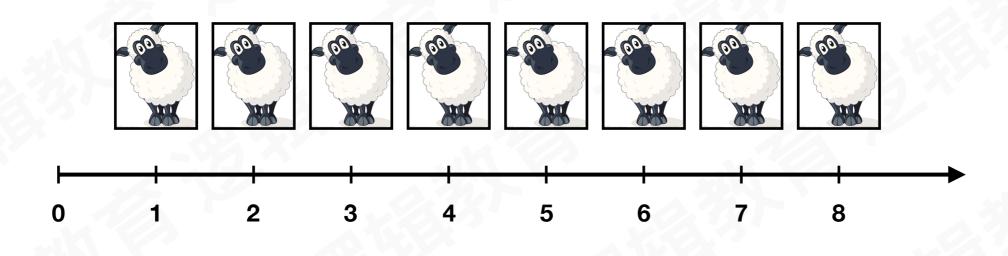


# Hello CC

3D数学主题[1]

# 视觉班—3D数学从坐标到向量





自然数数轴



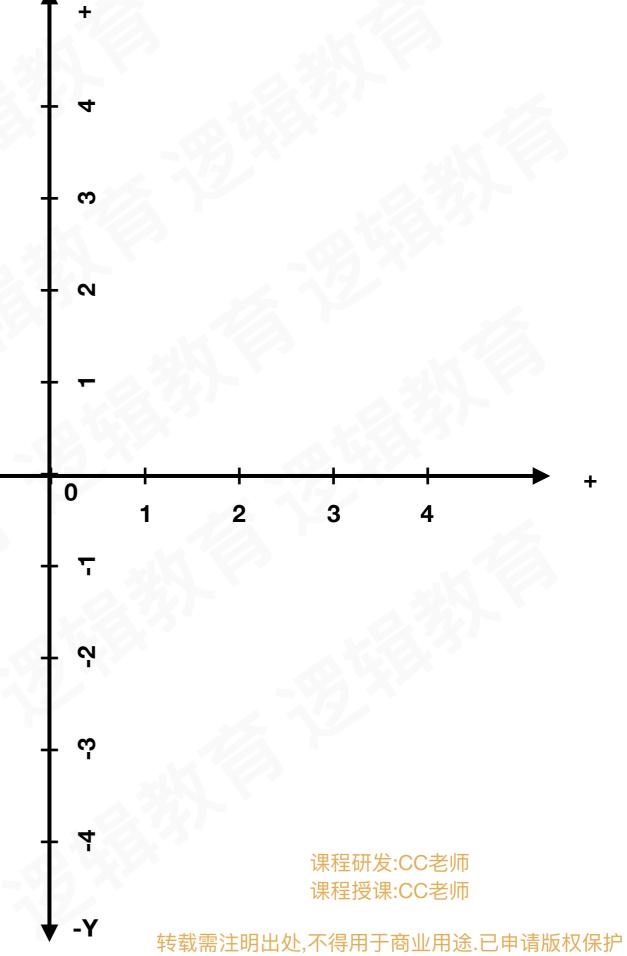
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

整数数轴 (灰色羊表示负数)



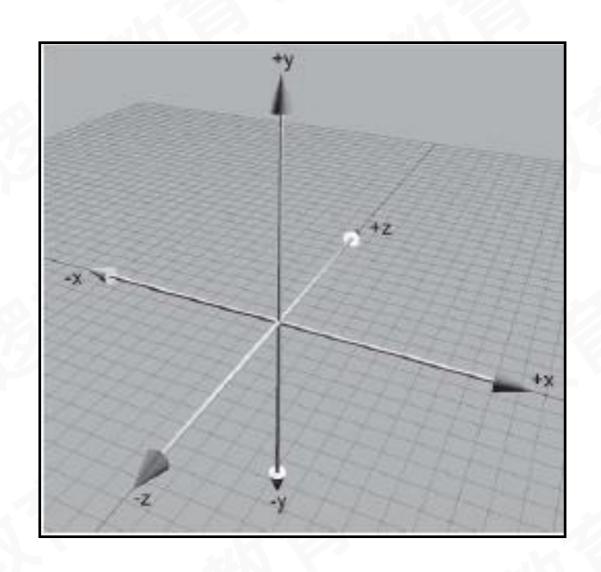
#### 2D笛卡尔坐标系原则

- 1、每个2D迪卡尔坐标系都有一个特殊的点,称作原点(0,0);
- 2、笛卡尔坐标轴是无限延伸的
- 3、无论笛卡尔坐标如果朝向,X轴朝右为正,朝左为负;Y轴朝上为正, 朝下为负

