Fatec Rubens Lara	
Nome:	
Curso - Ciências de Dados	Otimização Combinatória
Professor: João Paulo Mello	Data: 19/05/2025
1º Semestre	Nota:

Prova II

Exercício 1. *(L^1-Regressão Linear):* Considere uma variável aleatória $\mathtt{X}$ e uma sequências $(x_i)_n := (x_1, \dots, x_n)$ de dados/medidas de $\mathtt{X}$ que são coletados em intervalos regulares de tempo $(t_i)_n$. Nestas condições, a sequência de dados $(x_i)_n$ é chamada de *série temporal*[1]. Uma *regressão linear* é um método que busca a *melhor* relação de linearidade entre $\mathtt{X}$ e o tempo. Mais precisamente, queremos achar $a, b \in \mathbb{R}$ de tal forma que a norma do *vetor erro*

$$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, \dots, \epsilon_n) = (x_1 - (a + b.t_1), \dots, x_i - (a + b.t_i), \dots, x_n - (a + b.t_n)) \in \mathbb{R}^n,$$

tenha o *menor* tamanho possível.

Tarefa 1.1. Pesquise o que é uma norma em $\mathbb{R}^n$ e escreva a sua definição.

Do ponto de vista matemático, o *tamanho* de um vetor significa a *norma* deste vetor. No entanto, temos diversas normas em $\mathbb{R}^n$, i.e., temos diversas formas de calcular o tamanho de um vetor. Por exemplo, para cada $p \geq 1$ podemos definir a *L^p-norma*

$$||\epsilon||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |\epsilon_i|^p \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ teremos a norma $||\epsilon||_2$ usual e é chamada de *norma Euclideana*. A L^1-norma é outra norma que vai nos interessar, e neste caso a norma tem o nome de *norma Taxicab*.

A regressão linear que utiliza a L^p-norma para minimiza o vetor erro será chamada de *L^p-regressão linear*. Para completude do texto, vejamos como procedemos no caso de uma L^2-regressão linear.

O problema da L^2-regressão linear pode ser posto da seguinte forma matemática

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} ||\epsilon||_2 = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - (a + b.t_i))^2 \right)^{1/2}.$$

[1] Por que não sequência temporal?

Para simplificar os cálculos, é comum substituirmos o problema anterior pelo seguinte problema

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\epsilon\|_2^2 = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - (a + b.t_i))^2.$$

Veja que agora estamos buscando o menor vetor erro que minimiza o quadrado da norma. Como a norma de um vetor é positiva, se acharmos um vetor que minimiza o quadrado da norma, então ele também minimiza a norma. Usaremos agora ferramentas de Cálculo Diferencial para resolvermos o problema acima.

Para que $\|\epsilon\|_2^2$ possua um mínimo local $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial a}\|\epsilon\|_2^2\Big|_{(a,b)=(\alpha,\beta)} = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial b}\|\epsilon\|_2^2\Big|_{(a,b)=(\alpha,\beta)} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - (a + b.t_i))^2\Big|_{(a,b)=(\alpha,\beta)} = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(x_i - (a + b.t_i))^2\Big|_{(a,b)=(\alpha,\beta)} = 0.$$

No primeiro caso teremos,

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - (a + b.t_i))^2\Big|_{(a,b)=(\alpha,\beta)} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - (\alpha + \beta.t_i)) = 0.$$

A equação acima implica que todos $x_i - (\alpha + \beta.t_i) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \left(n.\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} t_i\right) = 0.$$

Isolando o α teremo,

$$\alpha = \overline{(x_i)_n} - \beta.\overline{(t_i)_n},$$

onde a barra acima das sequências significa a média dos valores.

