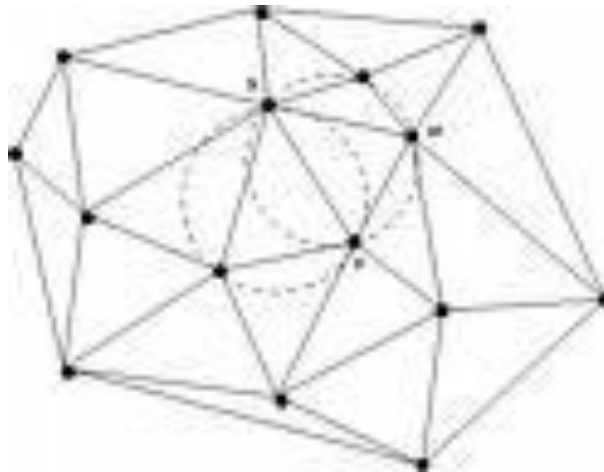
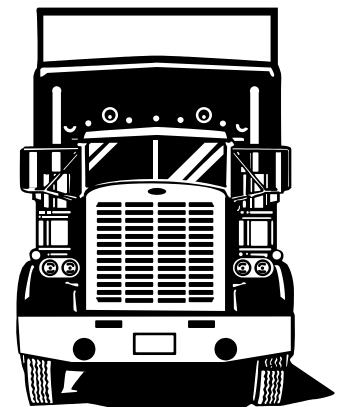


Investigação Operacional



Dualidade



Dualidade

- Modelo Inicial \rightarrow Primal
- Substituição \rightarrow Dual
- **Primal:**
 - A função objectivo é de maximização.
 - As restrições são todas do tipo \leq .
 - As variáveis são não negativas.
 - Ao modelo primal com estas condições pode-se associar um outro modelo, chamado Dual

Modelo Dual

- **Variáveis de decisão do Dual:**
 - A cada restrição do primal faz-se corresponder uma variável y_i .
- **Função objectivo:**
 - A f. O. Será de Minimização.
- Cada uma de suas parcelas será o produto da variável y_i pelo termo da direita da restrição correspondente.

Modelo Dual

- **Restrições técnicas:**
 - Cada variável de decisão primal será uma restrição no Dual.
- **Termos da esquerda:**
 - Cada termo é o produto da variável dual y_i pelo coeficiente respectivo da variável de decisão primal.
- **Sinal:** sinal do tipo \geq
- **Termo da direita:**
 - É o coeficiente da variável primal na f. O.
- As variáveis y_i são todas não negativas.

Operations Research

Exemplo:

- **Primal:** $\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

- **Dual:** $\text{Min } D = 10y_1 + 20y_2 + 30y_3$ (termos da direita)

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 2 \\ 4y_1 + 6y_2 - y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Analogamente:

- **Modelo Primal:**
 - f.o. de minimização
 - restrições do tipo \geq
 - Variáveis todas não negativas.
- **Modelo Dual:**
 - f.o. de maximização
 - restrições do tipo \leq
 - variáveis todas não negativas.

Operations Research

Exemplo:

• **Primal:**

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Dual:

$$\text{Max } D = 2y_1 + 3y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 10 \\ 2y_1 + 6y_2 + y_3 \leq 20 \\ y_1 - y_2 - y_3 \leq 30 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Observação:

- Se uma restrição primal é do tipo “=”, a variável dual correspondente será sem restrição do sinal.
- Se uma variável primal for sem restrição de sinal, a restrição do dual correspondente será do tipo “=”.

Operations Research

Exemplo

- **Primal:** **Max** **Z = 2x₁ + 3x₂ + x₃**

$$S.a. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 & \rightarrow y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 20 & \rightarrow y_2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

- **Dual:** **Min** **D = 10y₁ + 20y₂**

$$S.a. \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ -y_2 \geq 1 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Analogia entre as soluções Primal e Dual

- A cada solução básica admissível primal não óptima corresponde uma solução básica não admissível dual.
- A solução óptima primal corresponde à solução óptima dual com $Z = D$.
- O coeficiente da variável de decisão na f. O. Primal é o valor da variável de folga correspondente na solução dual.
- O coeficiente da variável de folga da f.o. primal é o valor da variável de decisão correspondente na solução dual.

Operations Research

Exemplo:

• **Primal:** **Max $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$**

$$s.a. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 9 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

• **Dual:** **Min $D = 10y_1 + 12y_2 + 9y_3$**

$$s.a. \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 3 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Operations Research

Colocar as variáveis de folga no primal e no dual.

• **Primal:** **Max** **Z = x₁ + 2x₂ + 3x₃**

$$s.a. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

1º Quadro Simplex

Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	b
1	-1	-2	-3	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	10
0	2	1	4	0	1	0	12
0	1	3	-1	0	0	1	9

$$S.B.A. \begin{cases} x_3 = 10 \\ x_4 = 12 \\ x_5 = 9 \end{cases} \quad Z = 0$$

Operations Research

Colocar as variáveis de folga no primal e no dual.

- Dual:** $\text{Min } D = 10y_1 + 12y_2 + 9y_3$ ou $\text{Max } (-D) = -10y_1 - 12y_2 - 9y_3$

$$s.a. \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 = 1 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 - y_5 = 2 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_6 = 3 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

1º Quadro Simplex

D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	c
-1	10	12	9	0	0	0	0
0	1	2	1	-1	0	0	1
0	1	1	3	0	-1	0	2
0	1	4	-1	0	0	-1	3

$$S.B.N.A. \begin{cases} y_6 = -3 \\ y_4 = -1 \\ y_5 = -2 \end{cases} \quad D = 0$$

Operations Research

Colocar as variáveis de folga no primal e no dual.

