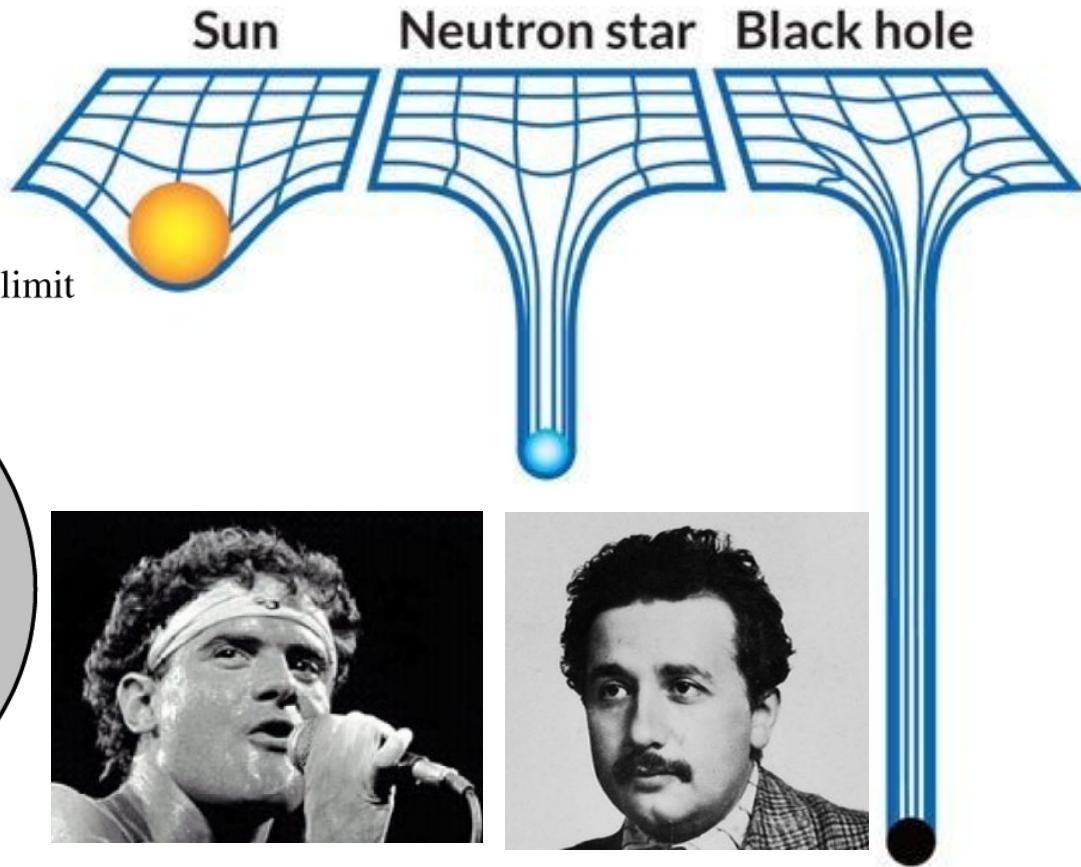
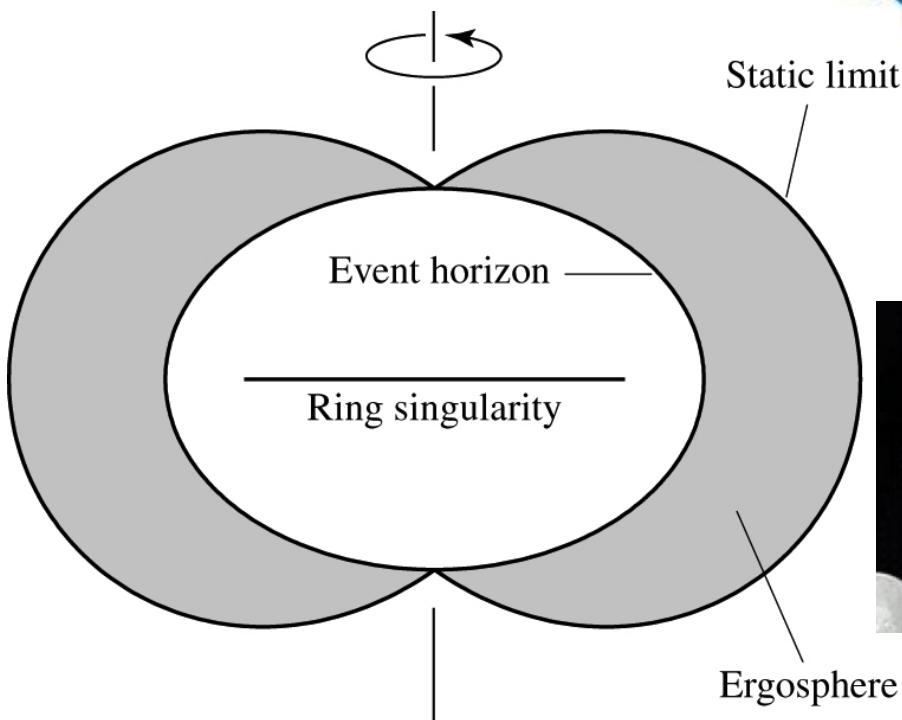


# 17 Relatividade e Buracos Negros

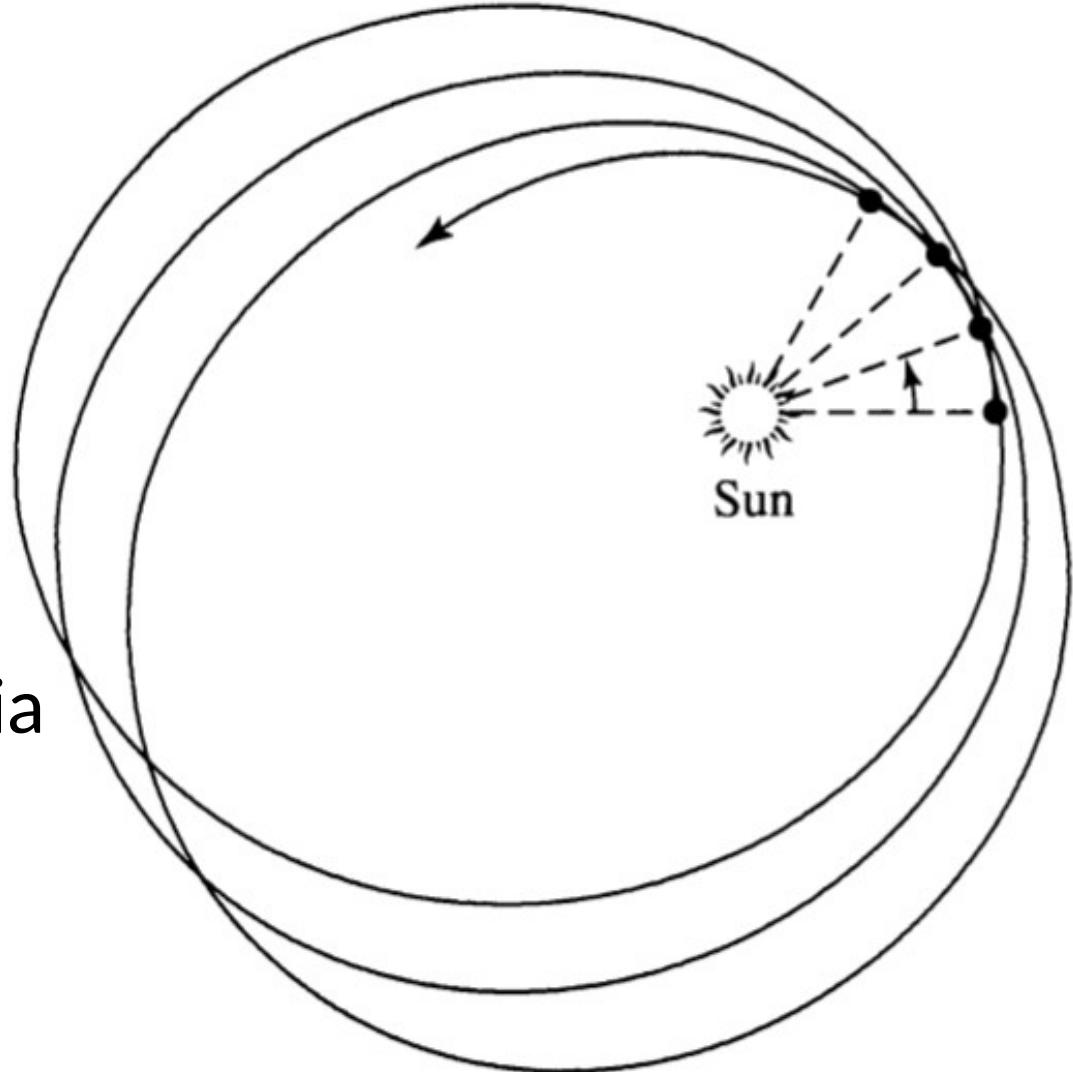


# 17.1 A Teoria Geral da Relatividade

Newton (1686):

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

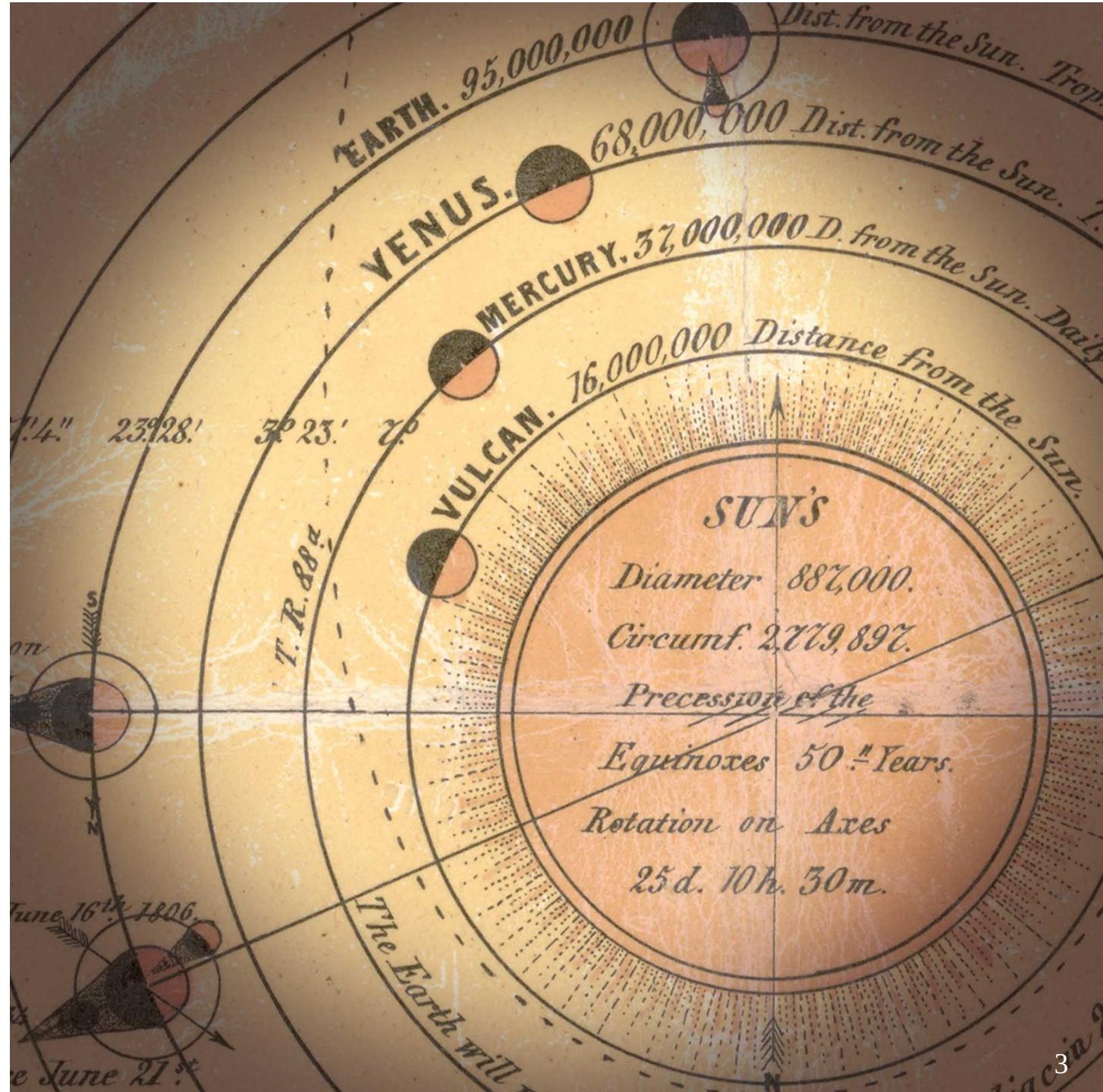
Usando a lei da gravitação universal, existe uma discrepância de 43" por século na precessão do periélio do planeta Mercúrio



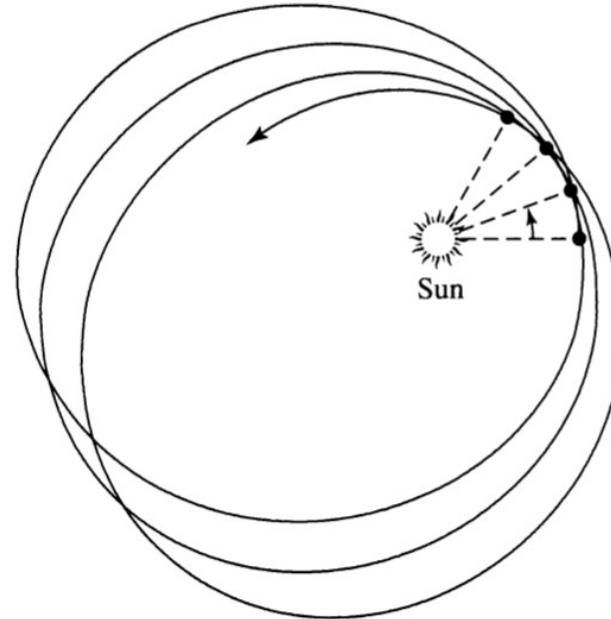
**FIGURE 17.1** The perihelion shift of Mercury's orbit. Both the eccentricity of the orbit and the amount of shift in the location of perihelion in successive orbits have been exaggerated to better show the effect.