Agora olharaeremos para a derivada de $\|\epsilon\|_2^2$ com respeito a b. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(x_i - (a + b.t_i))^2\Big|_{(a,b)=(\alpha,\beta)} = -2\sum_{i=1}^{n} t_i.(x_i - (\alpha + \beta.t_i)) = 0$$

Após substituirmos o valor de α achado anteriormente, isolarmos o β e realizarmos algumas operações algébricas, obteremos que

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i.x_i - n.\overline{(t_i)_n}.\overline{(x_i)_n}}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n.\overline{(t_i)_n}^2}$$

Vejamos um exemplo concreto. Considere a série temporal como sendo a sequência dos valores de abertura do pregão da ação `NASDAQ:GOOG` na semana de 02/10/23 – 06/10/23. A tabela abaixo mostra os resultados obtidos.

Data	Valor Abertura
02/10/23	\$132.15
03/10/23	\$134.93
04/10/23	\$133.66
05/10/23	\$136.13
06/10/23	\$134.94

Tarefa 1.2. a) Plotar os dados apresentados na tabela acima. Usar o eixo x para as datas e o eixo y para os valores. Além disso, o eixo x deve variar entre 0 e 6, e o eixo y deve variar entre 130 e 140.

b) Mostrar que $\alpha = 132.328$ e $\beta = 0.678$. Para isso, assuma que $t_i = i$.

c) Usar os ítens anteriores para plotar um gráfico com os pontos da série temporal e a reta ajustada a partir da L^2-regressão linear.

A L^2-regressão é bastante utilizada quando queremos realizar a regressão linear entre duas variáveis aleatórias. No entanto, no caso em que estamos trabalhando, temos uma variável aleatória e a outra variável é o tempo, o qual estamos assumindo que é medido de maneira regular, i.e., a diferença $t_{i+1} - t_i$ é igual a uma constant k para todo $i = 1, \ldots, n$. Neste caso, é mais adequado o uso da L^1-regressão linear. Além disso, a L^1-regressão linear é menos suscetível a valores extremais, ao contrário da L^2-regressão linear.

Trabalharemos agora com a L^1-regressão linear, i.e., o seguinte problema de minimização

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} ||\epsilon||_1 = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - (a + b.t_i)|.$$

Neste caso, não podemos mais usar ferramentas de Cálculo para resolver o problema. Podemos transformar o problema acima no seguinte PPL

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i, \\ \text{tal que} \quad & \epsilon_i + a + b.t_i \geq x_i \\ & \epsilon_i - (a + b.t_i) \geq -x_i \end{aligned}$$

Veja que no problema acima as variáveis de decisão serão a, b e os ϵ_i's.

Tarefa 1.3. a) Escrever o PPL associado a L^1-regressão para os dados da tabela acima.

b) Use o `LINDO` para resolver o problema do item *(a)*. Mostre que $\alpha = 131.395$ e $\beta = 0.755$.

c) Plote dois gráficos: um com os dados e a reta dada pela L^1-regressão, e plote um gráfico com os dados e as duas retas dadas pela L^2-regressão linear e a L^1-regressão linear

d) A partir do que foi discutido, o que podemos falar sobre os dados dos dias 03/10 e 05/10?

Exercício 2. *(Um problema de modelagem)* Suponha que uma fábrica de varas de alumínio tenha recebido o seguinte pedido: 60 varas de 20 cm, 45 varas de 22 cm, 30 varas de 25 cm e 40 varas de 26 cm. A fábrica usa varas de 70 cm e faz os cortes necessários para entregar os pedidos. O técnico responsável pelos cortes quer minimizar o desperdício de material. Assim, começou listando os possíveis padrões de corte que utilizam pelo menos 80% do material. Formule o PPL para o problema da fábrica e resolva-o usando o `LINDO`.

Observação: O meu modelo conseguiu uma eficiência de aproximadamente 96.4%.

