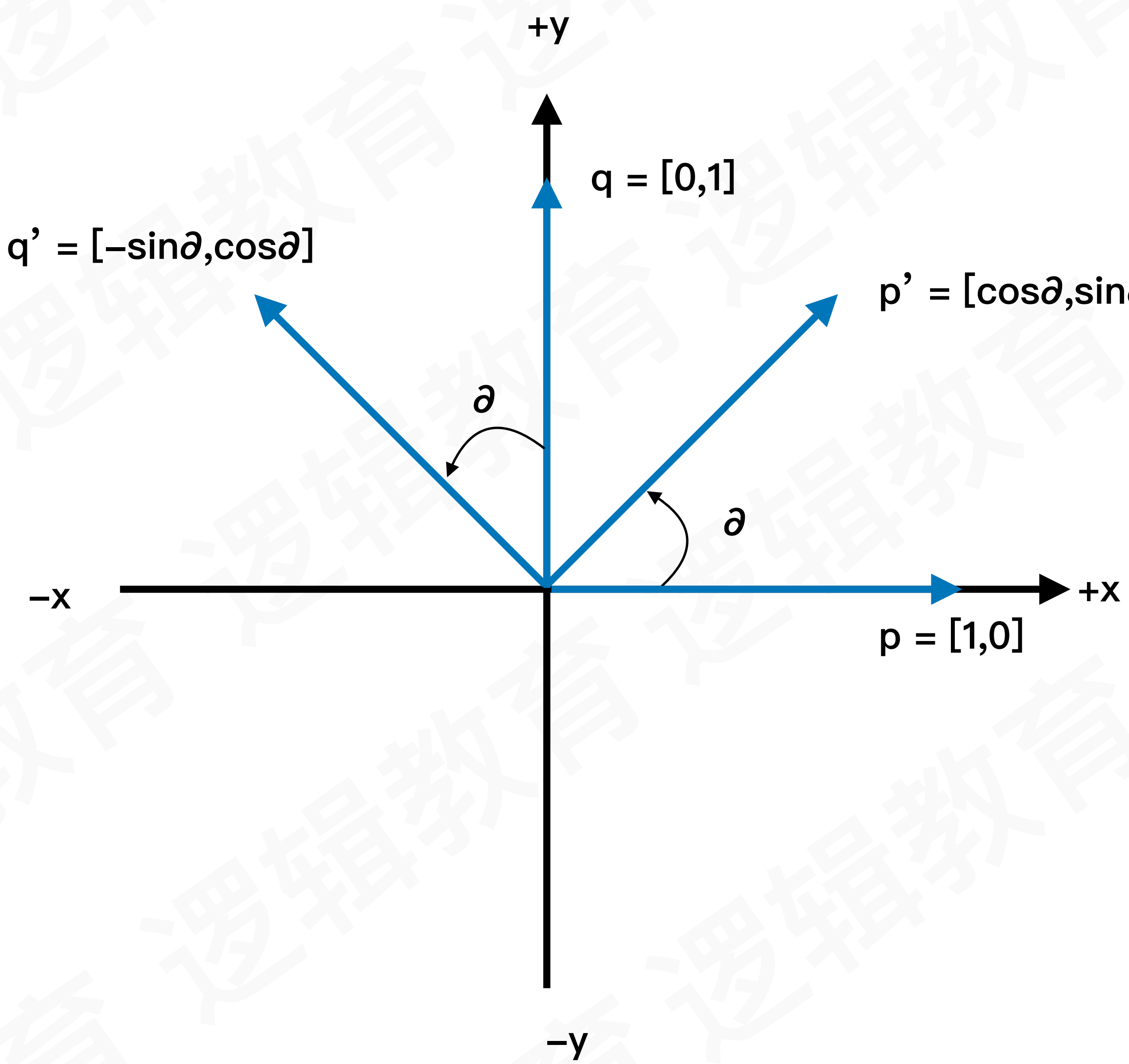
课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

旋转—2D

2D旋转矩阵的构成

$$R(\partial) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\partial & \sin\partial \\ -\sin\partial & \cos\partial \end{bmatrix}$$