In 1859 French mathematician Urbain Le Verrier postulated the existence of an unseen planet "Vulcan" to explain the discrepancy seen in the orbit of Mercury

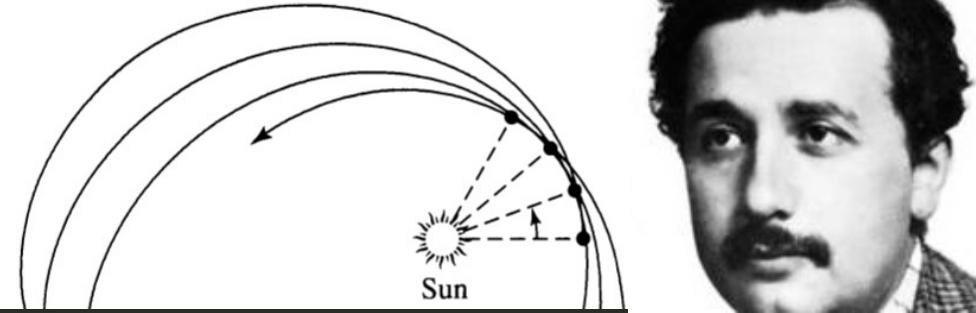
O planeta Vulcano nunca foi confirmado



Einstein, 1907 – 1915:  
Teoria da relatividade geral



Einstein, 1907 – 1915:  
Teoria da relatividade geral



# Relatividade Geral e Aplicações Astrofísicas

AGA0319

Prof. Rodrigo  
Nemmen

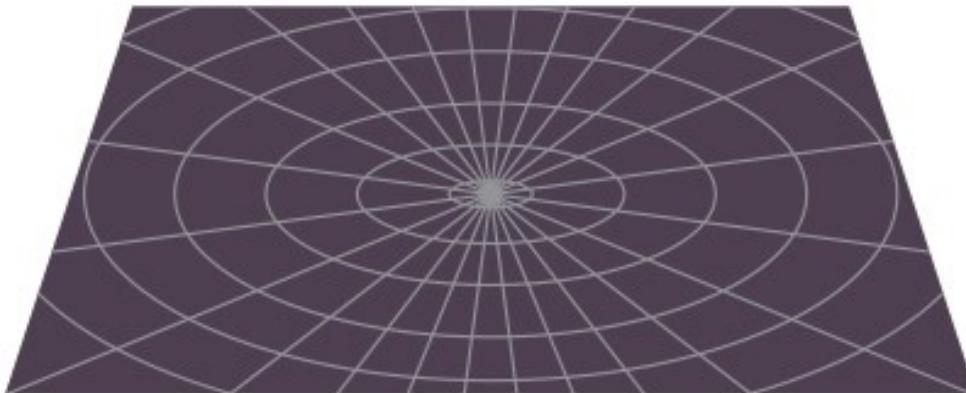


◀ ▶ ⏸ 0:00 / 6:55



[https://www.youtube.com/playlist?  
list=PLHQr\\_DwaHggndmRcvUIOhs1fvI1BZulvQ](https://www.youtube.com/playlist?list=PLHQr_DwaHggndmRcvUIOhs1fvI1BZulvQ)

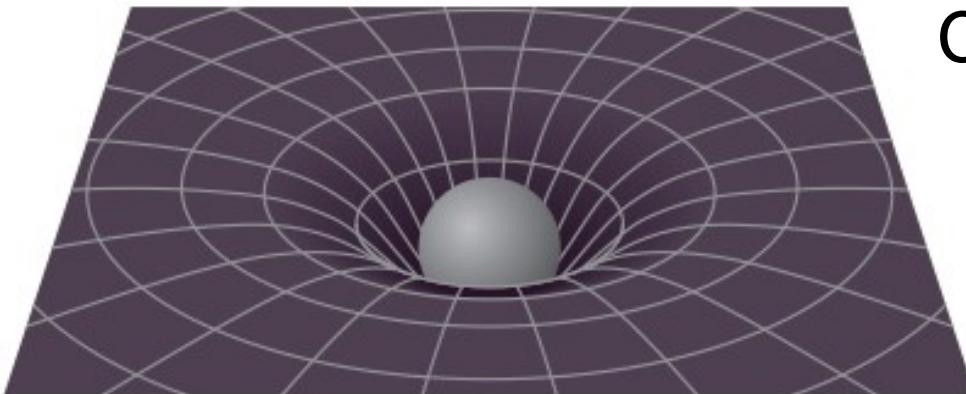




## Einstein, 1907 – 1915: Teoria da relatividade geral



a A two-dimensional representation of “flat” spacetime. The distances between adjacent circles are the same.



Curvatura do espaço-tempo  
é causada pela massa.

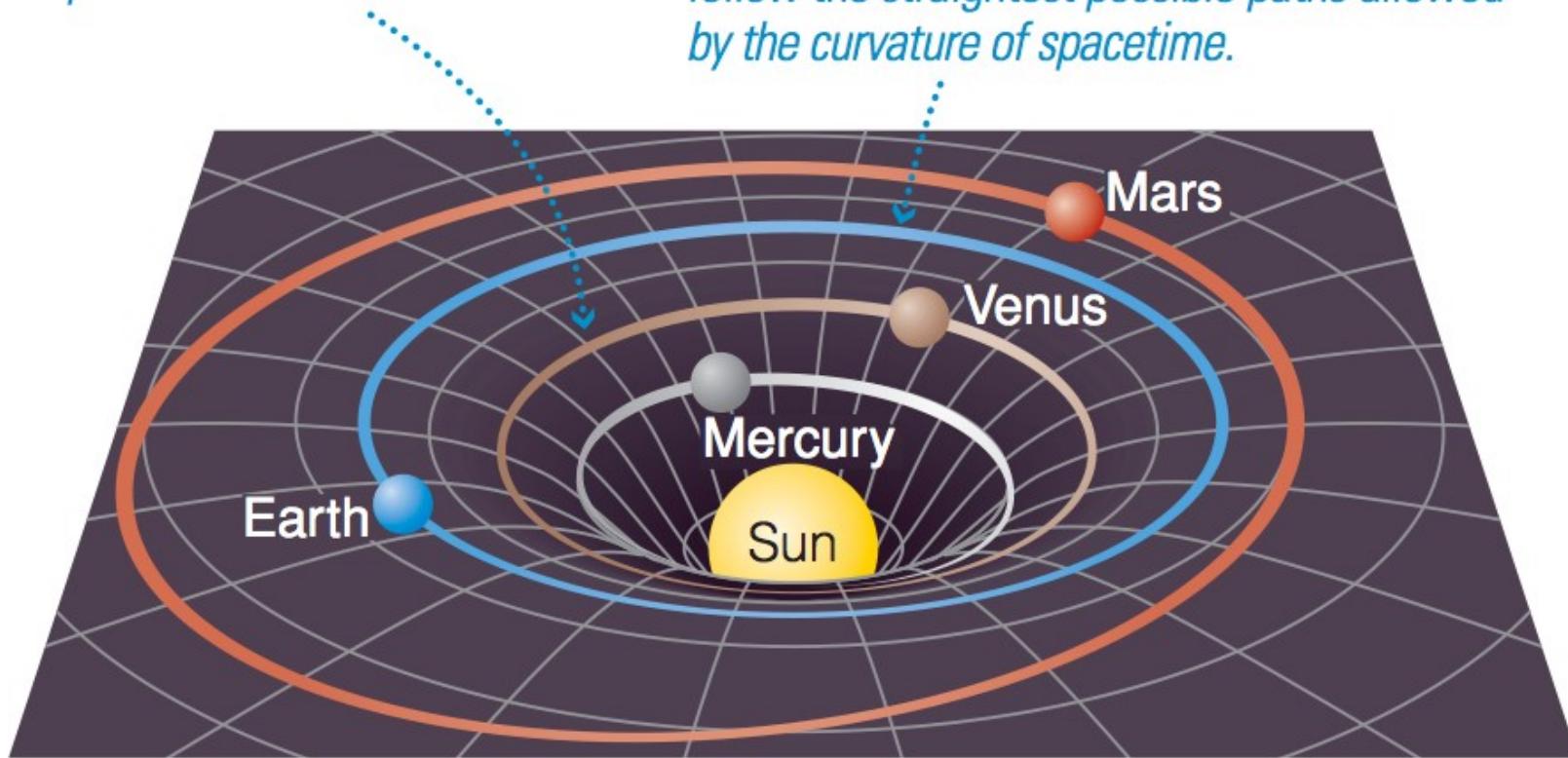
Maior gravidade é devida à  
maior curvatura

b Gravity arises from curvature of spacetime, represented here by a mass pushing down on the rubber sheet. Notice how the circles become more widely separated near the mass, showing that the curvature is greater as we approach the mass on the sheet.

# A massa do Sol curva o espaço-tempo

*The mass of the Sun causes spacetime to curve ...*

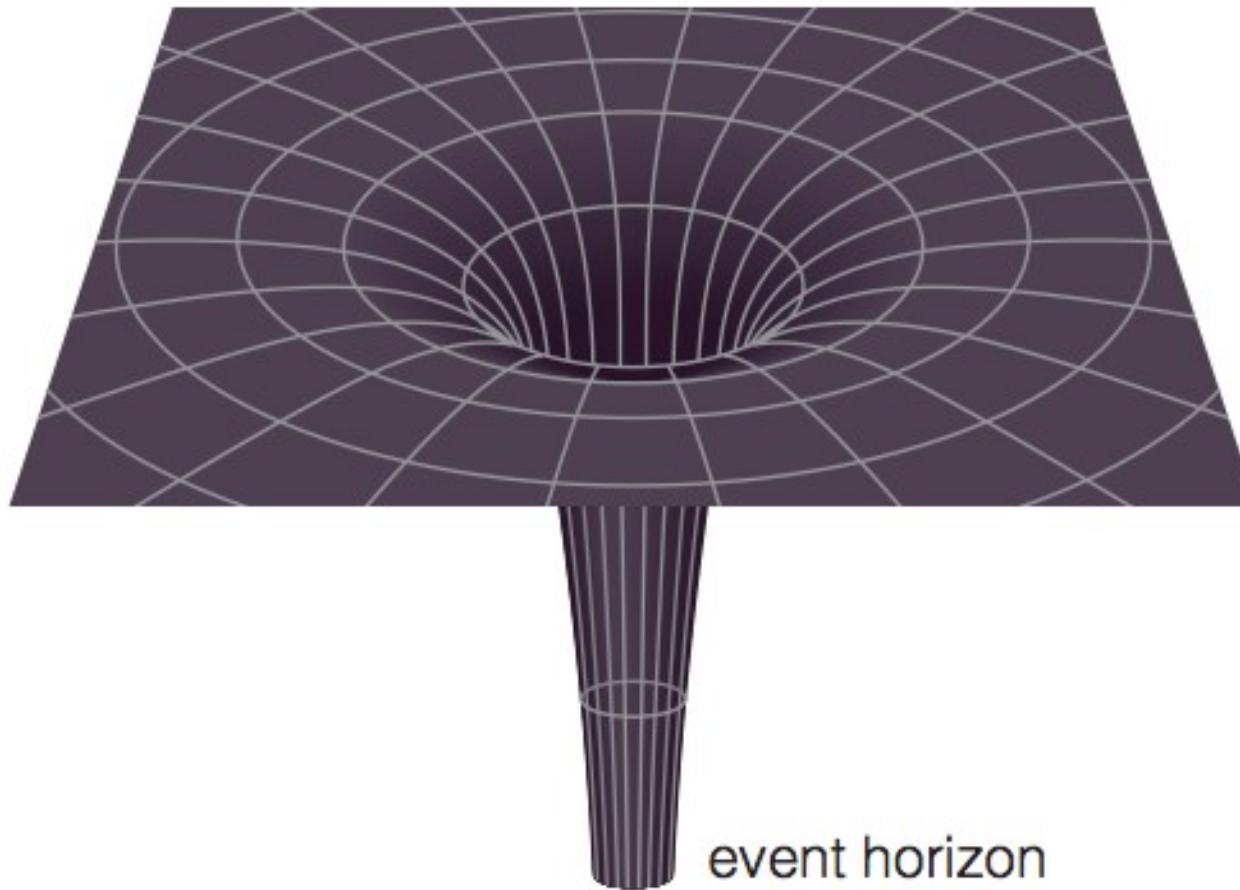
*... so freely moving objects (such as planets) follow the straightest possible paths allowed by the curvature of spacetime.*



© The cosmic perspective

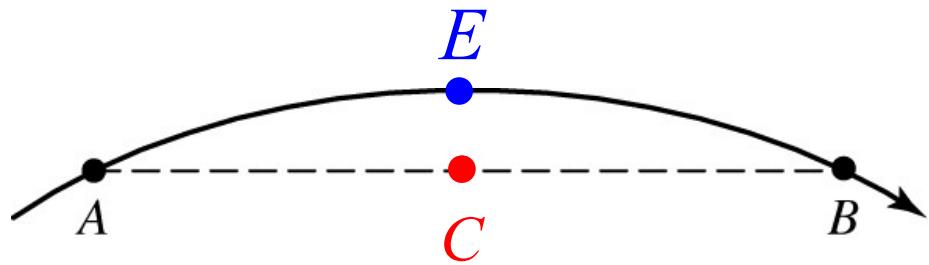
According to general relativity, planets orbit the Sun for much the same reason that you can make a marble go around in a salad bowl: The planet is going as straight as it can, but the curvature of spacetime causes its path through space to curve.

