29/8/2022+5/9

Tuesday, August 16, 2022 11:22 AM

Bài 1. Nguyên hàm và tích phân bất định

1.2. Bảng nguyên hàm một số hàm số thường gặp:

1) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	1*) $\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2) $\int \frac{1}{x}\,dx = ln\|x\| + C$	2*) $\int \frac{1}{u}\,du = ln\|u\| + C$
3) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctanx + C$	3*) $\int \frac{1}{1+u^2}\,du = arctanu + C$
4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsinx + C$	4*) $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = arcsinu + C$
5) $\int sin\,xdx = -\cos x + C$	5*) $\int sin\,udu = -\cos u + C$
6) $\int cosx\,dx = sin\,x + C$	6*) $\int cosu\,du = sin\,u + C$
7) $\int \frac{1}{sin^2x}\,dx = -cotx + C$	7*) $\int \frac{1}{sin^2u}\,du = -cotu + C$
8) $\int \frac{1}{cos^2x}\,dx = tanx + C$	8*) $\int \frac{1}{cos^2u}\,du = tanu + C$
9) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C$	9*) $\int a^u\,du = \frac{a^u}{lna} + C$

$\int (a^u)' = a^u . lna . u'$

1.2. Bảng nguyên hàm một số hàm số thường gặp:

Ví dụ 1. Tính các tích phân bất định sau

1) $\int (2x+3)^3 dx$ 2) $\int \frac{1}{1+(1+5x)^2}dx$ 3) $\int 3^{5x+1}dx$

4) $\int \frac{1}{\cos^2(3x-2)}dx$ 5) $\int \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6) $\int \frac{dx}{sinx}$ 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Chú ý: $dy(x) = y'(x).dx$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Giải: 1) $\int (2x+3)^3 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^3 d(2x+3)$

$= \frac{1}{2} \frac{(2x+3)^4}{4} + C = \frac{(2x+3)^4}{8} + C.$

2) $\int \frac{1}{1+(1+5x)^2} dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+(1+5x)^2} d(1+5x)$

$= \frac{1}{5} \arctan(1+5x) + C$

3) $\int 3^{5x+1} dx = \frac{1}{5}\int 3^{5x+1} d(5x+1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3^{5x+1}}{ln\,3} + C$

5) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \arccos x \, d(\arccos x) = -\frac{(\arccos x)^2}{2} + C$

6) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}$ $\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \int \frac{\cos\frac{x}{2}\, d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$

$= \arcsin\frac{x}{a} + C.$ $\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Phương pháp đổi biến số

Ví dụ 1. Tính các tích phân bất định sau:

a) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ b) $\int \frac{dx}{x.lnx}$ c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}dx$

Giải: a) Đặt $x = a\sin t$

$\Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2 - a^2.\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}$

$= \sqrt{a^2.\cos^2 t} = a.\cos t.$

$dx = d(a\sin t) = (a.\sin t)'.dt = a.\cos t\, dt.$

$\Rightarrow A = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a.\cos t.a.\cos t\, dt = \int a^2.\cos^2 t\, dt$

$= a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}.\left[\int dt - \frac{1}{2}\int \cos 2t\, d(2t)\right]$

$= \frac{a^2}{2}.\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right] + C.$

Ta có $x = a.\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}.$

$\sin 2t = 2\sin t.\cos t = 2\sin t.\sqrt{1-\sin^2 t} = 2.\frac{x}{a}.\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

$$= \frac{2x}{a^2}.\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a^2}{2}.\left[\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}.\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right] + C$$

b) $B = \int \frac{dx}{x.\ln x} = \int \frac{1}{x}.\frac{dx}{\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x) + C.$

c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}dx$. Đặt $\sqrt{x^2-2} = t \Rightarrow x^2 - 2 = t^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xdx = 2tdt \Rightarrow xdx = tdt \\ x^2 = t^2+2. \end{cases}$$

$$\rightarrow C = \int \frac{x^2.xdx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{(t^2+2).tdt}{t} = \int (t^2+2)dt$$

$$= \frac{t^3}{3} + 2t + C$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2-2)^3}}{3} + 2\sqrt{x^2-2} + C.$$

Phương pháp tích phân từng phần:

Giả sử $u = f(x), v = g(x)$ là hai hàm số liên tục và khả vi. Ta có vi phân của tích $u.v$ là:

$$d(u.v) = v.du + u.dv$$ đạo hàm của 1 tích.

$$\Rightarrow u.dv = d(u.v) - v.du$$

$$\Rightarrow \int udv = \int d(u.v) - \int vdu$$

$$\Rightarrow \boxed{\int udv = u.v - \int vdu}$$ → công thức t.phân t.phần.

Phương pháp tích phân từng phần:

$\int udv$.