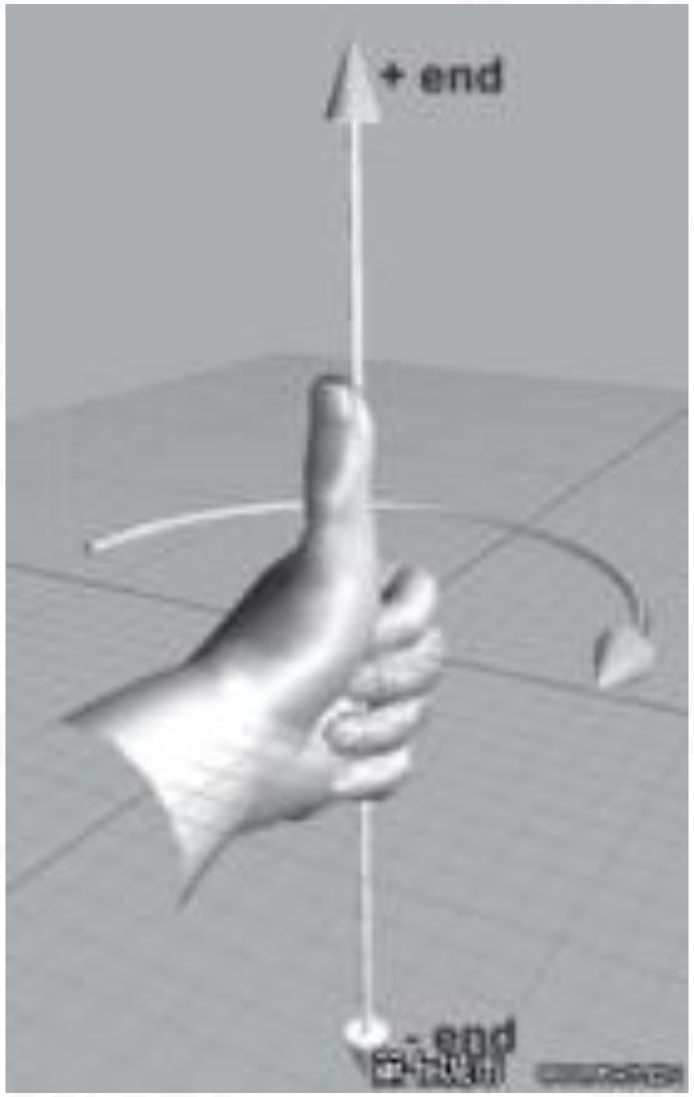
公式推演： 注意：p与q是同时旋转

p 的变化	q 的变化
[1 0]	[0 1]
[0 1]	[–1 0]
[–1 0]	[0 –1]
[0 –1]	[1 0]
[cos∂ sin∂]	[–sin∂ cos∂]

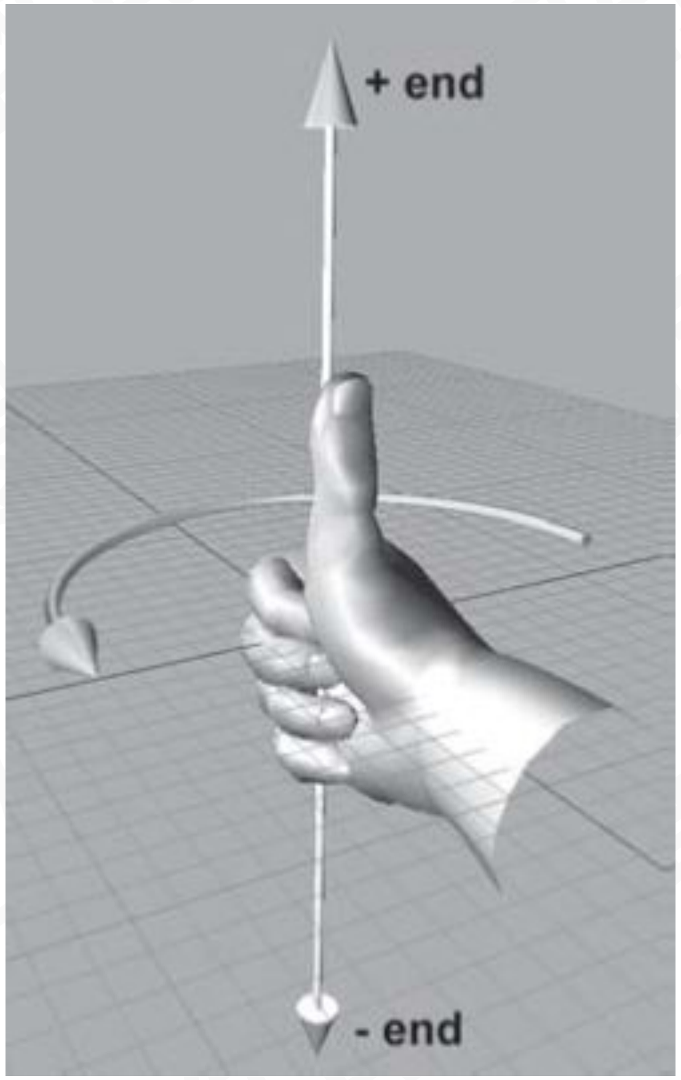
课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

