

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **grafo (simples)** G é formado por um conjunto de **vértices**, denotado por $V(G)$, e um conjunto de **arestas**, denotado por $E(G)$.
- Cada aresta é um par (não ordenado) de vértices distintos.
- Se xy é uma aresta, então os vértices x e y são os **extremos** desta aresta. Dizemos também que x e y estão **conectados**, ou que são **adjacentes** ou **vizinhos**.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **ordem** de um grafo G é o número de vértices de G .
- Notação: $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$
- O **tamanho** de um grafo G é a soma $n + m$
- Grafo **trivial**: é aquele com um único vértice ($n = 1$)
- Grafo **nulo**: é aquele com $V(G) = \emptyset$ (isto é, $n = 0$)

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **multigrafo** é uma generalização do conceito de grafo simples. Em um multigrafo podem existir:
 - **arestas paralelas**: são arestas que conectam os mesmos vértices.
 - **laços**: um laço é uma aresta com extremos idênticos.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- O mesmo grafo pode ter várias **representações geométricas** diferentes.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **vizinhança aberta** de um vértice v é o conjunto de seus vizinhos. Notação: $N(v)$ = vizinhança aberta de v .
- A **vizinhança fechada** de um vértice é definida como:
$$N[v] = N(v) \cup \{v\}.$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- O **grau** de um vértice é o número de vezes em que ele ocorre como extremo de uma aresta. (Esta definição serve para grafos e multigrafos.)
- Em um grafo simples, o grau de vértice é igual ao número de vizinhos que ele possui.
- Notação: $d(v)$ = grau do vértice v
- Em um grafo simples, é claro que $d(v) = |N(v)|$.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um grafo é **regular** quando todos os seus vértices têm o mesmo grau.
- Um grafo é **k -regular** quando todos os seus vértices têm grau igual a k .

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- O **grau máximo** de um grafo G é definido como:

$$\Delta(G) = \max \{ d(v) \mid v \in V(G) \}.$$

- O **grau mínimo** de um grafo G é definido como:

$$\delta(G) = \min \{ d(v) \mid v \in V(G) \}.$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dado um grafo G , a **sequência de graus** de G é a sequência

$$(d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n)$$

onde:

- $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n-1} \leq d_n$
- $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$
- d_j é o grau do vértice v_j , para $j = 1, 2, \dots, n$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um vértice é **isolado** quando tem grau zero (não possui vizinhos).
- Um vértice v é **universal** quando está conectado por arestas a todos os demais vértices, isto é:

$$N(v) = V(G) \setminus \{v\}.$$

- Se v é um vértice universal então $d(v) = n - 1$.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- O **complemento** de um grafo G é o grafo \bar{G} tal que

$$V(\bar{G}) = V(G)$$

e

$$E(\bar{G}) = \{ xy \mid xy \notin E(G) \}.$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **subgrafo** de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.
- H é um **subgrafo próprio** de G quando H é um subgrafo de G que não é o próprio G .

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **subgrafo gerador** (“spanning subgraph”) de G é um subgrafo H de G tal que $V(H) = V(G)$.
- Em outras palavras, H tem os mesmos vértices de G , mas nem todas as arestas de G .

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Seja H um subgrafo de G .
- H é um **subgrafo induzido por um conjunto de vértices X** se $V(H) = X$ e vale a seguinte propriedade:

se $xy \in E(G)$ e $x, y \in X$ então $xy \in E(H)$.