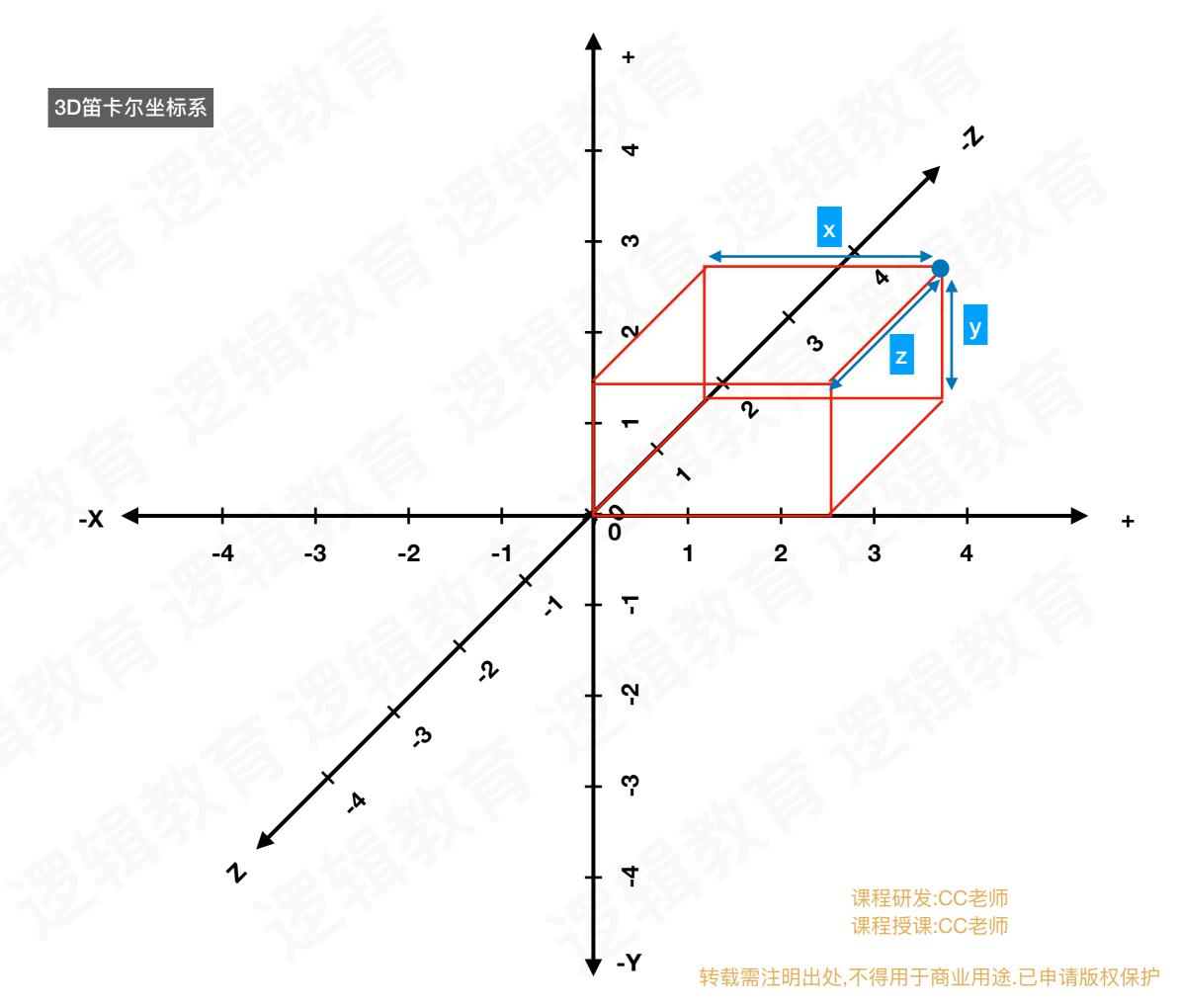




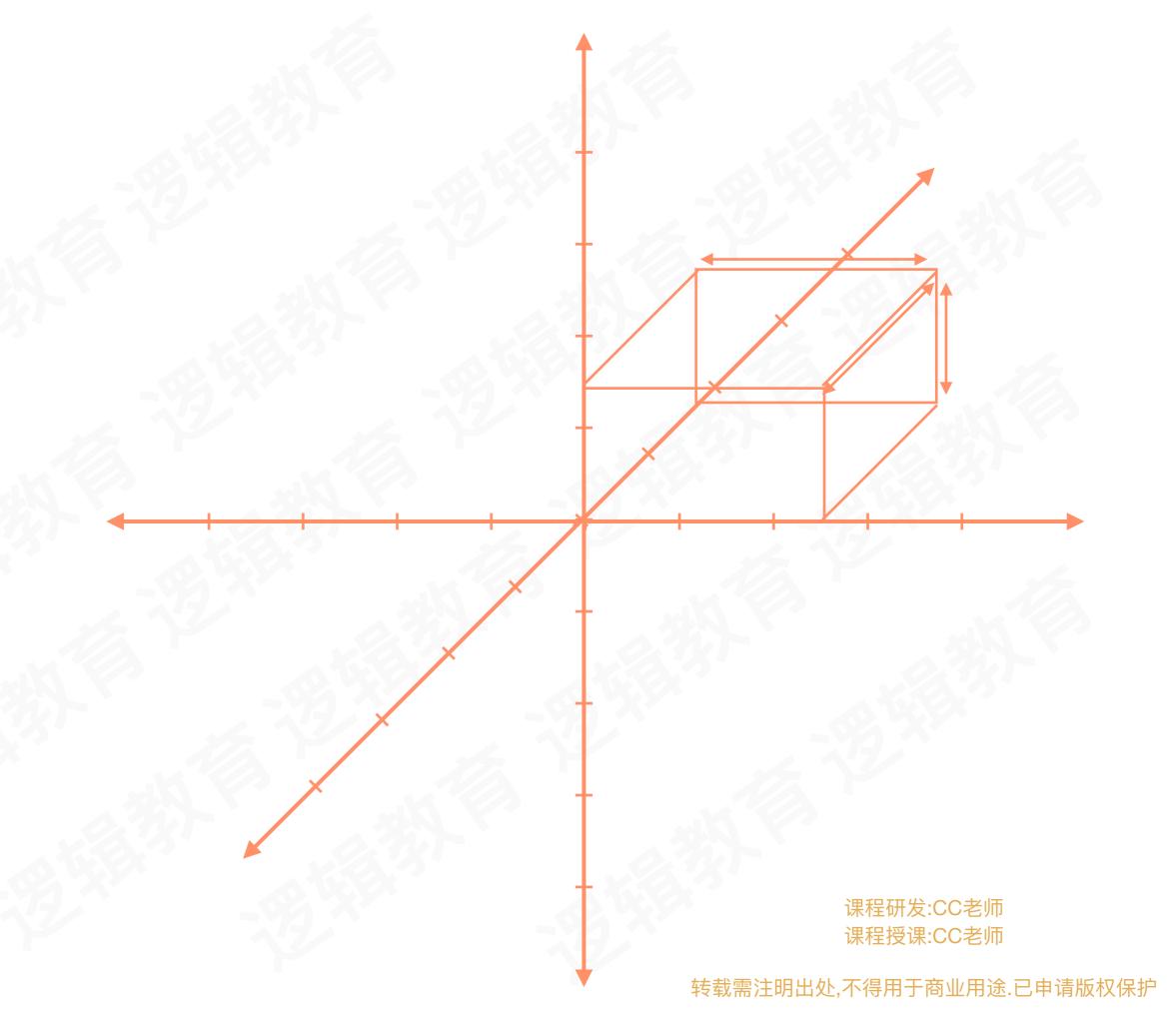
## 3D笛卡尔坐标系





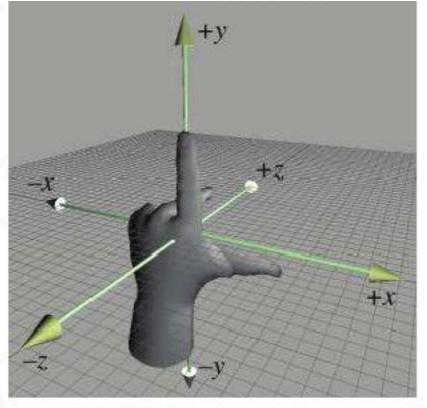


