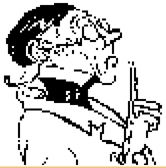


Investigação Operacional

Problemas particulares de Programação Linear

Problemas Clássicos

Problema	Designação da actividade	Intensidade (variáveis)	Recursos e restrições	Função objectivo
Transporte	Transporte da unidade i para o armazém j.	Quantidade a transportar de i para j: (x_{ij}).	Capacidade de fornecimento em i; quantidade requerida no armazém j.	Custo global: soma dos custos de transporte i para j em função de x_{ij}.
Composição	Colocação do alimento i na dieta.	Percentagem de i na dieta (x_i).	Níveis calóricos e vitamínicos mínimos.	Custo global da composição.
Produção	Fabrico do produto j. √	Quantidade a produzir do produto j: $x_{j.}$ √	Quantidade de recurso disponível; quantidade de recurso i gasto na produção de uma unidade do produto j.	Lucro global: soma dos lucros obtidos pela produção dos produtos j em função de x_j.

O Problema de Transporte

- **Objectivo:**
  - Optimização do transporte ou distribuição de bens e serviços (homogéneos) a partir de várias Origens para vários destinos.
- **O problema:**
  - Várias modalidades de encaminhamento Origem – Destino com custos diferentes
- **A solução:**
  - Calcular quantas unidades devem ser encaminhadas de cada Origem para cada Destino satisfazendo as necessidades destes com o Custo Total Mínimo

Estrutura Matemática

- **Transporte**
  - Há "m" Origens dispondo da quantidade a_i de um bem (i = 1, 2, ..., m)
  - Há "n" Destinos carecendo da quantidade b_j daquele bem (j = 1, 2, ..., n)
  - Há um custo unitário "c_{ij}" correspondente ao transporte de uma unidade do bem de cada Origem para cada Destino.
  - De cada Origem "i" será transportada para cada Destino "j" a quantidade "x_{ij}".

Estrutura Matemática

- O Modelo em Programação Linear é:

$$T = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \rightarrow Min$$

$$com\ as\ \mathrm{Re}\,strições:$$

$$a)\ Da\ \ "Oferta"\ \ \sum_{j=1} x_{ij} = a_i \quad unidades\ \ fornecedoras$$

$$b)\ Da\ "\mathrm{Pr}\,ocura"\ \sum_{i=1} x_{ij} = b_j \quad armazéns\ \ receptores$$

$$c)\ Lógicas \quad x_{ij} \geq 0 \quad (e \quad \mathrm{int}\,eger)$$

- sendo **i** = 1, ..., M; **j** = 1, ..., N

O Modelo em Programação Linear

- **a_i**: a capacidade de fornecimento na unidade **i** e
- **b_j**: a quantidade requerida no armazem **j**.
- **C_{ij}**: o custo de transporte de uma unidade de produto da unidade **i** para o armazém **j**.
- Adicionalmente, num modelo balanceado, considera-se

