ZJU 2021 高等代数

1. 试求 t 的值,使得多项式 $f(x)=x^3+6x^2+tx+8$ 具有重根,并求出相应的重根.

2. 已知可逆方程 A 的逆为 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 1 & -8 \end{pmatrix}$,求 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} iA_{ij}$.

3. 设 $a_1,\dots,a_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系,另有一组向量 a.

4. 若 n 阶复矩阵 A,B 满足 $AB=BA$,且 B 有 n 个不同的特征值,证明:A 可对角化.

5. 设 c_1,c_2,c_3 实多项式 $f(x)=2x^3-4x^2+6x-1$ 的三个复根,求 $(c_1c_2+c_3^2)(c_2c_3+c_1^2)(c_1c_3+c_2^2)$.

6. 在 R^2 上 $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$,令 $A_f=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. $B_f=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$,证明:函数 $f(x,y)$ 在坐标变换 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$,$tr(A_f), det(A_f), def(B_f)$ 保持不变,其中 Q 是二阶正交矩阵.

7. 设实矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d>0$,证明:一定存在 A 的特征向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in R^2$,其中 $x,y>0$.

8. 设 6 阶复矩阵 A,B 是幂零矩阵,且有相同的秩和最小多项式,证明:A,B 相似.

9. 设 A 是 n 阶实矩阵,B 是 n 阶正定矩阵.

   (1) 证明:存在唯一 n 阶实矩阵 C 满足 $BC+CB=A$.

   (2) 证明:对 (1) 中实矩阵 C 有 $BC=CB$ 当且仅当 $AB=BA$.