Investigação Operacional

Problema da Designação

(Alocação ou Atribuição)

Introdução

- Um dos casos mais importantes do Problema de Transporte pode ocorrer quando as Ofertas e as Demandas são unitárias.
  - Esta Classe de Problemas é chamada de **Problemas de Designação**
- O Problema de Designação é um caso específico do Problema de Transporte
- Aplicação directa também em Logística.

Objectivo

- O Problema de Designação consiste em designar cada uma das Origens a cada um dos Destinos, de maneira Óptima.

- **Exemplos:**
  – Designar pessoas para determinadas tarefas (ex: escalar vendedores para regiões de vendas).
  – Designar máquinas para localizações.
  – Designar produtos para fábricas.

Considerações

- O número de Origens e o número de Destinos são os mesmos (n).
- Cada Origem deve ser Designada para exactamente um Destino.
- Cada Destino deve ser designado para exactamente uma Origem.
- Há um custo C_{ij} associado em designar a Origem i (i = 1,2,3, ..., n) para o Destino j (j = 1,2,3, ..., n).
- O objectivo é determinar como todas as n designações devem ser realizadas para minimizar (ou maximizar) o custo (ou o lucro) total.

O Modelo Matemático Generalizado

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

- Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \qquad para \;\; i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \qquad para \;\; j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

- e

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & se \;\; i \; designado \; para \; j \\ 0 & caso \;\; contrário \end{cases}$$

Algorítmo

- Problema 1:
  - Uma companhia de Transportes possui 5 camiões disponíveis localizadas nas cidades A, B, C, D e E.
  - Necessita-se de um camião nas cidades C1, C2, C3, C4, C5 e C6.
  - Qual a designação dos camiões que minimiza a quilometragem percorrida por todos os camiões, dado as quilometragens entre as cidades abaixo?

Algorítmo

Origem	Destinos					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A	20	15	26	40	32	12
B	15	32	46	26	28	20
C	18	15	2	12	6	14
D	8	24	12	22	22	20
E	12	20	18	10	22	15

- **Sob a forma de uma tabela de Problema de Transporte**

Origem	Destinos						Oferta
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
A	20	15	26	40	32	12	1
B	15	32	46	26	28	20	1
C	18	15	2	12	6	14	1
D	8	24	12	22	22	20	1
E	12	20	18	10	22	15	1
R	0	0	0	0	0	0	1
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Número de Possíveis Soluções

- O Problema de designação envolve a determinação de n! possíveis soluções.

- Exemplo:
  - para um problema com 5 trabalhadores e 5 tarefas o número de soluções possíveis é igual a 5 ! = 120.
  - para um problema com 10 trabalhadores e 10 tarefas o número de soluções é igual a 10 ! = 3 628 800.

- Obter a solução óptima por tentativa é DIFÍCIL !

ALGORÍTMO HÚNGARO

Teorema da Alocação Óptima

Se um número real é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna, então uma alocação óptima para a matriz resultante é também uma alocação óptima para a matriz original.

Teorema de König

Se o número mínimo de traços que atravessam todos os zeros for n, temos uma alocação possível para cada linha/coluna.

O Algorítmo

1. Para cada linha, subtraia o mínimo da linha.
2. Para cada coluna, subtraia o mínimo da coluna.
3. Use o mínimo de traços possíveis para cobrir todos os zeros da matriz.
   - Não há receita de bolo para isso (basicamente tentativa e erro). Se usou j traços:
     - Se $j = n$, temos uma solução óptima.
     - Escolha um 0 por linha e coluna.
     - Se $j \neq n$, determine a menor entrada que não tenha sido riscada. Subtraia essa entrada de todas as entradas não riscadas e a some a todas as entradas com 2 riscos (Volta ao passo 3).

Algorítmo

- **1° Passo:**
  - Subtrair o menor elemento de cada linha

Origem	Destinos						Oferta
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
A	8	3	14	28	20	0	1
B	0	17	31	11	13	5	1
C	16	13	0	10	4	12	1
D	0	16	4	14	14	12	1
E	2	10	8	0	12	5	1
R	0	0	0	0	0	0	1
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Algorítmo

- **2° Passo**
  - Subtrair o menor elemento de cada coluna

Origem	Destinos						Oferta
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
A	8	3	14	28	20	0	1
B	0	17	31	11	13	5	1
C	16	13	0	10	4	12	1
D	0	16	4	14	14	12	1
E	2	10	8	0	12	5	1
R	0	0	0	0	0	0	1
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Teste de Optimalidade

- **<u>3° Passo</u>**
  - Testar a Optimalidade traçando um número mínimo de rectas que cubra todos os zeros. Rectas diagonais não são permitidas.