# No buraco negro, a curvatura do espaço-tempo é infinita

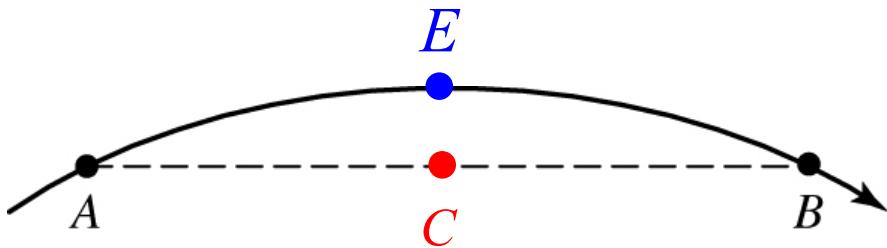


- c The curvature of spacetime becomes greater and greater as we approach a black hole, and a black hole itself is a bottomless pit in spacetime.

Na relatividade geral,  
tudo o que passa  
através do espaço-  
tempo curvo é afetado,  
até partículas sem  
massa como os fóttons



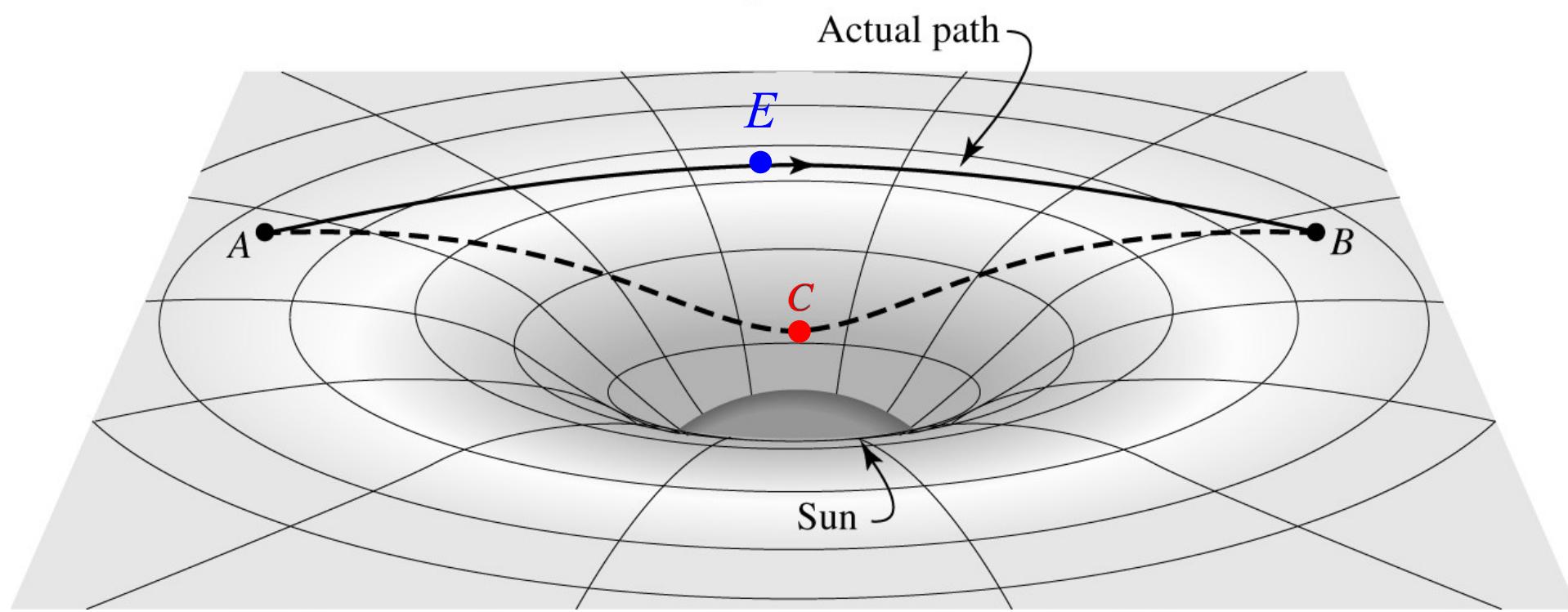
**FIGURE 17.3** A photon's path around the Sun is shown by the solid line. The bend in the photon's trajectory is greatly exaggerated.



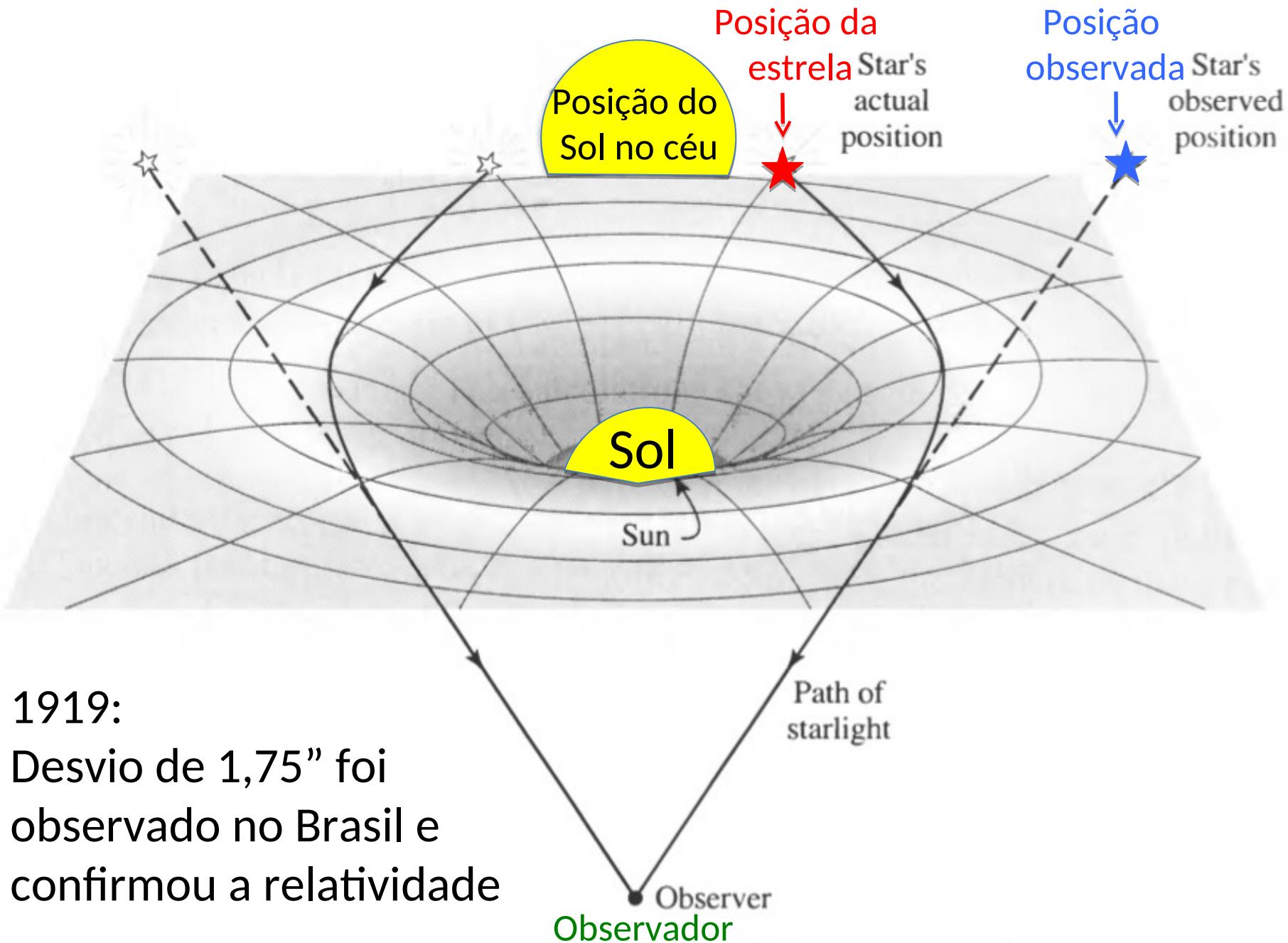
**FIGURE 17.3**

Sun

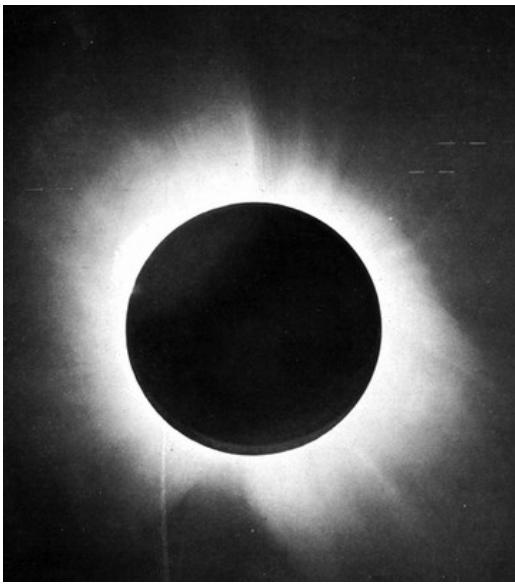
Actual path



**FIGURE 17.4** Comparison of two photon paths through curved space between points  $A$  and  $B$ . The projection of the path  $ACB$  onto the plane is the straight line depicted in Fig. 17.3.



**FIGURE 17.5** Bending of starlight measured during a solar eclipse.



29 de maio de 1919

# Centenário da teoria da relatividade é celebrado em Sobral, cidade que ajudou na comprovação

Equipe inglesa estudou eclipse solar ocorrido na cidade em maio de 1919.

