高等代数：小册子

作者：David

时间：Sep 4, 2022

版本：1.0

- Why do we fall? So we can learn to pick ourselves up.

– Alfred

目录

第 1 章 多项式

内容提要

- 存一寸光阴，换一个世纪.
- –< 爱久见人心 >

1.1 整除

整除于多项式的根密切挂钩，如果 $g(x) \mid f(x)$ 则 $g(x)$ 的根也是 $f(x)$ 的根。这部分还有着友阵，单位根等技巧的灵活运用。

命题 1.1

假设 $f_0(x^5) + x \cdot f_1(x^{10}) + x^2 \cdot f_2(x^{15}) + x^3 \cdot f_3(x^{20})$ 能被 $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 整除，证明：$f_i(x)$ 能被 $x - 1$ 整除.

证明 这个多项式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$，特别有规律，最后一项 1 乘以 x 得到第二项，第二项依次乘可以一直做下去，有点像循环子空间的感觉了，于是我们乘以 x 再减去他们本身，即用 $x - 1$ 去乘这个多项式：

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \\
&= x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^4-x^3-x^2-x-1 \\
&= x^5-1
\end{aligned}
$$

即 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 是 $x^5 - 1$ 的因式.

设 5 次单位根 $\omega_k = \cos\dfrac{2k\pi}{5} + i \cdot \sin\dfrac{2k\pi}{5}, (k = 0, 1, \ldots, 4)$，$\omega_k^5 = 1$.

$$
\begin{cases}
f_0(1) + \omega_1 \cdot f_1(1) + \omega_1^2 \cdot f_2(1) + \omega_1^3 \cdot f_3(1) = 0 \\
f_0(1) + \omega_2 \cdot f_1(1) + \omega_2^2 \cdot f_2(1) + \omega_2^3 \cdot f_3(1) = 0 \\
f_0(1) + \omega_3 \cdot f_1(1) + \omega_3^2 \cdot f_2(1) + \omega_3^3 \cdot f_3(1) = 0 \\
f_0(1) + \omega_4 \cdot f_1(1) + \omega_4^2 \cdot f_2(1) + \omega_4^3 \cdot f_3(1) = 0
\end{cases} \tag{$*$}
$$

写出 $*$ 的系数行列式：

$$
\begin{vmatrix}
1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\
1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\
1 & \omega_3 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \\
1 & \omega_4 & \omega_4^2 & \omega_4^3
\end{vmatrix}
= \prod_{1 \le i < j \le 4} (\omega_j - \omega_i) \neq 0.
$$

$\Longrightarrow$ 方程组 $(*)$ 只有零解，即 $f_i(1) = 0, (\forall 1 \le i \le 4)$，即 $x - 1 \mid f_i(x)$.

■

注 如果是 $x^4 + x^2 + 1$，我们观察到得乘 x^2 才会匹配，于是，乘以 $x^2 - 1$. 暂时归结为技巧吧

第 2 章 矩阵

内容提要

- 秩不等式
- 可逆的转换
- Sylvester 不等式
- Frobenius 不等式

2.1 秩不等式

秩不等式对于解决很多等式和不等式的证明中，可以很轻松地化繁为简，理清证明思路。因此熟练掌握秩不等式的各种结论是很有必要的。

下面我们依次证明几个最最最基本的矩阵秩的公式：

引理 2.1

(1) 若 $k\neq 0$，$r(kA)=r(A)$.

(2) $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\};r(A^2)\leq r(A)$.

(3) $r\begin{pmatrix} A & O\\ O & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$.

(4) $r\begin{pmatrix} A & C\\ O & B\end{pmatrix}\geq r(A)+r(B)$ 或者 $r\begin{pmatrix} A & O\\ D & B\end{pmatrix}\geq r(A)+r(B)$.

(5) $r(A|B)\leq r(A)+r(B)$.

(6) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$.

♡

证明

(1): $kA=P_1(k)P_2(k)\dots P_n(k)A$，$P_i(k)$ 为第二类初等矩阵，左乘意味着对矩阵 A 的第 i 行同时乘非零常数 k，初等阵不改变矩阵的秩.

(2): 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，我们把矩阵 B 进行列分块 $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s)$，则 $AB=A(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s)$ $=(A\beta_1,A\beta_2,\dots,A\beta_s)$. 若 B 的列向量的极大线性无关组为 $\{\beta_{j_1},\beta_{j_2},\dots,\beta_{j_r}\}$，则 B 中任意一个列向量 β_j 均可用 $\{\beta_{j_1},\beta_{j_2},\dots,\beta_{j_r}\}$ 线性表示，于是任意 $A\beta_j$ 也可用 $\{A\beta_{j_1},A\beta_{j_2},\dots,A\beta_{j_r}\}$ 线性表示。因此向量组 $\{A\beta_1,A\beta_2,\dots,$ $A\beta_s\}$ 的秩不超过 r，即 $r(AB)\leq r(B)$. 同理可得另一边.

注 我们可以很轻易的得到结论，两个矩阵相乘，秩要么不变，要么会变小，乘的矩阵越多，变的越小。因此很容易理解这个不等式：

$$r(A)\geq r(A^2)\geq r(A^3)\cdots\geq r(A^n).$$

(3): 用简单的相抵标准型可证。设矩阵 A 的秩为 r_1，B 的秩为 r_2，则存在可逆矩阵 P_1,P_2,Q_1,Q_2 使得 A,B 变为相抵标准型，即 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix} I_{r_1} & O\\ O & O\end{pmatrix}$，$P_2BQ_2=\begin{pmatrix} I_{r_2} & O\\ O & O\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} P_1 & O\\ O & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O\\ O & Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O\\ O & O & O & O\\ O & O & I_{r_2} & O\\ O & O & O & O\end{pmatrix}$$

因此，分块对角阵的秩为各分块的秩的和。

(4): 假设同 (3)，作以下矩阵乘法：

$$\begin{pmatrix} P_1 & O\\ O & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O\\ O & Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1AQ_1 & P1CQ_2\\ O & P_2BQ_2\end{pmatrix}$$

对 $P1CQ_2$ 进行分块 $\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，则可以化简为

$$\begin{pmatrix} P_1AQ_1 & P1CQ_2 \\ O & P_2BQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$$

把 C_{11}, C_{12}, C_{21} 消去可得

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & C_{22} & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$$

命题得证.

(5): 注意到等式的右边为两个矩阵秩的和，我们想用 (3) 的结论，因此考虑如下矩阵乘法：

$$\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = (A|B)$$

矩阵乘法秩会变小，于是 $r(A|B) \leq r(A) + r(B)$.

(6) 考虑如下矩阵乘法:

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = A + B$$

和 (5) 的方法一样，利用乘法秩会变小得出 $r(A+B) \leq r(A|B) \leq r(A) + r(B)$.

■

通过证明上面结论，我们可以发现，利用分块矩阵的初等变化不改变矩阵的秩和矩阵乘法使得秩变小的两个重要的结论，下面通过两个简单的例题体会分块初等变换这一思想。

命题 2.1

求证：n 阶矩阵 A 是幂等矩阵 (即 $A^2 = A$)，的充要条件是:

$$r(A) + r(I_n - A) = n$$

♠

证明 看到两个矩阵的秩的和，我们很容易想到引理的第三条，因此构造出这样的一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I_n - A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ O & I_n - A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - A^2 & O \\ O & I_n \end{pmatrix}$$

初等变化并不改变矩阵的秩，$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & I_n - A \end{pmatrix} = r(A) + r(I_n - A) = r\begin{pmatrix} A - A^2 & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = r(A^2 - A) + n = n.$

■

命题 2.2 (Sylvester 不等式)

设 A 是 $m \times n$ 的矩阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，求证：

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

♠

证明 考虑同样构造分块阵：

$$\begin{pmatrix} AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & A \\ O & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & O \\ I_n & B \end{pmatrix}$$

因此可得 $r\begin{pmatrix} AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = r(AB) + n = r\begin{pmatrix} A & O \\ I_n & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$

■

注 我们注意到，当 $AB = O$ 时，这个比较特殊：

$$r(A) + r(B) \le n$$

相当于给了我们的一个上界.

将 Sylvester 不等式进行推广.

命题 2.3 (Frobenius 不等式)

证明：$r(ABC) \ge r(AB) + r(BC) - r(B)$

证明 我们已经比较熟悉这个思想了，考虑如下分块构造：

$$\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}$$

可得 $r\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(ABC) + r(B) = r\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix} \ge r(AB) + r(BC)$.