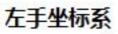


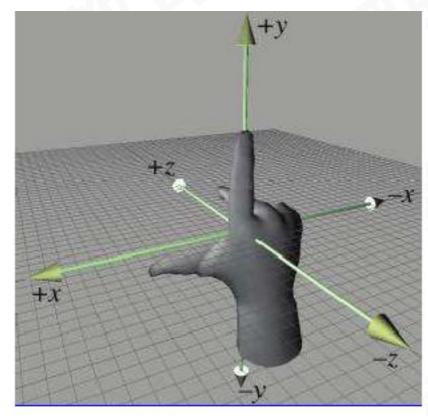




## 左手坐标系 与 右手坐标系





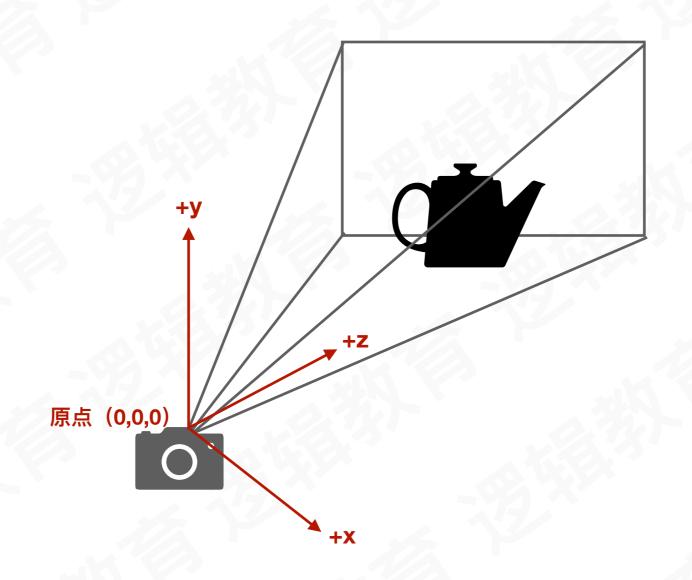