Exercício 3. A Elecond é uma pequena companhia que fabrica dois tipos de fechaduras eletrônicas. O custo de trabalho, matéria-prima e preço de venda por unidade de cada uma está dado na tabela abaixo

	Fechadura Tipo 1	**Fechadura Tipo 2**
Preço de Venda	R$100	$90
Custo de Trabalho	R$50	$35
Matéria-Prima	R$30	$40

Na abertura de 01/12/23, a Elecond possuí matéria-prima o suficiente para fabricar 100 fechaduras do tipo 1 e 100 fechaduras do tipo 2. Na abertura da mesma data, o balanço financeiro da companhia é dado pela seguinte tabela:

	Ativos	**Passivos**
Dinheiro	R$10000	
Contas a Receber	R$3000	
Estoque	R$7000	
Empréstimo Bancário		$10000

A *razão de liquidez* é definido como $\frac{\text{Ativos}}{Passivos}$. Na abertura do dia 01/12/23 a razão de liquidez da Elecond é $\frac{20000}{10000} = 2$.

A Elecond deve determinar quantas fechaduras eletrônicas devem ser produzidas de cada tipo no mês de Dezembro de 2023. A demanda destas fechaduras é grande o suficiente para assegurar que todas produzidas serão vendidas. Todas as vendas serão feitas no crédito, assim, todas os pagamentos dos produtos produzidos em Dezembro não serão recebidos antes de 01 de Fevereiro de 2024. Durante Dezembro, a Elecond irá receber $2000 em contas a receber, e deve pagar $1000 em empréstimo pendentes e um aluguel mensal de $1000. No dia 01 de Janeiro a Elecond irá receber um carregamento de matéria-prima no valor de $2000, que será pago em 01 de Fevereiro de 2024. A administração financeira da Elecond decidiu que o saldo de caixa no fechamento de 01 de Janeiro de 2024 deve ser de pelo menos $4000. O banco que faz emprestimos para a Elecond exige que sua razão de liquidez seja pelo menos 2 no fechamento do dia 01 de Janeiro de 2024. Para maximizar o lucro no mês de Dezembro, a Elecond deve produzir quantas fechaduras do tipo 1 e do tipo 2?

Exercício 4. *(Problema do Custo Mínimo de Fluxo em Rede)* Considere o grafo orientado G, que consiste de um número finito $n \in \mathbb{N}$ de *vértices* (nós ou pontos) $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$; e um conjunto de *arestas orientadas* (links, arcos, lados, linhas) $A = \{(v_i, v_j), (v_k, v_s), \ldots, (v_s, v_t)\}$ ligando os vértices. O arco (v_i, v_j) é orientado no sentido de início em v_i e final em v_j.

Para cada vértice v_i em G, associamos um número b_i que representa a disponibilidade de envio de um determinado item (se $b_i > 0$), ou a demanda do item (se $b_i < 0$). Vértices com $b_i > 0$ são chamados de *fontes*, e vértices com $b_i < 0$ são chamados de *ralos*. Se $b_i = 0$, então não há disposição para envio e nem demanda para o produto. Neste caso, o vértice v_i será chamando de vértice *intermediário*. Assumiremos que a oferta total é igual à demanda total dentro da rede (network/grafo), isto é, $\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$.

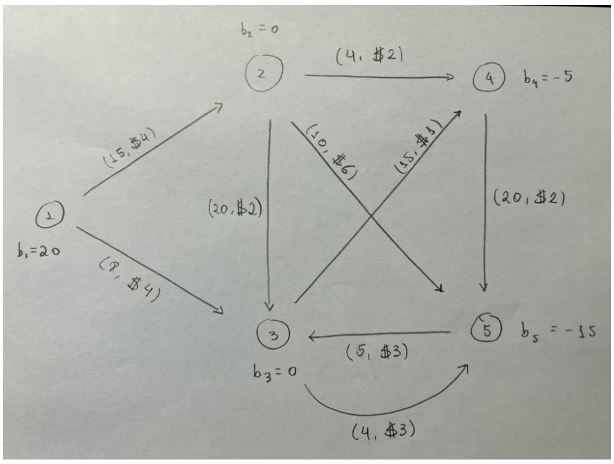
Associamos ainda a cada uma das arestas (v_i, v_j) um par ordenado $(c_{i,j}, p_{i,j})$, onde $c_{i,j}$ é dita a *capacidade* de fluxo entre os vértices v_i e v_j através da aresta (v_i, v_j), e $p_{i,j}$ é o preço para enviar o item via o fluxo representado pela aresta (v_i, v_j).

