S. Peszat

Wstęp do teorii procesów stochastycznych

4 października 2017

Spis treści

Przedmowa

Tekst zawiera notatki do semestralnego wykładu z ćwiczeniami p.t. “ Procesy stochastyczne” prowadzonego przez autora dla studentów czwartego roku matematyki WMS AGH oraz WMiI UJ.

Celem przedmiotu jest poznanie wybranych pojęć z procesów stochastycznych ważnych z punktu widzenia zastosowań w matematyce finansowej (martyngały, proces Wienera, całka stochastyczna, wzór Itô) oraz wyrobienie intuicji dotyczących własności martyngałowej procesów stochastycznych.

Zawartość programowa:

(1) Warunkowa wartość oczekiwana (4 godziny). Przypomnienie definicji gdy warunkiem jest zdarzenie, zmienna losowa o rozkładzie dyskretnym, partycja, sigma-ciało, dowolna zmienna losowa. Warunkowa wartość oczekiwana w L^2 jako projekcja. Własności warunkowej wartości oczekiwanej. Rodzaje zbieżności zmiennych losowych i ich związki (przypomnienie). Twierdzenia o zbieżności dla warunkowych wartości oczekiwanych. Nierówność Jensena.

(2) Martyngały w czasie dyskretnym (6 godzin). Definicja procesu stochastycznego w czasie dyskretnym, trajektorie, rozkłady, filtracja generowana przez proces. Proces adaptowany, przewidywalny. Definicja martyngału, submartyngału, supermartyngału. Przykłady. Zastosowania w grach losowych. Momenty zatrzymania, proces zastopowany. Twierdzenie o opcjonalnym stopowaniu. Błądzenie przypadkowe, własności momentu pierwszego przejścia przez barierę. Maksymalna nierówności Dooba w L^p. Własności liczby przekroczeń. Twierdzenie Dooba o zbieżności supermartyngału. Jednostajnie całkowalne martyngały, zbieżność. Twierdzenie 0-1 Kołmogorowa.

(3) Łańcuchy Markowa (2 godziny). Definicja i przykłady. Klasyfikacja stanów. Twierdzenie graniczne.

(4) Procesy w czasie ciągłym (4 godziny). Definicja, trajektorie, filtracja, procesy adaptowane. Regularność procesów. Twierdzenie Kołmogorowa o tra-

jektoriach ciągłych. Martyngały w czasie ciągłym, nierówności Dooba. Proces Poissona.

(5) Proces Wienera (4 godziny). Skalowane błądzenie przypadkowe. Definicja procesu Wienera. Konstrukcje procesu Wienera przez twierdzenia Kołmogorowa o rozkładach zgodnych oraz z użyciem falek. Własności trajektorii. Wariacja procesu Wienera.

(6) Całka stochastyczna Itô (10 godzin). Definicja dla funkcji schodkowych w klasie L^2. Aproksymacja procesów schodkowymi. Własności całki: liniowość, izometria. Definicja całki w L^2. Twierdzenie Meyera o niemożności definicji całki stochastycznej po ścieżkach. Rozszerzenie definicji przez lokalizację. Całka jako proces stochastyczny. Persystencja identyczności. Ciągłość trajektorii całki. Wzór Itô, dowód, przykłady zastosowań.

Notatki oparte są na książkach [6], [18], [21], [40]. Autorami części zadań są prowadzący ćwiczenia doktorzy Marcin Pitera, Paweł Przybyłowicz, Dawid Tarłowski, Dariusz Zawisza, którym składam serdeczne podziękowania. Opracowanie zawieraja również zadania zebrane z internetu o trudnym do ustaleniu pochodzeniu. Notatki nie pretendują do oryginalności i nie są przeznaczone do szerszego rozprowadzania.

Liczba godzin: 30 godzin wykładu + 30 godzin ćwiczeń
Forma zaliczenia: forma zaliczenia ćwiczeń: dwa kolokwia, forma zaliczenia wykładu: egzamin pisemny i ustny.

1

Przypomnienie podstawowych pojęć z rachunku prawdopodobieństwa i teorii miary

Celem tego rodziału jest przypomnienie podstawowych definicji i twierdzeń z teorii miary i rachunku prawdopodobieństwa. Brakujące dowody twierdzeń można znaleźć na przykład w [17, 21, 22, 28].

Przyjmujemy następujące oznaczenia: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{C}$ to odpowiednio zbiory liczb rzeczywistych, naturalnych, całkowitych, wymiernych i zespolonych. Ponadto dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a \wedge b = \min\{a, b\}, \qquad a \vee b = \max\{a, b\}.$$

Przez $\operatorname{Int} A$ i $\overline{A}$ oznaczamy wnętrze (interior) oraz domknięcie podzbioru A przestrzeni topologicznej (X, τ). Niech $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ oznacza uzupełniony zbiór liczb rzeczywistych. Na $\overline{\mathbb{R}}$ rozważamy topologię, której bazą zbiorów otwartych jest rodzina

$$\{\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \colon \mathcal{O} = \operatorname{Int} \mathcal{O}\} \cup \{(a, +\infty] \colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, a) \colon a \in \mathbb{R}\}.$$

1.1 Przestrzenie mierzalne

Niech Ω będzie zbiorem a $\mathfrak{F}$ rodziną podzbiorów Ω.

