25/8/2022

Thursday, August 25, 2022 7:20 AM

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to 0}(x^2.\ln x)$

b) $A = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ (dạng 1^∞)

c) $B = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2\frac{1}{x^3}.$

$\log_a x^n = n.\log_a x$

a) $\lim_{x\to 0}(x^2.\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{-2}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2} = 0$

$\ln x = \log_e x^\alpha$

Chú ý: $\lim_{x\to x_0}\ln f(x) = \ln\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$

b) Ta có $\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos x)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

$\stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}$

$\stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-1/\cos^2 x}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}.$

Mà $\lim_{x\to 0}\left[\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\right] = -\frac{1}{2}.$

$(\ln^{-1}x)' = -1.\ln^{-2}x.\frac{1}{x} = \frac{-1}{x.\ln^2 x}$

$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$

$\Leftrightarrow \ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\right] = \ln e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}.$

c) $B = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$

Ta có $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\ln x} = \lim_{x\to 0}[\ln x.\ln(1+x)] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x}\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{-1}{x.\ln^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1.x.\ln^2 x}{(1+x).(-1)} = 0$

Mà $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\ln x} = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}\right] = 0 = \ln e^0$

$\Rightarrow \lim(1+x)^{\ln x} = e^0 = 1.$

Vậy $\lim(1+x)^{\ln x} = 1.$

⊛ Vi phân toàn phần và áp dụng tính gần đúng.

1) Vi phân toàn phần: $y = f(x)$ có vi phân

$dy = f'(x).dx.$

$(\sqrt[4]{x})' = (x^{1/4})'$

2) Công thức tính xấp xỉ:

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x.$

3) Ví dụ: Tính gần đúng $\sqrt[4]{17}$

Giải: Xét h/s $y = \sqrt[4]{x}$

Chọn $x_0 = 16 \Rightarrow \Delta x = 1.$

Ta có: $f(x_0) = f(16) = \sqrt[4]{16} = 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{4.\sqrt[4]{x^3}} \rightarrow f'(x_0) = f'(16) = \dfrac{1}{4.\sqrt[4]{16^3}} = \dfrac{1}{32}$

Áp dụng công thức $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$

$\Rightarrow f(17) \approx 2 + \dfrac{1}{32}.1 \approx \dfrac{65}{32}.$

ĐẠO HÀM CẤP CAO.

ĐN: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

❖ **Công thức tính đạo hàm bậc cao của tổng, của tích.**

1) $\left(f(x) + g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

2) $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).\ g^{(n-k)}(x)$, với $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(Công thức: 2) gọi là công thức ***Leibnitz***)

❖ Công thức đạo hàm bậc cao của một số hàm số

1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ (a > 0)$.
2) $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + n\frac{\pi}{2})$
3) $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + n\frac{\pi}{2})$
4) $(x^m)^{(n)} = m.(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$
5) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số sau:

a) $y = e^x \cos 2x$ b) $y = x^2 \sin x$

a) $y = e^x.\cos 2x$

$\rightarrow y' = e^x.\cos 2x + e^x.(-2\sin 2x)$

$= e^x(\cos 2x - 2\sin 2x)$

$\rightarrow y'' = e^x.(\cos 2x - 2\sin 2x) + e^x.(-2\sin 2x - 4\cos 2x)$

$= e^x(-3\cos 2x - 4\sin 2x)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm cấp 20 của hàm số $y = x^2 e^{2x}$

$y^{(20)} = (x^2.e^{2x})^{(20)}$

Áp dụng CT: $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.f^{(k)}.g^{(n-k)}$

$= C_n^0.f.g^{(n)} + C_n^1.f'.g^{(n-1)} + C_n^2.f''.g^{(n-2)} + \ldots$

$+ C_n^n.f^{(n)}.g$.

$y^{(20)} = C_{20}^0.x^2.(e^{2x})^{(20)} + C_{20}^1.2x.(e^{2x})^{(19)} + C_{20}^2.2.(e^{2x})^{(18)}$

$= 1.x^2.(e^{2x})^{(20)} + 20.2x.(e^{2x})^{(19)} + 190.2.(e^{2x})^{(18)}$.