Origem	Destinos						Oferta
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
A	8	3	14	28	20	0	1
B	0	17	31	11	13	5	1
C	16	13	0	10	4	12	1
D	0	16	4	14	14	12	1
E	2	10	8	0	12	5	1
R	0	0	0	0	0	0	1
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Algorítmo

- **<u>4° Passo</u>**
  - Se o número de rectas for igual a n (número de linhas ou colunas), pode-se fazer uma designação óptima (solução óptima).
  - Se o número de rectas é menor que n, faz-se necessário realizar uma iteração.
  - Isto é feito escolhendo o menor elemento não coberto pelas rectas traçadas e subtraíndo este mesmo elemento de todos os demais elementos não cobertos pelas rectas traçadas.
  - Somar depois este elemento aos elementos que se encontram na intersecção das rectas.
  - Todos os demais elementos devem permanecer inalterados.

Algorítmo

- 4º Passo

Origem	Destinos						Oferta
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
A	8	0	14	28	17	0	1
B	0	14	31	11	10	5	1
C	16	10	0	10	1	12	1
D	0	13	4	14	11	12	1
E	2	7	8	0	9	5	1
R	3	0	3	3	0	3	1
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Algorítmo

- Traçando as rectas novamente, tem-se número de rectas = 5.
  - A Solução não é óptima.

Origem	Destinos						Oferta
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
A	3	0	14	28	17	0	1
B	0	14	31	11	10	5	1
C	16	10	0	10	1	12	1
D	0	13	4	14	11	12	1
E	2	7	8	0	9	5	1
R	3	0	3	3	0	3	1
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Algorítmo

- A próxima iteração (feito tudo de uma vez) é:
  - Número de rectas = 5.
  - Solução não é óptima.

Origem	Destinos						Oferta
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
A	0	0	15	29	17	0	1
B	0	13	31	11	9	4	1
C	16	9	0	10	0	11	1
D	0	12	4	14	10	11	1
E	2	6	8	0	8	4	1
R	4	0	4	4	0	3	1
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Algorítmo

- A próxima iteração é: número de rectas = 6. A Solução é óptima. Pode-se fazer uma das duas designações distintas.

Origem	Destinos						Oferta
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
A	13	0	15	29	17	0	1
B	0	9	27	7	5	0	1
C	20	9	0	10	0	11	1
D	0	8	0	10	6	7	1
E	6	6	3	0	8	4	1
R	3	0	4	4	0	3	1
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Solução Óptima

- **1ª Solução òptima:**
  - Da Origem A envie um camião para o destino C_6
  - Da Origem B envie um camião para o destino C_1
  - Da Origem C envie um camião para o destino C_5
  - Da Origem D envie um camião para o destino C_3
  - Da Origem E envie um camião para o destino C_4.
  - O destino C_2 não recebe camião.
- A quilometragem total para esta designação é:
- 12 + 15 + 6 + 12 + 10 + 0 = 55 Km

Solução Óptima

- **2ª Solução òptima:**
  - Da Origem A envie um camião para o destino C_2
  - Da Origem B envie um camião para o destino C_6
  - Da Origem C envie um camião para o destino C_3
  - Da Origem D envie um camião para o destino C_1
  - Da Origem E envie um camião para o destino C_4.
  - O destino C_5 não recebe camião.

- A quilometragem total para esta designação é:
- 15 + 20 + 2 + 8 + 10 + 0 = 55 Km

Observação

Se o problema de Designação for expresso em termos de lucro ou de algum outro critério que requeira maximização, pode-se usar o mesmo método, apenas multiplicando todos os elementos da matriz inicial por (-1).

Exemplo II

- Considere que existem 5 trabalhadores que devem ser designados a 5 tarefas. A matriz dos custos associados à realização de cada tarefa por cada trabalhador é a seguinte:

	1	2	3	4	5
1	17.5	15	9	5.5	12
2	16	16.5	10.5	5	10.5
3	12	15.5	14.5	11	5.5
4	4.5	8	14	17.5	13
5	13	9.5	8.5	12	17.5

Método Húngaro

- **Início**: Redução da Matriz de Custos.
- 1º. Subtrair aos elementos de cada coluna da matriz de custos o mínimo dessa coluna.
- 2º. Na matriz resultante, subtrair a cada linha o respectivo mínimo.
- **Iteração:**
- 1º. Desenhar o número mínimo de traços que cobrem todos os zeros da matriz
- 2º. Critério de parada:
  o número mínimo de traços é igual a n?.
  - Sim – enquadrar n zeros, um por linha e um por coluna, a solução é óptima. FIM.
  - Não – passar a 3.
- **3º. Redução da matriz de custos.**
  - Determinar o menor valor não riscado θ.
  - Subtrair θ a todos os elementos não riscados e somar θ a todos os elementos duplamente riscados.
  - Considerar de novo todos os zeros livres e voltar a 1 (Iteração)

Início: Redução da Matriz de Custos.