Definicja 1.1 Rodzina $\mathfrak{F}$ jest *ciałem zbiorów* (lub *algebrą zbiorów*) gdy:

- $\Omega \in \mathfrak{F}$,
- jeśli $A \in \mathfrak{F}$ to $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{F}$,
- jeśli $A, B \in \mathfrak{F}$ to $A \cup B \in \mathfrak{F}$.

Definicja 1.2 Mówimy, że $\mathfrak{F}$ jest *σ-ciałem* (lub *σ-algebrą*) gdy jest ciałem oraz gdy dla dowolnego ciągu $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{F}$,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}.$$

Definicja 1.3 Parę $(\Omega, \mathfrak{F})$ złożoną ze zbioru Ω i σ-ciała podzbiorów Ω nazywamy *przestrzenią mierzalną*.

Elementy σ-ciała $\mathfrak{F}$ nazywamy *zbiorami mierzalnymi* lub stosując terminologię teorii prawdopodobieństwa *zdarzeniami*.

Zadanie 1.1 Niech $\Omega = \mathbb{N}$ oraz niech

$$\mathfrak{F} := \{A \subset \mathbb{N}\colon \#A < \infty \text{ lub } \#A^c < \infty\},$$

gdzie przez $\#A$ oznaczamy liczność zbioru A. Pokazać, że $\mathfrak{F}$ jest ciałem ale nie jest σ-ciałem.

Odpowiedź Łatwo pokazać, że $\mathfrak{F}$ jest ciałem. Nie jest σ-ciałem bo na przykład zbiór liczb parzystych nie należy do $\mathfrak{F}$ ale jest sumą przeliczalną zbiorów z $\mathfrak{F}$, mianowicie

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2n\}.$$

Zadanie 1.2 Pokazać, że jeżeli $\mathfrak{F}$ jest ciałem podzbiorów Ω, to

(a) $\emptyset \in \mathfrak{F}$,
(b) $A, B \in \mathfrak{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$,
(c) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Jeżeli ponadto $\mathfrak{F}$ jest σ-ciałem, to dla dowolnego ciągu $\{A_n\} \subset \mathfrak{F}$,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}.$$

Odpowiedź Wszystkie punkty wynikają z następujących związków

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, \quad A \setminus B = A \cap B^c, \qquad \bigcap_{n\in N} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c.$$

Twierdzenie 1.1 (i) *Niech* $\{\mathfrak{F}_i, i \in \mathcal{I}\}$ *będzie rodziną* σ*-ciał podzbiorów* Ω *indeksowana zbiorem* $\mathcal{I}$*. Wówczas* $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{F}_i$ *jest* σ*-ciałem.*
(ii) *Dla dowolnej rodziny* $\mathcal{G}$ *podzbiorów* Ω *istnieje (dokładnie jedno) najmniejsze w sensie zawierania* σ*-ciało zawierające* $\mathcal{G}$*.*

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\{A_n\} \subset \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{F}_i &\Longrightarrow \forall\, i \in \mathcal{I},\ \{A_n\} \subset \mathfrak{F}_i \\ &\Longrightarrow \forall\, i \in \mathcal{I} \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}_i \\ &\Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{F}_i.\end{aligned}$$

Oznaczmy przez $\mathcal{I}$ rodzinę wszystkich σ-ciał zawierających $\mathcal{G}$. Jest ona niepusta bo rodzina wszystkich podzbiorów Ω jest oczywiście σ-ciałem zawierającym $\mathcal{G}$. Wówczas najmniejszym σ-ciałem zawierającym $\mathcal{G}$ jest $\bigcap_{\mathfrak{F}\in\mathcal{I}}\mathfrak{F}$. $\square$

W dalszym ciągu będziemy oznaczali przez $\sigma(\mathcal{G})$ najmniejsze σ ciało zawierające $\mathcal{G}$. Będziemy nazywali $\sigma(\mathcal{G})$, *σ-ciałem generowanym przez $\mathcal{G}$.*

1.2 Zbiory borelowskie

Niech $\Omega = \mathbb{R}^n$. Przypomnijmy, że przez $\operatorname{Int} A$ oraz $\overline{A}$ oznaczamy wnętrze i domknięcie zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$. Niech

- $\mathcal{G}_1 = \{A \subset \mathbb{R}^n \colon A = \operatorname{Int} A\}$,
- $\mathcal{G}_2 = \left\{A \subset \mathbb{R}^n \colon A = \overline{A}\right\}$,
- $\mathcal{G}_3 = \{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \colon a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G}_4 = \{(-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2] \times \ldots \times (-\infty, a_n] \colon \{a_j\} \subset \mathbb{R}\}$.