Dạng 1. $\int P_n(x).u(x)dx$, với $u(x) = \left[\begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \text{arccot} x \end{array}\right.$. Đặt $\begin{cases} u = \left[\begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \text{arccot} x \end{array}\right. \\ dv = P_n(x)dx \end{cases}$

Dạng 2. $\int P_n(x).v(x)dx$, với $v(x) = \left[\begin{array}{l} e^{ax+b} \\ \cos(ax+b) \\ \sin(ax+b) \end{array}\right.$. Đặt $\begin{cases} u = P_n(x) \\ dv = v(x)dx \end{cases}$

(trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc *n* của biến *x)*

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a) $\int lnxdx$ b) $\int arctanxdx$ c) $\int x.arctanxdx$

d) $\int x.lnxdx$ e) $\int x^2 sinxdx$ f) $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{x+1}}dx$

Giải: a) $A = \int \ln x\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x. \end{cases}$

$\Rightarrow A = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx + C = x\ln x - x + C.$

b) $B = \int \arctan x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{cases}$

$d(1+x^2) = 2x dx$

$\Rightarrow B = x.\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx + C$

$= x.\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + C$

$= x.\arctan x - \frac{1}{2}.\ln(1+x^2) + C.$

$v = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$

c) $C = \int x.\arctan x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow C = \frac{x^2}{2}.\arctan x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}.\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}.\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}.\arctan x - \frac{1}{2}.(x - \arctan x) + C.$

d) $D=\int x.\ln x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow D = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$

$= \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + C.$

e) $E=\int x^2.\sin x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ dv=\sin x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x\,dx \\ v=-\cos x \end{cases}$

$\rightarrow E = -x^2.\cos x + \underbrace{\int 2x.\cos x\,dx}_{I}$

Đặt $\begin{cases} u=2x \\ dv=\cos x\,dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=\sin x \end{cases}$

$\Rightarrow E = -x^2.\cos x + 2x.\sin x - \int 2\sin x\,dx$

$= -x^2.\cos x + 2x.\sin x + 2\cos x + C.$

$v=\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

$=\int (x+1)^{-\frac{1}{2}}.d(x+1)$

$= \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x+1}$

f) $F=\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\arcsin x \\ dv=\frac{dx}{\sqrt{x+1}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v=2\sqrt{x+1} \end{cases}$

$\Rightarrow F = 2\sqrt{x+1}.\arcsin x - \int 2\sqrt{x+1}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= 2\sqrt{x+1}.\arcsin x - \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x}}$

$= 2\sqrt{x+1}.\arcsin x + 2\int (1-x)^{-1/2}d(1-x)$

$= 2\sqrt{x+1}.\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$

BTVN.

$\frac{a}{\ldots} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

Ví dụ. Tính các tích phân sau

a) $\int \frac{x-3}{x^3-x}dx$ b) $\int \frac{1dx}{x(x^2+1)}$ c) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$

a) Ta có $\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} \overset{g/s}{=} \underbrace{\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}}$

$= \frac{a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$= \frac{ax^2-a+bx^2+bx+cx^2-cx}{x(x-1)(x+1)}$

$= \frac{(a+b+c)x^2+(b-c)x-a}{x(x-1)(x+1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=1 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1+c \\ 3+1+c+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1}$

$\Rightarrow \int \frac{x-3}{x^3-x}dx = \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{2}{x+1}dx$

$= 3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C.$

$= \ln x^3 - \ln|x-1| - \ln(x+1)^2 + C$

$= \ln \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}$

Chú ý

$\ln A + \ln B = \ln(A.B)$

$\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$.

$\ln A^\alpha = \alpha . \ln A$.

1.4. Nguyên hàm của một số hàm vô tỷ đơn giản

1/. Tích phân dạng $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$

Phương pháp giải:

Đặt $t = \sqrt[n]{ax+b}$

Ví dụ. Tính $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}} = I.$

Giải: Đặt $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} x = t^3-1. \\ dx = d(t^3-1) = 3t^2dt. \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int \frac{(t^3-1).3t^2dt}{t} = 3\int (t^4-t)dt = 3.\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right) + C.$

$$= 3.\left(\frac{\sqrt[3]{(x+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2}\right) + C.$$

2/. Tích phân chứa $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Phương pháp giải:

Biến đổi $ax^2 + bx + c = \alpha t^2 + \beta$

Ví dụ. Tính các tích phân sau

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ b) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$

b) Ta có $\sqrt{x^2+4x+10} = \sqrt{(x^2+4x+4)+6}$

$= \sqrt{(x+2)^2+6}$

Đặt $x+2=t \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+4x+10} = \sqrt{t^2+6} \\ 5x+3 = 5.(x+2)-7 = 5t-7. \\ dx = dt. \end{cases}$

$\Rightarrow B = \int \frac{5t-7}{\sqrt{t^2+6}}dt = \int \frac{5t}{\sqrt{t^2+6}}dt - \int \frac{7}{\sqrt{t^2+6}}dt$

$\int u^{-1/2}du$

$= 2\sqrt{u}$

$= \frac{5}{2}\int \frac{d(t^2+6)}{\sqrt{t^2+6}} - 7\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+6}}$

$= \frac{5}{2}.2\sqrt{t^2+6} - 7.\ln\left|t+\sqrt{t^2+6}\right| + C.$

Chú ý: $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right|$ với u là ẩn; $a>0$.