旋转—3D



左手坐标系中以左手法则定义正方向



右手坐标系中以右手法则定义正方向

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

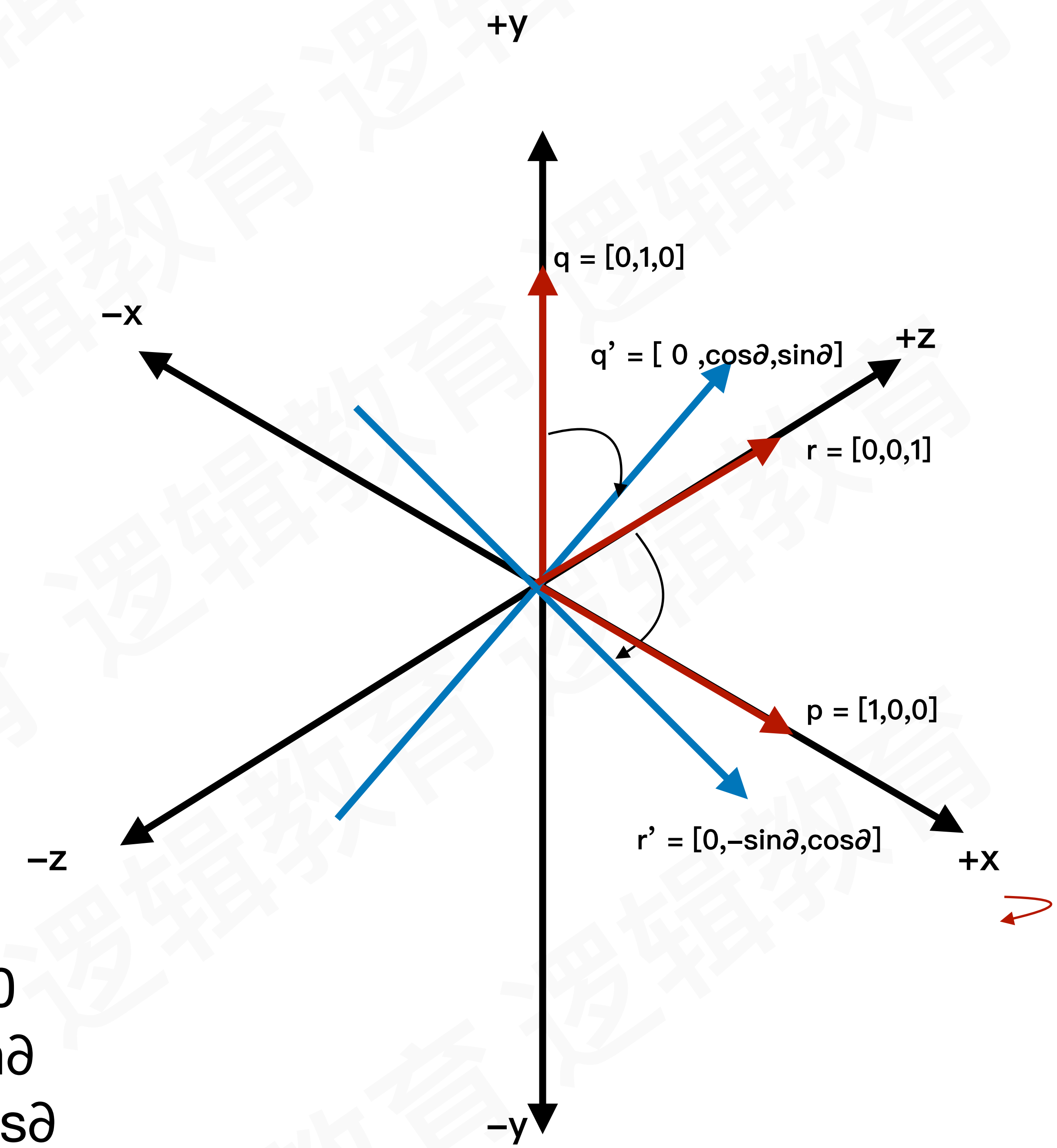
逻辑教育
Logic education

3D旋转 围绕X轴旋转

$$R_x(\partial) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\partial & \sin\partial \\ 0 & -\sin\partial & \cos\partial \end{bmatrix}$$

思考 将上述公式，用自己的方式证明（推演出来）

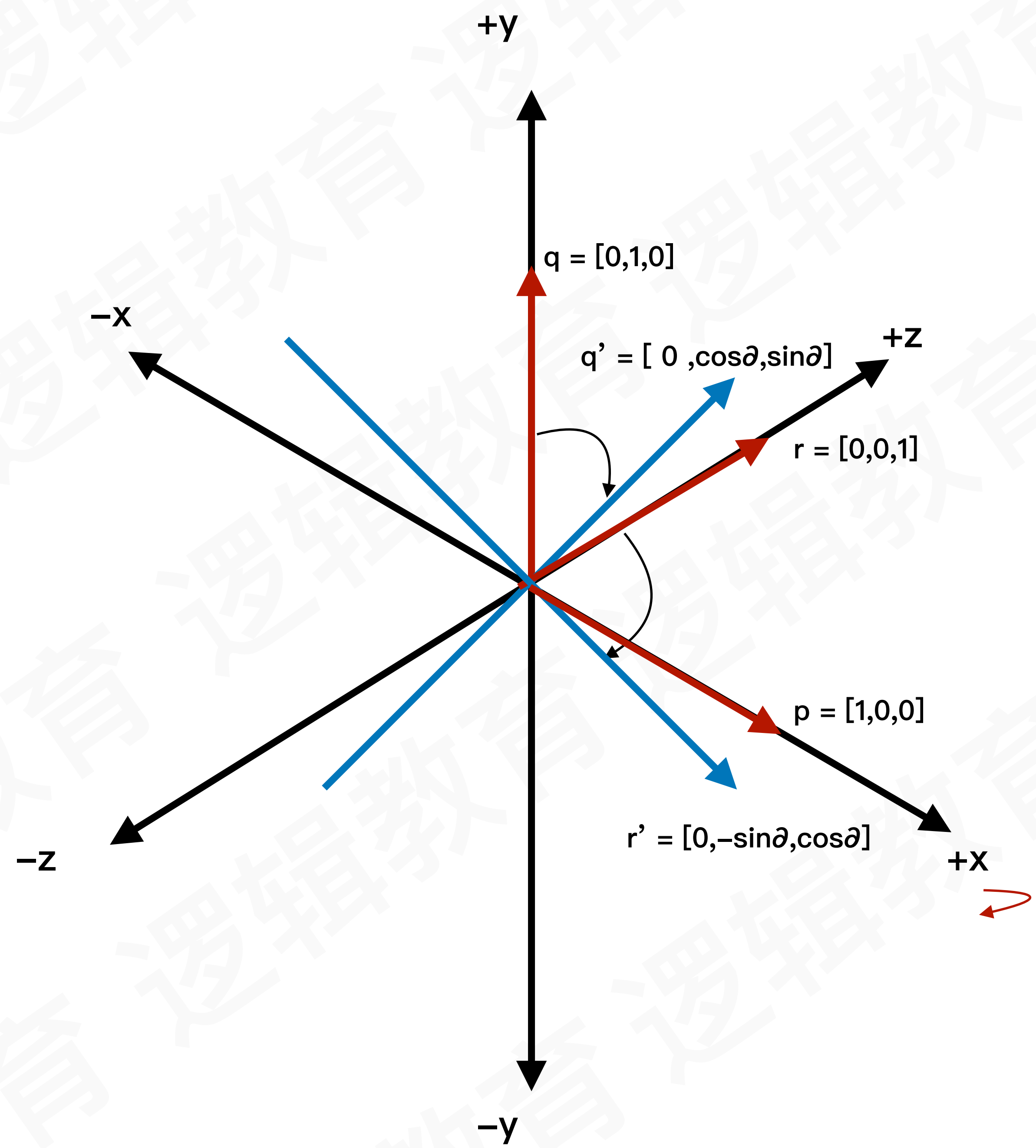
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\partial & \sin\partial \\ 0 & -\sin\partial & \cos\partial \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\partial & \sin\partial \\ 0 & -\sin\partial & \cos\partial \end{matrix}$$