Twierdzenie 1.2 *Zachodzi*

$$\sigma(\mathcal{G}_1) = \sigma(\mathcal{G}_2) = \sigma(\mathcal{G}_3) = \sigma(\mathcal{G}_4).$$

Dowód. Ponieważ $\mathcal{G}_1 \subset \sigma(\mathcal{G}_2)$ i $\mathcal{G}_2 \subset \sigma(\mathcal{G}_1)$, otrzymujemy $\sigma(\mathcal{G}_1) = \sigma(\mathcal{G}_2)$. Ponieważ

$$(-\infty, a_1] \times \ldots \times (-\infty, a_n] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [a_1 - k, a_1] \times \ldots \times [a_n - k, a_n],$$

otrzymujemy $\mathcal{G}_4 \subset \sigma(\mathcal{G}_3)$ i w konsekwencji $\sigma(\mathcal{G}_3) \subset \sigma(\mathcal{G}_4)$. Ponieważ

$$(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (-\infty, a_1 - 1/m] \times \ldots \times (-\infty, a_n - 1/m],$$

$$(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) \in \sigma(\mathcal{G}_4).$$

Stąd łatwo pokazać, że $\mathcal{G}_3 \subset \sigma(\mathcal{G}_4)$, a więc $\sigma(\mathcal{G}_3) = \sigma(\mathcal{G}_4)$. Oczywiście $\mathcal{G}_3 \subset \sigma(\mathcal{G}_2) = \sigma(\mathcal{G}_1)$. Dowód zostanie więc zakończony gdy pokażemy, że $\mathcal{G}_1 \subset \sigma(\mathcal{G}_3)$. W tym celu ustalmy zbiór otwarty $\mathcal{O}$ w $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy przez $\mathcal{I}$ rodzinę wszystkich kostek

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

zawartych w $\mathcal{O}$ o końcach wymiernych, to jest $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$. Wówczas $\mathcal{I}$ jest zbiorem przeliczalnym. Ponadto

$$\mathcal{O} = \bigcup_{A\in\mathcal{I}} A. \qquad \square$$

Definicja 1.4 *σ-ciałem zbiorow borelowskich* jest σ-ciało generowane przez rodzinę zbiorów otwartych (lub równoważnie domkniętych, kostek domkniętych, kostek nieograniczonych).

Przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ oznaczamy σ ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}^d$. Poniżej podamy definicję σ-ciała podzbiorów borelowskich dowolnej przestrzeni topologicznej.

Definicja 1.5 Jeżeli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną, to przez $\mathcal{B}(X)$ oznaczamy najmniejsze σ-ciało zawierające zbiory otwarte (lub co jest równoważne domknięte). Rodzinę $\mathcal{B}(X)$ nazywamy *σ-ciałem zbiorów borelowskich X*.

Przypomnijmy, że $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ oznacza uzupełniony zbiór liczb rzeczywistych, z topologią, której bazą zbiorów otwartych jest rodzina

$$\{\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \colon \mathcal{O} = \operatorname{Int} \mathcal{O}\} \cup \{(a, +\infty] \colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, a) \colon a \in \mathbb{R}\}.$$

Przez $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ oznaczamy rodzinę podzbiorów borelowskich $\overline{\mathbb{R}}$.

Zadanie 1.3 Pokazać, że σ ciało zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ generowane jest przez rodzinę $\{[-\infty, a] \colon a \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Odwzorowania mierzalne

Definicja 1.6 Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$ i $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$ będą dwoma przestrzeniami mierzalnymi. Odwzorowanie $\xi \colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ nazywamy *odwzorowaniem mierzalnym* gdy spełniony jest warunek

$$\forall\, A \in \tilde{\mathfrak{F}}, \quad \xi^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

Twierdzenie 1.3 *Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$ i $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$ będą dwoma przestrzeniami mierzalnymi oraz niech $\xi \colon \Omega \to \tilde{\Omega}$. Załóżmy, że $\tilde{\mathfrak{F}} = \sigma(\mathcal{G})$ dla jakiejś rodziny $\mathcal{G}$ podzbiorów $\tilde{\Omega}$. Wówczas jeżeli*

$$\forall\, A \in \mathcal{G}, \quad \xi^{-1}(A) \in \mathfrak{F},$$

to ξ jest odwzorowaniem mierzalnym.

Dowód. Wystarczy pokazać, że

$$\left\{A \in \tilde{\mathfrak{F}} \colon \xi^{-1}(A) \in \mathfrak{F}\right\}$$

jest σ-ciałem. $\square$.