右手坐标系



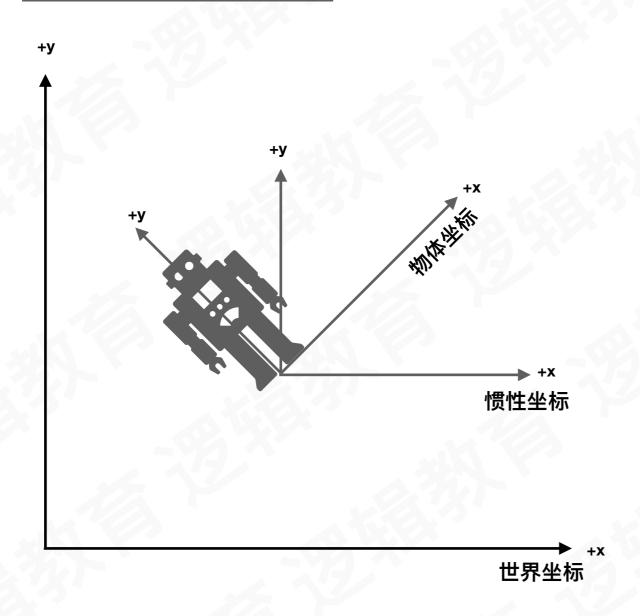


## 摄像机坐标系





## 世界坐标、惯性坐标、物体坐标





### 向量的记法

列向量

1 2 3 横向量

[123]