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

3D旋转 围绕X轴旋转

$$R_x(\partial) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\partial & \sin\partial \\ 0 & -\sin\partial & \cos\partial \end{bmatrix}$$



公式推演： 注意：p与r是同时旋转

q 的变化

[0 1 0]
[0 0 1]
[0 –1 0]
[0 0 –1]

[0，cos∂， sin∂]

r 的变化

[0 0 1]
[0 –1 0]
[0 0 –1]
[0 1 0]

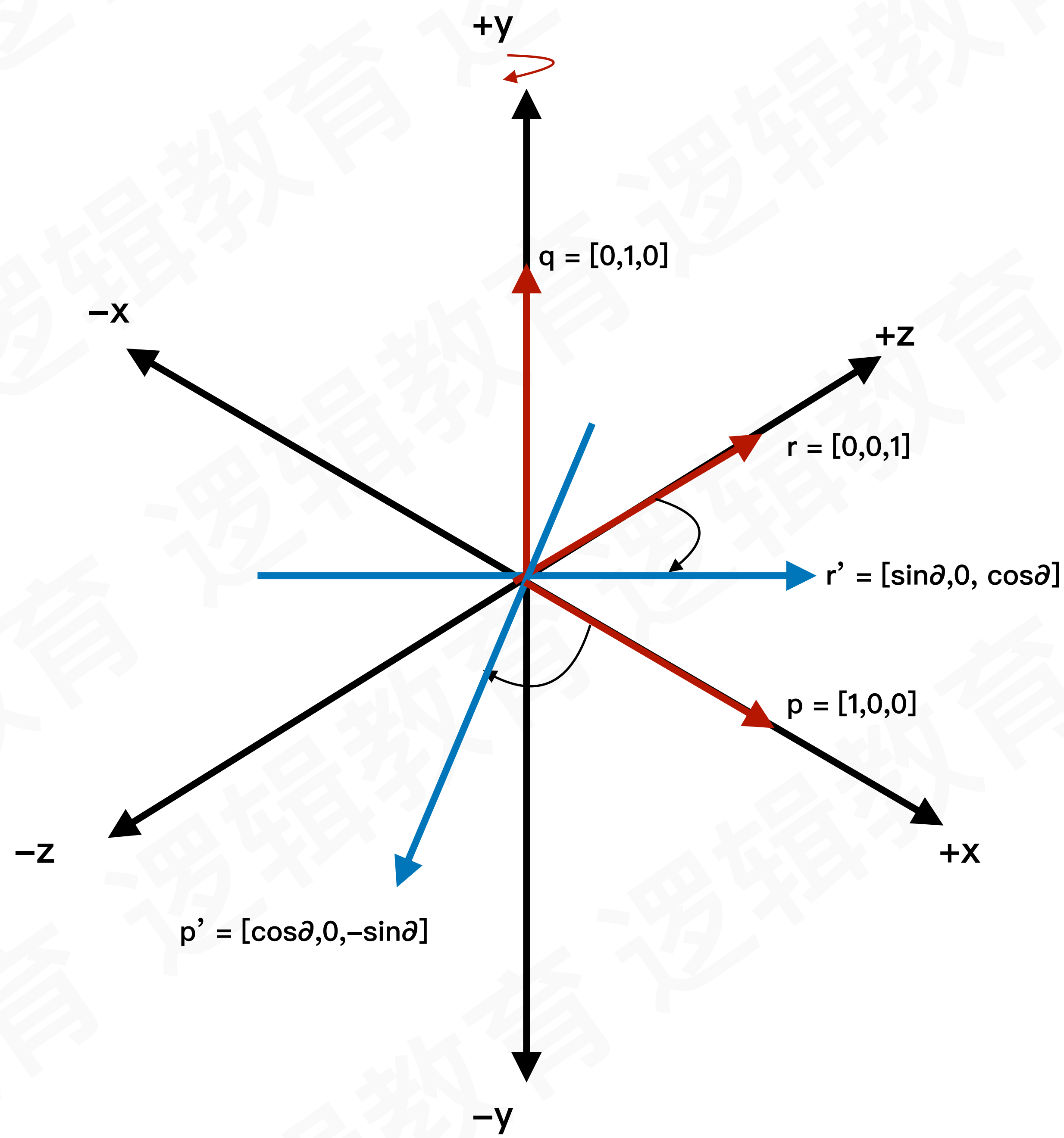
[0，–sin∂，cos∂]

几何意义：

想让一个图形在3D中绕X轴旋转∂度。可以将矩阵与$R_x(\partial)$矩阵相乘，既可实现矩阵中的坐标旋转后的矩阵结果

3D旋转 围绕Y轴旋转

$$R_x(\partial) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\partial & 0 & -\sin\partial \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\partial & 0 & \cos\partial \end{bmatrix}$$