■

真题 2.1 (吉林大学 2013)

设 A 为任意 n 阶实方阵，证明：

1. $r(A'A) = r(A)$
2. 若 $r(A^2) = r(A)$，则对任意的自然数 p，成立 $r(A^p) = r(A)$
3. (拓展) [北师大 2020] 若 A 是 $m \times n$ 实矩阵，b 是 m 维列向量，证明：$A'AX = A'b$ 方程有解

证明

(1): 第一题的结论可以拓展，白皮书的 p151 页，证明：$r(A'A) = r(AA') = r(A)$. 当然第一题和我们的秩不等式没有太大的关系，考虑线性方程组的同解问题来求解这道题。这道题要证明的结论相当于 $Ax = 0, A'Ax = 0$ 同解。注意到任取 α 为 $Ax = 0$ 的解，该解仍然是 $A'Ax = 0$ 的解，因此，解空间 $V_A \subseteq V_{A'A}$. 反之，若任取 α 为 $A'Ax = 0$ 的一组解，我们等式两边同时左乘 α':

$$\alpha' A' A \alpha = 0 \to (A\alpha)' A\alpha = 0$$

记 $A\alpha = (b_1, b_2, \dots, b_m)'$，则可化简为：

$$b_1^2 + b_2^2 + \dots b_m^2 = 0$$

当且仅当每一个分量都是 0，因此该解也是 $Ax = 0$ 的解，$V_{A'A} \subseteq V_A$，两个空间相互包含，因此两个解空间相等，则他们同解，$r(A'A) = r(A)$。用 A' 替换上述等式，得 $r(AA') = r(A') = r(A)$.

(2): 通过 **Frobenius** 不等式和 $r(A) = r(A^2)$ 可知：

$$r(A^3) + r(A) \ge r(A^2) + r(A^2). \to r(A^3) \ge r(A^2)$$

通过这个我们可以立马反应过来，矩阵的乘法会使得秩要么不变，要么变小，因此 $r(A^3) \le r(A^2) \le r(A)$. 所以 $r(A^3) = r(A)$，不断应用 **Frobenius** 不等式，我们可以得到结论 $r(A^p) = r(A)$.

(3): 非齐次线性方程组有解，当且仅当系数矩阵的秩和增广矩阵的秩相等。因此需要证 $r(A'A) = r(A'A, A'b)$.

$$\begin{aligned} r(A'A, A'b) &= r(A'(A, b)) \le r(A') = r(A'A) \\ r(A'A, A'b) &\ge r(A'A) \\ \to r(A'A, A'b) &= r(A'A) \end{aligned}$$

因此一定有解.

■

对于我们前面的理解来说，矩阵越乘越多，秩会越来越小，这种说法不一定严谨，我们已经从上题发现：如

果从二阶相等开始，后面的都是相等的，那如果没有相等，越乘越多的矩阵后面的秩会发生怎样的变化呢。

命题 2.4

设 A 为任意 n 阶方阵，证明：

$$r(A^n) = r(A^{n+1}) = \dots$$

证明 我们用代数的方法证明，几何的版本类似。

根据矩阵秩不等式，即越乘越小可得：

$$n = r(I_n) \geq r(A) \geq r(A^2) \cdots \geq r(A^n) \geq r(A^{n+1}) \geq 0$$

即，我们得到 $n+2$ 个正整数，因为矩阵的秩一定为正整数，这 $n+2$ 个数分布在区间 $[0, n]$ 里面，根据抽屉原理，我们可以得知，一定有两个秩是相等的，则存在正整数 $m \in [0, n]$ 使得 $r(A^m) = r(A^{m+1})$. 对于任意的 $k \geq m$，我们应用 Frobenius 不等式可得：

$$r(A^{k+1}) = r(A^{k-m}A^m A) \geq r(A^{k-m}A^m) + r(A^m A) - r(A^m) \to r(A^{k+1}) \geq r(A^k)$$

并且我们有 $r(A^{k+1}) \leq r(A^k)$，可得 $r(A^{k+1}) = r(A^k)$ 对于任意的 $k \geq m$ 成立.

■

这道题结论很有趣，但也可以用其他的方法证明。

真题 2.2 (SJTU 2022)

设 A 为 n 阶方阵，证明：

1. 若 $A^{n+1} = 0$，则 $A^n = 0$.
2. $r(A^n) = r(A^{n+1})$

证明 我们可以观察到，第一题是第二题的特例，第二题不就是我们刚刚证明的有趣的命题嘛。优先证明第二小问，先证明引理 Frobenius 不等式，再用命题 1.4 的证法，即可得.

■

- 想念时会呼吸的痛，
  它活在我身上所有角落。
  –《会呼吸的痛》

第 3 章 暂时不知道如何归类的题目

内容提要

- 在充满爱的地方永远不会有黑暗.
- *Là où il y a de l'amour,*
- *il n'y aura jamais d'obscurité*

3.1 xx

有些题目的标准解法比较的繁琐，虽容易想到，却给人一种解法不漂亮优美的感觉。下面有几道题的解法很巧妙，简洁，启发思路。

命题 3.1

设 A 是 n 阶方阵，且 A 满足 $A+A'=E$，证明 A 是可逆阵.

证明 证明可逆阵，我们可以考虑齐次线性方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵的秩 $r(A)$，若为满秩，则可逆。我们用反证法，即 $r(A)$ 不是满秩，则有非零解 α 满足 $A\alpha=0$.

因为 α 是非零向量，因此对这个适合 A 的等式，同时左乘 α'.

$$\alpha' A\alpha = 0$$

注意到 $\alpha' A\alpha$ 是一个数，因此转置等于它本身 $\alpha' A'\alpha=0$.

$$0<\alpha'\alpha=\alpha'(A+A')\alpha=0$$

得到矛盾，因此 A 为满秩阵，即 A 可逆.

■

真题 3.1 (北师大 2017)

设 A,B 为 n 阶实矩阵，A 同时为对称矩阵，且矩阵 $AB+B'A$ 正定，求证：A 是非奇异阵.

证明 为什么又没有想到这么漂亮的解法，下次看到非异阵，一定要想着用反证法加解空间的性质。

先给标答，我写的不太一样，它的更漂亮。

反证法：设 A 为奇异阵，则考虑齐次线性方程组 $Ax=0$ 一定有非零解 x_0，已知条件正定，则

$$x_0'(AB+B'A)x_0>0$$
$$0=(Ax_0)'Bx_0+x_0'B'Ax_0>0$$

得到矛盾.

我的解法：利用任意一个矩阵可以分解成一个对称矩阵和一个反对称矩阵.

$$\begin{aligned}\alpha' AB\alpha &= \frac{1}{2}\alpha'\big(AB+(AB)'\big)\alpha+\frac{1}{2}\alpha'\big(AB-(AB)'\big)\alpha\\ \alpha' AB\alpha &=> 0+0\\ \alpha' AB\alpha &> 0\end{aligned}$$

则 AB 正定，于是 $|AB|=|A|\cdot|B|>0 \implies |A|\neq 0$.

■

3.2 判断行列式大于零–介值定理

介值定理对于解决行列式大于零是一种很特别的方法，远比其他方法来的直观且方便（个人感受 > <.）通过几个例子来感受这个深刻的解法.

定理 3.1 (介值定理)

若 $[a,b]$ 是实数域上的闭区间，且 f 是这个区间上的连续函数，则对于任意的 $u \in [a,b]$, 存在最大值 c 和最小值 d 满足：

$$c \le f(u) \le d$$

♡

描述的不太严谨，但一定对实数域上的连续函数成立，可由实数的完整性证明.

命题 3.2

设 A 为 n 阶实对称矩阵，S 为 n 阶实反对称矩阵，证明：$|A+S|>0$.

♠

证明 我们看到实对称矩阵，可以立马想到它的性质：

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n \neq 0, \alpha' A\alpha > 0$.
2. $|A| > 0$.

也就是说我们已知 $|A|>0$，即 $|A+0\cdot S|>0$，要证明只是当 S 前面的系数为 1 的时候，把这个行列式看成函数 $f(t)=|A+t\cdot S|$ 在 $t=1$ 时候的取值恒正。

Step 1：先证明这个函数在 $[0,1]$ 区间内，恒不为 0. 考虑齐次线性方程组 $(A+t\cdot S)x=0$. 用反证法，假设有非零解 $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

$$(A+t\cdot S)\alpha = 0 \to \alpha'(A+t\cdot S)\alpha = 0 \to \alpha' A\alpha + \alpha' t\cdot S\alpha = 0 \to \alpha' A\alpha = 0$$

A 为实对称矩阵，满足 $\alpha' A\alpha = 0$ 当且仅当 $A=0$ 则 $|A|>0$ 矛盾。因此 $|A+t\cdot S|\neq 0$ 在区间 $[0,1]$ 恒成立.

