ECNU 2022 高等代数

1. 考虑数域 $\mathbb{K}$ 上的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2ax_3 = 2 \\ x_1 + 3bx_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - ax_3 = 1 \end{cases}$$

问 a, b 取何值时，方程组无解，有唯一解，有无穷多解，且在方程组有解时，求出所有解.

2. 设 3 阶实对称阵 A 的秩为 2，且 -2 是它的二重特征值，若 $(1,0,0)', (2,1,1)'$ 都是 A 的属于特征值 -2 的特征向量，求矩阵 A.

3. 考虑未定元为 x, y 的次数至多为 2 的复系数二元多项式空间，求线性变换 $\mathscr{A} : f(x,y) \mapsto f(2x+1, 2y+1)$ 的 Jordan 标准型.

4. 设 σ 是有限维欧氏空间 V 上的正交变换，且满足 $\sigma^m = \epsilon$，这里 $m \geq 1, \epsilon$ 为恒等变换，记 $V^\sigma = \{v \in V : \sigma(v) = v\}, V^\sigma$ 的正交补记为 $V^{\sigma\perp}$.

(1) 对于 $v \in V$，定义 $\bar{v} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma^i(v)$, 证明：$\bar{v} \in V^\sigma$.

(2) 证明：若将 $v \in V$ 展开成 $v = v_1 + v_2$，其中 $v_1 \in V^\sigma, v_2 \in V^{\sigma\perp}$，则 $v_1 = \bar{v}$.

5. 设 $f(x)$ 是次数大于 0 的整系数多项式，若 $2-\sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 的根，证明：$2+\sqrt{3}$ 也是 $f(x)$ 的根.

6. 设 V 是在复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换.

(1) 证明：存在正整数 $k \leq n$，使得 $Im\,\mathscr{A}^k = Im\,\mathscr{A}^{k+1} = \cdots = Im\,\mathscr{A}^n$ 且 $Ker\,\mathscr{A}^k = Ker\,\mathscr{A}^{k+1} = \cdots = Ker\,\mathscr{A}^n =$

(2) 考虑如下特征指标：

1. $\mathscr{A}$ 的秩为 r.
2. $\mathscr{A}$ 的特征值为 0 的 Jordan 块个数为 m.
3. $\mathscr{A}$ 的特征值为 0 的 Jordan 块阶数为 n.
4. 第 (1) 问种出现的最小的 k.

7. 设 V 是实内积空间，$\langle\cdot\rangle$ 是 V 上的内积，φ 是 V 上的可逆线性变换满足：

$$\langle \varphi(\varphi(x)), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle, \ \forall x, y \in V.$$

证明：φ 是正交变换.

8. 设 U,V,W 是 6 维空间的 3 个 3 维子空间,设 $U\cap V=0$,求 $dim\,[(U+V)\cap(V+W)]$ 的最大值和最小值.

9.

(1) 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 是半正定实对称阵,$x\in\mathbb{R}^n$,证明:$x'Ax=0$ 等价于 $Ax=0$.

(2) 设 A 为 n 阶半正定实对称阵,将其写成分块矩阵的形式

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2' & A_4 \end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 r 阶方阵,证明对 $x\in\mathbb{R}^r$,若 $A_1x=0$,则 $A_2'x=0$.

(3) 设 A,B 是 n 阶半正定实对称阵,且 $r(A)=r$. 证明:存在 n 阶可逆阵 p 使得

$$P'AP=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},\quad P'BP=diag\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$$

其中 I_r 为 r 阶单位阵.