Mà $(e^{2x})^{(n)} = 2.2\ldots2.e^{2x} = 2^n.e^{2x}$

$\Rightarrow y^{(20)} = x^2.2^{20}.e^{2x} + 20x.2^{20}.e^{2x} + 95.2^{20}.e^{2x}$

$= 2^{20}.e^{2x}.(x^2 + 20x + 95)$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm cấp 8 của hàm số $y = \frac{x^2}{1-x}$

Cách 1: $y = x^2.(1-x)^{-1} \longrightarrow$ tính theo công thức đạo hàm cấp cao của tích

Cách 2: Ta có $y = \frac{x^2}{1-x} = \frac{x^2-1+1}{1-x} = -\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}$

$$= -\underbrace{(x+1)} + \underbrace{\frac{1}{x-1}}.$$

$$\Rightarrow y^{(8)} = \left[-(x+1) + \frac{1}{x-1}\right]^{(8)}$$

$$= \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(8)} - \underbrace{(x+1)^{(8)}}_{0} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(8)}$$

Mà $\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \left[(x-1)^{-1}\right]' = -1.(x-1)^{-2}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{x-1}\right)'' = \left[-1(x-1)^{-2}\right]' = -1.(-2).(x-1)^{-3}$

. . . . . .

$\rightarrow \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(8)} = 8!.(x-1)^{-9} = \frac{8!}{(x-1)^9}$

Vậy $\boxed{y^{(8)} = \frac{8!}{(x-1)^9}.}$

VD: Tính đạo hàm cấp n của các h/s sau

a) $y = \frac{1}{x(1-x)}$

$\Downarrow$

đưa về tổng

b) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} = x.\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

KHAI TRIỂN TAYLOR & . . . .

Ví dụ. Viết khai triển Taylor của hàm $y = \ln(3+x)$ tại điểm $x = -2$ đến đạo hàm cấp 4.

Áp dụng công thức khai triển Taylor của h/s tại $x = -2$:

$y = f(-2) + \frac{f'(-2)}{\dots}(x+2) + \frac{f''(-2)}{\dots}(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{\dots}(x+2)^3$

$$y = y(-2) + \frac{y'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{y''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{y'''(-2)}{3!}(x+2)^3$$

$$+ \frac{y^{(4)}(-2)}{4!}(x+2)^4 + o[(x+2)]^4$$

Ta có $y(-2) = \ln 1 = 0$

$$y'(x) = \frac{1}{3+x} \Rightarrow y'(-2) = 1.$$

$$y''(x) = [(3+x)^{-1}]' = -1.(3+x)^{-2} \to y''(-2) = -1.$$

$$y'''(x) = [-1.(3+x)^{-2}]' = 2.(3+x)^{-3} \Rightarrow y'''(-2) = 2.$$

$$y^{(4)}(x) = [2.(3+x)^{-3}]' = -6.(3+x)^{-4} \Rightarrow y^{(4)}(-2) = -6.$$

$\Rightarrow$ Khai triển Taylor của h/s đã cho tại $x = -2$ là:

$$y = 0 + 1.(x+2) + \frac{-1}{2!}(x+2)^2 + \frac{2}{3!}.(x+2)^3 + \frac{-6}{4!}(x+2)^4 + o(x+2)^4$$

$$\Leftrightarrow y = x+2 - \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{3}.(x+2)^3 - \frac{1}{4}.(x+2)^4 + o(x+2)^4.$$

*) Khai triển Maclaurin là khai triển Taylor của một hàm số *f(x)* tại điểm *a = 0*.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + o(x^n)$$

trong đó $o(x^n) \to 0\ khi\ x \to 0$

(*công thức này cho phép khai triển một hàm bất kỳ thành đa thức của x*)

Ví dụ: Tìm đa thức Taylor bậc 3 của các hàm số sau

a) $y(x) = e^{3x+1}$ tại $x = -\frac{1}{3}$ b) $y(x) = x.\cos 3x$ tại $x = 0$.

Giải:

a) Đa thức Taylor bậc ba của h/s là:

$$P(x) = y\left(-\frac{1}{3}\right) + y'\left(-\frac{1}{3}\right).\left(x+\frac{1}{3}\right) + \frac{y''\left(-\frac{1}{3}\right)}{2!}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{y'''\left(-\frac{1}{3}\right)}{3!}\left(x+\frac{1}{3}\right)^3.$$

Ta có: $y\left(-\frac{1}{3}\right) = e^0 = 1$

$y'(x) = 3.e^{3x+1} \to y'(-\frac{1}{3}) = 3$

$y''(x) = 9.e^{3x+1} \to y''(-\frac{1}{3}) = 9$

$y'''(x) = 27.e^{3x+1} \to y'''(-\frac{1}{3}) = 27.$

→ Đa thức Taylor bậc ba của h/s là:

$P(x) = 1 + 3.(x+\frac{1}{3}) + \frac{9}{2!}(x+\frac{1}{3})^2 + \frac{27}{3!}(x+\frac{1}{3})^3$

$\Leftrightarrow \boxed{P(x) = 1 + 3(x+\frac{1}{3}) + \frac{9}{2}.(x+\frac{1}{3})^2 + \frac{9}{2}.(x+\frac{1}{3})^3}$

b) $y(x) = x.\cos 3x$ tại $x = 0$.