Step 2：证明恒大于 0. $f(t)$ 是关于 t 的连续函数在区间 $[0,1]$ 内恒不为 0，且 $f(0)>0$，因此根据介值定理，$f(t)$ 在 $[0,1]$ 区间内恒大于 0，$f(1)>0$.

■

3.3 解题技巧

有些引理亦或者定理，如果不知道，没见过，那你都不知道，参考答案都看不懂... 补充一些例题，但这些例题最好当作已知的定理来熟知并使用.

行列式求导

数值的行列式是不能求导的，这里我们特别指的是行列式里的元素是带变量的可微函数

记 $A'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$.

引理 3.1

记 $A(t)$ 为 n 阶行列式，且 $a_{ij}(t)$ 是含变量 t 的可微函数. 将 A 列分块，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A(t)| = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_i'(t),\ldots,\alpha_n(t))$$

♡

Lagrange 插值多项式

Lagrange 插值在许多领域都应用广泛，尤其是数值分析。这里我们使用多项式的形式来介绍并使用，参考白皮书 p184 页.

引理 3.2

设 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是数域 $\mathbb{K}$ 中的 $n+1$ 个不同的数，$b_0, b_1, \ldots, b_n$ 是 $\mathbb{K}$ 中的任意 $n+1$ 个数，则必存在 $\mathbb{K}$ 中次数不超过 n 次的多项式 $f(x)$，使得 $f(a_i) = b_i (i = 0, 1, \ldots, n)$. 试将 $f(x)$ 构造出来.

♡

证明 我们认定构造出来的映射是映上的，也就是满射的，现在来构造 $f(x)$.

设 $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ 是标准单位行向量 $(i = 0, \ldots, n)$，且在第 i 位是 1，我们让 $\varphi(f_i) = e_{i+1}$.

$$f_i(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)\cdots\widehat{(x-a_i)}\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)\cdots\widehat{(a_i-a_i)}\cdots(a_i-a_n)},\ \widehat{(x-a_i)}\text{表示没有这一项}.$$

则我们可以易得 $f_i(a_i) = 1, f_i(a_j) = 0 (j \neq i)$.

$$f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \cdots + b_n f_n(x).$$

易验证 $f(a_i) = b_i$.

■

命题 3.3

设 A 是 n 阶方阵且有 n 个不同的特征值，若 B 也是 n 阶方阵且 $AB = BA$，求证：存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$，使得 $B = f(A)$.

♠

证明 我们需要先知道一个引理，这个引理将会在对角化这一小节中证明：A, B 都是 n 阶方阵，若 A 可对角化，且 $AB = BA$，则 A, B 可同时对角化.

设 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，$B$ 的全体特征值为 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

用上面的引理，我们可知，存在可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

我们由上面的引理可知，存在次数小于 $n-1$ 的 Lagrange 插值多项式使得 $f(\lambda_i) = \mu_i$，

$$P^{-1}BP = f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

■

Moore-Penrose 广义逆

有了奇异值分解，我们就可以定义一个非方阵的广义逆，对于一些问题的解决有着特别神奇的作用。

简单的写一个广义逆的定义：

定义 3.1 (Moore-Penrose 广义逆)

设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，则存在唯一的 $n \times m$ 的矩阵 $A^\dagger$ 满足如下条件：

1. $AA^\dagger A = A$.
2. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.
3. $AA^\dagger$ 和 $A^\dagger A$ 都是实对称矩阵.

♣

这是白皮书 p500 页的定义，我们还有其特别有用的性质：

1. $(AA^{\dagger})' = AA^{\dagger}$.
2. $(A^{\dagger}A)' = A^{\dagger}A$.

让我们来回忆北师大的一道真题. 上面有过。

真题 3.2 (北师大 2020)

若 A 是 $m \times n$ 实矩阵，b 是 m 维列向量，证明：$A'AX = A'b$ 方程有解.

证明 我们当时用了非常常用的性质，考虑增广矩阵与系数矩阵的秩相等必有解，再用结论 $r(A') = r(A'A)$ 即可得.

这里我们可以看出解 $X = A^{\dagger}b$.

然后验证即可：

$$\begin{aligned}
A'AX &= A'AA^{\dagger}b \\
&= A'(AA^{\dagger})'b \\
&= A'(A^{\dagger})'A'b \\
&= (AA^{\dagger}A)'b \\
&= A'b
\end{aligned}$$

■

Kronecker 积与 Vectorization 向量化

Kronecker 积是一个比较高级的技巧，虽然还会有其他的解法，但用 Kronecker 积则会比较简便和优美，ZJU 也没什么考试大纲，有什么就学什么吧.>.<.

Kronecker 积是一个重要的概念，几何意义是两个线性映射张量积的表示矩阵，因此 $\otimes$ 也读作 Tensor. 没错，就是我们深度学习中的那个张量.

定义 3.2 (Kronecker Product)

设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 矩阵，$B = (b_{ij})$ 为 $k \times l$ 矩阵，定义他们的 Kronecker 积为一个 $mk \times nl$ 矩阵：

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

我们给出 Kronecker 积的一些基本性质：

命题 3.4

假设矩阵加法和乘法都是有意义的.

(1) $(A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$.

(2) $(kA) \otimes B = k(A \otimes B) = A \otimes (kB)$.

(3) $(A \otimes C) \cdot (B \otimes D) = (A \cdot B) \otimes (C \cdot D)$.

(4) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

(5) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$,

(6) $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$.

(7) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

(8) $|A \otimes B| = |A|^n |B|^m$.

上面比较常用的是 (3) 以及 (8). 然后我们利用基本性质证明简单的命题：

命题 3.5

(1) $tr(A \otimes B) = tr(A) \cdot tr(B)$.

(2) $r(A \otimes B) = r(A) \cdot r(B)$.

证明 (1).$tr(A \otimes B) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot tr(B) = tr(A) \cdot tr(A)$.

(2). 设 $r(A) = r, r(B) = s$，则存在可逆阵 P_1, Q_1, P_2, Q_2 使得：

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是我们有：

$$(P_1 \otimes P_2) \cdot (A \otimes B) \cdot (Q_1 \otimes Q_2) = (P_1 A Q_1) \otimes (P_2 B Q_2) = \begin{pmatrix} I_{rs} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

■

注

- 和矩阵乘法一样，一般来说 $A \otimes B \neq B \otimes A$.
- 我们熟知迹的线性，即有加号的我们可以拆开，现在对于带有 Kronecker 积的来说，积也有可以分别拆开的性质。

定义 3.3 (Vectorization 向量化)

若 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶矩阵，则：

$$vec(A) = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})'$$

我们把这个称为 A 的向量化 (vectorization).

我们介绍向量化的几个基本性质：

命题 3.6

(1) $vec(aA + bB) = a \cdot vec(A) + b \cdot vec(B)$.

(2) $tr(A'B) = vec(A)'vec(B)$.

(3) $vec(ab') = b \otimes a$.

(4) $vec(Axy'B) = (B' \otimes A)vec(xy')$.

(5) $vec(ABC) = (C' \otimes A)vec(B)$.

证明 (1). 显然易得.

(2). 我们回忆一下 $tr(AB)$ 的双重求和号写法 (插入一个指标):

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}.$$

于是 $tr(A'B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki} = vec(A)'vec(B)$.

(3). 秩为 1 的矩阵，可以分解为 ab' 的形式，也可以理解为将 a 复制 b 次，将他们向量化排列等价于 $b \otimes a$.

(4). $vec\left((Ax) \cdot (B'y)'\right) = (B'y) \otimes (Ax) = (B' \otimes A) \cdot (y \otimes x) = (B' \otimes A) \cdot vec(xy')$.

(5). 将 B 按列向量分块，$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

$$
\begin{aligned}
vec(ABC) &= vec(A\sum_{i=1}^{n} b_i e_i' C) \\
&= vec(\sum_{i=1}^{n} A b_i e_i' C) \\
&= \sum_{i=1}^{n} vec(A b_i e_i' C) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (C' \otimes A) vec(b_i e_i') \\
&= (C' \otimes A) vec(B).
\end{aligned}
$$

■

注 第五条是特别重要的一条性质，它意味着可以取出中间的夹心，拿出重要的，把边角料扔到外面.

有了这两个厉害的工具，我们就能优雅的解决一些题目，例如 $AXB, AX-XB$ 类型的题目了.

命题 3.7 (夹心方程)

设未知矩阵变量为 X, 则矩阵方程 $AXB=C$ 有且仅唯一解当且仅当 A,B 为可逆矩阵.