Wniosek 1.1 *Jeżeli $\xi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ jest ciągłe, to ξ jest mierzalne.*

Dowód. Odwzorowanie jest ciągłe gdy dla każdego otwartego $A \subset \mathbb{R}^d$, $\xi^{-1}(A)$ jest otwarte. $\square$

Twierdzenie 1.4 *Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$, $(\hat{\Omega}, \hat{\mathfrak{F}})$ będą przestrzeniami mierzalnymi oraz niech $\xi\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ i $\eta\colon \tilde{\Omega} \to \hat{\Omega}$ będą odwzorowaniami mierzalnymi. Wówczas $\eta \circ \xi\colon \Omega \to \hat{\Omega}$ jest mierzalne.*

Dowód.

$$(\eta \circ \xi)^{-1}(A) = \xi^{-1}(\eta^{-1}(A)). \qquad \square$$

Wniosek 1.2 *Jeżeli $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ mierzalne, to ξ_j, $j = 1, \ldots, d$ mierzalne.*

Dowód.

$$\xi_j = p_j \circ \xi,$$

gdzie

$$p_j(x_1, x_2, \ldots, x_d) = x_j$$

jest projekcją na j-tą współrzędną. Rezultat wynika z faktu, że p_j ciągłe. $\square$

Definicja 1.7 Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$ i $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$ będą przestrzeniami mierzalnymi. Przez $\mathfrak{F} \times \tilde{\mathfrak{F}}$ oznaczamy najmniejsze σ-ciało podzbiorów $\Omega \times \tilde{\Omega}$ zawierające zbiory postaci $A \times B$ gdzie $A \in \mathfrak{F}$ a $B \in \tilde{\mathfrak{F}}$. Nazywamy $\mathfrak{F} \times \tilde{\mathfrak{F}}$, *$\sigma$-ciałem produktowym* lub *produktem σ-ciał $\mathfrak{F}$ i $\tilde{\mathfrak{F}}$.*

Uwaga 1.1 Rodzina

$$\mathcal{G} := \{A \times B\colon A \in \mathfrak{F},\ B \in \tilde{\mathfrak{F}}\}$$

nie jest σ-ciałem (nie jest nawet ciałem) o ile Ω lub $\tilde{\Omega}$ nie są trywialne. Stąd inkluzja $\mathcal{G} \subset \mathfrak{F} \times \tilde{\mathfrak{F}}$ jest zwykle silna.

W poniższych twierdzeniach na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ rozważamy σ-ciało zbiorów borelowskich (lub co jest równoważne) σ-ciało produktowe.

Twierdzenie 1.5 *Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$ i $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$ będą przestrzeniami mierzalnymi oraz niech $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ i $g\colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ będą odwzorowaniami mierzalnymi. Wówczas odwzorowanie*

$$f \times g\colon \Omega \times \tilde{\Omega} \ni (\omega, \tilde{\omega}) \to (f(\omega), g(\tilde{\omega}) \in \mathbb{R}^2$$

jest mierzalne.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 1.3 wystarczy pokazać, że dla dowolnych borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}$,

$$(f \times g)^{-1}(A \times B) \in \mathfrak{F} \times \tilde{\mathfrak{F}}.$$

Ale

$$(f \times g)^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \times g^{-1}(B). \qquad \square$$

Twierdzenie 1.6 *Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$ będzie przestrzenią mierzalną oraz niech*

$$f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$$

będą odwzorowaniami mierzalnymi. Wówczas odwzorowanie

$$(f, g) \colon \Omega \ni \omega \to (f(\omega), g(\omega)) \in \mathbb{R}^2$$

jest mierzalne.

Dowód. Mamy

$$(f, g)^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B). \qquad \square$$

Ponieważ odwzorowania

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to \min\{x, y\} \in \mathbb{R}$$

oraz

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to \max\{x, y\} \in \mathbb{R}$$

są ciągłe, z Wniosku 1.1 i Twierdzenia 1.6 otrzymujemy następujący rezultat.

Wniosek 1.3 *Jeżeli $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ są mierzalne, to mierzalne są też odwzorowania $max\{f, g\}$ i $\min\{f, g\}$.*

Przypomnijmy, że granica dolna i górna ciągu odwzorowań (f_n), gdzie $f_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ zdefiniowane są następująco

$$\limsup_{n \to \infty} f_n(\omega) := \lim_{n \to \infty} \sup_{m \geq n} f_m(\omega), \qquad \omega \in \Omega$$

oraz

$$\liminf_{n \to \infty} f_n(\omega) := \lim_{n \to \infty} \inf_{m \geq n} f_m(\omega), \qquad \omega \in \Omega.$$

Jeżeli dla $\omega \in \Omega$ istnieje granica

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\omega)$$

to

$$\liminf_{n \to \infty} f_n(\omega) = \lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = \limsup_{n \to \infty} f_n(\omega).$$