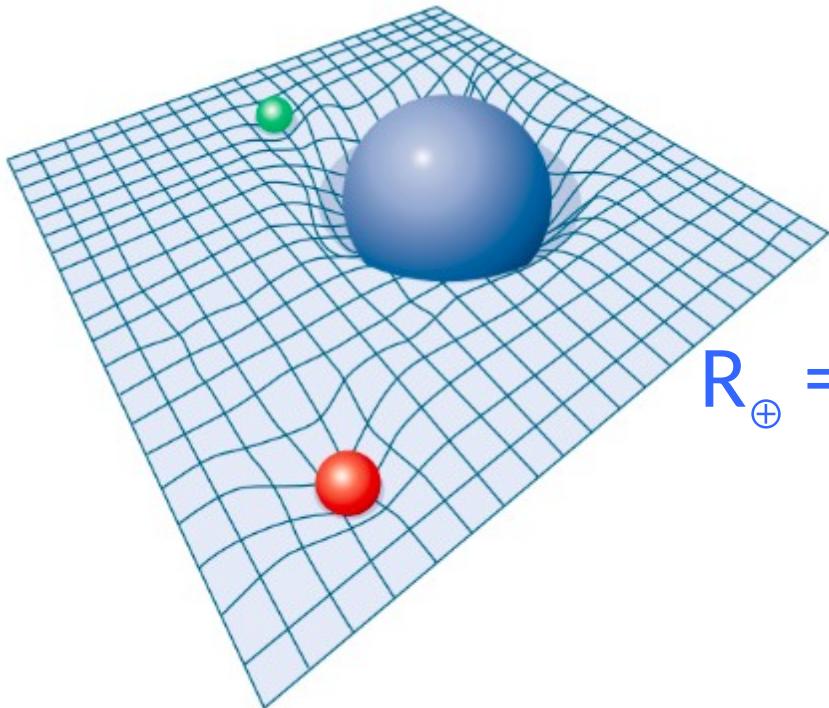
<https://g1.globo.com/ce/ceara/noticia/centenario-da-teoria-da-relatividade-e-celebrado-em-sobral-cidade-que-ajudou-na-comprovacao.ghtml>



Museu do Eclipse foi fundado no local onde expedição inglesa observou fenômeno que comprovou a teoria da relatividade, em 1919 (Foto: Wilson Gomes/Agência Diário)

Raio de curvatura  $r_c$  do espaço-tempo:

$$r_c = \frac{c^2}{g} \quad g \equiv GM_r/r^2$$

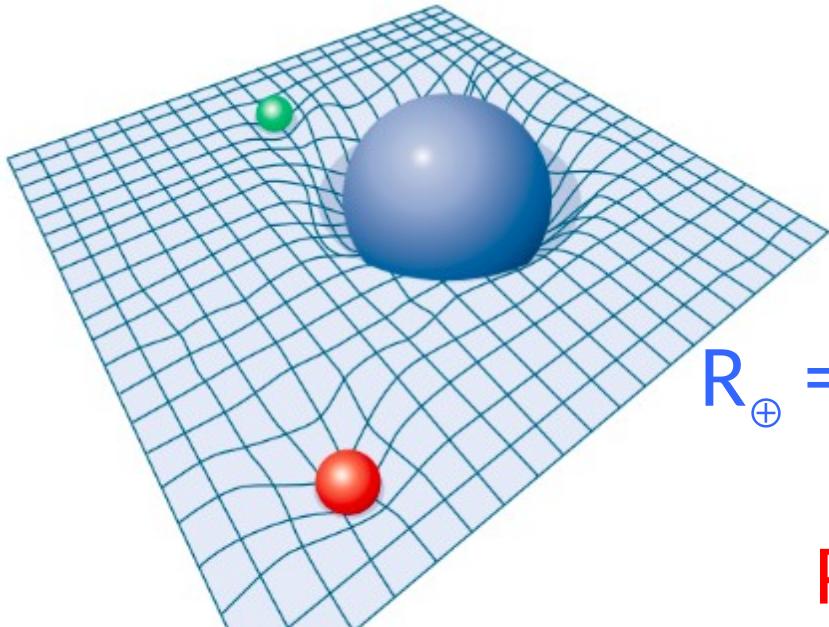


$$\begin{aligned}\text{Terra: } r_c &= c^2/9,8 \text{ m s}^{-2} \\ &= 9,2 \times 10^{15} \text{ m}\end{aligned}$$

$$R_{\oplus} = 6,4 \times 10^6 \text{ m} \rightarrow R_{\oplus}/r_c \sim 7 \times 10^{-10}$$

Raio de curvatura  $r_c$  do espaço-tempo:

$$r_c = \frac{c^2}{g} \quad g \equiv GM_r/r^2$$



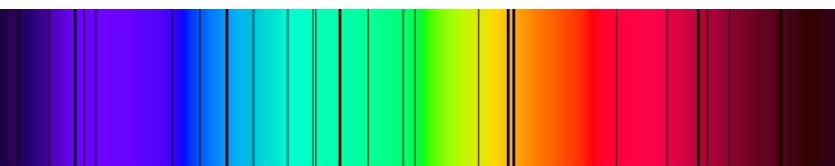
Terra:  $r_c = c^2/9,8 \text{ m s}^{-2}$   
 $= 9,2 \times 10^{15} \text{ m}$

$$R_{\oplus} = 6,4 \times 10^6 \text{ m} \rightarrow R_{\oplus}/r_c \sim 7 \times 10^{-10}$$

Para anã branca Sirius B:

**Example 17.1.2.** The white dwarf Sirius B has a radius of  $R = 5.5 \times 10^6 \text{ m}$  and a mass of  $M = 2.1 \times 10^{30} \text{ kg}$ . The radius of curvature of the path of a horizontally traveling light beam near the surface of Sirius B is given by Eq. (17.5),

$$r_c = \frac{c^2}{g} = \frac{R^2 c^2}{GM} = 1.9 \times 10^{10} \text{ m} \quad R_{\text{WD}}/r_c \sim 3 \times 10^{-4}$$



# Gravitational redshift

$$z = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}\right)^{-1/2} - 1 \quad (17.11)$$

$$\simeq \frac{GM}{r_0 c^2} \quad (17.12) \text{ Para campo gravitacional relativamente fraco}$$

## Redshift gravitacional para anã branca Sirius B:

**Example 17.1.2.** The white dwarf Sirius B has a radius of  $R = 5.5 \times 10^6$  m and a mass of  $M = 2.1 \times 10^{30}$  kg.

the gravitational redshift suffered by a photon emitted at the star's surface is  $z \simeq \frac{GM}{Rc^2} = 2.8 \times 10^{-4}$

This is in excellent agreement with the measured gravitational redshift for Sirius B of  $(3.0 \pm 0.5) \times 10^{-4}$ .

## 17.3 Buracos negros

Supondo que a luz é composta de partículas (Newton), **John Michell** propôs (1783) que poderiam existir estrelas com gravidade tão alta que a velocidade de escape seria maior à da luz → **estrela escura (*dark star*)**.

Ele propôs que poderíamos inferir a sua existência pelo efeito gravitacional de estrelas orbitando a *dark star*.

“If there should really exist in nature any bodies, whose density is not less than that of the sun, and whose diameters are more than 500 times the diameter of the sun, since their light could not arrive at us; or if there should exist any other bodies of a somewhat smaller size, which are not naturally luminous; of the existence of bodies under either of these circumstances, we could have no information from sight; yet, if any other luminous bodies should happen to revolve about them we might still perhaps from the motions of these revolving bodies infer the existence of the central ones with some degree of probability, as this might afford a clue to some of the apparent irregularities of the revolving bodies, which would not be easily explicable on any other hypothesis.”

# Raio de uma *Dark star*

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM/r}$$

Raio para  $v_{\text{esc}} = c$ :  $R = 2GM / c^2$

Em função da  $M_\odot$ :  $R = 2,95 (M/M_\odot)$  km

Como o raio parecia irrealisticamente pequeno → trabalho do Michell foi ignorado por ~ 150 anos

Em 1939 Oppenheimer e Snyder estudaram o colapso de uma estrela degenerada com mais de  $3 M_\odot$  (limite superior para uma estrela de nêutrons).

# Raio de Schwarzschild

Solução da teoria da relatividade geral de Einstein para um corpo esféricico sem rotação:

$$(ds)^2 = \left( c dt \sqrt{1 - 2GM/r c^2} \right)^2 - \left( \frac{dr}{\sqrt{1 - 2GM/r c^2}} \right)^2 - (r d\theta)^2 - (r \sin \theta d\phi)^2. \quad (17.22)$$

A solução apresenta singularidade para o raio de Schwarzschild :

$$R_S = 2GM/c^2,$$

Horizonte de eventos

(17.27)

Notar que essa singularidade é apenas matemática (não física) e pode ser removida mudando o sistema de coordenadas.

# Dilatação do tempo no raio de Schwarzschild

$$(ds)^2 = \left( c dt \sqrt{1 - 2GM/rc^2} \right)^2 - \left( \frac{dr}{\sqrt{1 - 2GM/rc^2}} \right)^2 - (r d\theta)^2 - (r \sin \theta d\phi)^2. \quad (17.22)$$

$$R_S = 2GM/c^2, \quad (17.27)$$

Dilatação do tempo  $d\tau$  em relação ao tempo  $dt$  a uma distância infinita:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \quad (17.24)$$

$r > R_S \rightarrow$  o tempo  
não para



# Dilatação do tempo no raio de Schwarzschild

$$(ds)^2 = \left( c dt \sqrt{1 - 2GM/rc^2} \right)^2 - \left( \frac{dr}{\sqrt{1 - 2GM/rc^2}} \right)^2 - (r d\theta)^2 - (r \sin \theta d\phi)^2. \quad (17.22)$$

$$R_S = 2GM/c^2, \quad (17.27)$$

Dilatação do tempo  $d\tau$  em relação ao tempo  $dt$  a uma distância infinita:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \quad (17.24)$$

$r > R_S \rightarrow$  o tempo  
não para



$r = R_S \rightarrow d\tau = 0 \rightarrow$  tempo  
para no raio de Schwarzschild

# Velocidade aparente da luz em $R_s$

A velocidade da luz no referencial local é  $c$ , mas para um observador distante a velocidade parece mais lenta pois tem que cruzar um espaço-tempo curvado. Na direção radial:

$$\frac{dr}{dt} = c \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) = c \left( 1 - \frac{R_s}{r} \right) \quad (17.28)$$

Para  $r \gg R_s \rightarrow dr/dt = c$

Para  $r = R_s \rightarrow dr/dt = 0 \rightarrow$  luz é congelada em  $R_s$

$r = R_s$  atua como barreira, não deixando escapar a luz.

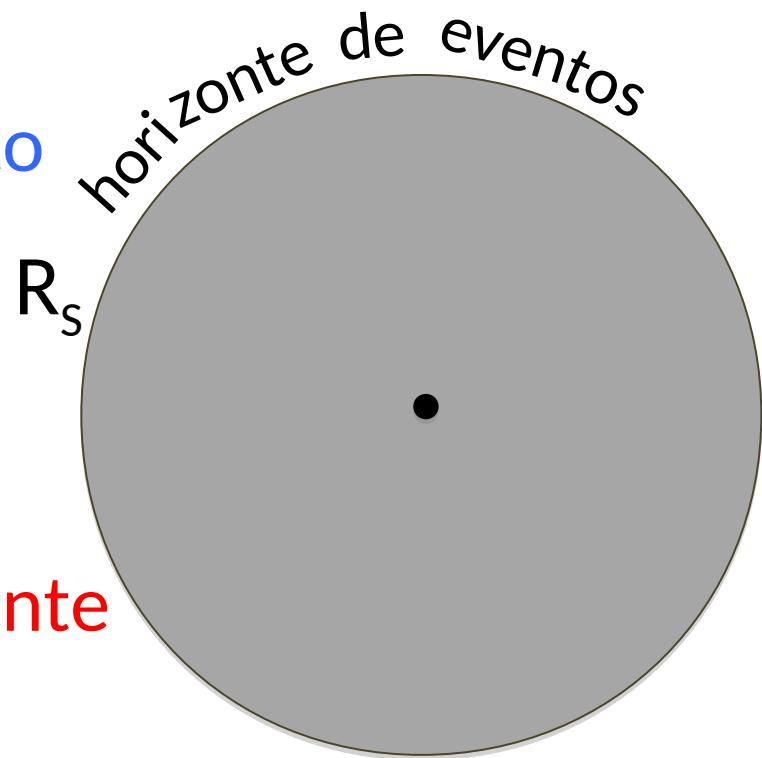
**Estrela que colapsa dentro de  $R_s$  é um buraco negro.**

**$R_s$  define o HORIZONTE DE EVENTOS.**

# Singularidade do buraco negro sem rotação

No centro do buraco negro temos a **singularidade**, um ponto de volume zero e densidade infinita, onde toda a massa do buraco negro está localizada.