证明 两边同时取 vec 可得：

$$
vec(AXB) = vec(C) \implies (B' \otimes A) vec(X) = vec(C).
$$

当且仅当 A,B 可逆时，有

$$
(A \otimes B) \cdot (A^{-1} \otimes B^{-1}) = I_n \otimes I_m = I_{mn}.
$$

于是

$$
vec(X) = \left((B^{-1})' \otimes A^{-1}\right) \cdot vec(C).
$$

■

真题 3.3 (川大 2014)

设 A,B 是 n 阶实方阵，记 $\mathbb{R}$ 上矩阵方程 $AX+XA=B$ 为 $(*)$. $B\neq 0$，则 $(*)$ 有解，证明：存在 $(*)$ 的解 $X_1, X_2, \ldots, X_s$，使得对 $(*)$ 的任意解 X，都有 $X=\sum_{i=1}^{s} k_i x_i, k_i \in \mathbb{R}, \sum k_i = 1$.

证明 川大的高代题目，每年都是一眼难尽... 孩子都被难哭了，还在难。虽然这道题用 Kronecker 积和向量化再了解非齐次线性方程组的解空间是一个线性流形还是好做的，好做的，好做的 (:D)...

先回忆一下非齐次线性方程的解：

对于这个矩阵方程两边同时取 vec.

$$
\begin{aligned}
vec(AXI_n) + vec(I_n XA) &= vec(B) \\
(I_n \otimes A) \cdot vec(X) + (A' \otimes I_n) \cdot vec(X) &= vec(B) \\
(I_n \otimes A + A' \otimes I_n) \cdot vec(X) &= vec(B)
\end{aligned}
$$

第 4 章 线性空间

内容提要

- 有了一些增加或减少，
- 或在上面添加一点或拿走一点，
- 人们在第一眼还是会说大小没变。
- – $\mathscr{E}uler$.

线性空间的题目大多都比较的抽象，尤其是构造的题目，一般我都做的比较差的，所以总结也颇少，暂时写不了的，都用矩阵来写，也不算取巧吧，理解不到位，还不能灵活运用，多做题思考吧。谢启鸿老师说过：几何的题目，你得自己想清楚它的每一步，不能想当然就这样。

先介绍两个重点的内容：无限域上的线性空间，是不能被它的有限个真子空间给覆盖的。

命题 4.1 (有限子覆盖)

设数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间 V 不能被它的有限个真子空间覆盖，即不存在真子空间 $V_1, V_2, \ldots, V_m$ 使得 $V \subseteq V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_m$.

证明 证明不存在，用反证法方便，假设存在这样的真子空间 $V_1, V_2, \ldots, V_m$ 使得 $V \subseteq V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_m$，则我们找矛盾，即 V 中有向量不在这些真子空间的并集里面即可.

设 V 中的一组基为 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$，则

$$\alpha_k = e_1 + ke_2 + \cdots + k^{n-1}e_n$$

然后得到一组无穷的向量集 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$，从中任取 n 个向量，则根据 Vandermonde 行列式可知，这些向量线性无关，是 V 中的一组基，而 $V_1, \ldots, V_m$ 只能包含有限个向量，从而无穷多个 α_k 不能被覆盖，与假设矛盾.

■

第 5 章 对角化

内容提要

- Schur 引理
- Cayley-Hamilton 定理
- Jordan-Chevalley 定理
- Vose 分解
- 相似标准型
- 极小多项式
- Jordan 标准型

我们在线性映射里学习到，表示阵不依赖基向量的选取，因为他们都是相似的关系，那么如何找到一组特别的基向量，让表示阵在这组基下形式特别简单。所以矩阵相似在高等代数的考试中占比特别大，是很重要的内容，仔细参考白皮书和高等代数典型问题与方法两本书，梳理了特别重要的定理和典型例题来更好的理解这块内容.

5.1 基本定理梳理

定理 5.1 (Schur 引理)

任意方阵必复相似于一个上三角阵.

证明 对矩阵的阶数 n 进行归纳，当 $n=1$ 时，显然成立.

假设小于 n 时成立，下面证明等于 n 时也成立.

设 λ 是 A 的一个特征值，则存在非零向量 α_1，使得

$$A\alpha_1 = \lambda\alpha_1$$

将 α_1 扩充为 $\mathbb{C}_n$ 上的一组基，按照列分块为 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，因此 P 是非异阵，且

$$\begin{aligned}AP &= (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n)\\ &= (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda & * \\ O & A_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 A_1 是一个 $n-1$ 阶方阵，注意到 P 非异，则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda & * \\ O & A_1\end{pmatrix}$$

由归纳假设可知，存在一个非异阵 Q，使得 $Q^{-1}A_1Q$ 为上三角阵.

令 $R=\begin{pmatrix}1 & O \\ O & Q\end{pmatrix}$，且 Q 可逆，分块对角阵的逆就是各分块的逆. 我们可以得

$$\begin{aligned}R^{-1}P^{-1}APQ &= \begin{pmatrix}1 & O \\ O & Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & * \\ O & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & O \\ O & Q\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda & * \\ O & Q^{-1}A_1Q\end{pmatrix}\end{aligned}$$

这是一个上三角阵.

■

5.2 Cayley-Hamilton 定理

Cayley-Hamilton 定理是高等代数中特别重要的内容，我们介绍它的基本应用以及可以巧妙的解决很多问题.

定理 5.2 (Cayley-Hamilton 定理)

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵，$f(x)$ 是 A 的特征多项式，则 $f(A)=O$.

证明 由 Schur 引理可知，矩阵 A 必定复相似一个上三角阵，即存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，B 为上三角阵，特征多项式是相似关系下的不变量，因此 A 和 B 具有相同的特征多项式. 则 $f(B)=O$.

$$\begin{aligned}f(A)&=f(PBP^{-1})\\&=Pf(B)P^{-1}\\&=O.\end{aligned}$$

■

在介绍应用之前，我们先介绍一个引理. 虽然不放在专门的一个章节，但也是很重要的内容，对于 $AB=BA$ 这一类矩阵，拿到这样的条件我们称为可交换性。但如果不是这样的条件，而是 $AX=XB$，出来的却是 B，可以把这样的性质称为亚交换性，就和正定性和亚正定性一样。

命题 5.1

设 A,B,C 分别是 $m\times m,n\times n,m\times n$ 的矩阵，已知 $AC=CB$，C 的秩等于 r. 求证：A 和 B 至少有 r 个相同的特征值.

证明 从特殊到一般.

Step 1：假设 C 为 $C=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$，则

$$AC=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&O\end{pmatrix},\quad CB=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{21}\\O&O\end{pmatrix}$$

因为 $AC=CB$，于是 $A_{11}=B_{11}$，两个 r 阶矩阵一模一样，所以至少有 r 个相同的特征值.

Step 2：假设 C 为一般的矩阵，则一定存在可逆阵 P,Q，使得 $PCQ=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}$. 则

$$AC=AP^{-1}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q^{-1},\quad CB=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q^{-1}B$$

$$(PAP^{-1})\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}(Q^{-1}BQ)$$

令 $A^*=PAP^{-1},B^*=Q^{-1}BQ$，则是我们上面证明过的结论。因此，$A^*$ 和 B^* 至少有 r 个相同的特征值，因此 A 和 B 有至少 r 个不同的特征值.

■

命题 5.2

设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，求证：若 A,B 无公共特征值，则矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

证明 *Methods I: Cayley-Hamilton*

设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$，则

$$O=f(A)X=Xf(B)$$

我们需要证明 $f(B)$ 可逆即可左右两边同时消去.

设 B 的所有特征值为 $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s$，则 $f(B)$ 的所有特征值为 $f(\mu_1),f(\mu_2),\ldots,f(\mu_s)$, 且 A,B 无公共的特征值，则 $f(\mu_1)\neq 0,f(\mu_2)\neq 0,\ldots,f(\mu_s)\neq 0$，则 $f(B)\neq 0$，$f(B)$ 是可逆的，因此 $X=0$.

Methods II: 用到我们上面的命题.

假设 C 为矩阵方程 $AX=XB$ 其中一个解，若 $C\neq 0$，则 $r(C)\geq 1$，由命题可知，A 和 B 至少有 r 个相同的特征值，与题目中没有公共的特征值矛盾，因此 $C=0$，即这个矩阵方程只有零解.

■

下面是这个重要结论的应用，如果不知道的话，那做起来会很麻烦.

真题 5.1 (CMC)

设 A 为 n 阶方阵，其 n 个特征值皆为偶数，试证明关于 X 的矩阵方程：$X+AX-XA^2=0$ 只有零解. ♣

证明 化简 $(A+I)X=XA^2$，则若 $A+I$ 和 A^2 无公共特征值即可.