通常使用下标法来引用向量的某个分量

比如, a1 = 1; a2 = 2; a3 = 3

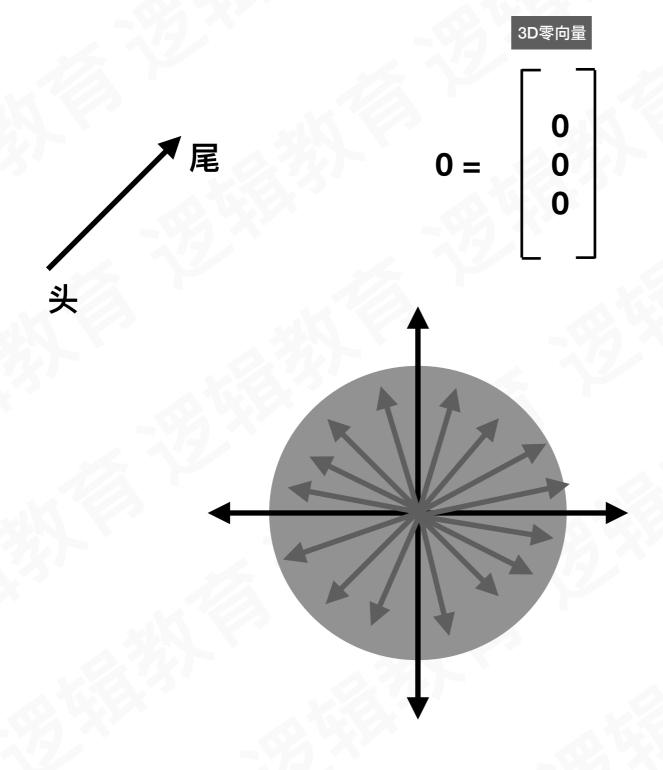
在课程中,针对的是2D\3D\4D向量,所以不用下标法

2D向量: x y

3D向量: x y z

4D向量: xyzw





#### 负向量表达式:向量变负

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix}$$

## 推演到2D、3D、4D:

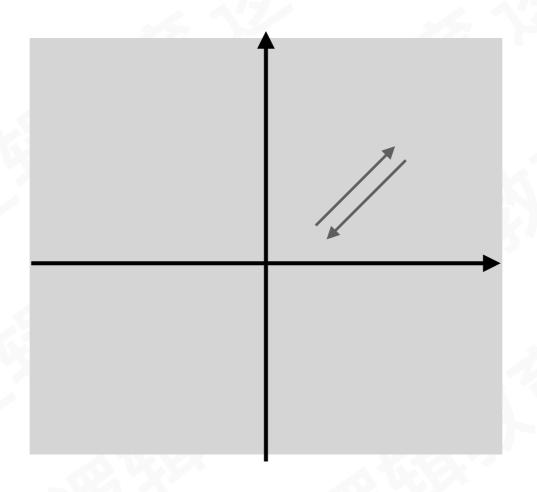
$$- \left[ x y \right] = \left[ -x -y \right]$$

$$-\left[x\ y\ z\right] = \left[-x\ -y\ -z\right]$$

$$-\left[x\ y\ z\ w\right] = \left[-x\ -y\ -z\ -w\right]$$

### 实例







## 向量大小计算公式

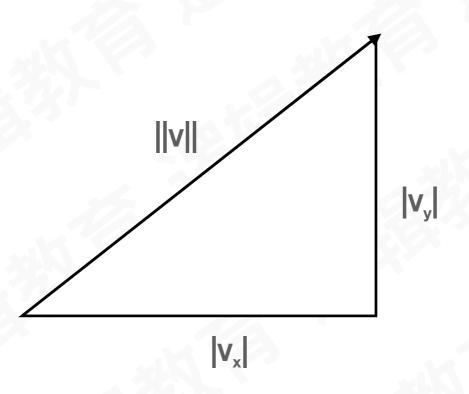
$$\|V\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + ... + V_{n-1}^2 + V_n^2}$$