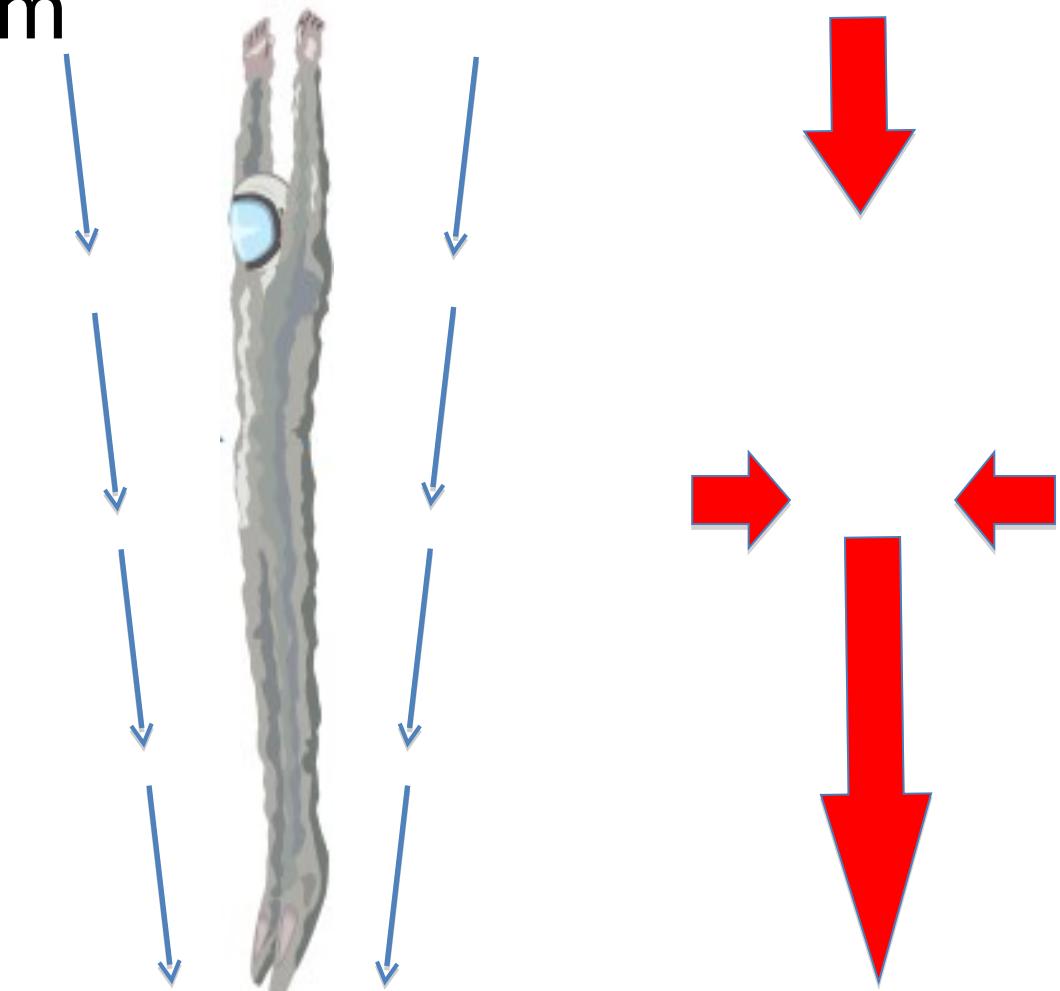
O espaço-tempo está infinitamente curvado na singularidade.



“Lei” de censura cósmica: não existem singularidades nuas, pois são cobertas por horizontes de eventos.

# Viagem fictícia a um buraco negro: espaguetificação

Astronauta fictício  
é esticado como  
um espaguete pelo  
gradiente  
gravitacional  
(diferença de força)  
da cabeça aos pés.



horizonte de eventos

Buraco negro

Tidal forces near a  
black hole

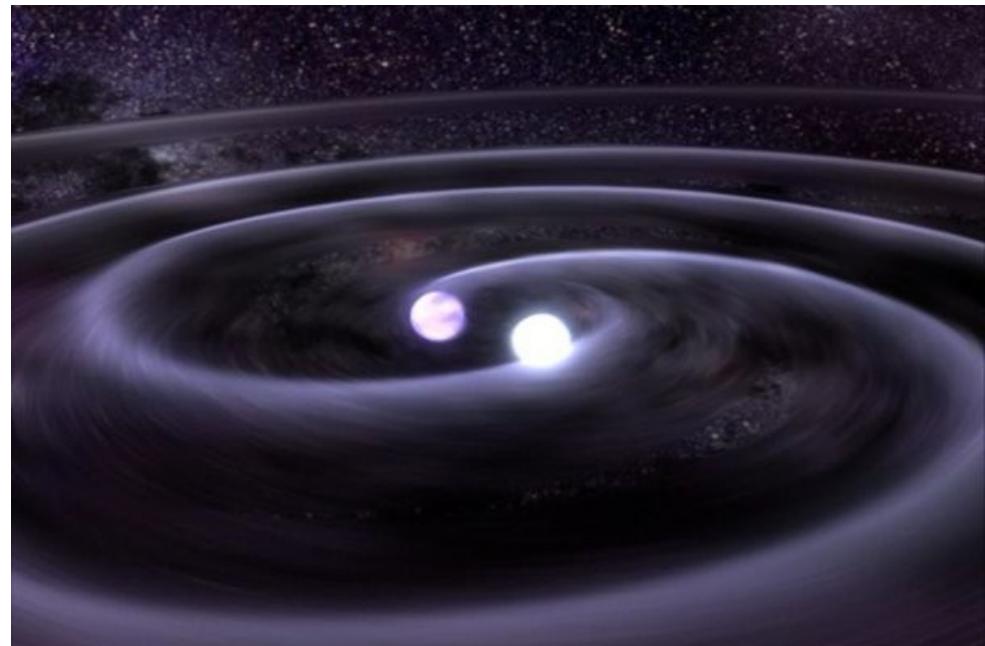
# Massa de buracos negros

**Estelares:**  $3 - 25 M_{\odot}$ . São devidos ao colapso de estrelas massivas. Também é possível devido a uma estrela de nêutrons com  $M < 3 M_{\odot}$  em sistema binário, pela transferência de massa da companheira.

[LIGO:  $29$  e  $36 M_{\odot}$ . São buracos negros massivos pela fusão de menores objetos?]

LIGO: 11 February 2016,  
discovery of gravitational  
waves.

Event **GW150914**,  
detected on 2015/09/14



Se o vento estelar for fraco (ou seja menor perda de massa)  
→ é possível termos buracos negros estelares massivos.

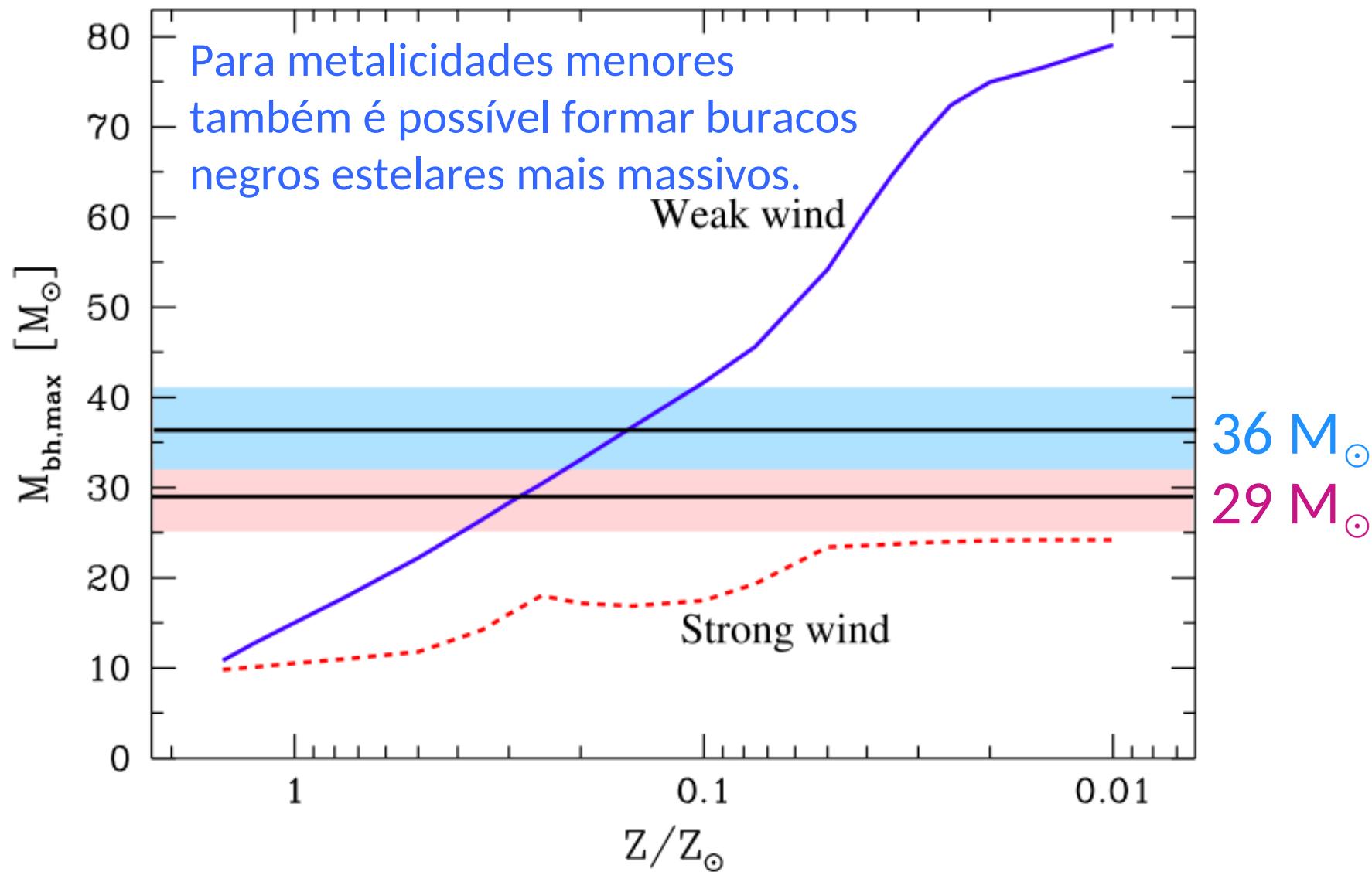
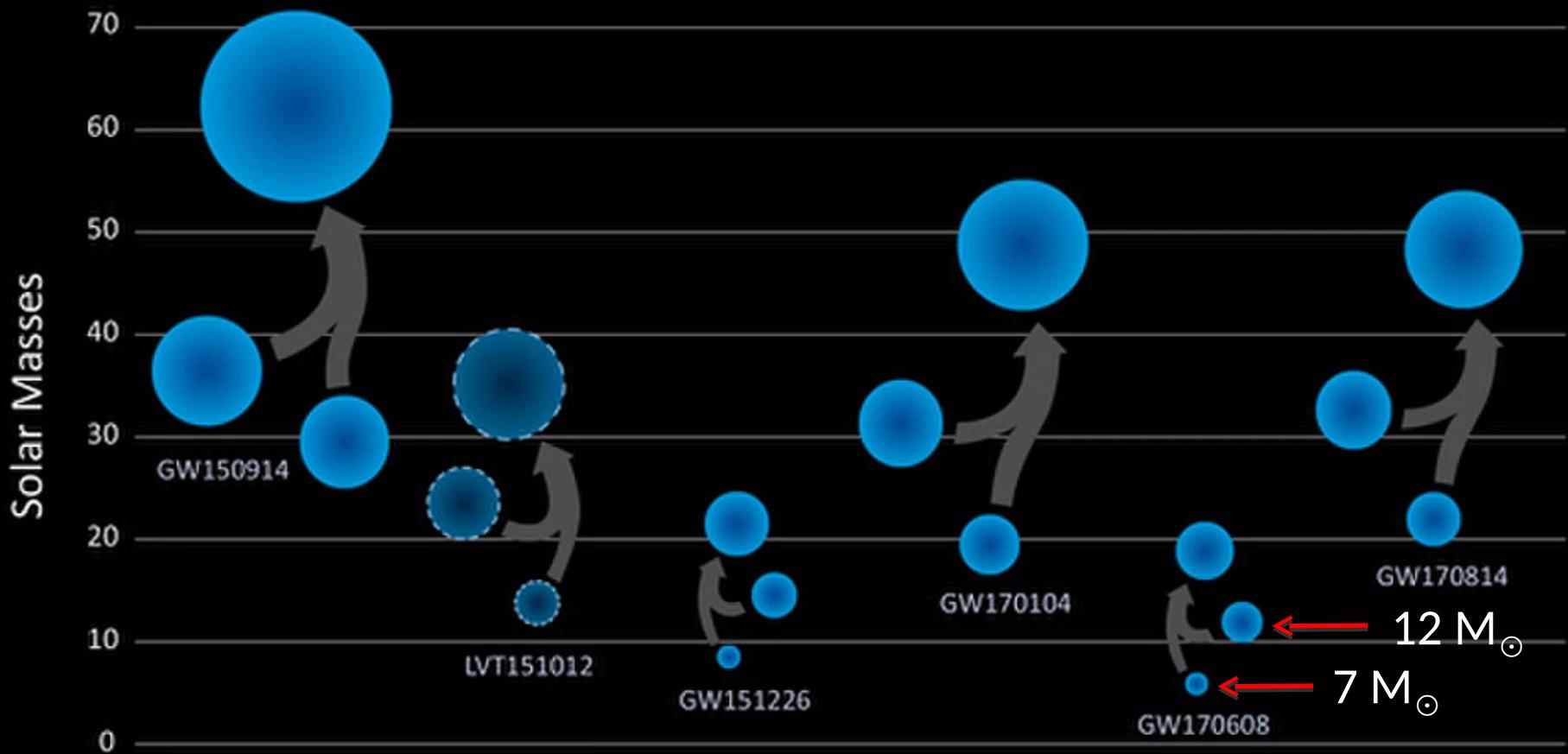


Figure 1. Left: dependence of maximum BH mass on metallicity  $Z$ , with  $Z_\odot = 0.02$  for the old (strong) and new (weak) massive-star winds

# Black Holes of Known Mass

17 nov 2017: fusão de buracos negros de 7 e 12  $M_{\odot}$



# Masses in the Stellar Graveyard

*in Solar Masses*

$M_{\odot}$

160

80

40

20

10

5

3

2

1

$\sim 150 M_{\odot}$

LIGO-Virgo Black Holes

EM Black Holes

EM Neutron Stars

LIGO-Virgo Neutron Stars

<https://www.ligo.org/detections/>

28/10/2020

GWTC-2 plot v1.0

LIGO-Virgo | Frank Elavsky, Aaron Geller | Northwestern

# Massa de buracos negros

**Massa intermediária. IMBH:  $100 - 1000 M_{\odot}$ .**

Talvez formados em ambientes muito densos como aglomerados globulares, pela fusão de estrelas para formar estrela supermassiva e pela fusão de buracos negros de massa estelar.



