c) $\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b\to+\infty} \left[e^x \Big|_0^b \right] = \lim_{b\to+\infty} \left[e^b - 1 \right]$

$= \infty - 1 = \infty \longrightarrow$ t.ỹ phân kỳ.

d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln x \Big|_1^b \right] = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln b - \ln 1 \right]$

$= \infty - 0 = \infty \longrightarrow$ t.ỹ phân kỳ.

e) $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\sin x \Big|_0^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\sin b - \sin 0 \right)$

~~vì~~ $\lim_{b\to+\infty} \sin b$ không xác định $\rightarrow$ t.phân phân kỳ.

f) $\int_1^{+\infty} \ln x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \ln x dx$

Tính $\int_0^b \ln x dx$, đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^b \ln x dx = x.\ln x \Big|_0^b - \int_0^b dx = b.\ln b - x \Big|_0^b = b.\ln b - b.$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \ln x dx = \lim_{b\to+\infty} \left(b.\ln b - b \right) = +\infty \longrightarrow$ t.ỹ phân kỳ.

g) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big| \right.$

$= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right] = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{(1-\alpha)>0}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$

Nếu $\alpha > 1$ thì $1-\alpha < 0 \longrightarrow \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{(1-\alpha).b^{\alpha-1}} = 0$

$$= -\lim_{b\to+\infty}[e^{-b}-1] = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}+1 = 1 \Rightarrow$$

c) $$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^x dx = \lim_{b\to+\infty}\left[e^x\Big|_0^b\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[e^b - 1\right]$$

$$= \infty - 1 = \infty \longrightarrow \text{t.p phân kỳ.}$$

d) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ e) $\int_0^{+\infty} cosxdx$ f) $\int_1^{+\infty} lnxdx$

d) $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln b - \ln 1\right]$$

$$= \infty - 0 = \infty \longrightarrow \text{t.p phân kỳ.}$$

e) $$\int_0^{+\infty}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\sin x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\sin b - \sin 0\right)$$

~~Vì~~ $\lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$ không xác định $\rightarrow$ t.phân phân kỳ.

f) $$\int_1^{+\infty}\ln x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \ln x dx$$

Tính $\int_0^b \ln x dx$, đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^b \ln x dx = x.\ln x\Big|_0^b - \int_0^b dx = b.\ln b - x\Big|_0^b = b.\ln b - b.$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\ln x dx = \lim_{b\to+\infty}\left(b.\ln b - b\right) = +\infty \longrightarrow \text{t.p phân kỳ.}$$

$\int x$

g) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ h) $\int_1^{+\infty}\frac{lnx}{x}dx$

g) $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b\right.$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right] = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{(1-\alpha)>0}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{1-\alpha}$$

Nếu $\alpha > 1$ thì $1-\alpha < 0 \Rightarrow \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{(1-\alpha).b^{\alpha-1}} = 0$

$\Rightarrow +$

Nếu $\alpha < 1$ thì $1-\alpha > 0 \Rightarrow \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx =$

$\to$ t.p p

Nếu $\alpha = 1$ thì $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty$ (theo ý d) $\to$ pân kỳ.

$\boxed{\text{Chú ý: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \quad \text{nếu } \alpha > 1 \text{ thì t.p hội tụ; nếu } \alpha \le 1 \text{ thì t.p pân kỳ.}}$

h) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b \ln x \, d(\ln x)$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^b \right) = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln^2 b}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} \right)$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{\ln^2 b}{2} = +\infty \to$ t.p pân kỳ.

3.1. Tích phân suy rộng loại 1

Tương tự, nếu f(x) xác định trên $(-\infty; b]$ và khả tích trên mỗi đoạn $[a; b], \forall a \le b$, ta có

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Nếu f(x) xác định và liên tục trên R thì

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Tích phân trên là hội tụ nếu cả hai tích phân ở vế phải hội tụ.