Twierdzenie 1.7 *Niech (f_n) będzie ciągiem odwzorowań mierzalnych przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{F})$ w $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Wówczas granice $\liminf f_n$ i $\limsup f_n$ są mierzalne.*

Dowód. Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\left\{\omega \colon \limsup_{n \to \infty} f_n(\omega) \leq x\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} \left\{\omega \in \Omega \colon f_n(\omega) \leq x\right\}.$$

Podobnie

$$\left\{\omega \colon \liminf_{n \to \infty} f_n(\omega) > x\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \left\{\omega \in \Omega \colon f_n(\omega) > x\right\}. \quad \square$$

Wniosek 1.4 *Jeżeli (f_n) jest ciągiem odwzorowań mierzalnych i jeżeli dla każdego $\omega \in \Omega$ istnieje*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega),$$

to odwzorowanie

$$\Omega \ni \omega \to \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \in \overline{\mathbb{R}}$$

jest mierzalne.

1.4 Miary i przestrzenie probabilistyczne

Definicja 1.8 Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Odwzorowanie $\mu\colon \mathfrak{F} \to [0, +\infty]$ nie równe tożsamościowo $+\infty$ nazywamy *miarą* (czasami mówi się *miarą σ-addytywną*) gdy spełnia następujący warunek σ-addytywności

- dla dowolnego ciągu $\{A_n\} \subset \mathfrak{F}$ zbiorów parami rozłącznych, to jest spełniających $A_n \cap A_m = \emptyset$ gdy $n \neq m$ mamy
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definicja 1.9 Jeżeli μ jest miarą na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{F})$ dla której istnieje ciag $(\Omega_n) \subset \mathfrak{F}$ taki, że:

- $\mu(\Omega_n) < \infty$ dla każdego n,
- $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$,

to nazywamy ją *miarą σ-skończoną.*

Niech Ω będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa a μ miarą na $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Przypomnijmy, że $\mathcal{B}(\Omega)$ jest σ-ciałem zbiorów Borelowskich w Ω, czyli σ-ciałem generowanym przez rodzinę zbiorów otwartych (równoważnie rodzinę zbiorów domkniętych).

Definicja 1.10 Miara μ jest:

- *wewnętrzenie regularna* gdy
$$\mu(\Gamma) = \sup\{K \subset \Gamma\colon K \text{ zwarty}\}, \qquad \forall\, \Gamma \in \mathcal{B}(\Omega),$$
- *lokalnie skończona*, jeżeli każdy punkt $\omega \in \Omega$ ma otoczenie skończonej miary,
- *miarą Radona*, jeżeli jest wewnętrznie regularna i lokalnie skończona.

Definicja 1.11 Jeżeli μ jest miarą na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{F})$ spełniającą $\mu(\Omega) = 1$, to nazywamy ją *miarą probabilistyczną* lub *prawdopodobieństwem.* Zwykle miarę probabilistyczną oznaczamy przez $\mathbb{P}$. Trójkę $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ złożoną z przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{F})$ i z określonym na niej prawdopodobieństwem nazywamy *przestrzenią probabilistyczną.* W przypadku przestrzeni probabilistycznej zbiór Ω nazywamy *zbiorem zdarzeń elementarnych*, a $\mathfrak{F}$ *zbiorem zdarzeń.*

Tak więc przez *zdarzene* rozumiemy dowolny zbiór z $\mathfrak{F}$. Są to podzbiory dla których określone jest prawdopodobieństwo ich wystąpienia.

Definicja 1.12 Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Wówczas mierzalne odwzorowanie $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, gdzie na $\mathbb{R}^d$ rozważamy σ ciało zbiorów borelowskich, nazywamy *d-wymiarowym wektorem losowym*, lub *d-wymiarowym elementem losowym*. Jednowymiarowe wektory losowe nazywamy *zmiennymi losowymi*.

Niech $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$. Przez $\sigma(\xi)$ oznaczamy najmniejsze σ-ciało podzbiorów Ω takie, ze $\xi\colon (\Omega, \sigma(\xi)) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ jest mierzalne. $\sigma(\xi)$ nazywamy *σ-ciałem generowanym przez ξ*.

Twierdzenie 1.8 *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Wówczas:*

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
(ii) $\forall\, A \in \mathfrak{F}$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
(iii) $\forall\, A, B \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$,
(iv) $\forall\, A, B \in \mathfrak{F}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
(v) $\forall\, \{A_n\} \subset \mathfrak{F}\colon A_n \subset A_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(vi) $\forall\, \{A_n\} \subset \mathfrak{F}\colon A_{n+1} \subset A_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Dowód. $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset)$.