Omega Centauri

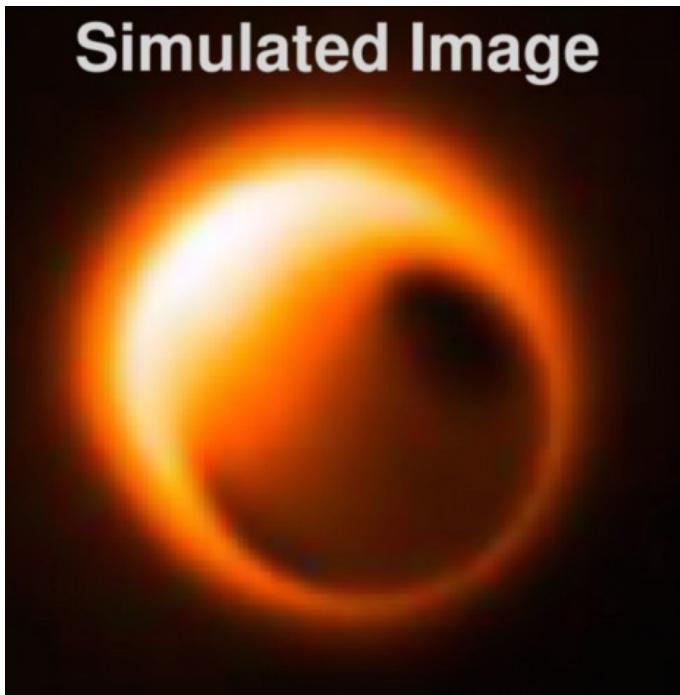
# Massa de buracos negros

**Supermassivos:**  $10^5 - 10^9 M_{\odot}$ .

No centro de provavelmente a maioria das galáxias, incluindo a nossa ( $M \sim 4 \times 10^6 M_{\odot}$ ). **Formação ainda em aberto.** Colapso de gigantesca nuvem primordial? Fusão de buracos negros estelares massivos?



## Simulated Image

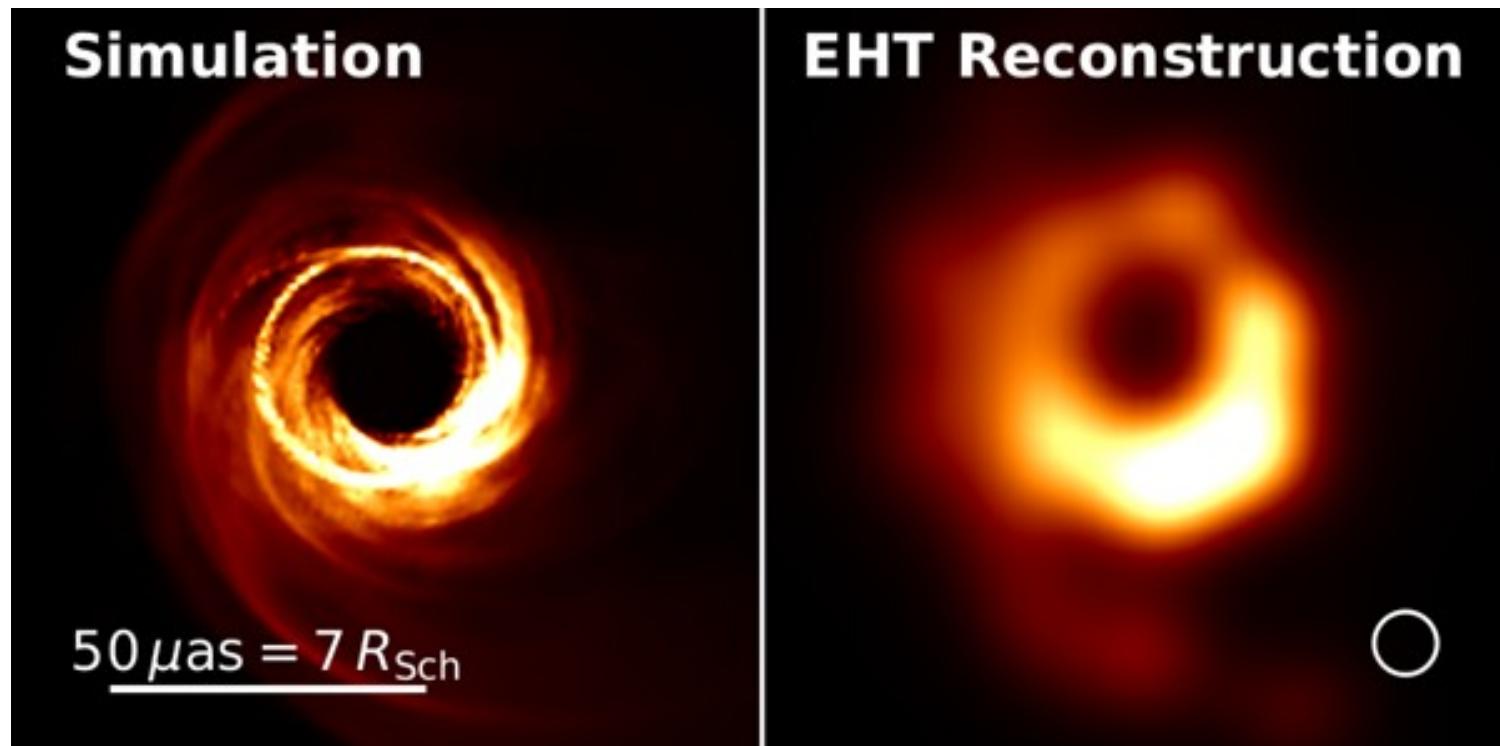


Event horizon telescope:  
Sgr A\*: buraco negro  
central de nossa galáxia  
(4 milhões de  $M_{\odot}$ )

## Event horizon telescope



# Primeira observação do horizonte de evento de um buraco negro, na galáxia M87



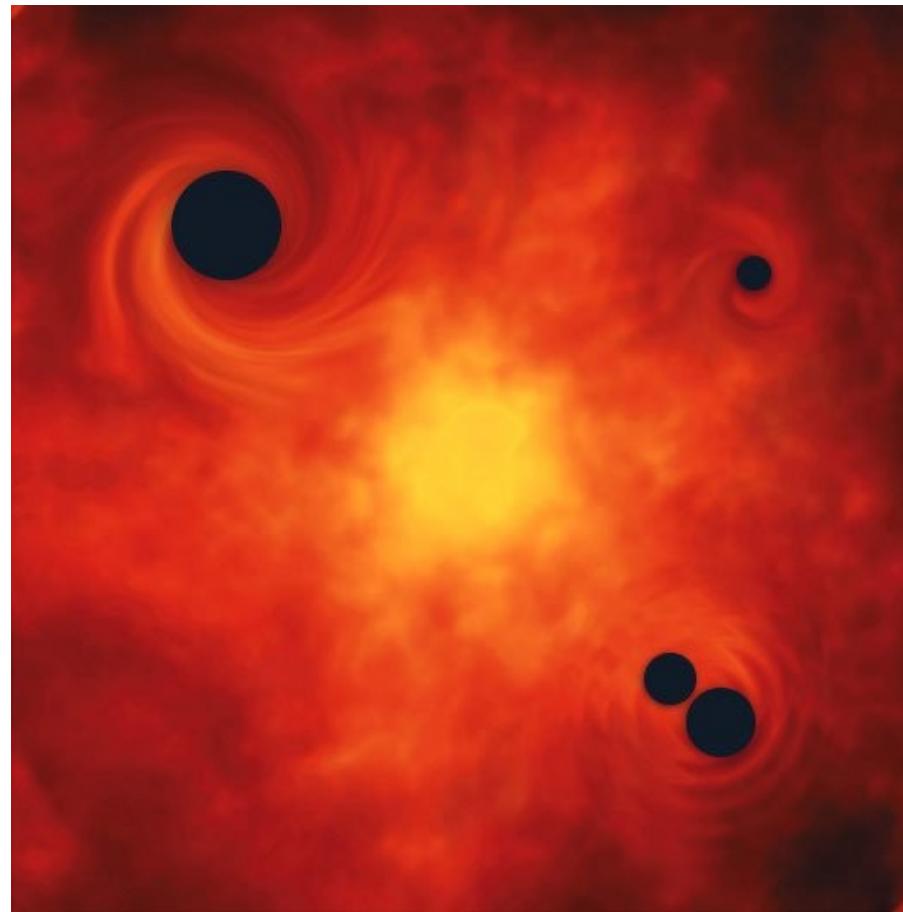
First-ever Image of a Black Hole Published by the Event Horizon Telescope Collaboration

April 10, 2019

# Massa de buracos negros

Primordiais:  $10^{-8}$  kg –  $10^5 M_{\odot}$ .

Formados nos primeiros instantes do universo.



# Terra buraco negro?

**Exemplo 17.3.1.** Qual o raio da Terra para se tornar um buraco negro?

$$R_S = 2GM_\oplus/c^2 = 0.009 \text{ m}$$
$$= 9 \text{ mm}$$



# Teorema da calvície: Buracos negros não têm cabelo

Buracos negros podem ser descritos por apenas 3 propriedades:

- Massa
- Momento angular
- Carga elétrica.



# Singularidades nuas

Momento angular máximo para buraco negro em rotação (de Kerr):  $L_{\max} = \frac{GM^2}{c}$

Se o momento angular for maior → singularidade nua, porem deve ser uma solução não física.

---

**Example 17.3.2.** The maximum angular momentum for a solar-mass black hole is

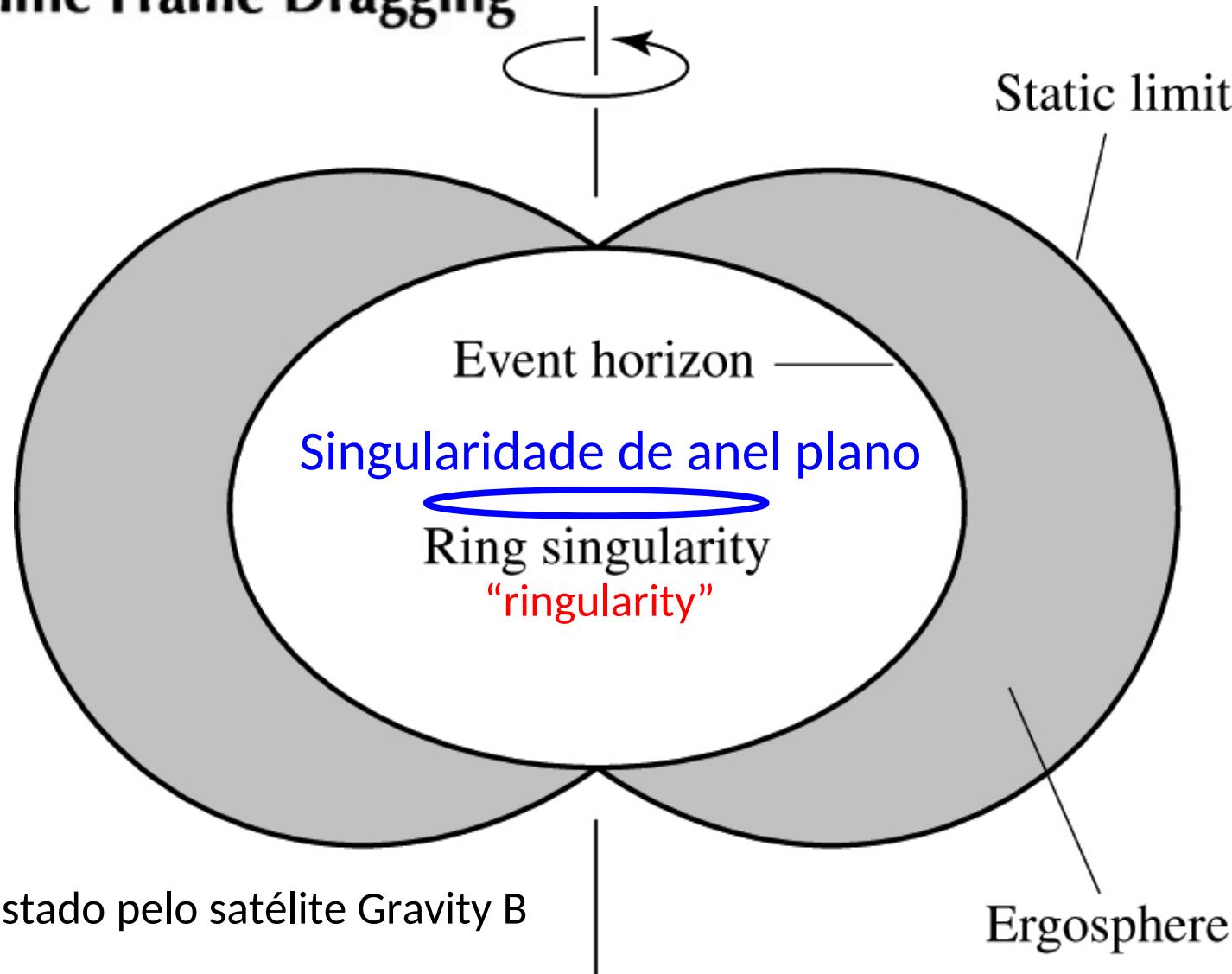
$$L_{\max} = \frac{GM_{\odot}^2}{c} = 8.81 \times 10^{41} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

By comparison, the angular momentum of the Sun (assuming uniform rotation) is  $1.63 \times 10^{41} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ , about 18% of  $L_{\max}$ . We should expect that many stars will have angular momenta that are comparable to  $L_{\max}$ , and so vigorous (if not maximal) rotation ought to be common for stellar-mass black holes.