- A próxima solução básica admissível do primal, com a entrada da variável x_3 (coeficiente -3) e a saída da variável x_5 ($12 : 4=3$) após o pivoteamento, será:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	0,5	-1,25	0	0	0,75	0	9
0	0,5	0,75	0	1	-0,25	0	7
0	0,5	0,25	1	0	0,25	0	3
0	1,5	3,25	0	0	0,25	1	12

- Solução:
- $x_3 = 3$ $x_4 = 7$ $x_6 = 12$ $Z = 9$

Operations Research

Relação Primal - Dual

- Usando a correspondência, pode-se montar o quadro dual correspondente:
 - Coeficientes de $x_i \rightarrow$ Valores de yF_i
 - Coeficientes de $xF_i \rightarrow$ Valores de y_i
 - Valores de $x_i \rightarrow$ coeficientes de yF_i
 - Valores de $xF_i \rightarrow$ coeficientes de y_i

D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	c
-1	7	0	12	0	0	3	-9
		0		1	0		0,5
		0		0	1		-1,25
		1		0	0		0,75

Solução:

$$y_2 = 0,75 \quad y_4 = 0,5 \quad y_2 = -1,25 \quad D = 9$$

Operations Research

Solução Final

Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	b
1	1,077	0	0	0	0,846	0,385	13,615
0	0,154	0	0	1	-0,308	-0,231	4,231
0	0,385	0	1	0	0,231	-0,077	2,077
0	0,461	1	0	0	0,077	0,308	3,692

- Solução: $x_2 = 3.692$ $x_3 = 2.077$ $x_4 = 4.231$ $Z = 13.615$

D	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	c
-1	4,321	0	0	0	3,692	2,077	-13,615
0		0	0	1	0		1,077
0		1	0	0	-1		0,846
0		0	1	0	0		0,385

- Solução: $y_2 = 0.846$ $y_3 = 0.385$ $y_4 = 1.077$ $D = 13.615$

Operations Research

Problema 3:

- Um pecuarista prepara ração a partir de três ingredientes, que contêm três nutrientes indispensáveis na alimentação dos animais. O quadro mostra a composição, exigências e custos dos elementos na mistura.

Ingredientes	Nutrientes (% por kg de Ingredientes)			Custo ingredientes em u.m./kg
	Nutriente 1	Nutriente 2	Nutriente 3	
1	50	20	10	200
2	20	30	30	150
3	10	20	50	240
Exigência mínima Em kg /saco 40kg	600	500	800	

- O objectivo é atender às exigências com o menor custo possível. Pede-se:
 - Construir o modelo Linear do problema, onde x_i são as quantidades dos ingredientes usados por kg de ração.
 - Construir o modelo dual correspondente.
 - Resolver o problema pelo método Simplex.

Operations Research

Modelação:

Ingredientes	Nutrientes (% por kg de Ingredientes)			Custo ingredientes em u.m./kg
	Nutriente 1	Nutriente 2	Nutriente 3	
1	50	20	10	200
2	20	30	30	150
3	10	20	50	240
Exigência mínima Em kg /saco 40kg	600	500	800	

$$L = 200x_1 + 150x_2 + 240x_3 \rightarrow \min$$

$$s.a. \begin{cases} 50x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 600 \\ 20x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 500 \\ 10x_1 + 30x_2 + 50x_3 \geq 800 \end{cases}$$

$$com \ x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Operations Research

Lösung:

- **Modelo Dual:** $D = 600y_1 + 500y_2 + 800y_3$

$$S.a. \begin{cases} 50y_1 + 20y_2 + 10y_3 \leq 200 \\ 20y_1 + 30y_2 + 30y_3 \leq 150 \\ 10y_1 + 20y_2 + 50y_3 \leq 240 \end{cases}$$

D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	c
-1	0	325.38	0	1.54	26.15	0	4.230,77
0	1	0.23	0	0.02	-0.01	0	3.46
0	0	0.85	1	-0.02	0.04	0	2.69
0	0	-24.62	0	0.54	-1.85	1	70.77

Operations Research



...Lembre-se!

- **Relação Primal – Dual**
- Dado um problema de PL, podemos sempre escolher entre solucionar o modelo primal ou o modelo dual correspondente
 - Coeficientes de $x_i \rightarrow$ Valores de yF_i
 - Coeficientes de $xF_i \rightarrow$ Valores de y_i
 - Valores de $x_i \rightarrow$ coeficientes de yF_i
 - Valores de $xF_i \rightarrow$ coeficientes de y_i

Operations Research

Operations Research



... por exemplo!

- *Seja a solução do primal:*

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	1,077	0	0	0	0,846	0,385	13,615
0	0,154	0	0	1	-0,308	-0,231	4,231
0	0,385	0	1	0	0,231	-0,077	2,077
0	0,461	1	0	0	0,077	0,308	3,692

- *Encontre a solução do Dual correspondente!*

D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	C
-1	4,321	0	0	0	3,692	2,077	-13,615
0		0	0	1	0		1,077
0		1	0	0	-1		0,846
0		0	1	0	0		0,385