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A\cup(B\setminus A\cap B)) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B-\setminus A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mathbb{P}\left(A_1 \cup \bigcup_n (A_{n+1} - A_n)\right) = \mathbb{P}(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_n)\right). \qquad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 1.9 *Niech $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ będzie wektorem losowym. Wówczas $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ określona następująco*

$$\mu(A) = \mathbb{P}(\xi \in A) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(A)), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \tag{1.1}$$

jest miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Definicja 1.13 Prawdopodobieństwo zdefiniowane przez (1.1) nazywamy *rozkładem wektora losowego* ξ.

Definicja 1.14 Niech ξ będzie zmienną losową. Wówczas funkcję

$$F(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

nazywamy *dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej* ξ.

Twierdzenie 1.10 *Dystrybuanta F rozkładu zmiennej losowej ma następujące własności:*

- *F jest niemalejąca,*
- *$F(x) \to 0$ gdy $x \to -\infty$ i $F(x) \to 1$ gdy $x \to +\infty$,*
- *F jest prawostronnie ciągła.*

Dowód. Prawostronna ciągłość dystrybuanty wynika z Twierdzenia 1.8(vi). Istotnie

$$\begin{aligned}\lim_{x \downarrow x_0} F(x) &= \lim_{x \downarrow x_0} \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{x > x_0} (-\infty, x] \right) \\ &= \mathbb{P}((-\infty, x_0]) \\ &= F(x_0). \qquad \square\end{aligned}$$

1.5 Twierdzenie o $\pi - \lambda$ systemach

Definicja 1.15 Rodzina $\mathcal{G}$ podzbiorów zbioru Ω jest π-*układem*, jeśli

$$A, B \in \mathcal{G} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{G}.$$

Definicja 1.16 Rodzina $\mathcal{G}$ podzbiorów zbioru Ω jest λ-*układem*, jeśli

- $\Omega \in \mathcal{G}$,
- $\forall\, A, B \in \mathcal{G}$, $B \subset A \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{G}$,
- $\forall\, \{A_n\} \subset \mathcal{G}\colon A_n \subset A_{n+1}\ \forall\, n$, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$.

Twierdzenie 1.11 *(Dynkina–Sierpińskiego o $\pi - \lambda$-układach) Jeśli λ układ $\mathcal{G}$ zawiera π-układ $\mathcal{H}$, to $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{G}_0$ będzie najmniejszym λ-układem zawierającym $\mathcal{H}$. Niech

$$\mathcal{C} = \{A \subset \Omega\colon A \cap B \in \mathcal{G}_0\ \forall\, B \in \mathcal{H}\}.$$

Oczywiście $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$. Ponadto $\mathcal{C}$ jest λ-układem. Istotnie, jeżeli $A, B \in \mathcal{C}$ są takie, że $A \subset B$, to dla każdego $C \in \mathcal{H}$,

$$(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C).$$

Tak więc $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{C}$. Czyli $A \in \mathcal{G}_0$ i $B \in \mathcal{H}$ implikuje, że $A \cap B \in \mathcal{G}_0$. Teraz wystarczy pokazać, że $A, B \in \mathcal{G}_0 \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{G}_0$. W tym celu rozważmy

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{B \subset \Omega \colon A \cap B \in \mathcal{G}_0, \ \forall\, A \in \mathcal{G}_0\}\,.$$

Pokazuje się, że $\tilde{\mathcal{C}}$ jest λ-układem zawierającym $\mathcal{H}$, a więc i $\mathcal{G}_0$. Czyli $\mathcal{G}_0$ jest zamknięty ze względu na przecięcia. $\square$

Jako zastosowanie wykażemy, że rozkłady zmiennych losowych są jednoznacznie wyznaczone przez ich dystrybuanty.

Twierdzenie 1.12 *Jeżeli μ i ν są rozkładami prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$ takimi, że*

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]) = F_\nu(x) := \nu((-\infty, x]), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

to $\mu = \nu$.

Dowód. Niech $\mathcal{G}$ będzie zbiorem tych $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dla których $\mu(A) = \nu(A)$. Pokazujemy, że $\mathcal{G}$ jest λ-układem. Następnie $\mathcal{G}$ zawiera π układ $\mathcal{H}$ zbiorów postaci $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$. Stąd zawiera $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Inną ważną konsekwencją twierdzenia o $\pi - \lambda$ systemach jest następujący lemat.