A 的特征值皆为偶数，因此 $A+I$ 的特征值都是奇数，A^2 的特征值都是偶数 (上三角化即可)，因此无公共的特征值，则这个矩阵方程只有零解.

■

命题 5.3

设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，证明：矩阵方程 $AX-XB=C$ 有唯一解. ♠

证明 构造一个同构映射：

$$\begin{aligned}\varphi:\ M_{m\times n}(\mathbb{K}) &\to M_{m\times n}(\mathbb{K})\\ X\quad &\mapsto AX-XB\end{aligned}$$

$AX-XB=O\iff X=O$，即 $Ker\,\varphi=O$，是单射，且映射是线性同构，因此该线性映射是满射，所以存在唯一解 C.

■

5.3 可交换性

两个矩阵有公共的特征向量与矩阵乘法的可交换性有着密切的联系，这个问题和同时上三角化 (对角化) 有着类似的思想. 不变子空间是解决这类问题的常用方法，我们通过题目来熟悉并掌握它.

AB 可交换的一些简单的结论:

1. AB 可交换 $\implies$ 至少有一个公共的特征向量.
2. AB 可交换 $\implies$ 至少有一个公共的特征向量 $\implies$ A,B 可同时化为上三角.
3. AB 可交换，且 A,B 都可对角化 $\implies$ A,B 可同时对角化.

我们先证明重要的引理.

引理 5.1 (限制的可对角化)

设 $\varphi\in\mathscr{L}(V_{\mathbb{C}}^n)$，且 V_0 是 φ-不变子空间，若 φ 可对角化，则 $\varphi|_{V_0}$ 也可对角化. ♡

证明 设 φ 的极小多项式为 $m(\lambda)$，$\varphi|_{V_0}$ 的极小多项式为 $g(\lambda)$.

$$m(\varphi|_{V_0})=m(\varphi)|_{V_0}=0$$

则 $g(\lambda)|m(\lambda)$，且 φ 可对角化 $\implies m(\lambda)$ 无重根.

因此 $g(\lambda)$ 无重根 $\implies \varphi|_{V_0}$ 也可对角化.

■

注 我们可以容易理解到，只要 φ 可对角化，则限制在任意一个它的不变子空间上也可以对角化.

引理 5.2 (可交换的不变子空间)

设 $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(V_{\mathbb{C}}^n)$，且 φ, ψ 可交换，即 $\varphi\psi = \psi\varphi$. 设 φ 的不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，$V_i$ 是特征值为 λ_i 的特征子空间，证明：V_i 是 ψ-不变子空间. ♡

证明 对于任意的 $x \in V_i$，我们有

$$\varphi\big(\psi(x)\big) = \psi\varphi(x) = \psi(\lambda_i x) = \lambda_i \cdot \psi(x)$$

则 $\psi(x) \in V_i$，因此 V_i 是 ψ-不变子空间.

■

注 这个引理则告诉我们，对于可交换的线性变换，则任意一个的特征子空间一定是这两个线性变换的不变子空间.

命题 5.4 (公共特征向量)

设 ϕ, φ 是复线性空间 V 上的可交换的线性变换，即 $\varphi\psi = \psi\varphi$，求证：
φ, ψ 至少有一个公共的特征向量. ♠

证明 由代数学基本定理可知，维数大于零的复线性空间至少有一个特征值和特征向量，任取 φ 一个特征值 λ_0 和它对应的特征向量 α_0，设 V_0 是属于特征值 λ_0 的特征子空间，且是 φ-不变子空间

$\forall x \in V_0$，有

$$\varphi\big(\psi(x)\big) = \psi\varphi(x) = \psi(\lambda_i x) = \lambda_i \cdot \psi(x)$$

则 $\psi(x) \in V_0$，所以 V_0 也是 ψ-不变子空间，将 ψ 限制在 V_0 上，V_0 是维数大于零的复线性空间，故 $\psi|_{V_0}$ 至少有一个特征值 μ_0 和对应的特征向量 α_0，因此 α_0 是 φ, ψ 共有的特征向量.

■

命题 5.5 (同时上三角化)

若 A, B 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵，且 $AB = BA$，假定 A, B 的特征值都在数域 $\mathbb{K}$ 中，求证：存在 $\mathbb{K}^n$ 上的可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 都是上三角阵. ♠

证明 对矩阵的阶数 n 进行归纳，当 $n = 1$ 时，显然成立

假设小于 n 时成立，下面证明等于 n 时也成立.

由上面的命题可知，当矩阵 AB 可交换，则至少存在一组公共的特征向量，设一组公共的特征向量为 e，对应的特征值为 λ_1, μ_1，于是有

$$Ae = \lambda_1 e, \quad Be = \mu_1 e.$$

将这个特征向量扩充为 $\mathbb{K}^n$ 中的一组向量 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$,把他们拼成形式行向量的形式,记作 $P = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$,满足

$$AP = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_1 \end{pmatrix}, \quad BP = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ & B_1 \end{pmatrix}$$

注意到 P 为非异阵，则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_1 \end{pmatrix}$,$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ & B_1 \end{pmatrix}$.

因为 $AB=BA$，我们需要 $A_1B_1=B_1A_1$，通过简单验证可知，成立：

$$AB=P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ & A_1\end{pmatrix}(P\cdot P^{-1})\cdot\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ & B_1\end{pmatrix}\cdot P=P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ & A_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ & B_1\end{pmatrix}\cdot P$$

$$BA=P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ & B_1\end{pmatrix}(P\cdot P^{-1})\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ & A_1\end{pmatrix}\cdot P=P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ & B_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ & A_1\end{pmatrix}\cdot P$$

$$AB=BA\implies\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & * \\ & A_1B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\lambda_1 & * \\ & B_1A_1\end{pmatrix}$$

则 $A_1B_1=B_1A_1$，由归纳假设可知 A_1,B_1 可同时上三角化，即存在可逆阵 Q. 令 $R=P\begin{pmatrix}1 & O \\ O & Q\end{pmatrix}$.

$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ & Q^{-1}A_1Q\end{pmatrix}$$

$$R^{-1}BR=\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ & Q^{-1}B_1Q\end{pmatrix}$$

■

命题 5.6 (同时对角化)

设 A,B 是 n 阶矩阵，若 A 有 n 个不同的特征值，且 $AB=BA$，求证：B 相似于对角矩阵.

证明 *Methods I:* 代数

A 有 n 个不同的特征值，存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，根据 $AB=BA$ 可得：

$$P\cdot diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}\cdot P^{-1}B=B\cdot P\cdot diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}\cdot P^{-1}$$

$$diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}P^{-1}\cdot BP=P^{-1}BP\cdot diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$$

则我们得到 $P^{-1}BP$ 与 $diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ 可交换，于是不妨设 A 是 $diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$，

$$diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}\cdot B=B\cdot diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$$

对比元素可知，B 一定是一个对角阵，于是，可知，$P^{-1}BP$ 为对角阵，即相同的 P 使得他们同时对角化.

■

5.4 对角化 1：极小多项式无重根的应用

命题 5.7 (极小多项式是相似关系的不变量)

A,B 都是 n 阶方阵，且 A 相似于 B，则他们有相似的极小多项式.

证明 设 A 的极小多项式为 $m_A(\lambda)$,B 的极小多项式为 $m_B(\lambda)$. 且 A 与 B 相似,则存在可逆阵 P,使得 $A=P^{-1}BP$

$$\begin{aligned}m_A(A)=m_A(P^{-1}BP)&=P^{-1}\,m_A(B)\,P=0\\ &\implies m_B|m_A\\ m_B(B)=m_B(PAP^{-1})&=P\,m_B(A)\,P^{-1}=0\\ &\implies m_A|m_B\end{aligned}$$

因此 $m_A=m_B$.

■

命题 5.8

设 A 适合 $A^2 = I_n$，则 A 必可对角化.

我们给出两种证法，第二种为极小多项式证法，之所以写第二条，来对比体现出其简洁性。

证明 *Methods I:*

由已知我们可以得到 A 适合多项式 $f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$，则 A 的任意特征值 λ 也适合该多项式，解得 $\lambda = 1, \lambda = -1$(不计重数). 则 $\lambda = 1$ 时，特征子空间为 $V_1 = Ker(A - I_V)$，当 $\lambda = -1$ 时，特征子空间为 $V_2 = Ker(A + I_V)$.

下面证明一个引理：设 $f_1(x), f_2(x)$ 为数域 $\mathbb{R}$ 上的互素多项式，φ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，且满足 $f_1(\varphi)f_2(\varphi) = 0$，则 $V = V_1 \oplus V_2$，$V_1 = Kerf_1(\phi)V_2 = Kerf_(\varphi)$.

