ECNU 2021 高等代数

1. (15 分) 设 $\mathbf{F}$ 为数域，且 $A \in M_{m\times n}(\mathbf{F}), \beta \in M_{m\times 1}(\mathbf{F})$，记 $rank(A) = r$，则线性方程组 $Ax = \beta$ 有多少个线性无关的解,并说明理由.

2. (15 分) 设 $2n$ 阶方阵 $S = \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}$,给出复线性空间 $SP_n = \{X \in M_{2n\times 2n}(C) \mid SX = -X'S\}$ 的一组基. 并计算其维数.

3. (15 分) 设 n 阶矩阵 $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$ 中元素 $a_{ij}(t)$ 是实变量 t 的可微函数，记 $A'(t) = (\dfrac{d}{dt}a_{ij}(t))$,证明:若对 $\forall t \in R, |A(t) > 0|$,则 $\dfrac{d}{dt}\ln|A(t)| = tr(A^{-1}(t)A'(t))$.

4. (15 分) 若 n 阶复矩阵 A, B 满足 $AB = BA$，且 B 有 n 个不同的特征值,证明:A 可对角化.

5. (15 分) 设 c_1, c_2, c_3 实多项式 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ 的三个复根,求 $(c_1c_2 + c_3^2)(c_2c_3 + c_1^2)(c_1c_3 + c_2^2)$.

6. (20 分) 在 R^2 上 $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$，令 $A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. $B_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$，证明：函数 $f(x, y)$ 在坐标变换 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$，$tr(A_f), det(A_f), def(B_f)$ 保持不变,其中 Q 是二阶正交矩阵.

7. (20 分) 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d > 0$,证明:一定存在 A 的特征向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$,其中 $x, y > 0$.

8. (15 分) 设 6 阶复矩阵 A, B 是幂零矩阵,且有相同的秩和最小多项式,证明:A, B 相似.

9. (20 分) 设 A 是 n 阶实矩阵,B 是 n 阶正定矩阵.

(1) 证明:存在唯一 n 阶实矩阵 C 满足 $BC + CB = A$.

(2) 证明:对 (1) 中实矩阵 C 有 $BC = CB$ 当且仅当 $AB = BA$.