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega = \frac{1}{2} L c/R$$

$$U \sim (3/5) G M^2 / R$$

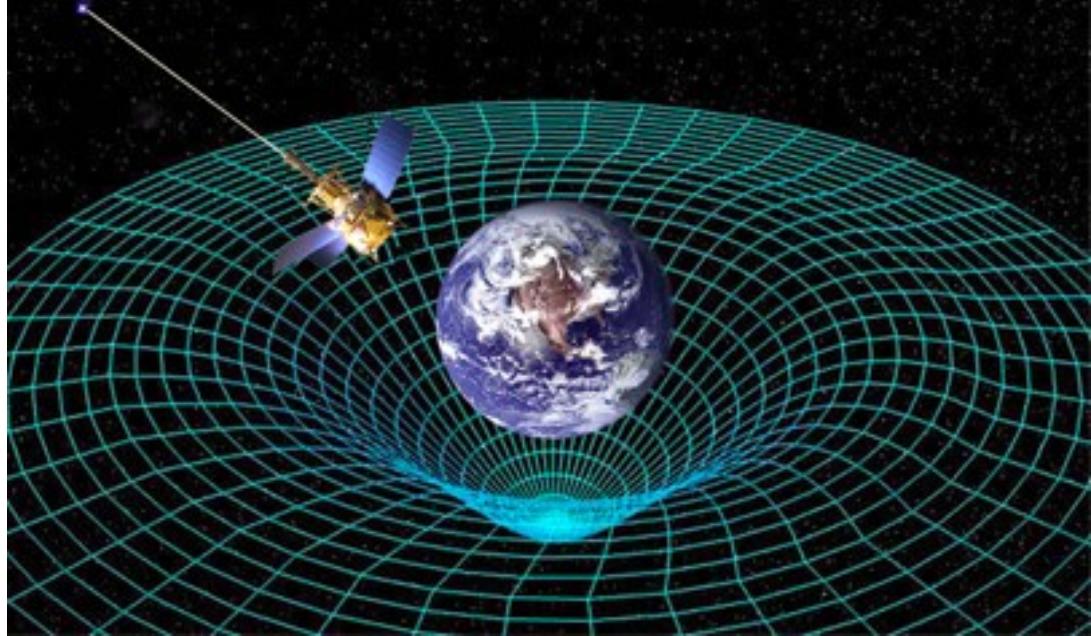
# Arrasto do referencial espaço-temporal Spacetime Frame Dragging



**FIGURE 17.22** The structure of a maximally rotating black hole, with the ring singularity seen edge-on. The location of the event horizon at the equator is  $r = \frac{1}{2}R_S = GM/c^2$ .

# Arrasto da terra testado pelo satélite Gravity B

Everitt et al. 2011, Phys.  
Rev. Lett. 106, 221101

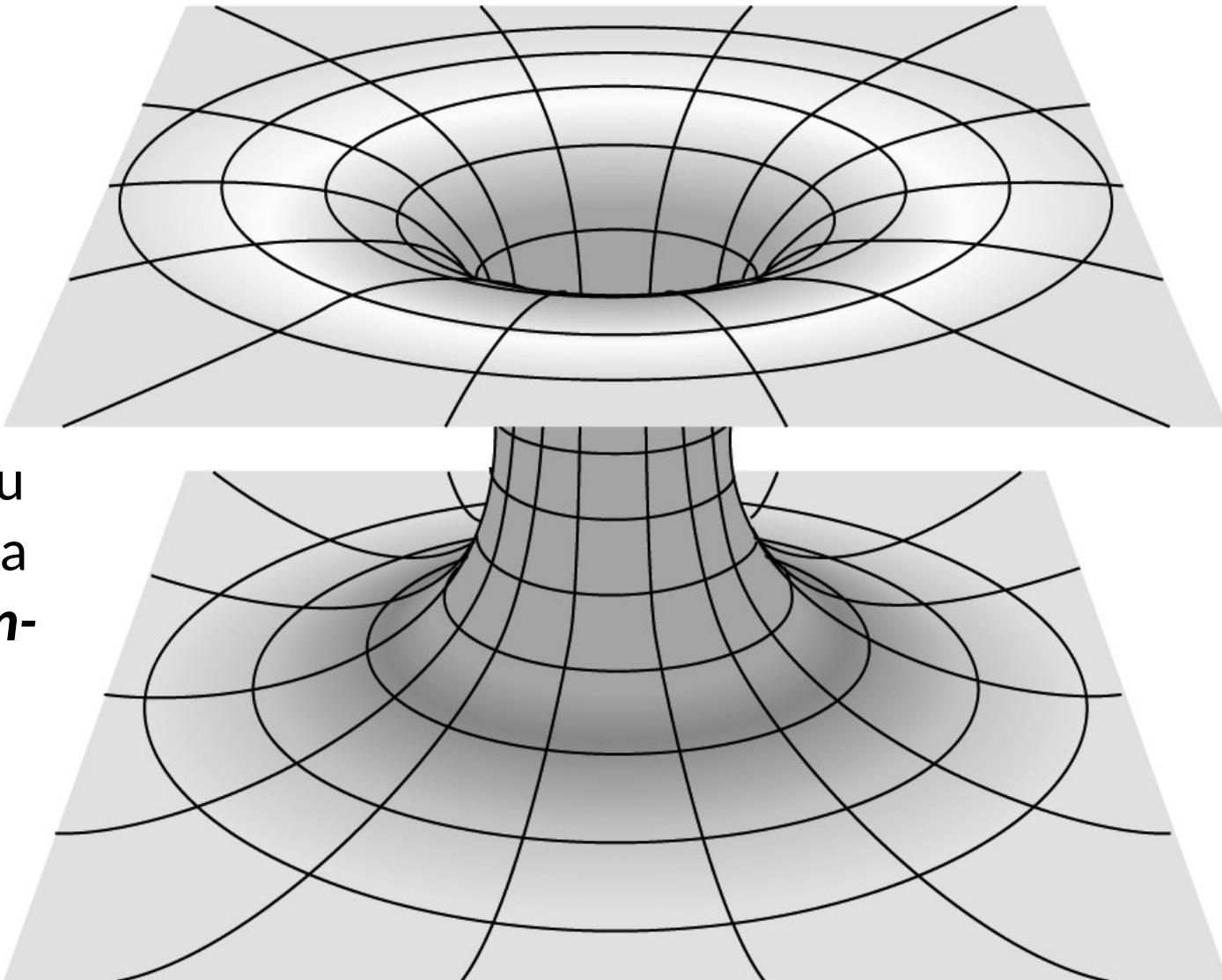


[Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity](#)

Gravity Probe B is a space experiment testing fundamental predictions of Einstein's theory of general relativity (GR). Data collection started 28 August 2004 and ended 14 August 2005. Measured frame-dragging drift rate of  $-37.2 \pm 7.2$  mas/yr, to be compared with the GR predictions of  $-39.2$  mas/yr ("mas" is milliarcsecond;  $1$  mas =  $4.848 \times 10^{-9}$  rad).