- Notação: $H = G[X]$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Seja H um subgrafo de G .
- H é um **subgrafo induzido por um conjunto de arestas E'** se vale a seguinte propriedade:

$$E(H) = E'$$

e

$$V(H) = \{ x \mid x \text{ é extremo de alguma aresta de } E' \}.$$

- Notação: $H = G[E']$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Definição: Se S é um subconjunto de vértices de G , então
$$G - S = G[V(G) \setminus S].$$
- Notação: Se v é um vértice de G então $G - v = G - \{v\}$.
- Definição: Se E' é um subconjunto de arestas de G , então o grafo $G - E'$ é definido da seguinte forma:
 - $V(G - E') = V(G)$
 - $E(G - E') = E(G) \setminus E'$
- Notação: Se e é uma aresta de G então $G - e = G - \{e\}$.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dado um grafo G , uma propriedade é **hereditária** por subgrafos [induzidos] se, quando ela vale para G , vale também para todos os subgrafos [induzidos] de G .
- **Exemplo 1:** se o grafo G não contém triângulos, então “*ser livre de triângulos*” é uma propriedade hereditária por subgrafos e por subgrafos induzidos.
- **Exemplo 2:** se o grafo G possui um vértice universal, então “*possuir um vértice universal*” **não é** uma propriedade hereditária por subgrafos, nem por subgrafos induzidos.
- **Exemplo 3:** se o grafo G possui todas as arestas possíveis (isto é, quaisquer dois vértices de G são vizinhos), então “*possuir todas as arestas possíveis*” **não é** uma propriedade hereditária por subgrafos, mas **é** uma propriedade hereditária por subgrafos induzidos.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dois grafos G e H são **disjuntos em vértices** se
 $V(G) \cap V(H) = \emptyset$.
- Dois grafos G e H são **disjuntos em arestas** se
 $E(G) \cap E(H) = \emptyset$.
- Se G e H são disjuntos em vértices, então é claro que são também disjuntos em arestas.
- Porém, G e H podem ser disjuntos em arestas tendo alguns vértices em comum.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **união** de dois grafos G e H é o grafo $G \cup H$ tal que:

$$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$$

$$E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$$

- A **interseção** de dois grafos G e H é o grafo $G \cap H$ tal que:

$$V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$$

$$E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Teorema do Aperto de Mãos:

Em qualquer grafo simples G , vale que

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dois grafos G e H são isomorfos se existe uma bijeção

$$f: V(G) \rightarrow V(H)$$

tal que

$$xy \in E(G) \quad \text{se e somente se} \quad f(x)f(y) \in E(H).$$

- Em outras palavras, G e H são o “mesmo” grafo, a menos de rotulações diferentes para os vértices.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um grafo G é um grafo **completo** se quaisquer dois vértices de G são vizinhos.
- O número de arestas de um grafo completo é $n(n-1)/2$.
- Notação: K_n = grafo completo com n vértices

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Uma **clique** em um grafo G é um conjunto de vértices $K \subseteq V(G)$ tal que $G[K]$ é completo.
- Um **conjunto estável** ou **independente** em um grafo G é um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que $G[S]$ é um grafo sem arestas.
- Qualquer par de vértices de um conjunto independente é formado por vértices não adjacentes.
- Notação: I_n = grafo cujos vértices formam um conjunto independente de tamanho n .

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **passeio** é uma sequência de vértices

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$$

onde $v_{j-1}v_j \in E(G)$ para $j = 2, \dots, k$.

- Note que em um passeio pode haver repetição de vértices e arestas.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Uma **trilha** é um passeio

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_{k-1}, V_k$$

onde as arestas são todas **distintas**.

- Note que em uma trilha pode haver repetição de vértices, mas não de arestas.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **caminho** é um passeio

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_{k-1}, V_k$$

onde os vértices são todos **distintos**.

- Note que em um caminho, como não pode haver repetição de vértices, não há repetição de arestas.
- Todo caminho é uma trilha, mas nem toda trilha é um caminho.
- O **comprimento** de um caminho é o número de arestas neste caminho.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **passeio fechado** é um passeio

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$$

onde $v_1 = v_k$.

- A mesma definição se aplica a **trilhas fechadas**.
- Note que não pode haver “caminho fechado”, pois em um caminho não há repetição de vértices.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **ciclo** é um passeio

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$$

onde $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ é um caminho e $v_k = v_1$.