## 2D 、3D向量大小的计算公式

$$\|V\| = \int V_x^2 + V_y^2$$
  
 $\|V\| = \int V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ 

#### 练习







#### 标量与向量的乘法

$$\begin{bmatrix}
a_1 \\
a_2 \\
a_3
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
a_1 \\
a_2 \\
a_3
\end{bmatrix} K = \begin{bmatrix}
ka_1 \\
ka_2 \\
ka_3
\end{bmatrix}$$

## 应用到3D 向量

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix}$$



#### 标量与向量的除法

$$\frac{v}{k} = \frac{1}{k} (v) = \begin{bmatrix} v_x/k \\ v_y/k \\ v_z/k \end{bmatrix}$$

#### 练习:标量与向量的乘除法



标准化向量

$$V_{\text{norm}} = \frac{V}{\|V\|}, V != 0$$

### 练习 标准化2D向量 [ 12,-5 ]

$$\frac{[12-5]}{\|[12-5]\|} = \frac{[12-5]}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{[12-5]}{13}$$

$$= [0.923-0.385]$$

零向量是不能被标准的,数学上是不允许的,因为将导致除0.几何上也没有意义。因为零向量没有方向



## 向量加法

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

## 向量减法

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$$



练习

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求 a+b, a-b, b+c-a



$$a + b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

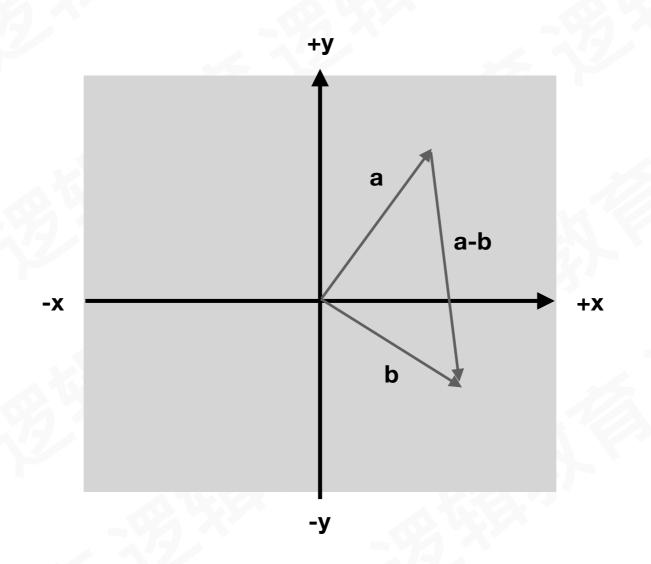
$$a - b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 \\ 2-5 \\ 3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$



## 思考

- 1、向量能不能与标量相加减?
- 2、向量能不能与维度不同的向量相加减?
- 3、向量加减法都适用于标量加减法规则,比如交换律?







$$(a,b) = \|d\| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$(a,b) = ||b-a|| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

练习



## 答案

$$([50], [-18]) = \sqrt{(-1-5)^2 + (8-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$



#### 向量点乘

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

应用到2D、3D中:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
  $a_y b_z$   $a_z b$ 

## 练习

1、求 2D 向量[46]·[-37]的乘积



## 答案

$$[46] \cdot [-37] = 4 \cdot (-3) + 6 \cdot 7 = 30$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 + 7 \cdot 1 = -1$$



$$a \cdot b = ||a|| ||b|| \cos(q)$$

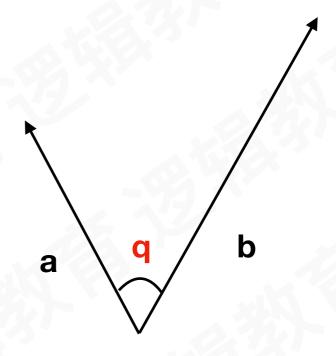
3D中,两向量的夹角是在包含两向量的平面中定义的

q = arccos ( 
$$\frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$$
 )



$$q = \arccos(a \cdot b)$$

a • b	q	角度	a 和 b
>0	0°≤q≤90°		方向基本相同
0	q = 90°		正交
<0	90° <q≤108°< td=""><td></td><td>方向基本相反</td></q≤108°<>		方向基本相反