Lemat 1.1 (O regularności miary) *Niech μ będzie skończoną miarą na przesterzeni metrycznej (E, ρ) z σ-ciałem zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(E)$. Wówczas dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(E)$,*

$$\mu(B) = \sup_{F \subset B \colon F = \overline{F}} \mu(F) = \inf_{U \supset B \colon U = \mathrm{Int}\, U} \mu(U). \tag{1.2}$$

Dowód. Niech $\mathcal{G}$ oznacza klasę tych zbiorów $B \in \mathcal{B}(E)$, dla których zachodzi (1.2). Pokazuje się, że $\mathcal{G}$ jest λ-układem. Niech $\mathcal{U}$ będzie klasą zbiorów otwartych w E. Oczywiście $\mathcal{U}$ jest π-układem. Ponieważ każdy zbiór otwarty jest sumą wstępującego ciągu zbiorów domkniętych (w tym momencie korzystamy z faktu, że E jest metryczna), więc $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$. $\square$

1.6 Rozszerzenie miary

Twierdzenie 1.13 *(Twierdzenie Carathéodory'ego o przedłużaniu skończenie addytywnej miary) Niech $\mathcal{G}$ będzie ciałem podzbiorów zbioru Ω oraz niech $\mu \colon \mathcal{G} \to [0, +\infty)$ spełnia następujący warunk skończonej addytywności*

$$\forall\, A, B \in \mathcal{G}, \ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Ponadto załóżmy, że μ spełnia jeden z następujących równoważnych warunków

- *jeżeli $\{A_n\}$ jest wstępującą rodziną zbiorów z $\mathcal{G}$ i jeżeli $A = \bigcup A_n \in \mathcal{G}$, to*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

- *jeżeli $\{A_n\}$ jest zstępującą rodziną zbiorów z $\mathcal{G}$ i jeżeli $\bigcap A_n = \emptyset$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Wówczas μ przedłuża się jednoznacznie do miary skończonej na $\sigma(\mathcal{G})$.

Dowód twierdzenia jest dość długi. Można go znaleźć n.p. w [21]. Idea dowodu jest następująca. Definiuje się tak zwaną *miarę zewnętrzną*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n \mu(A_n), \qquad A \subset \Omega,$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich ciągach $\{A_n\} \subset \mathcal{G}$ będących pokryciem A, to znaczy takich, że

$$A \subset \bigcup_n A_n.$$

Następnie definiuje się klasę $\mathfrak{F}$ zbiorów $A \subset \Omega$ spełniających warunek

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E), \qquad \forall\, E \subset \Omega.$$

$\mathfrak{F}$ to tak zwana *klasa zbiorów mierzalnych w sensie Caratheodory'ego*. Pokazuje się, że $\mathfrak{F}$ jest σ-ciałem. Następnie pokazuje się, że $\mathcal{G} \subset \mathfrak{F}$ oraz, że

$$\mu^*(A) = \mu(A), \qquad \forall\, A \in \mathcal{G}.$$

W ostatnim kroku pokazuje się, że μ^* jest miarą na $(\Omega, \mathfrak{F})$.

1.7 Przestrzenie zupełne

Definicja 1.17 Mówimy, że przesterzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ jest *zupełna* wtedy i tylko wtedy gdy $\forall\, A \in \mathfrak{F}\colon \mathbb{P}(A) = 0$ i $\forall\, B \subset A$, $B \in \mathfrak{F}$.[1]

Oznaczmy przez $\div$ *różnice symetryczną zbiorów* B, C, to znaczy

$$B \div C = B \setminus C \cup C \setminus B.$$

Twierdzenie 1.14 *Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech*

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{A \subset \Omega\colon \exists\, C, B \in \mathfrak{F}\colon \mathbb{P}(C \div B) = 0 \text{ i } \mathrm{C} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{B}\}.$$

Wówczas:

[1] Wówczas również $\mathbb{P}(B) = 0$.

(i) $\overline{\mathfrak{F}}$ *jest* σ*-ciałem.*
(ii) $\overline{\mathbb{P}}\colon \overline{\mathfrak{F}} \to [0,1]$ *dane wzorem*

$$\overline{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(B), \qquad B \in \mathfrak{F}\colon \exists C \in \mathfrak{F}\colon \mathbb{P}(B \div C) = 0 \text{ i C} \subset \text{A} \subset \text{B}$$

jest prawdopodobieństwem na $(\Omega, \overline{\mathfrak{F}})$*.*
(iii) $(\Omega, \overline{\mathfrak{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ *jest zupełną przestrzenią probabilistyczną.*

Dowód. Mamy $\emptyset, \Omega \in \overline{\mathfrak{F}}$. Niech $A \in \overline{\mathfrak{F}}$. Istnieją $C, B \in \mathfrak{F}$ takie, że

$$\mathbb{P}(C \div B) = 0, \qquad C \subset A \subset B.$$

Wówczas

$$\mathbb{P}(C^c \div B^c) = \mathbb{P}(C \div B) = 0, \qquad B^c \subset A^c \subset C^c.$$

Stąd $A^c \in \overline{\mathfrak{F}}$. Niech $\{A_n\} \subset \overline{\mathfrak{F}}$. Wówczas istnieją $\{C_n\}, \{B_n\} \subset \mathfrak{F}$ takie, że

$$C_n \subset A_n \subset B_n, \qquad \mathbb{P}(C_n \div B_n) = 0, \qquad \forall\, n.$$