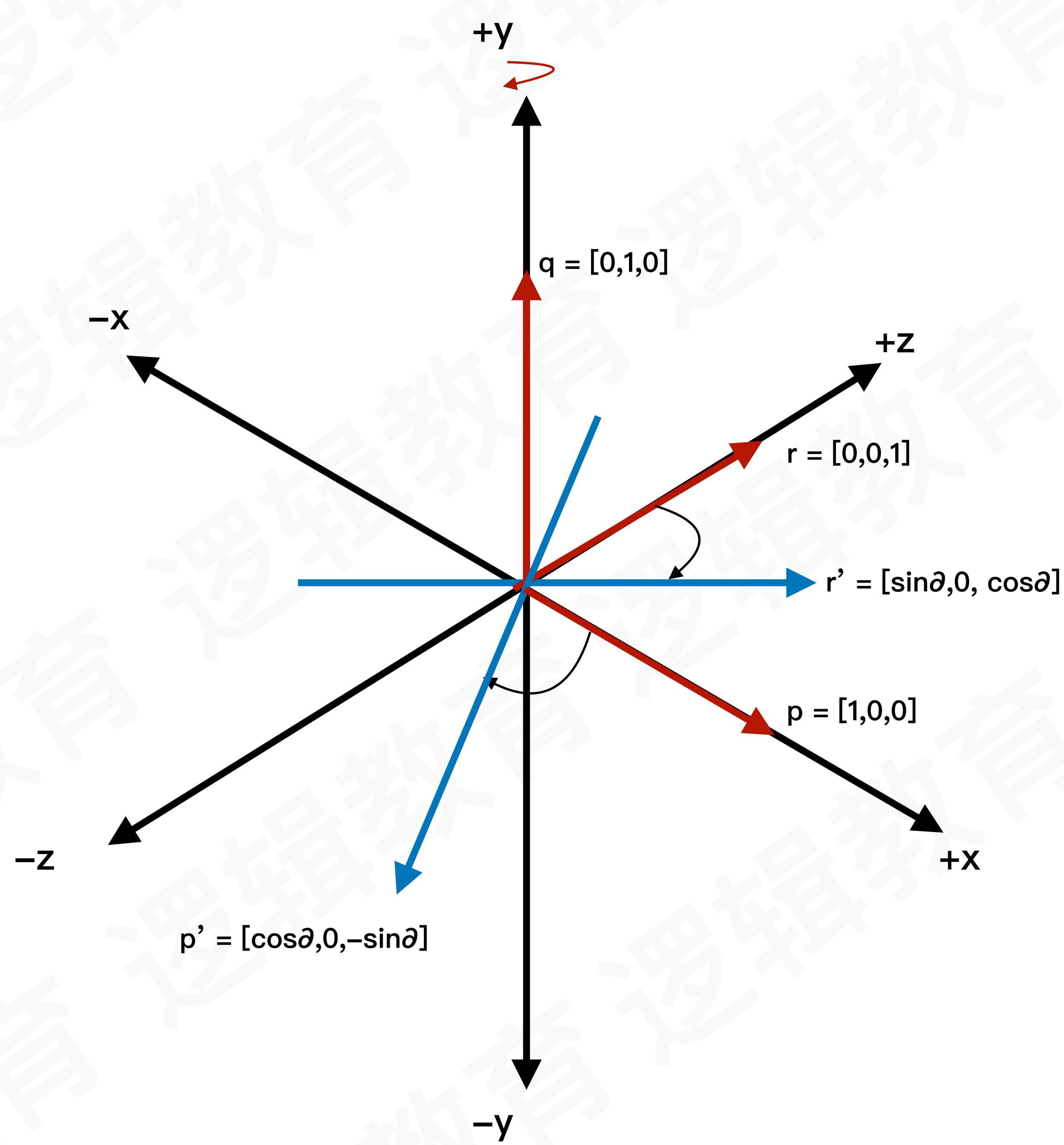
思考 将上述公式，用自己的方式证明（推演出来）

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

3D旋转 围绕Y轴旋转

$$R_x(\partial) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\partial & 0 & -\sin\partial \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\partial & 0 & \cos\partial \end{bmatrix}$$



公式推演: 注意：p与r是同时旋转

p 的变化	r 的变化
[1 0 0]	[0 0 1]
[0 0 −1]	[1 0 0]
[−1 0 0]	[0 0 −1]
[0 0 1]	[−1 0 0]
[cos∂ 0 −sin∂]	[sin∂ 0 cos∂]

几何意义:

想让一个图形在3D中绕Y轴旋转∂度。可以将矩阵与$R_x(\partial)$矩阵相乘，既可实现矩阵中的坐标旋转后的矩阵结果

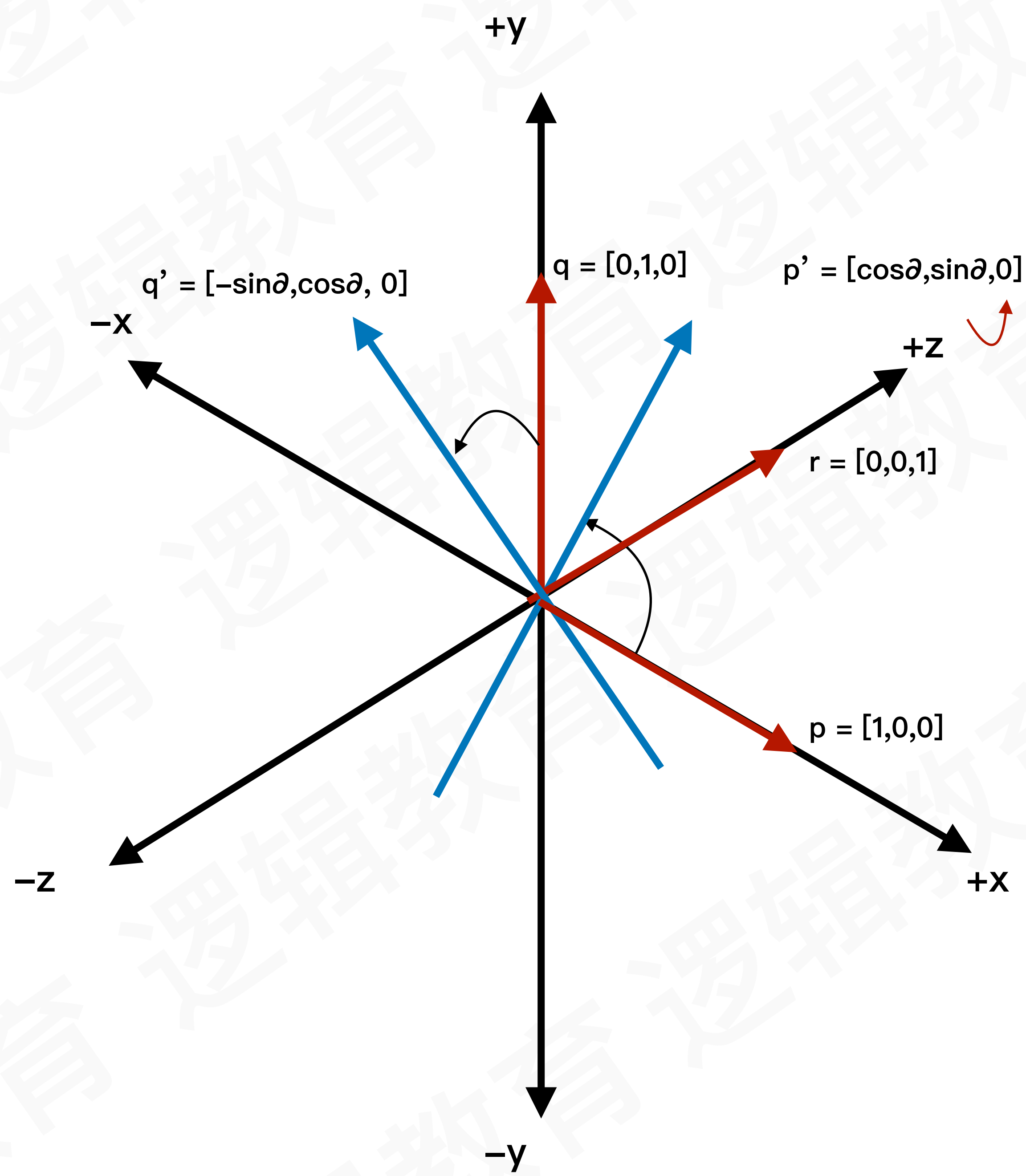
课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