$f_1(x), f_2(x)$ 互素 $\implies \exists u(x), v(x) \in R[x], s.t.,$

$$f_1(x) \cdot u(x) + f_2(x) \cdot v(x) = 1, \text{令 } x = \varphi \text{ 可得}$$

$$f_1(\varphi) \cdot u(\varphi) + f_2(\varphi) \cdot v(\varphi) = I_V \quad (*)$$

$\forall \alpha \in V$，左右同时作用 α,

$$f_1(\varphi) \cdot u(\varphi)(\alpha) + f_2(\varphi) \cdot v(\varphi)(\alpha) = \alpha,$$

注意到 $f_1(\varphi)u(\varphi) \in Ker\, f_2(\varphi)$，$f_2(\varphi)v(\varphi) \in Ker\, f_1(\varphi)$，且 α 是任意的，则

$$V = V_1 + V_2$$

任取 $\beta \in Ker\, f_1(\varphi) \bigcap f_2(\varphi)$，两边同时作用 β 在 $*$ 中.

$$u(\varphi) \cdot f_1(\varphi)(\beta) + v(\varphi) f_2(\varphi)(\beta) = \beta$$

$$0 + 0 = \beta,$$

因为 β 是任取的，所以 $Ker\, f_1(\varphi) \bigcap Ker\, f_2(\varphi) = 0$，则 $V = V_1 \oplus V_2$.

我们注意到，$f(x) = x^2 - 1 = h(x) \cdot g(x), h(x) = x - 1, g(x) = x + 1$，且 $\big(h(x), g(x)\big) = 1$，我们把矩阵 A 视作线性变换，即可得 $g(A)h(A) = 0$，就是我们证明的引理。因此全空间可以分解为：

$$V = V_1 \oplus V_2$$

即所有的特征子空间的直和为全空间 $\implies A$ 可对角化.

Methods II:

由已知我们可以得到 A 适合多项式 $f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$，则 A 的任意特征值 λ 也适合该多项式，即 $f(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$，设 A 的极小多项式为 $m(\lambda)$，由极小多项式的性质可得：$m(\lambda)|f(\lambda)$，且 $f(\lambda)$ 无重根，则 $m(\lambda)$ 无重根，则根据极小多项式无重根可知 A 必可对角化.

■

真题 5.2 (ZJU 2007)

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 5A + 6E = 0$，其中 E 是单位矩阵，证明：

A 相似于对角矩阵. 如果 A 的行列式等于 $2^m 3^{n-m} (0 < m < n), m$是正整数. 求与 A 相似的一个对角阵.

证明 由上面一题的经验，我们可以直接秒杀这道题，矩阵 A 适合多项式 $f(x) = x^2 - 5x + 6$，则特征值也适合这个多项式，$f(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

设矩阵 A 的极小多项式为 $m(x)$，则 $m(\lambda)|f(\lambda)$，易得多项式 $f(\lambda)$ 无重根，则 A 的极小多项式 $m(x)$ 也没有重根，可以推出 A 可对角化.

由前面的引理可知，行列式是相似关系下的不变量，存在可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP = B$$

B 是对角阵，则 $|A|=|B|$，因此其中一个相似的对角阵为: $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 3 \end{pmatrix}$，其中 m 个 2，$n-m$ 个 3.

■

命题 5.9

设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵，$M=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，求证：若 M 可对角化，则 A,B 均可对角化.

两种证法，白皮书上 p295 用完全特征向量系较为繁琐，这里用极小多项式更简洁。

证明 设 M 的极小多项式为 $m(\lambda)$，则

$$0=m(M)=\begin{pmatrix} m(A) & * \\ O & m(B) \end{pmatrix}$$

从而 $m(A)=0,m(B)=0$，则利用极小多项式的性质：极小多项式整除任何矩阵适合的多项式.

$$m_A(\lambda)|m(\lambda) \quad m_B(\lambda)|m(\lambda)$$

再由对角化的充要条件，M 可对角化，则 M 的极小多项式 $m(\lambda)$ 无重根，$m_A(\lambda),m_B(\lambda)$ 也无重根 $\Longrightarrow$ A,B 均可对角化.

■

第 6 章 二次型与内积空间

内容提要

- ❑ 正定型与正定阵
- ❑ 同时合同三角化
- ❑ 实对称矩阵的正交相似标准型
- ❑ 实正规阵的正交相似标准型

6.1 基本定理梳理

6.2 同时合同对角化

我们在可交换性那边，介绍过可同时上三角化，对角化，可他们的要求都是需要交换性，在实对称这边，我们还有类似可交换性那边一样的结论，相当重要，需要像定理一样铭记在心.

引理 6.1 (同时合同对角化)

设 A 是 n 阶正定实对称阵，B 是同阶实对称阵，求证：必存在可逆阵 C 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

其中，$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是矩阵 $A^{-1}B$ 的特征值.

♡

证明 A 是正定实对称，则存在可逆阵 P，使得 $P'AP = I_n$，根据前面的引理可以知道 $P'BP$ 也为实对称阵，则存在正交阵 Q，使得 $Q'PBPQ = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

令 $C = PQ$，那么

$$C'(\lambda A - B)C = \lambda I_n - C'BC = diag\{\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \ldots, \lambda - \lambda_n\}$$

因此 λ_i 是 $|\lambda A - B|$ 的根，A 可逆，则 λ_i 也是 $|\lambda I_n - A^{-1}B|$ 的根.

■

命题 6.1

设 A 是 n 阶实对称矩阵，B 是同阶半正定阵，求证：

$$|A + B| \geq |A| + |B|$$

等号成立的充要条件为 $B = O$.

♠

证明 由上面的引理可知，存在可逆阵 P，使得 $P'AP = I_n, P'BP = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为 $A^{-1}B$ 的特征值. 由 B 是半正定阵可知，$\lambda_i \geq 0$.

$$\begin{aligned}
|P'||(A+b)||P| = |P'(A+B)P| = |P'AP + P'BP| &= |I_n + diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}| \\
&= (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n) \\
&\geq 1 + \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \\
&= |P'|(|A| + |B|)|P|
\end{aligned}$$

■

真题 6.1 (电子科大 2021)

已知矩阵 A, B 均为 n 阶正定阵.

1. 证明：$A + 2021B$ 也为正定阵.
2. 证明：$|A + 2021B| > |A|$.

证明 (1). A, B 均为正定阵... 很好证明，我们用正定阵的性质，对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}^n \neq 0$，只要证明左乘右乘恒大零即可.

$$\alpha'(A + 2021B)\alpha = \alpha' A\alpha + 2021\alpha' B\alpha > 0.$$

(2). 用刚才的引理，存在可逆阵 P，使得 $P'AP = I_n, P'BP = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为 $A^{-1}B$ 的特征值. 且 $A^{-1}B$ 仍为正定阵，因此这些特征值全部都大于 0.

$$\begin{aligned}
|P'||(A + 2021B)||P| = |P'(A + 2021B)P| = |P'AP + 2021P'BP| &= |I_n + 2021diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}| \\
&= (1 + 2021\lambda_1)(1 + 2021\lambda_2)\cdots(1 + 2021\lambda_n) \\
&> 1 \\
&= |P'AP| \\
&= |A|
\end{aligned}$$

■

6.3 同时合同标准化 (正交标准型)

正规阵有着正交相似标准型，特别地，在反对称阵和正交阵使用的较多。我们介绍重要的同时合同标准化.

- 正定实对称阵 + 实对称阵 $\Longrightarrow$ 同时合同对角化.
- 正定实对称阵 + 实反对称阵 $\Longrightarrow$ 同时合同标准化 (正交标准型).

引理 6.2 (同时合同标准化)

设 A 为 n 阶正定实对称阵，S 实同阶实反对称阵，则存在可逆阵 C，使得

$$C'AC = I_n, C'BC = diag\left\{\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right\},$$

其中 $b_1, \ldots, b_r$ 为非零实数.

证明 A 为正定阵，则存在可逆阵 P，使得 $P'AP = I_n$，且 $p'BP$ 仍为实反对称阵，于是存在正交阵 Q，使得 $Q'(P'AP)Q = diag\left\{\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right\}$ 为正交相似标准型，$b_1, \ldots, b_r$ 为非零实数，且 $Q'(P'AP)Q = I_n$.

令 $C = PQ$ 即可.

