

1 2021 高代每周一题

1. 求下列 $n+1$ 阶方阵 A 的特征值和特征向量:

$$A = \begin{pmatrix} n & -n & & & \\ & 1 & n-2 & 1-n & \\ & & 2 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & n & -n \end{pmatrix}.$$

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 2a & a \\ a & b & 0.75 \end{pmatrix}.$

(1) 是否存在 B 使得 $BA = I$ (单位阵), 若存在, 则求出 B , 若不存在, 则说明理由.

(2) 设 $e_1' A A' e_2 = 0$, 求 $(A' A)^{2021}$, 其中 e_1, e_2 分别为二维标准单位向量.

(3) 是否存在 a, b 使得 $AA' = I$, 若存在, 求出 a, b , 若不存在, 则说明理由.

3. 设集合 $S = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 | \alpha' \alpha \leq 1\}$, 记 $AS = \{A\alpha | \alpha \in S\}$.

(1) 当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 时, AS 代表的形状是什么?

(2) 当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 时, AS 代表的形状是什么?

(3) 对于任意的二阶实矩阵 A , 讨论 AS 所代表的几何图形.

4. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

(1) 若 $A^{n+1} = 0$, 则 $A^n = 0$.

(2) $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(1) 求 A 的 Jordan 标准型.

(2) 令 $B = A'A$, 求 B 的谱分解.

(3) 令 $C = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}$, 求 C 的奇异值分解.

6. 设 U, W 分别为 n 维欧氏空间 V 的子空间, 证明或举反例:

(1) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

(2) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

7. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 那么 A 至少有 k 个正特征值的充要条件是存在维数为 k 的 \mathbb{R}^n 的子空间 V , 使得对任意的非零向量 $x \in V$, 有 $x'Ax > 0$.

8. 设 V, W 为数域 F 上的两个线性空间, U 为 V 的子空间, π 是 V 到 V/U 的商映射, 证明: 对于 $\text{Hom}_F(V, W)$ 中的元素 σ , 存在 $\tau \in \text{Hom}_F(V/U, W)$ 使得 $\sigma = \tau \circ \pi$ 的充要条件是 $U \subset \ker \sigma$.