3D旋转 围绕Z轴旋转

$$R_x(\partial) = \begin{bmatrix} \mathbf{p'} \\ \mathbf{q'} \\ \mathbf{r'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\partial & \sin\partial & 0 \\ -\sin\partial & \cos\partial & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

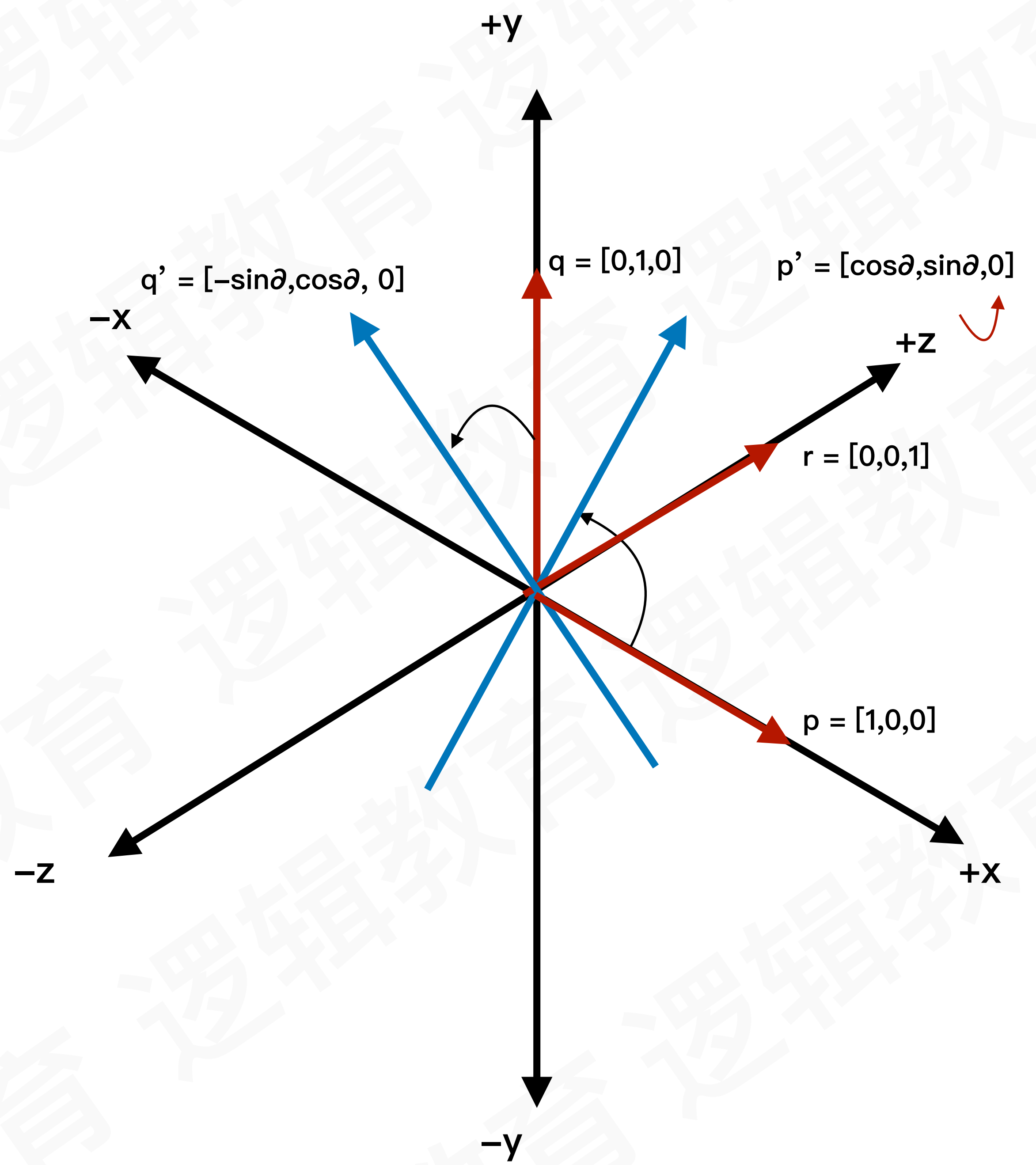
思考 将上述公式，用自己的方式证明（推演出来）



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

3D旋转 围绕Z轴旋转

$$R_x(\partial) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\partial & \sin\partial & 0 \\ -\sin\partial & \cos\partial & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