■

第 7 章 每日一题 CMC

内容提要

- The summer has ended, and we are not saved.
- 夏天已过，我们还未得救.
- –《橘子不是唯一的水果》

总所周知，一个数学系的学生，不会做题，那岂不是丢大脸了，写不出来是一回事，没有思路是另一回事，鉴于没有参加过 CMC，又是大四阶段的数学学院学生，就得多写...ZJU 除了出原创题，还特别喜欢 CMC 的题目.

Day 1

真题 7.1 (CMC 1)

设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 为线性空间 $(n>0)$, f,g 是 V 上的线性变化，如果 $fg-gf=f$. 证明：f 的特征值都是 0，且 f,g 有公共的特征向量.

证明 *Methods I:* 代数-几何混杂

随意选取一组基，则 f,g 在这组基下的表示矩阵为 A,B，则条件可转化为 $AB-BA=A$.

要证明所有的特征值都是 0，我们首先想到设出所有的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$. 那么特征值的和也是 0，因此考虑用迹的性质.

$$tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(AB)=tr(A)=0.$$
$$tr(A^kB-A^{k-1}BA)=tr(A^kB)-tr(AA^{k-1}B)=tr(A^k)=0.$$

这里我们用到了迹的性质：$tr(AB)=tr(BA)$，可是在三个及三个以上的时候我们得注意交换的次序 $tr(ABC)=tr(CAB)=tr(BCA)$，注意到这里是错排，也就是都不能在自己原来的位置上.

于是我们有了 $tr(A)=tr(A^k)=\sum_{i=1}^n\lambda_i=\sum_{i=1}^n\lambda_i^k=0$.

考虑 Newton 公式，

$$\begin{aligned}&k\le n-1,\\ &\qquad s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^k k\sigma_k=0.\\ &k\ge n\quad,\\ &\qquad s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^n s_{k-n}\sigma_n=0.\end{aligned}$$

于是：$\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n=0$.

将 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 看作某个 n 次方程的根. 则

$$f(\lambda)=\lambda^n-\sigma_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_s=\lambda^s.$$

则方程为 $\lambda^n=0$，当且仅当 $\lambda_i=0$，即所有 A 的特征值为 0.

$\forall\alpha\in Ker\,f$，则 $fg(\alpha)-gf(\alpha)=f(\alpha)$，得出 $f\big(g(\alpha)\big)=0$，即 $g(\alpha)\in Ker\,f$，所以 $Ker\,f$ 为 $g-$ 不变子空间，则可以做限制，$g|_{Ker\,f}$ 一定有特征向量，因为是在复数域上，从而 f,g 有公共的特征向量.

其实这题可以用完全的几何方法，比代数简单一些，至少不用背 Newton 公式了是不是。

Methods II: 几何

任取 λ_0 为 f 的任一一个特征值，V_0 为对应的特征子空间。此时 $\forall\alpha\in V_0$，我们都有：

$$fg(\alpha)-gf(\alpha)=f(\alpha)$$
$$f\big(g(\alpha)\big)-\lambda_0 g(\alpha)=\lambda\alpha$$

■

- 如果没有天赋，你还会继续你最热爱的那件事吗？
- 以前豆瓣给我印象很深的地方在于，豆瓣以外的地方，人们只会问你“有用吗”“电影院能看吗”，可是豆瓣的友邻会说“要继续下去啊”“期待你的新作”

第 8 章 每日真题总结

内容提要

- 很长一段时间,我的生活看起马上就要开始了,真正的生活。
- 但是总有一些障碍阻挡着,有些事情得先解决,有些工作还有待完成,事件貌似够用,还有一笔债务要去付清,然后生活就会开始。
- 最后我终于明白,这些障碍,正是我的生活.

专题题目好像很多类似写过，但一下子汇总的时候就懵了，看到有些题目慌了手脚，明明写到过，仔细回想一下就能想出来，却思绪被堵着，做做真题很有必要，适当总结，哪些还有遗漏。

Day1

真题 8.1 (苏大 2022)

设 A, B 分别为 $s\times k$ 和 $k\times n$ 阶矩阵，X 为 n 维列向量，记 $V=\{BX\,|\,ABX=0\}$. 证明：

$$dim\,V = r(B) - r(AB)$$

♣

证明 当时看到这个思路很乱，某公众号上的解法过于繁琐，这里我们考虑代数学引论书上的一道习题：

A, B 为线性空间 V 上的线性变换，求证：

$$r(A) = r(BA) + dim\,(Im\,A \cap Ker\,B).$$

$$\begin{aligned} V \xrightarrow{A} V, V \xrightarrow{B} V \\ x \longmapsto Ax, x \longmapsto Bx \end{aligned}$$

线性变换是存在复合的，于是我们考虑这两个进行复合.

$$\begin{aligned} V \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} V \\ x \longmapsto Ax \longmapsto BAx \end{aligned}$$

于是有关 B 的映射，我们可以做限制，$Im\,A \xrightarrow{B'} B$，$B' = B|_{Im\,A}$.

根据维数公式：

$$dim\,Im\,A = dim\,Im\,B' + Ker\,B'$$

$$\begin{aligned} Im\,B' = Im\,BA \\ Ker\,B' = Ker\,B \cap Im\,A \end{aligned}$$

于是得证.

回到我们这题，把 A, B 看错线性映射，于是题目要证明的即 $V = Ker\,A \cap Im\,B$.

根据上面的引理，将 A, B 换个位置即得：

$$r(B) = r(AB) + dim\,V$$

■

注 当线性映射可以复合的时候，碰到 $\cap$ 则需要考虑限制的映射，再用维数公式.

真题 8.2 (苏大 2022)

若对 n 阶方阵 A，存在正整数 k，使得 $A^k=O$，则称 A 为幂零矩阵.

1. 证明：A 是幂零矩阵的充要条件是 A 的特征值全为 0.
2. 若 A 不可逆也不幂零，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$，其中 B 为可逆矩阵，C 为幂零矩阵.

♣

证明 第一题为常见结论，第二题是 Jordan-Chevally 分解的另一种变形。

(1). 先证明必要性：

设 A 的任一特征值为 λ, 可以看出 A 适合多项式 $f(x)=x^k$，则 $f(A)=A^k=0$，A 的任一特征值也得适合这个多项式，即 $f(\lambda)=\lambda^k=0$，解得 $\lambda=0$，这里的 λ 是任意取的，因此 A 的所有特征值都是 0.

充分性：

Methods I: Cayley-Hamilton

设 A 的全体特征值都为 0，则 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n$，根据 Cayley-Hamilton 定理，$f(A)=A^n=0$.

Methods II: Jordan 标准型

存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$，J 为 A 的 Jordan 标准型，其中主对角线全为 0，上次对角线为 1，也就是 $J_n(0)$，我们已知 $J_n(0)^n=0$.

(2).

A 不可逆，则 A 一定有特征值 0，存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$，J 为 A 的 Jordan 标准型我们把 $J_{r_k}(0)$ 的全部对角阵去除，拼成一个新的对角阵 C，它一定是幂零矩阵，则剩下的拼成新的对角阵 B，由于特征值都是不为 0 的对角阵，则一定可逆，得证.

■

注 Jordan 标准型三段论：

- Jordan 块成立
- Jordan 标准型成立
- 相似关系下，普通的矩阵成立

Jordan-Chevally 也需要注意一下存在和唯一性.

Day 2

华中 21 年这套题的质量不错，虽然好几道白皮书原题 (华中经典-,-)，但仔细一想还是有点巧妙的题。第一题我反而觉得白皮书的解法有点过于... 过程太少一步就写完了，某公众号给的好像也类似，这里换一种简单的解法。并且把题目结论加强一下。

真题 8.3 (华中 2021)

设 A 为 n 阶方阵，且 A 的元素均为整数，证明：$\dfrac{1}{2}$ 不是 A 的特征值.

这里加强一下，证明：$Ax=\dfrac{q}{p}x$ 必没有非零解. $(p>1)$

♣

证明 我们证明加强的结论，白皮书 p272 的解答就一步 hh.

$Ax=\dfrac{q}{p}x$ 没有非零解，说明 $\dfrac{q}{p}$ 是矩阵 A 的特征值，x 是其对应的特征向量，于是我们假设 A 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$. 因为 A 是整系数多项式，则其特征多项式也是整系数的，那么 $\dfrac{q}{p}$ 也是特征多项式的根，则根据整系数多项式有根的必要条件，$p\,|\,1, q\,|\,a_0$，于是 $p=\pm1$, 与 $p>1$ 矛盾.

■

真题 8.4 (华中 2021)

设 A, B 为两个同阶实矩阵，且 A 为正定阵，B 为反对称矩阵，证明：

$$|A+B| \geq |A|$$

并说明不等式中等号何时成立.