3.2. Các tính chất và dấu hiệu hội tụ

3.2.1. Tiêu chuẩn so sánh:

a) Giả sử *f(x), g(x)* khả tích trên mọi đoạn [*a; b*] và

$$0 \le f(x) \le g(x), \forall x \ge a$$

Khi đó:

+) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ cũng hội tụ. (hàm lớn hơn htụ

+) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ cũng phân kỳ. (hàm bé phân kỳ –

3.2.1. Tiêu chuẩn so sánh:

b) Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm số khả tích trên mọi đoạn [a; b]. Khi đó, nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ thì — số dương hữu hạn thì

+) Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

+) Nếu $k = 0$ và nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ.

+) Nếu $k = +\infty$ và nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ.

(Hoặc: nếu $f(x) \ge 0; g(x) \ge 0$ trên $[a, +\infty)$ và $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ) — $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(\ldots}{g(\ldots}$

<u>Sự hội tụ của tích phân suy rộng của một số hàm thường gặp:</u>

1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ hội tụ với $\alpha > 1$ và phân kỳ với $\alpha \le 1$.

2) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ *là hội tụ.*

3) $\int_0^{+\infty} e^{x}dx = +\infty$ *là phân kỳ.*

4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx = +\infty$ *là phân kỳ*

5) $\int_1^{+\infty} \ln x\,dx = +\infty$ *là phân kỳ*

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 5}dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}}dx$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{x^2}dx$

a) Ta có $\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 5} \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+5} : \frac{x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^4-x\ldots}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^4}} = 1.$

Mà $\int_1 \frac{1}{x^2}dx$ có $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \int_1 \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 5}dx$ hội tụ.

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}dx$

Với $x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}} < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{2/3}} = \frac{1}{x^{7/6}}$ $\Bigg\} \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ }}$

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/6}}dx$ có $\alpha = \frac{7}{6} > 1 \rightarrow$ t.f này hội tụ

c) $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{x^2}dx = \int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}dx$ có $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ t.f phân

Nghỉ giải lao: $8^h22'$ vào lớp.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của tích phân

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{x^5+x+1}}$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{2x^2+x-1}dx$

$8^h26' \rightarrow 8$

gửi bài chụp

a) Ta có $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$

Mà $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ $\Bigg\} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ.

b) Ta có $\frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} \sim \frac{2x}{\sqrt{x^5}} = \frac{2}{x^{3/2}}$

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{3/2}}dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ có $\alpha = \frac{3}{2} > 1 \rightarrow$ hội tụ $\Bigg\} \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+\ }}$

$= \frac{x^{3/2}}{2x^2} = \frac{1}{2.x^{2-\frac{3}{2}}}$

c) Ta có $\frac{\sqrt{x^3+2}}{2x^2+x-1} \sim \frac{\sqrt{x^3}}{2x^2} = \frac{1}{2.x^{1/2}}$

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2.x^{1/2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}dx$ có $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ pkỳ $\Bigg\} \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{2x^2+x}$

phi-rang phâp tich phân tirng phăn. Dgng 3. Crng dung cüa tich phân: Tinh dö dåi duröng cong Dgng 4. Xét sv hôi tu vå tinh tich phân suy röng c6 can vö han (düng DN) Dgng 5. Xét sv hôi tu cüa tich phån suy röng cé căn vö han (düng tiéu chudn so sånh)

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1. Tính các tích phân sau

a) $\int x(2x+5)^4 dx$ b) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$ c) $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} dx$

c) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin x \, d(\arcsin x) = (\arcsin x)^2 + C.$

Bài 2. Tính tích phân ln8 a) .f1n5 dx xdx —5x2 +6 e sin(lnx) dx x

$\sqrt{e^{ln}}$

$= \int_1^e \sin(\ln x)\, d(\ln x) =$

a) $A = \int_{\ln 5}^{\ln 8} \frac{e^x \cdot \sqrt{x^2+1}}{e^x - 3} dx$

Đặt $\sqrt{e^x+1} = t \Rightarrow e^x + 1 = t^2 \rightarrow e^x = t^2 - 1 \rightarrow d(e^x) = d(t^2 -$

$\rightarrow e^x dx = 2tdt$

Đổi cận:

x	$\ln 5$	$\ln 8$
t	$\sqrt{6}$	3

$\rightarrow A = \int_{\sqrt{6}}^{3} \frac{2t^2 dt}{t^2-4} = \int_{\sqrt{6}}^{3} \frac{2(t^2-4)+8}{t^2-4} dt = \int_{\sqrt{6}}^{3} \left[2 + \frac{8}{(t-2)(t+2)}\right] dt.$