公式推演： 注意：p与q是同时旋转

p 的变化	q 的变化
[1 0 0]	[0 1 0]
[0 1 0]	[−1 0 0]
[−1 0 0]	[0 −1 0]
[0 −1 0]	[1 0 0]
[cos∂ sin∂ 0]	[−sin∂ cos∂ 0]

几何意义：

想让一个图形在3D中绕Z轴旋转∂度。可以将矩阵与$R_x(\partial)$矩阵相乘，既可实现矩阵中的坐标旋转后的矩阵结果

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

3D旋转 围绕任意轴旋转向量

绕n轴旋转角度∂的矩阵

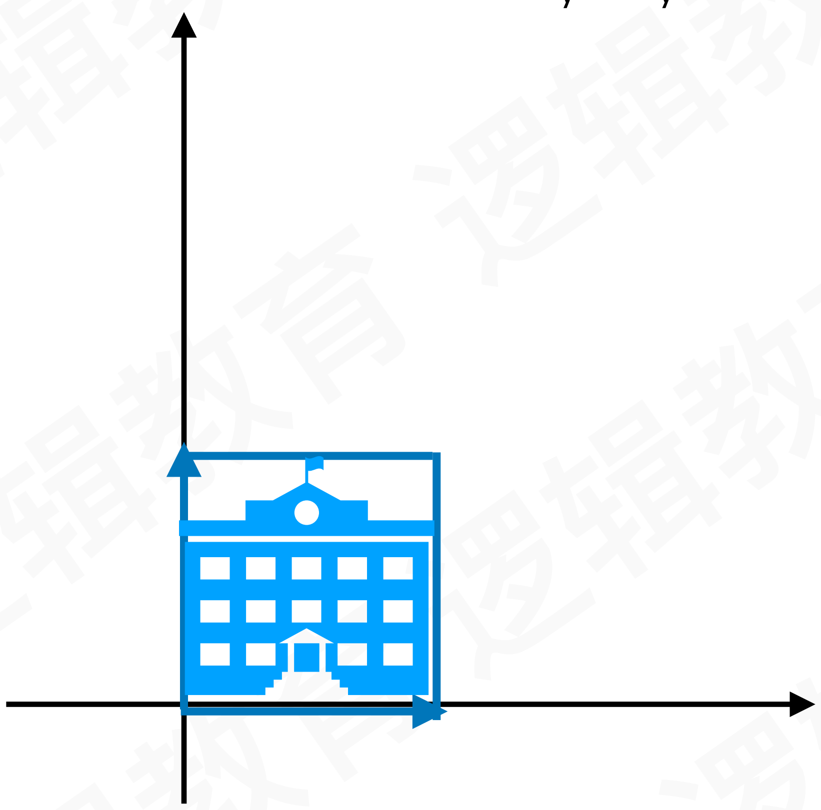
$$\mathbf{R}(n,\partial) = \begin{bmatrix} \mathbf{p'} \\ \mathbf{q'} \\ \mathbf{r'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2(1-\cos\partial)+\cos\partial & n_x n_y(1-\mathrm{con}\partial)+n_z\sin\partial & n_x n_z(1-\cos\partial)-n_y \mathrm{Sin}\partial \\ n_x n_y(1-\cos\partial)-n_z\sin\partial & n_y^2(1-\mathrm{con}\partial)+\cos\partial & n_y n_z(1-\cos\partial)-n_x \mathrm{Sin}\partial \\ n_x n_z(1-\cos\partial)+n_y\cos\partial & n_y n_z(1-\mathrm{con}\partial)+n_x\sin\partial & n_z^2(1-\cos\partial)+\cos\partial \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