1º: Subtrair o menor elemento de cada coluna de todos os elementos dessa coluna

menor elemento da coluna 1

	1	2	3	4	5
1	17.5	15	9	5.5	12
2	16	16.5	10.5	5	10.5
3	12	15.5	14.5	11	5.5
4	4.5	8	14	17.5	13
5	13	9.5	8.5	12	17.5

17.5 - 4.5 = 13

16 - 4.5 = 11.5

12 - 4.5 = 7.5

4.5 - 4.5 = 0

13 - 4.5 = 8.5

	1	2	3	4	5
1	13	7	0.5	0.5	6.5
2	11.5	8.5	2	0	5
3	7.5	7.5	6	6	0
4	0	0	5.5	12.5	7.5
5	8.5	1.5	0	7	12

Início: Redução da Matriz de Custos.

2º: Subtrair o menor elemento de cada linha de todos os elementos dessa linha

Existe empate na escolha do menor elemento da linha 1 (igual a 0.5). Nas linhas restantes o mínimo é **zero**, sendo que as linhas restantes não vão ser alteradas

	1	2	3	4	5
1	13	7	0.5	0.5	6.5
2	11.5	8.5	2	0	5
3	7.5	7.5	6	6	0
4	0	0	5.5	12.5	7.5
5	8.5	1.5	0	7	12

13 - 0.5 = 12.5

7 - 0.5 = 6.5

0.5 - 0.5 = 0

6.5 - 0.5 = 6

	1	2	3	4	5
1	12.5	6.5	0	0	6
2	11.5	8.5	2	0	5
3	7.5	7.5	6	6	0
4	0	0	5.5	12.5	7.5
5	8.5	1.5	0	7	12

Iteração: Critério de parada.

1º. Desenhar o número mínimo de traços que cobrem todos os zeros da matriz.

	1	2	3	4	5
1	12.5	6.5	0	0	6
2	11.5	8.5	2	0	5
3	7.5	7.5	6	6	0
4	0	0	5.5	12.5	7.5
5	8.5	1.5	0	7	12

2º. **Critério de parada**: o número mínimo de traços é igual a **5**?.
Não – passar a 3.

Iteração: Redução da Matriz de Custos.

1º. min {elementos da submatriz dos elementos não riscados } = 1.5

2º. Subtrair 1.5 a todos os elementos não riscados.

3º. Somar 1.5 aos elementos na intersecção dos traços.

4º. Os restantes elementos não são alterados.

	1	2	3	4	5
1	12.5	6.5	0	0	6
2	11.5	8.5	2	0	5
3	7.5	7.5	6	6	0
4	0	0	5.5	12.5	7.5
5	8.5	1.5	0	7	12

	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4.5
2	10	7	2	0	3.5
3	7.5	7.5	7.5	7.5	0
4	0	0	7	14	7.5
5	7	0	0	7	10.5

Iteração: Critério de parada.

1º. Desenhar o número mínimo de traços que cobrem todos os zeros da matriz.

	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4.5
2	10	7	2	0	3.5
3	7.5	7.5	7.5	7.5	0
4	0	0	7	14	7.5
5	7	0	0	7	10.5

2º. Critério de parada: o número mínimo de traços é igual a **5**?.

Sim – enquadrar 5 zeros, um por linha e um por coluna,

a solução é ótima. FIM

Solução Óptima.

Matriz inicial de custos

	1	2	3	4	5
1	17.5	15	$\boxed{9}$	5.5	12
2	16	16.5	10.5	$\boxed{5}$	10.5
3	12	15.5	14.5	11	$\boxed{5.5}$
4	$\boxed{4.5}$	8	14	17.5	13
5	13	$\boxed{9.5}$	8.5	12	17.5

solução óptima ***é :*** $x_{13} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{52} = 1$

com um custo total : 9 + 5 + 5.5 + 4.5 + 9.5 = 33.5