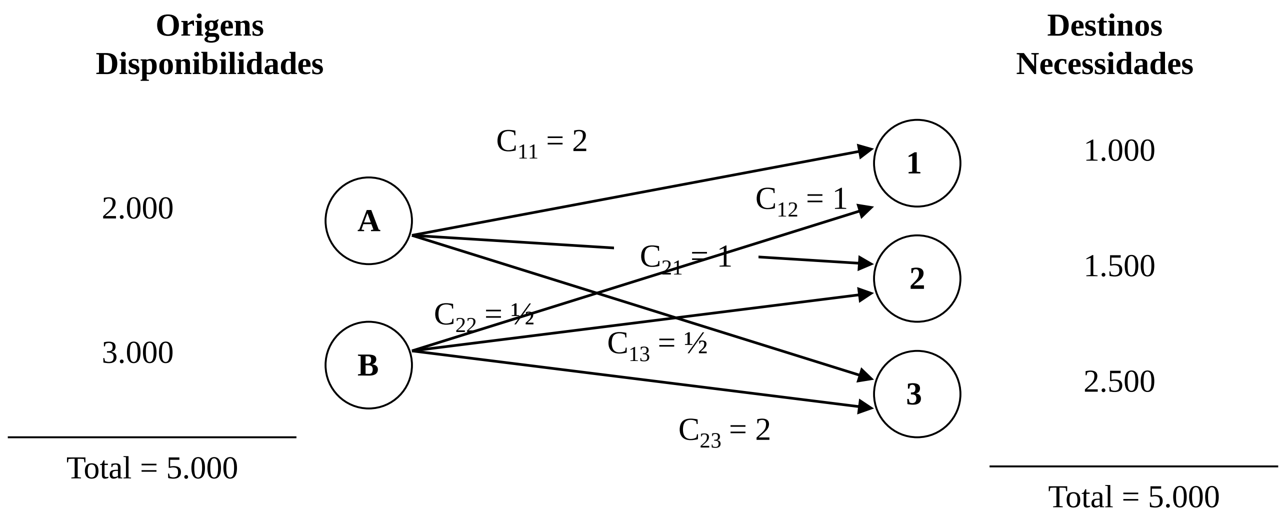
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

O Planeamento do Transporte

- **Exemplo:**
- Em relação a determinado produto de grande necessidade existem numa determinada região duas fábricas, denominadas fábrica A e B e três centros de recepção numeradas de um a três.
- As necessidades diárias dos centros de recepção 1, 2 e 3 são respectivamente de 1000, 1500 e 2500 unidades, sendo que as disponibilidades das fábricas A e B, também diárias, são respectivamente 2000 e 3000 unidades.
- Foi efectuado um estudo de custos de transporte tendo-se concluído que o trajecto entre a fábrica A e o centro de recepção 1 e o da fábrica B para o centro de recepção 3 são os mais caros, custando dois euros. por unidade transportada. Pelo contrário os custos mais baratos, apenas 50 cêntimos por unidade transportada, verificam-se entre a fábrica A e o centro de recepção 3 e entre a fábrica B e o centro de recepção 2. Os restantes trajectos têm custos unitários intermédios de aproximadamente 1 euro. A tabela seguinte resume os dados do problema.
- Pretende-se saber qual a melhor forma de efectuar o transporte do produto para, por um lado, conseguir satisfazer integralmente as necessidades e, por outro, assegurar que o custo total de transporte seja mínimo.

O Planeamento do Transporte

Custo transporte unitário	**Centros de Recepção**			**Disponibilidades** (*unidades / dia*)
Fábricas	**1**	**2**	**3**	
A	2	1	½	2000
B	1	½	2	3000
Necessidades (unidades / dia)	1000	1500	2500	



O Modelo Matemático – Modelo Clássico

- Função Objectivo a minimizar resulta da soma de todos custos:
- **$T = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} \rightarrow \text{Min}$**
- **Restrições- Origens:**

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2$$

- **Restrições – Destinos:**

$$x_{11} + x_{21} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} = b_2$$
$$x_{13} + x_{23} = b_3$$

- **Não-negatividade:**

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Tabela:

<table>
<tr><td rowspan="2">Destino B_j
Origem A_i</td><td colspan="3">Centros de Recepção</td><td rowspan="2">Disponibilidade</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>C_{11}
x_{11}</td><td>C_{12}
x_{12}</td><td>C_{13}
x_{13}</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>C_{21}
x_{21}</td><td>C_{22}
x_{22}</td><td>C_{23}
x_{23}</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>Necessidades</td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>$\sum a_i = \sum b_j$</td></tr>
</table>

- As linhas desta tabela representam as restrições relativas às Origens / Disponibilidades.
- As colunas representam as restrições relativas aos destinos/Necessidades.

Forma standard do modelo

$$T = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \quad \to \min$$

$$sujeito\,a: \begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots = \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ + x_{12} + x_{22} + \ldots \quad x_{m2} = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots = \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \;\; \& \quad Int \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n)$$