$= \int^{3} 2dt + 8 \int^{3} \frac{dt}{}$

$$= \int_{\sqrt6} \dots + 8 \int_{\sqrt6} \frac{\dots}{(t-2)(t+2)}$$

$$\left(\text{Nháp: } \frac{1}{(t-2)(t+2)} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2} = \frac{a(t+2)+b(t-2)}{(t-2)(t+2)} = \frac{(a+b)t+2a\dots}{(t-2)(t+2)} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases} \right)$$

$$\rightarrow A = \int_{\sqrt6}^{3} 2\,dt + 8.\int_{\sqrt6}^{3} \left[\frac{1}{4(t-2)} - \frac{1}{4(t+2)} \right] dt = 2t\Big|_{\sqrt6}^{3} + 2\int_{\sqrt6}^{3} \left[\frac{1}{t-2} - \dots \right.$$

$$= 6 - 2\sqrt6 + 2.\left(\ln|t-2| - \ln|t+2| \right)\Big|_{\sqrt6}^{3}$$

$$= 6 - 2\sqrt6 + 2.\ln\frac{t-2}{t+2}\Big|_{\sqrt6}^{3} = 6 - 2\sqrt6 + 2.\left(\ln\frac{1}{5} - \ln\frac{\sqrt6-\dots}{\sqrt6\dots} \right.$$

xdx 2 x4-5X2+6

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \frac{d(x^2)}{x^4-5x^2+6} = B.$$

Đặt $x^2 = t \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 6 = t^2 - 5t + 6.$

Đổi cận:

x	-2	0
t	4	0

$$\rightarrow B = \frac{1}{2}\int_{4}^{0} \frac{dt}{t^2-5t+6} = \frac{1}{2}\int_{4}^{0} \frac{dt}{(t-3)(t-2)} = \frac{1}{2}\int_{4}^{0} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \frac{1}{2}\left(\ln|t-3| \dots \right.$$

$$\left(\text{Nháp: } \frac{1}{(t-3)(t-2)} = \frac{a}{t-3} + \frac{b}{t-2} = \frac{a(t-2)+b(t-3)}{(t-3)(t-2)} \right.$$

$$= \frac{(a+b)t-2a-3b}{(t-3)(t-2)} \qquad = \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -2a-3b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\int dv$

a) Đặt $\begin{cases} u = x^2+5x+6 \\ dv = \cos(2x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+5)\,dx \\ v = \frac{1}{2}\sin(2x) \end{cases}$

$\Rightarrow A = (x^2+5x+6).\frac{1}{2}.\sin(2x) - \frac{1}{2}\underbrace{\int (2x+5).\sin(2x)\,dx}_{I}$

Tính $I = \int (2x+5).\sin(2x)\,dx$. Đặt $\begin{cases} u = 2x+5 \\ dv = \sin(2x)\,dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos(2 \end{cases}$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}(2x+5).\cos(2x) + \int \cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}(2x+5).\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}(x^2+5x+6).\sin(2x) - \frac{1}{2}.\left[-\frac{1}{2}(2x+5).\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right] +$

$= \frac{1}{2}(x^2+5x+6).\sin(2x) + \frac{1}{4}(2x+5).\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$

Bài tập về nhà: 3 – 4 – 5 (Hạn cuối 24h chủ nhật)

Bài 3. Tinh cặc tich phân sau a) f(x2 + 5x + 6). cos(2x) dx 2 3x+1dx arcstnx dx b) f x. In(x + 2) dx x +4. cos(2x) dx

Bãi 4. Tinh cặc tich phân sau a) fol (2x + 1). arctanxdx c) f? (2x — 3). eX+2dx b) f r (X + 3). Inxdx d) f: / 4 (x — 5). cos(2x) dx Bài 5. Xćt hÔi tu cóa cặc tich phân suy rÔng sau dx 2x4+3x2+5 dx —co x2+1 e) 00 | dx 2x+3 +00 In(2x+3) dx +00 | dx f) f-ooo 3x Idx