22/8/2022

Monday, August 22, 2022 4:06 PM

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm x =2

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}, \text{nếu } x \neq 2 \\ 4. \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{nếu } x < 2 \\ x+2, \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{nếu } x < 2 \\ -2x, \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

c) TXĐ: R → 2 ∈ TXĐ (1)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4 \\ &\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ &f(2) = 2+2 = 4 \end{aligned}\right\} \to \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) → h/s f(x) liên tục tại x=2.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{nếu } x \leq 1 \\ 3 - ax^2, \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

Tìm *a* để hàm số liên tục với mọi *x*. Với *a* vừa tìm được, hãy vẽ đồ thị của *f(x)*.

Giải: Với $x<1$ thì h/s $f(x) = x+1$ là hàm sơ cấp → liên tục

Với $x>1$ thì h/s $f(x) = 3-ax^2$ là h/s sơ cấp → liên tục

Do đó ta xét tính lt của h/s tại $x=1$.

TXĐ: R → 1 ∈ R.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2 \\ &\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3-ax^2) = 3-a \\ &f(1) = 2 \end{aligned}\right\}$$

H/s liên tục tại $x=1$ ⇔ $3-a=2$

$\Leftrightarrow \quad a = 1.$

Vậy với $a=1$ thì hs $f(x)$ liên tục với mọi x.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau $(\cos u)' = -\sin u . u'$

$1/.\ y = \cos(x^3 + 5x)$ $\quad$ $2/.\ y = arcsin\sqrt{x^2 - 2x}$

$(u^{1/2})' = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{u}}.u'$

$3/.\ y = \ln(tanx)$ $\quad$ $4/.\ y = \frac{3^x}{x^2}$

$5/.\ y = e^{2x-5}.x^2$ $\quad$ $6/.\ y = \sin(arcsinx)$

Giải: 1) $y' = -\sin(x^3+5x).(3x^2+5)$

2) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-2x)}}.\left(\sqrt{x^2-2x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}}.\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}.(2x-2)$

$= \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+1}.\sqrt{x^2-2x}}.$

3) $y' = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{1}{\cos^2 x.\tan x} = \frac{1}{\cos^2 x.\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sin x.\cos x}.$

4) $y' = \left(\frac{3^x}{x^2}\right)' = \frac{3^x.\ln 3.x^2 - 2x.3^x}{x^4} = \frac{3^x.x(x.\ln 3 - 2)}{x^4}$

$= \frac{3^x.(x.\ln 3 - 2)}{x^3}$

$5/.\ y = e^{2x-5}.x^2$ $\quad$ $6/.\ y = \sin(arcsinx)$

5) $y' = e^{2x-5}.2.x^2 + e^{2x-5}.2x = 2x.e^{2x-5}(x+1).$

6) $y' = \cos(\arcsin x).(\arcsin x)' = \cos(\arcsin x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Quy tắc Lopital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau

$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{sinx}$ $\quad$ $c)\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{2x^2}$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^\alpha}$, với $\alpha > 0$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{2020}}$

Giải: a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{\sin x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-e^x}{\cos x} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha . x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha . x^{\alpha-1+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha . x^\alpha}$
$= 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x}{2x^2} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2.e^{2x}-2}{4x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{4e^{2x}}{4} = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{2020}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2020 . x^{2019}} = \dots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2020!} = +\infty.$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}(x^2 . lnx)$

$b)\ A = \lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{1/x^2}$ (dạng 1^∞)

$c)\ B = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{lnx}$