SJTU2022 高等代数

注：满分 150 分, 180 分钟完成.

1. 证明：多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件为存在多项式 $u(x), v(x)$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0.25 & 2a & a \\ a & b & 0.75 \end{pmatrix}$.

(1) 是否存在 B 使得 $BA=I$（单位阵），若存在，则求出 B，若不存在，则说明理由.

(2) 设 $e_1'AA'e_2=0$，求 $(A'A)^{2021}$，其中 e_1, e_2 分别为二维标准单位向量.

(3) 是否存在 a, b 使得 $AA'=I$，若存在，求出 a, b，若不存在，则说明理由.

3. 设集合 $S=\{\alpha\in\mathbb{R}^2|\alpha'\alpha\leq 1\}$，记 $AS=\{A\alpha|\alpha\in S\}$.

(1) 当 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 时，AS 代表的形状是什么？

(2) 当 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 时，AS 代表的形状是什么？

(3) 对于任意的二阶实矩阵 A，讨论 AS 所代表的几何图形.

4. 设 A 为 n 阶矩阵，证明：

(1) 若 $A^{n+1}=0$，则 $A^n=0$.

(2) $\text{rank}(A^n)$=$\text{rank}(A^{n+1})$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的 Jordan 标准型.

(2) 令 $B=A'A$,求 B 的谱分解.

(3) 令 $C=\begin{pmatrix} B \\ \\ B \end{pmatrix}$,求 C 的奇异值分解.

6. 设 U,W 分别为 n 维欧氏空间 V 的子空间,证明或举反例:

(1) $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

(2) $(U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$.

7. 设 A 为 n 阶实对称矩阵,那么 A 至少有 k 个正特征值的充要条件是存在维数为 k 的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 V,使得对任意的非零向量 $x\in V$,有 $v'Av>0$.

8. 设 V,W 为数域 F 上的两个线性空间,U 为 V 的子空间,π 是 V 到 V/U 的商映射,证明:对于 $\mathrm{Hom}_F(V,W)$ 中的元素 σ, 存在 $\tau\in\mathrm{Hom}_F(V/U,W)$ 使得 $\sigma=\tau\circ\pi$ 的充要条件是 $U\subset\ker\sigma$.