证明 这道题的公众号解法也一言难尽，虽然对的，但个人不喜欢这种解法，我们用之前在前面所说的同时合同标准化来解.

根据前面的同时合同标准化可知，存在可逆阵 C 使得

$C'AC = I_n, C'BC = diag\left\{\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right\}$，其中 $b_1, \ldots, b_r$ 为非零实数.

则有

$$\begin{aligned} |C'|\,|A+B|\,|C| &= |I_n + diag\left\{\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right\}| \\ &= |diag\left\{\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & b_r \\ -b_r & 1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right\} \\ &= (1+b_1^2)(1+b_2^2)\cdots(1+b_r^2) \\ &\geq 1 = |C'AC| = |C'|\,|A|\,|C| \end{aligned}$$

当且仅当 B 为 0 矩阵.

■

一道简单的正交矩阵的结论，即若正交阵的特征值为实数，则一定是对称阵.

真题 8.5 (华中 2021)

设 σ 为欧氏空间 V 上的正交变换，且特征值为实数，证明：$\big(\alpha, \sigma(\beta)\big) = \big(\sigma(\alpha), \beta\big)$

证明 题目言简意赅 hh，这个内积一看就知道要证明 $\sigma^* = \sigma$，为什么这么说：把左边的 $sigma$ 踢过去.

$$\big(\sigma(\alpha), \beta\big) = \big(\alpha, \sigma^*(\beta)\big)$$

任意取 V 中一组标准正交基，则设 α 在这组基下的表示矩阵为 A，于是题目要证明的即为 $A = A^*$. 因为 A 是正交阵 (正规阵)，存在正交阵 Q。算了，突然一想，这个引理得记住，还是写引理把。

引理 8.1 (正交阵的正交相似标准型)

设 A 为 n 阶正交阵，则存在正交阵 P 使得:

$$P'AP = diag\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ -b_r & a_r \end{pmatrix}\}$$

华中的最后一道大题. 也是白皮书类似的，被谢启鸿老师出成每周一题了.

真题 8.6 (华中 2021)

设 A 为 n 阶正定阵，$X \in \mathbb{R}^n$ 为非零列向量，证明：

(1) 矩阵 $A + XX'$ 可逆.

(2) $0 < X'(A+XX')^{-1}X < 1$.

证明 (1). 第一小问很容易看出想证明正定阵就行。

对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n \neq 0$，我们有：

$$\begin{aligned}&\alpha'(A+XX')\alpha\\&=\alpha' A\alpha+(X'\alpha)'X'\alpha\\&= \;>0\;\;+\geq 0.\end{aligned}$$

(2). 首先得对这个结构要很熟悉才能立马反应到这个是降阶公式的熟悉的式子，$D-CA^{-1}B$，少了一个 D 怎么办呢，我们用 1 减呀，$1-X'(A+XX')X$.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}A+XX' & X\\ X' & 1\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}A+XX'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1-X'(A+XX')X\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A+XX'-XX'\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}A\end{vmatrix}\end{aligned}$$

A 是正定阵，则一定 $|A|>0$，且 $A+XX'>0$，则得证.

■

这么一看，一共八道题，六道题白皮书?? 一模一样？华科你也太偷懒了...

Day 3

真题 8.7 (武大 2022)

已知 $f_1(x), f_2(x)$ 是次数不超过 3 的首一互异多项式，且 $x^4+x^2+1 \mid f_1(x^3)+x^4\cdot f_2(x^3)$. 求 $f_1(x), f_2(x)$ 的最大公因式.

♣

证明 这道题的技巧在多项式那一章介绍过，不过当时有点忘记了，没有写出来，重新复习一下写法.

用 x^2-1 去乘这个多项式：

$$\begin{aligned}&(x^2-1)(x^4+x^2+1)\\&=x^6+x^4+x^2-x^4-x^2-1\\&=x^6-1\end{aligned}$$

即 x^4+x^2+1 是 x^6-1 的因式，

设 $\omega_k=\cos\dfrac{2k\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{2k\pi}{6},(k=0,1,\ldots,5)$，$\omega_k^6=1$，

由 *de Moivre* 公式：$(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\cdot\sin n\theta$. 可得 $\omega_1^3=\omega_5^3=-1, \omega_2^3=\omega_4^3=1$.

$$\begin{cases}f_1(-1)+\omega_1^4\cdot f_2(-1)=0\\ f_1(-1)+\omega_5^4\cdot f_2(-1)=0\end{cases}\tag{$*$}$$

方程组 $(*)$ 的系数行列式：

$$\begin{vmatrix}1 & \omega_1^4\\ 1 & \omega_5^4\end{vmatrix}=\omega_5^4-\omega_1^4\neq 0$$

另一组：

$$\begin{cases}f_1(1)+\omega_2^4\cdot f_2(1)=0\\ f_1(1)+\omega_4^4\cdot f_2(1)=0\end{cases}\tag{$**$}$$

方程组 $(**)$ 的系数行列式：

$$\begin{vmatrix}1 & \omega_2^4\\ 1 & \omega_4^4\end{vmatrix}=\omega_4^4-\omega_2^4\neq 0$$

于是 $f_1(1)=f_1(-1)=f_2(1)=f_2(-1)=0$，即 $x^2-1\mid f_1(x), x^2-1\mid f_2(x)$.

■

Day 4

9 月 28 其实做了一套 211 的题目，但就写了倒数三题，看着都是秒杀，多解的解法就放在前面的章节整理算了，看着秒杀的有点膨胀，然后顺便打了华师的题目，打算今天写一写，下午图书馆如坐针毡，当时脑子就和卡壳了一样，看一道一道不会，欠缺的技巧和思维还是很多，还是得做一点难度的题目，不然后面就出事了...

这套题目会好好整理一下，里面有实在没有思路的，实在看着一点想法都不去想的，也有能做的，熟悉的却没想到。

真题 8.8 (ECNU 2021)

设 n 阶矩阵 $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$ 中元素 $a_{ij}(t)$ 是实变量 t 的可微函数，记 $A'(t)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ij}(t)\right)$，证明：若对 $\forall t\in R$，$|A(t)>0|$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|A(t)|=tr\left(A^{-1}(t)A'(t)\right)$.

♣

证明 这题华师摆明了就是考你知不知道行列式求导，不知道的话，如果知道组合定义在考场上还能推导出来，不知道的话，按照西西的话就是：脑子里全是花生米。

我们先介绍一下代数余子式与伴随矩阵的一些小关系。

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ji}^*$$

再回忆一下迹的求和写法：也就是插入一个指标

$$tr(AB)=\sum_{i=1}^n c_i=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}.$$

然后回到这道题，把 A 写成形式行向量，也就是列分块，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，根据复合函数求导法则，然后按照求导的那一列展开：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|A(t)|&=\frac{1}{|A(t)|}\cdot\sum_{i=1}^n|\alpha_1,\ldots,\alpha_i',\ldots,\alpha_n|\\&=\frac{1}{|A(t)|}\cdot\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}'A_{ij}\\&=\frac{1}{|A(t)|}\cdot\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}'A_{ji}^*\\&=\frac{1}{|A(t)|}\cdot tr\left(A(t)'A^*(t)\right)\\&=tr\left(A(t)'A^{-1}(t)\right)\end{aligned}$$

■

真题 8.9 (ECNU 2021)

设 A 是 n 阶实矩阵，B 是 n 阶正定阵.

1. 证明：存在唯一 n 阶实矩阵 C 满足 $BC+CB=A$.
2. 证明：对 (1) 中实矩阵 C 有 $BC=CB$ 当且仅当 $AB=BA$.

♣

证明 (1). 这道题真的不太应该，当时可能晕掉了，实际上前面整理过，也是 Cayley-Hamilton 定理的直接应用.

我们回忆一下这个引理：

引理 8.2

设 A, B 为 n 阶方阵，则 $AX - XB = C$ 有唯一解.

证明见之前 Cayley-Hamilton 定理的应用，这里考虑 $BX - X(-B) = A$ 矩阵方程，则可知有唯一解.

(2). 充分性：

构造一个映射 $\varphi(X) = BX + XB$，并且注意到这是一个线性同构，$\varphi(X) = 0 \implies X = 0$，故：

$$\begin{aligned}\varphi(BC - CB) &= B(BC - CB) + (BC - CB)B \\ &= B(BC + CB) - (BC + CB)B \\ &= AB - BA \\ &= 0.\end{aligned}$$

于是 $BC = CB$.

必要性：注意到 B 是正定，故可逆.

$$\begin{aligned}AB &= BA \\ BCB + CBB &= BBC + BCB \\ CB^2 &= B^2C \\ CB &= BC\end{aligned}$$

■