Áp dụng CT:

$P(x) = y(0) + y'(0).x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3.$

Ta có $y(0) = 0$

$y'(x) = \cos 3x + x.(-3\sin 3x) \to y'(0) = 1$

$y''(x) = -3\sin 3x - 3\sin 3x - x.9\cos 3x$

$= -6\sin 3x - x.9.\cos 3x \to y''(0) = 0$

$y'''(x) = -18\cos 3x - (9\cos 3x - x.27\sin 3x)$

$= -27\cos 3x + 27x.\sin 3x \to y'''(0) = -27$

→ Đa thức cần tìm là:

$P(x) = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-27}{3!}x^3 \Leftrightarrow P(x) = x - \frac{9}{2}x^3.$

Chú ý trong chương 1:

(1) Tính giới hạn

(2) Tính đạo hàm.

(3) Đạo hàm cấp cao

(4) Khai triển Taylor; đa thức Taylor.

Bài 1. Tìm vi phân của hàm số $\boxed{dy = y'(x).dx}$

a) $y = ln\frac{1-x}{1+x}$ b) $y = arcsin\frac{x}{2}$

Bài 2. Tính gần đúng $\boxed{y(x_0+\Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0).\Delta x}$

a) $A = arcsin0{,}51$ b) $B = tan46^0$

Bài 3. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{1{,}02}$ b) $B = arctan0{,}95$

Giải: Bài 1

a) Ta có $dy = y'.dx$

với $y' = \left(ln\frac{1-x}{1+x}\right)' = \dfrac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\frac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\frac{-1.(1+x)-1.(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}}$

$= \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}\cdot\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{-2}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{-2}{1-x^2}$

$\Rightarrow \boxed{dy = \dfrac{-2}{1-x^2}.dx}$

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Bài 2:

a) Tính gần đúng $A = arcsin\,0{,}51$.

Xét hàm số $y = arcsin0{,}51$.

Chọn $x_0 = 0{,}5 \Rightarrow \Delta x = 0{,}01$.

Áp dụng CT tính gần đúng: $y(x_0+\Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0).\Delta x$.

Ta có: $y(x_0) = y(0{,}5) = arcsin0{,}5 = \frac{\pi}{6}$

$y'(x) = (arcsin\,x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y'(0{,}5) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}5^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow A \approx \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 0{,}01 = \dfrac{\pi + 0{,}04.\sqrt{3}}{6}$

Lấy $A \approx \dfrac{\pi + 0,04.\sqrt{3}}{6}$

Dạng 1. Tính đạo hàm cấp cao bằng cách sử dụng công thức Leibnitz

$$(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . u^{(k)} . v^{(n-k)},$$

Bài 4. Tính đạo hàm cấp cao của các hàm số sau

a) Tính $y^{(10)}$ với $y = x.\sin(3x-1)$

b) Tính $y^{(8)}$ với $y = x^2.e^{5-3x}$

c) Tính $y^{(n)}$ với $y = \frac{x^3}{2x-5}$

d) Tính $y^{(10)}$ với $y = x^3.\ln(5x)$

Dạng 2. Tìm công thức khai triển Taylor, Maclaurin của hàm *f(x)*.

*) Công thức khai triển Taylor bậc n của hàm f(x) tại điểm $x = a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

*) Công thức khai triển Maclaurin bậc n của hàm f(x):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Bài 5. Tìm đa thức Maclaurin bậc 5 của các hàm f(x) sau:

1) $f(x) = e^x$ 2) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 3) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

4) $f(x) = \ln(1+x)$ 5) $f(x) = sinx$

6) $f(x) = cosx$ 7) $f(x) = (1+x)^\alpha, (\alpha \in R)$

Dạng 2. Tìm công thức khai triển Taylor, Maclaurin của hàm *f(x)*.

*) Công thức khai triển Taylor bậc n của hàm f(x) tại điểm $x = a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

*) Công thức khai triển Maclaurin bậc n của hàm f(x):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Bài 6. 1/. Tìm đa thức Taylor bậc 3 tại $x = 1$ của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

2/. Tìm khai triển Maclaurin bậc 4 của hàm số

$$g(x) = x^2.e^{3x}$$

3/. Tìm đa thức Taylor bậc 3 của hàm số sau tại $x = 0$

$$f(x) = x.cos3x$$