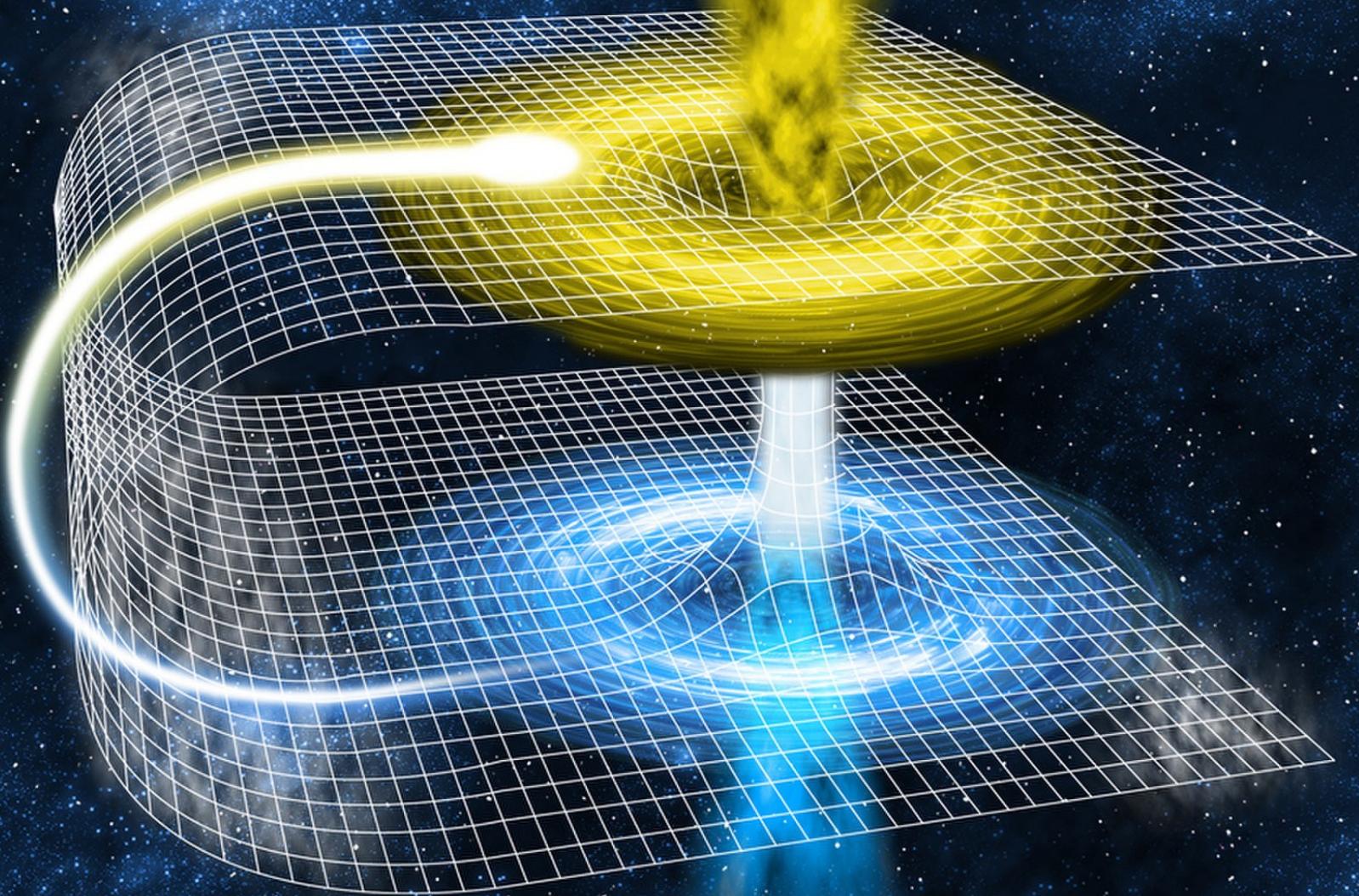
# Túneis no espaço-tempo

**Garganta de Schwarzschild**, ou também chamada **Ponte de Einstein-Rosen**

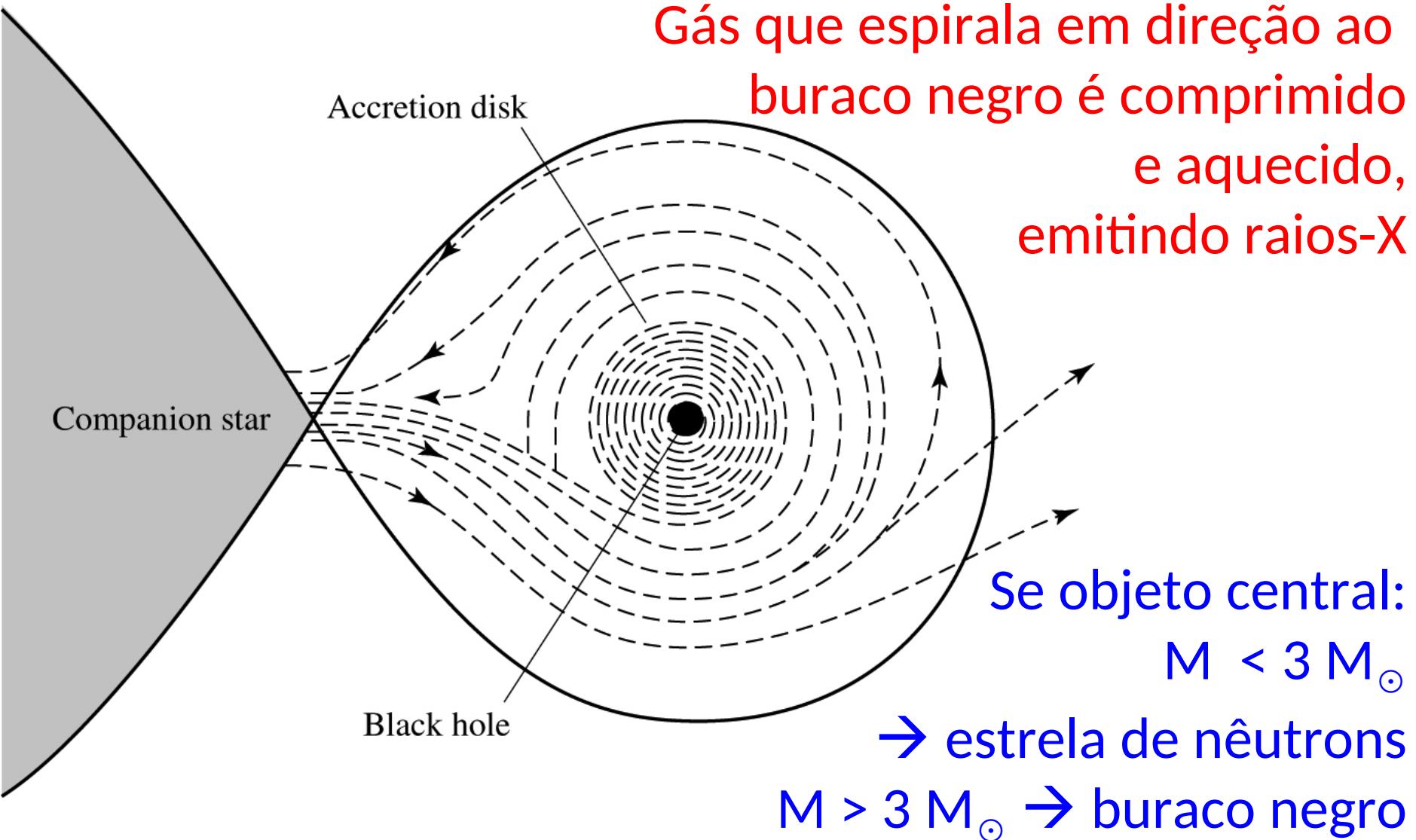


**FIGURE 17.23** Depiction of a Schwarzschild throat connecting two different regions of spacetime. Any attempted passage of matter or energy through the throat would cause it to collapse.

# Buracos de minhoca



# Candidatos a buracos negros de massa estelar

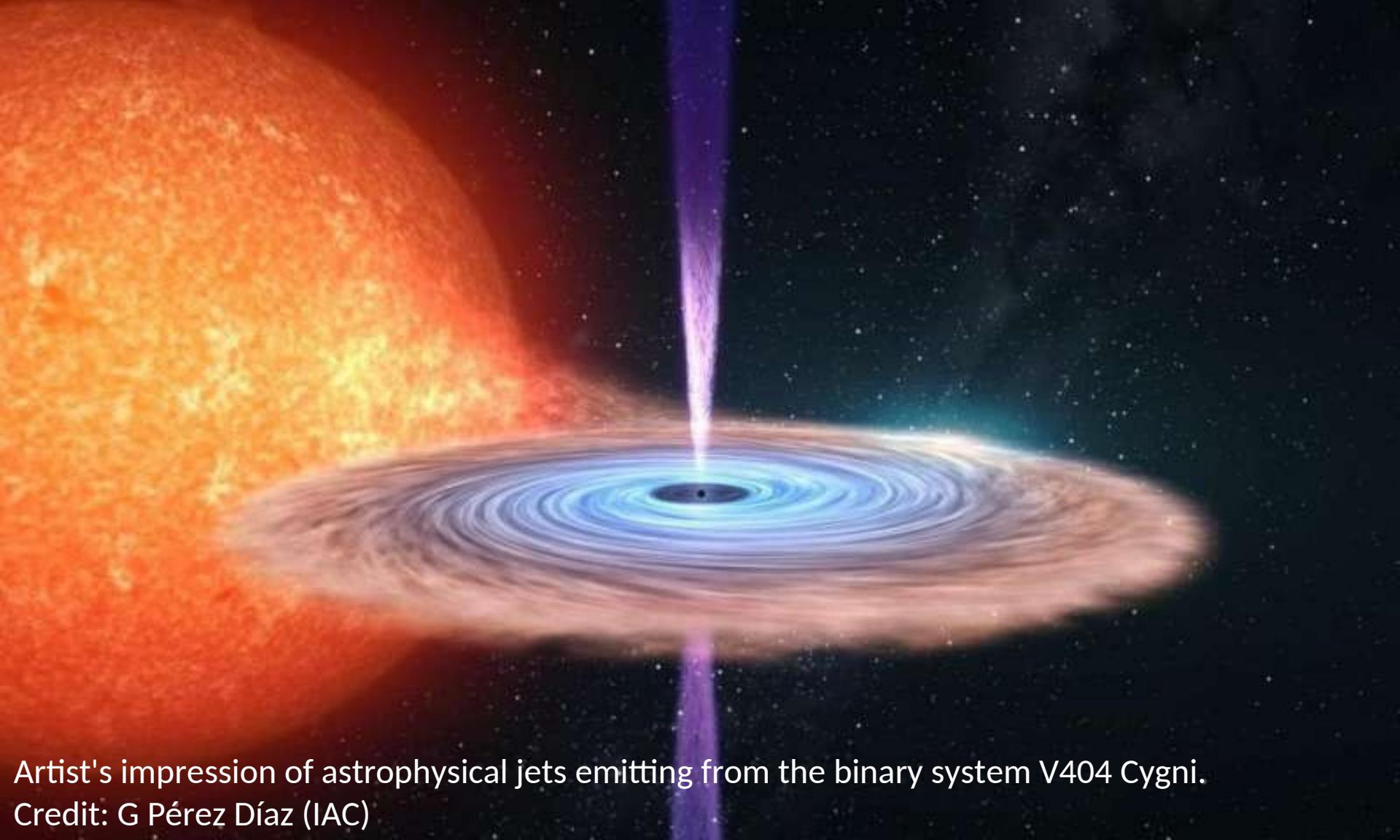


**FIGURE 17.24** Gas pulled from a companion star forms an X-ray emitting disk around a black hole.

# Sistema binário Cygnus X-1: buraco negro de $15 M_{\odot}$



An artist's impression of the HDE 226868-Cygnus X-1 binary system. © ESA/Hubble



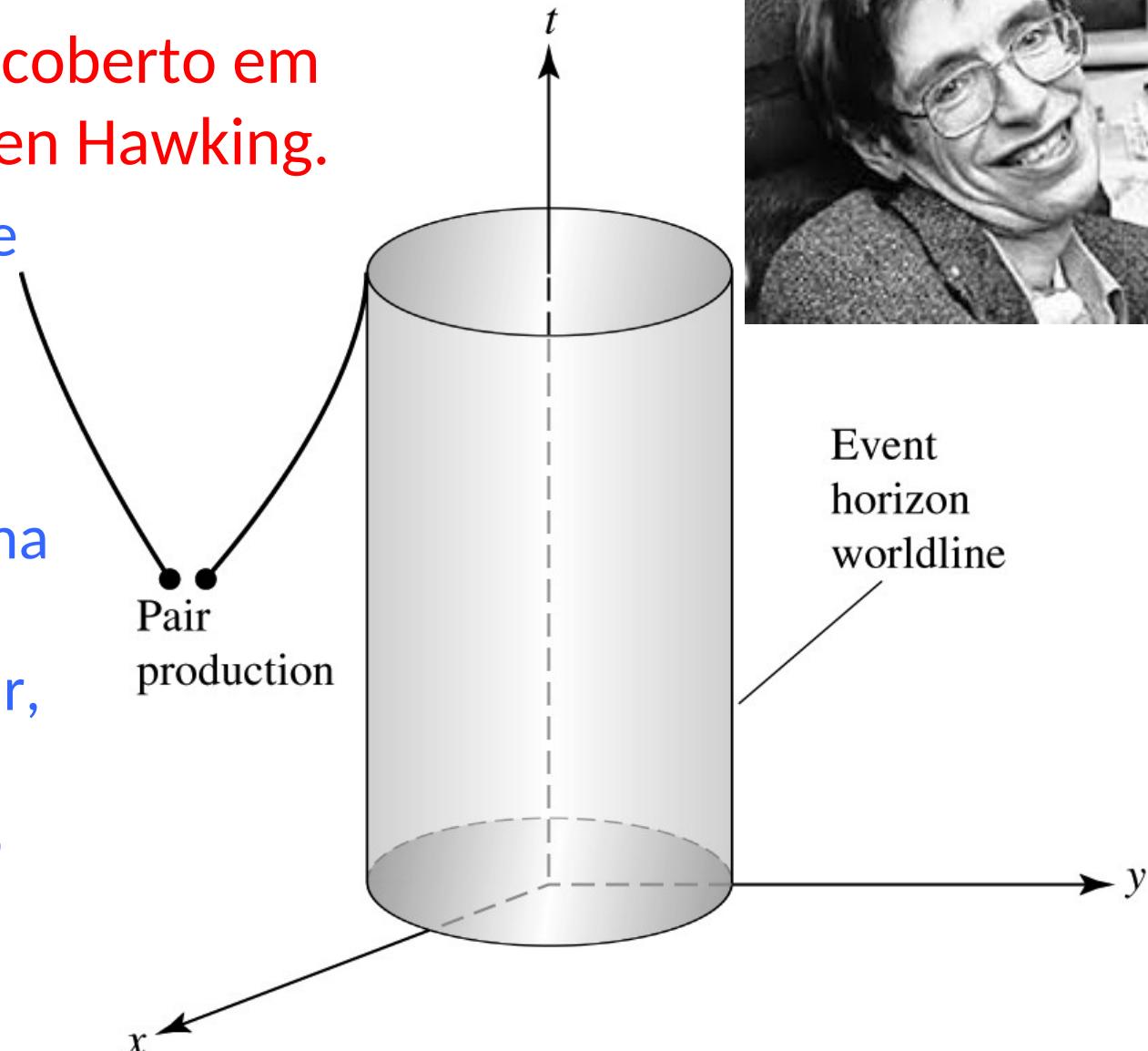
Artist's impression of astrophysical jets emitting from the binary system V404 Cygni.  
Credit: G Pérez Díaz (IAC)

Outro buraco negro estelar: V404 Cygni, buraco negro de  $10 M_{\odot}$   
Estrela companheira: tipo K3III

# Radiação de Hawking

Mecanismo descoberto em 1974 por Stephen Hawking.

Par de partícula e antipartícula é criado usando a energia gravitacional. Uma das partículas consegue escapar, levando parte da massa do buraco negro



**FIGURE 17.25** Spacetime diagram showing particle–antiparticle pairs created near the event horizon of a black hole.

# Tempo de evaporação de buracos negros

$$t_{\text{evap}} = 2560\pi^2 \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{M}{h}\right)$$
$$\approx 2 \times 10^{67} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \text{ yr.}$$

Se  $M = 8 M_\odot \rightarrow$  tempo de evaporação de  $10^{70}$  anos

Se  $M = 1,7 \times 10^{11} \text{ kg} \rightarrow$  evaporação de mini buracos negros primordiais (13 bilhões de anos)

NOTA: ainda não foi detectada radiação final da evaporação de buracos negros primordiais (raios gama 100 MeV, taxa  $10^{13} \text{ W}$ )

Total mass of human population  $\sim 4 \times 10^{11} \text{ kg}$

Mass of the Earth =  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$

# Buracos negros no IAG/USP: Prof. Rodrigo Nemmen



A Ciência do Filme  
Interestelar

Rodrigo Nemmen

4 de Março, 14h  
Auditório do IAG

## Relatividade Geral e Aplicações Astrofísicas

AGA0319

Prof. Rodrigo  
Nemmen



# INPE: astrofísica de ondas gravitacionais: Prof. Odylio Aguiar

