复旦大学 2021 每周一题

1 高代 I 每周一题

1. xxx

2 高代 II 每周一题

1. xxx

2. 设 A, B 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上的 m, n 阶矩阵，他们在复数域 $\mathbb{C}$ 中有公共的特征值，证明：存在非零矩阵 $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$，使得 $AC = CB$.

3. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵，其特征多项式等于极小多项式，证明：矩阵方程 $XA = A'X$ 的解是 $\mathbb{K}$ 上的对称阵.

4. 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间，V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(X) = AX - XA$，其中 $A \in V$. 证明：φ 可对角化的充要条件是 A 可对角化.

注. *本题是第二届 CMC 决赛题的推广.*

5. 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间，V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(X) = JXJ$，其中 $J = J_n(0)$ 是特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块，试求 φ 的 Jordan 标准型.

6. 设 a 为实数，求下列 n 阶实对称阵的正负惯性指数：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

7. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶正定实对称阵，$B = (b_{ij})$ 为 n 阶半正定实对称阵且主对角元全打于零，证明：Hadamard 乘积 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$ 是正定对称阵.

8. 设 A 为 n 阶实对称阵，B 为 n 阶半正定实对称阵，满足 $|A + iB| = 0$，求证：存在 n 维非零实列向量，使得 $A\alpha = B\alpha = 0$.

注. *FDU21 期末考试第八题推广.*