## 根据向量v 和向量 n 求向量V2.?

$$oldsymbol{\mathsf{V}}_{2}$$
 平行于  $oldsymbol{\mathsf{n}}$  ,即可表示为:  $oldsymbol{\mathsf{V}}_{2}=oldsymbol{\mathsf{n}}$   $\displaystyle egin{array}{c} \|oldsymbol{\mathsf{v}}_{1}\| \\ \|oldsymbol{\mathsf{n}}\| \end{array}$ 

因此 只要求得V<sub>2</sub>的模,就能计算投影向量的值。借助于三角分解, 方便求解

$$\cos q = \frac{\|\mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

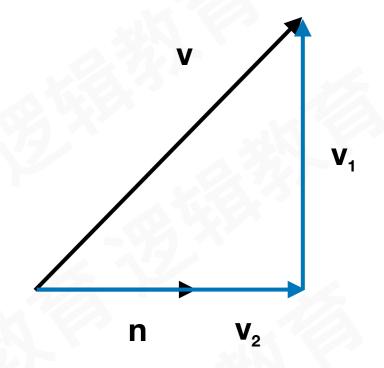
$$\|\mathbf{v}_2\| = \cos \mathbf{q} \cdot \|\mathbf{v}\|$$

带入等式 
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{n} \frac{\|\mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{n}\|}$$
 得

v<sub>2</sub> = n 
$$\frac{\cos q \cdot || v ||}{|| n ||}$$

分子分母同时乘以 || n ||

$$v_2 = n \frac{\cos q \cdot ||v|| \cdot ||n||}{||n||^2}$$



根据 a · b = ||a|| ||b|| cos(q) 公式

得到求解 v<sub>2</sub> 向量公式

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n} \quad \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}$$

如果n是单位向量,除法就不必要了



# 根据向量V₂求向量V₁?

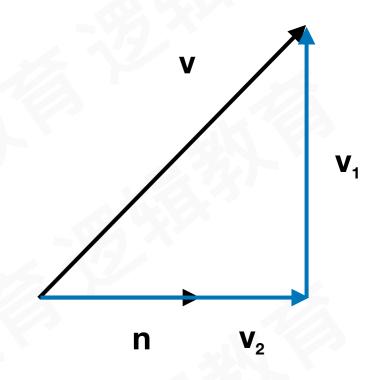
知道了
$$V_{2}$$
,求 $V_{1}$ 就很简单了

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n} \quad \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}$$

$$V_1 + V_2 = ||V||$$

$$V_{1} = \|V\| - V_{2}$$

$$= \|V\| - n \frac{v \cdot n}{\|n\|^{2}}$$



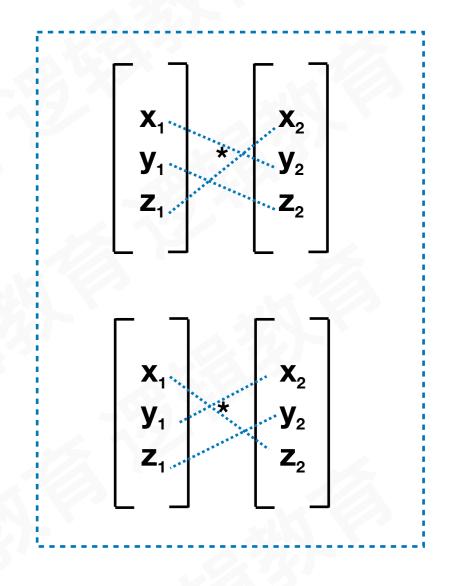


# 向量的叉乘

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$$

## 练习

1、求3D 矩阵叉乘





## 答案

1、求3D 矩阵叉乘

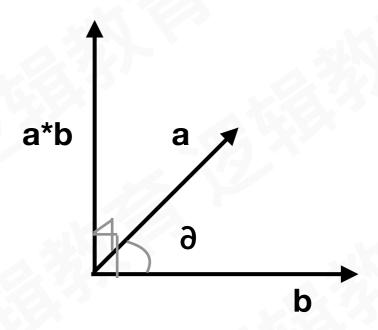
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3*8)-(4*(-5)) \\ (4*2)-(1*8) \\ (1*(-5))-(3*2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$