- Por definição, em um ciclo devemos ter $k \geq 3$.
- O **comprimento** de um ciclo é o número de vértices (ou arestas) do ciclo.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Uma **corda** é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos de um ciclo (ou caminho).
- Um **ciclo induzido** C é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices tal que C é um ciclo sem cordas.
- Um **caminho induzido** P é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices tal que P é um caminho sem cordas.
- Notação: C_k = ciclo sem cordas com k vértices.
- Notação: P_k = caminho sem cordas com k vértices.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um conjunto S é **maximal** em relação a uma propriedade P se:
 - ✓ S satisfaz P ;
 - ✓ não existe conjunto S' que satisfaz P e que contenha propriamente S .
- Um conjunto S é **máximo** em relação a uma propriedade P se:
 - ✓ S satisfaz P ;
 - ✓ não existe conjunto S' que satisfaz P e que possua mais elementos do que S .
- Todo conjunto máximo é também maximal, mas nem todo conjunto maximal é máximo.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um conjunto S é **minimal** em relação a uma propriedade P se:
 - ✓ S satisfaz P ;
 - ✓ não existe conjunto S' que satisfaz P e que esteja propriamente contido em S .
- Um conjunto S é **mínimo** em relação a uma propriedade P se:
 - ✓ S satisfaz P ;
 - ✓ não existe conjunto S' que satisfaz P e que possua menos elementos do que S .
- Todo conjunto mínimo é também minimal, mas nem todo conjunto minimal é mínimo.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um grafo G é **conexo** se existe caminho entre qualquer par de vértices de G .
- Caso contrário, o grafo é **desconexo**.
- Uma **componente conexa** de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G .
- Notação: $w(G)$ = número de componentes conexas de G
- G é conexo se e somente se $w(G) = 1$.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **distância** entre dois vértices x e y é o comprimento do menor caminho de x a y no grafo.
- Notação: $\text{dist}(x, y)$ = distância entre x e y
- Obs: para qualquer x , $\text{dist}(x, x) = 0$.
- A **excentricidade** de um vértice v em um grafo G é definida como:

$$\text{exc}(v) = \max \{ \text{dist}(v, x) \mid x \in V(G) \}.$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- O **diâmetro** de um grafo G é definido como

$$\text{diam}(G) = \max \{ \text{exc}(v) \mid v \in V(G) \}.$$

- O **centro** de um grafo G é o conjunto de vértices de G que possuem excentricidade mínima.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **matriz de adjacências** de um grafo G é uma matriz $A_{n \times n}$ onde:

$$A[i, j] = 1 \text{ se } ij \in E(G)$$

e

$$A[i, j] = 0 \text{ se } ij \notin E(G)$$

- A matriz de adjacências é simétrica e possui zeros na sua diagonal principal
- Utilizando a matriz de adjacências como estrutura de dados, basta armazenar o triângulo superior da matriz
- A matriz de adjacências gasta memória quadrática ($O(n^2)$), mas o tempo de acesso é constante -- gasta-se tempo $O(1)$ para decidir se dois vértices são vizinhos.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **lista de adjacências** de um grafo G é um outro tipo de estrutura de dados para armazenar G
- O número de células de memória em uma lista de adjacências é $n+2m$
- Gasta-se tempo $O(n)$ no pior caso para decidir se dois vértices são vizinhos.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em conjuntos X e Y de modo que toda aresta de G tem um extremo em X e outro Y .
- Como consequência desta definição, X e Y são conjuntos independentes.
- Um grafo bipartido G será **bipartido completo** se, para qualquer par de vértices x, y , onde $x \in X$ e $y \in Y$, temos que $xy \in E(G)$.
- Notação: $K_{p,q}$ = grafo bipartido completo com p vértices em X e q vértices em Y . (Neste caso, o grafo tem $p \cdot q$ arestas.)

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Caracterização de grafos bipartidos
- Teorema: G é bipartido sss G não contém ciclos de comprimento ímpar.