$= 5.\sqrt{x^2+4x+10} - 7.\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C$

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

Ta có $\sqrt{1-x-x^2} = \sqrt{-(x^2+x-1)} = \sqrt{-\left(x^2+2.x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1\right)}$

$= \sqrt{-\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]}$

$= \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}\left[1 - \frac{4}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]}$

$= \frac{\sqrt{5}}{2}.\sqrt{1 - \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}$

Đặt $\frac{2}{\sqrt{5}}(x+\frac{1}{2}) = t \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{5}}dx$ và $\sqrt{1-x-x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.\sqrt{1-t^2}$.

$$\Rightarrow A = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}dt}{\frac{\sqrt{5}}{2}.\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C.$$

$$= \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}(x+\frac{1}{2}) + C.$$

BTVN

1.6. Ví dụ: Tính các tích phân sau (sv tự làm)

1) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$ 2) $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$ 3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$ 5) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ 6) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$

7) $\int \frac{1}{sinx}dx$ 8) $\int \frac{1}{cosx}dx$ 9) $\int \ln(ax+b)dx$

10) $\int e^{ax}\cos(bx)dx$ 11) $\int e^{ax}\sin(bx)dx$

Bài 2. Tích phân xác định

$a.\sin t = a$
$\rightarrow \sin t = 1$
$\rightarrow t = \pi/2$.

2.3. Phương pháp tính tích phân xác định

Ví dụ. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$

(HD: đặt $x = a.sint \rightarrow ĐS$: $\left(\frac{a^2\pi}{4}\right)$)

Đặt $x = a.\sin t \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}$

$= \sqrt{a^2.\cos^2 t} = a.\cos t.$

Chú ý
$d(f(x)) = f'(x).dx.$

$dx = d(a\sin t) = a.\cos t\, dt.$

Đổi cận:

x	0	a
t	0	$\pi/2$

$$\Rightarrow A = \int_0^{\pi/2} a.\cos t.a.\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} a^2.\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

dùng máy tính bấm $\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$.

$$= \frac{a^2}{2}.\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{sinx}{1+cos^2x} dx = B.$

(HD: đặt $cosx = t \ \rightarrow ĐS: \frac{\pi}{4}$)

Đặt $t = \cos x \rightarrow \begin{cases} dt = d(\cos x) = -\sin x\, dx \\ 1+\cos^2 x = 1+t^2. \end{cases}$

Đổi cận

x	0	$\pi/2$
t	1	0

$\Rightarrow B = \int_1^0 \frac{-dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

2.3. Phương pháp tính tích phân xác định

*) Phép phân đoạn trong tích phân xác định

$$\int_a^b u dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$(d(1-x^2) = -2x dx.$

$\int u^{-1/2} du = 2\sqrt{u}.$

Ví dụ. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^1 arcsinx\, dx$ b) $\int_0^{\pi/2} x.cosxdx$

c) $\int_0^1 (x-1).e^x dx$ d) $\int_0^{\pi/2} e^{2x}.cosxdx$

Giải: a) Đặt $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow A = x.\arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + (0-1) = \boxed{\frac{\pi}{4} - 1.}$

b) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\, dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow B = x.\sin x\Big|^{\pi/2} - \int^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{} + \cos x\Big|^{\pi/2} - \frac{\pi}{} - 1$

c) $\int_0^1 (x-1).e^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow C = \underbrace{(x-1)e^x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -1 - e^x\Big|_0^1 = -1-(e-1)$$

$$= \boxed{-e}.$$

d) $\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{2x}}.\underbrace{cosx}dx = D$

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = -\sin x\, dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow D = \underbrace{\frac{1}{2}\cos x . e^{2x}\Big|_0^{\pi/2}}_{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{2x}.\sin x\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\int_0^{\pi/2} e^{2x}.\sin x\, dx$$

$\frac{1}{2}.e^{\pi}.1-$

Đặt: $\begin{cases} u^* = \sin x \\ dv^* = e^{2x} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du^* = \cos x\, dx \\ v^* = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow D = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\left[\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}.\sin x\Big|_0^{\pi/2}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{2x}.\cos x\, dx}_{D}\right]$$

$$\Rightarrow D = -\frac{1}{2} + \frac{e^{\pi}}{4} - \underbrace{\frac{1}{4}D} \rightarrow \frac{5}{4}D = \frac{e^{\pi}-2}{4}$$

$$\rightarrow D = \boxed{\frac{e^{\pi}-2}{5}}.$$