O *Problema do Custo Mínimo de Fluxo em Rede* pode ser formulado da seguinte maneira: enviar o suprimento disponível através da rede para satisfazer a demanda com o menor custo possível. Matematicamente, esse problema pode ser modelado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_{i,j}, \\ \text{tal que} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} - \sum_{k=1}^{n} x_{k,i} = b_i, \quad \forall i \\ & \qquad\qquad 0 \le x_{i,j} \le c_{i,j}, \ \forall i, j \end{aligned}$$

As restrições do PPL acima são chamadas de *conservação do fluxo*, ou *balanço nodal*, ou *equações de Kirchhoff*, e indica que o fluxo não pode nem ser criado e nem ser destruido na rede. Nas equações de conservação, $\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}$ representa o fluxo total saindo do vértice v_i, enquanto $\sum_{k=1}^{m} x_{k,i}$ indica o fluxo total que entra no vértice v_i. Estas equações pedem que o fluxo total passando por um vértice v_i, que deve ser escrito como $\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} - \sum_{k=1}^{m} x_{k,i}$, deve ser igual a b_i. Em particular, se $b_i < 0$, então deve ter mais fluxo chegando no vértice v_i do que saindo do mesmo vértice. Como o problema que apresentamos existem restrições que estabelecem um limite superior de fluxo nas arestas, então este problema é chamado de *capacitado*.

Tarefa 4.1. Escreva e resolva o Problema do Custo Mínimo de Fluxo em Rede para o grafo abaixo e resolva-o.



Exercício 5: A Winco vende quatro tipos de produtos. Os recursos necessários para produzir uma unidade de cada produto e o seu preço de venda são dadas pela tabela abaixo:

	Prod. 1	**Prod. 2**	**Prod. 3**	**Prod. 4**
Mat. Prima	2	3	4	7
Hora Trab.	3	4	5	6
Preço Venda	$ 4	$ 6	$ 7	$ 8

No memento, 4600 unidades de matéria-prima está disponível e 5000 horas de trabalho está disponível. Para atender a demanda do consumidor, exatamente 950 unidades devem ser produzidos no total. Os consumidores também demandam pelo menos 400 unidades do produto 4. Formule e resolva via LINDO o PPL que pode ser usado para maximizar a receita de vendas.

a. Suponha que a Winco aumente o preço de venda do produto 2 por 50 centavos por unidade. Qual é a nova solução ótima do PPL?

b. Se o preço de venda do produto 3 cair em 35 centavos, qual será a nova solução ótima?

c. Suponha que um total de 980 unidades devem ser produzidas. Determine o novo valor ótimo.

d. Suponha que 4500 unidades de matéria-prima estão disponíveis. Qual é a solução ótima?

Exercício 6: As industrias Tucker deve produzir 1000 automoveis. A companhia possui quatro plantas de produção. O custo de produzir um automóvel da Tucker em cada uma das plantas de produção esta listado na tabela abaixo. Assim como a necessidade de trabalho e matéria-prima.

Planta	**Custo (mil dolares)**	**Trabalho**	**Mat. Prima**
1	15	2	3
2	10	3	4
3	9	4	5
4	7	5	6

O sindicato dos trabalhadores da Tucker exige que pelo menos 400 carros sejam produzidos na planta 3, 3300 horas de trabalho e 4000 unidades de matéria-prima estão disponíveis para serem alocados nas quatro plantas. Formule e resolva via LINGO o PPL cuja solução permitirá a Tucker minimizar o custo de produzir 1000 carros. Responda as perguntas:

a. Suponha que 4100 unidades de matéria-prima estão disponíveis para a Tucker. Ache a nova solução ótima.

b. Um novo comprador dos veículos da Tucker está disposto a comprar 20 veículos à $ 25.000,00 por veículo. A empresa deve aceitar a proposta?