# 向量的叉乘几何意义

向量a,b在一个平面中。向量a \* b 指向该平面的正上方,垂直于a 和b a \* b 的长度等于向量的大小与向量夹角的sin值的积,如下:

|| a \* b || = ||a|| ||b|| sin∂





## 课后作业

#### A 热身作业区

1.计算如下向量表达式:

$$\mathbf{a} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.计算如下向量之间的距离:

$$\mathbf{a} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3.计算如下向量表达式:

$$\mathbf{a} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot -38$$

4.计算向量[1,2]和[-6,3]的夹角

$$\mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} -14 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} \quad 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$$



# 课后作业

#### B兴趣区

5.给定2个向量 
$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
 , $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/2} \\ \sqrt{2/2} \\ 0 \end{bmatrix}$  请将 $\mathbf{V}$  分解为平行和垂直于 $\mathbf{n}$ 的分量。( $\mathbf{n}$  为单位向量)

6.某人正在登机,航班规定乘客随身携带物品不能超过二尺长、二尺宽或二尺高。此人有物品,3尺长。 他能把这物品带上飞机,为什么?他能携带的物品最长为多长?



#### A 热身作业区答案

#### 1.计算如下向量表达式:

a)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-8 \\ 10-(-7) \\ 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 17 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$3\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \\ 3c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 40 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - 8 \\ 3b - 40 \\ 3c + 24 \end{bmatrix}$$

#### 2.计算如下向量之间的距离:

a)

distance 
$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \sqrt{(3-8)^2 + (10-(-7))^2(7-4)^2}$$
  
 $= \sqrt{(-5)^2 + 17^2(-3)^2}$   
 $= \sqrt{25 + 289 + 9}$   
 $= \sqrt{323}$   
 $\approx 17.9722$ 

b)

distance 
$$\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -14 \\ 30 \end{bmatrix}\right) = \sqrt{(10 - (-14))^2 + (6 - 30)^2}$$
  
 $= \sqrt{24^2 + (-24)^2}$   
 $= \sqrt{576 + 576}$   
 $= \sqrt{1152}$   
 $= 24\sqrt{2}$   
 $\approx 33.9411$ 



#### A 热身作业区答案

#### 3.计算如下向量表达式:

a) 
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot -38 = \begin{bmatrix} (2)(-38) \\ (6)(-38) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -76 \\ -228 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} (3)(-2) \\ (3)(0) \\ (3)(4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8+0 \\ -2+9 \\ 3/2+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 17/2 \end{bmatrix}$$

$$= (-6)(8) + (0)(7) + (12)(17/2)$$

$$= -48 + 0 + 102$$

$$= 54$$



#### A 热身作业区答案

#### 4.计算向量[1,2]和[-6,3]的夹角

$$\theta = a\cos\left(\frac{[1 \ 2] \cdot [-6 \ 3]}{\|[1 \ 2]\|\|[-6 \ 3]\|}\right)$$

$$= a\cos\left(\frac{(1)(-6) + (2)(3)}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{(-6)^2 + 3^2}}\right)$$

$$= a\cos\left(\frac{-6 + 6}{\sqrt{5}\sqrt{45}}\right)$$

$$= a\cos 0$$

$$= 90^{\circ}$$



#### B 兴趣区

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{n} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + (-1)(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} = \begin{bmatrix} (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{7\sqrt{2}}{2}) \\ (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{7\sqrt{2}}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/2 \\ 7/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/2 \\ 7/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



#### B 兴趣区

6.某人正在登机,航班规定乘客随身携带物品不能超过二尺长、二尺宽或二尺高。此人有物品,3尺长。 他能把这物品带上飞机,为什么?他能携带的物品最长为多长?

这个男人可以登机,他将物品斜在一个立方体形状的盒子,是2英尺长,2英尺高,和2ft宽。 他能携带的最长物品的长度是 大约41.5英寸

$$\| \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.4641$$



# Hello Coder

学习,是一件开心的事

知识,是一个值得分享的东西

献给,我可爱的开发者们.