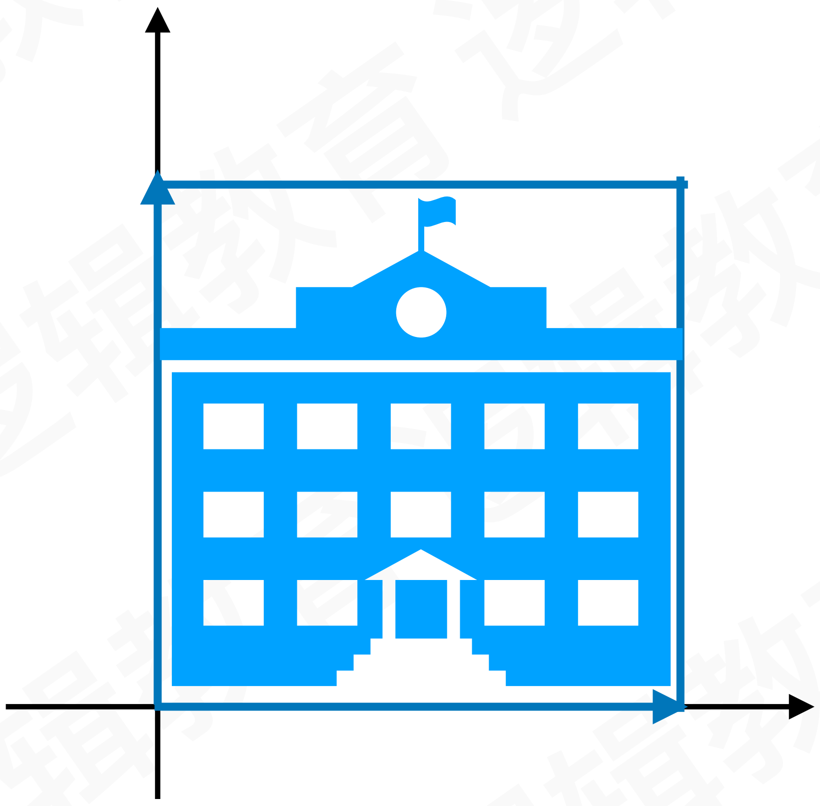
2D缩放

$p' = k_x\, q = k_x[0\ 1] = [0\ k_x]$

$q' = k_y\, q = k_y[0\ 1] = [0\ k_y]$



$k_x = 1, k_y = 1$



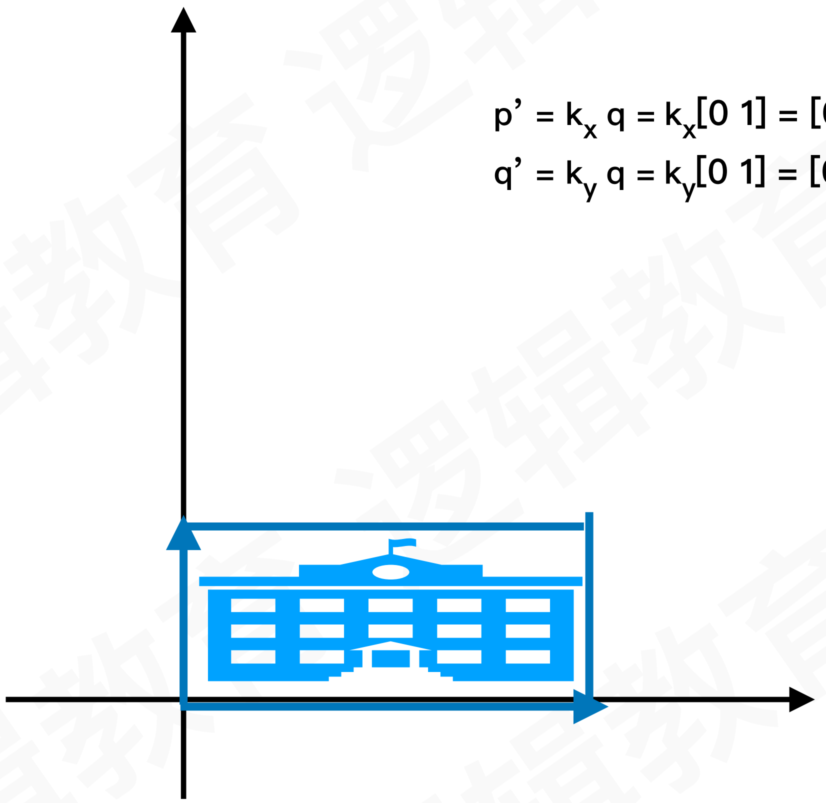
$k_x = 2, k_y = 2$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

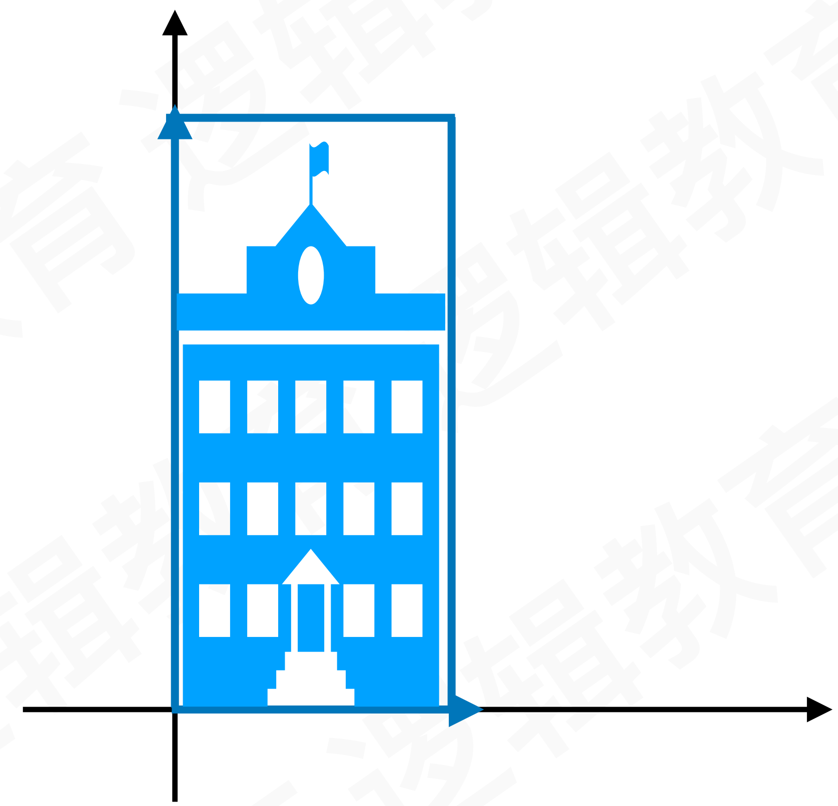
2D缩放 与 3D缩放

$p' = k_x q = k_x[0\ 1] = [0\ k_x]$

$q' = k_y q = k_y[0\ 1] = [0\ k_y]$



$k_x = 1.75, k_y = 0.75$



$k_x = 1.5, k_y = 2.25$

沿着坐标轴2D的缩放矩阵

$$S(k_x,k_y) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

沿着坐标轴3D的缩放矩阵

$$S(k_x,k_y,k_y) = \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_y \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

沿着任意方向缩放

2D

$$S(n,k) = \begin{bmatrix} 1+(k-1)n_x^2 & (k-1)n_xn_y \\ (k-1)n_xn_y & 1+(k-1)n_y^2 \end{bmatrix}$$

3D

$$S(n,k) = \begin{bmatrix} 1+(k-1)n_x^2 & (k-1)n_xn_y & (k-1)n_xn_z \\ (k-1)n_xn_y & 1+(k-1)n_y^2 & (k-1)n_yn_z \\ (k-1)n_xn_z & (k-1)n_zn_y & 1+(k-1)n_z^2 \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

Hello Coder

学习,是一件开心的事

知识,是一个值得分享的东西

献给,我可爱的开发者们.

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师