Stąd

$$\mathbb{P}\left(\bigcup C_n \div \bigcup B_n\right) \le \mathbb{P}\left(\bigcup (C_n \div B_n)\right) = 0$$

oraz

$$\bigcup C_n \subset \bigcup A_n \div \bigcup B_n.$$

Czyli $\bigcup A_n \in \overline{\mathfrak{F}}$. Dowody *(ii)* i *(iii)* pozostwiamy czytelnikowi. □

1.8 Twierdzenie Lebesgue'a–Radona–Nikodyma

Definicja 1.18 Niech μ i ν będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{F})$. Mówimy, że μ jest *absolutnie ciągła względem* ν (piszemy $\mu \ll \nu$ gdy

$$\forall\, A \in \mathfrak{F}, \qquad \nu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0.$$

Definicja 1.19 Niech μ i ν będą miarami na przestrzeni mierzalnek $(\Omega, \mathfrak{F})$. Mówimy, że μ i ν są *wzajemnie osobliwe* (piszemy $\mu \perp \nu$) gdy istnieje zbiór $A \in \mathfrak{F}$ taki, że

$$\nu(A) = 0 \quad \text{oraz} \quad \mu(A^c) = 0.$$

Twierdzenie 1.15 (Lebesgue'a–Radona–Nikodyma) *Niech* μ *i* ν *będą miarami* σ*-skończonymi. Wówczas:*

(i) Istnieje dokładnie jedna para (μ_a, μ_s) *miar* σ*-skończonych na* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *takich, że*

$$\mu = \mu_a + \mu_s, \qquad \mu_a \ll \nu, \quad \mu_s \perp \nu.$$

Ponadto $\mu_a \perp \mu_s$*.*

(ii) Istnieje dokładnie jedna z dokładnością do zbioru ν miary zero funkcja mierzalna $\rho\colon \Omega \mapsto [0, +\infty)$ taka, że

$$\mu_a(A) = \int_A \rho \mathrm{d}\nu, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{F}.$$

Ponadto istnieje ciąg $\{\Omega_n\}$ elementów $\mathfrak{F}$ taki, że $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ oraz

$$\int_{\Omega_n} \rho \mathrm{d}\nu < +\infty, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Funkcję ρ występującą w twierdzeniu nazywamy *pochodną Radona–Nikodyma* μ_a względem ν albo *gęstością* μ_a względem ν. Symbolicznie

$$\rho = \frac{\mathrm{d}\mu_a}{\mathrm{d}\nu}.$$

1.9 Miara Lebesgue'a i zbiory niemierzalne

Podstawowym przykładem zastosowania twierdzenia Caratheodory'ego jest konstrukcja miary Lebesgue'a ℓ_d na d-wymiarowejprzestrzeni Euclidesowej $\mathbb{R}^d$. Miara Lebesgue'a zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jest jego długością, dla $A \subset \mathbb{R}^2$, $\ell_2(A)$ jest równa polu powierzchni A. Dla $A \subset \mathbb{R}^3$, $\ell_3(A)$ jest objętością A.

Naszkicujemy konstrukcję w przypadku jednowymiarowym. Ustalmy skończony odcinek $(a, b] \subset \mathbb{R}$. To będzie nasze Ω. Jako $\mathcal{G}$ weźniemy wszystkie zbiory postaci

$$(c_1, b_1] \cup (c_2, b_2] \cup \ldots \cup (c_k, b_k],$$

gdzie k jest dowolną liczbą skończoną, a

$$a < c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < \ldots < c_k < b_k \leq b. \tag{1.3}$$

Po pierwsze pokazuje się, że $\mathcal{G}$ jest ciałem podzbiorów Ω. Następnie, na $\mathcal{G}$ definiujemy $\mu\colon \mathcal{G} \to [0, b-a]$ w następujący sposób:

$$\mu\left((c_1, b_1] \cup [(c_2, b_2] \cup \ldots \cup (c_k, b_k]\right) = b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + \ldots + b_k - c_k,$$

gdzie $\{c_j\}$ i $\{b_j\}$ spełniają (1.3). Teraz należy sprawdzić założenia twierdzenia Caratheodory'ego. Jedynym rozszerzeniem ℓ_1 funkcji μ jest miara Lebesgue'a na $((a, b], \mathcal{B}((a, b]))$. Miarę tą można rozszerzyć (jednoznacznie) na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1.10 Przykład zbioru niemierzalnego

Podamy przykład zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a na prostej. Miara Lebesgue'a ℓ_1 jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, to znaczy dla dowolnego (mierzalnego) zbioru A

$$\ell_1(A) = \ell_1(A + x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto miara przedziału $[0, 1]$ wynosi 1. Zdefiniujemy relację $\sim$ w następujący sposób

$$a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}.$$

Łatwo pokazać, że jest to relacja równoważności. Z aksjomatu wyboru istnieje zbiór $U \subset [0, 1]$ do którego należy dokładnie jeden element każdej klasy abstrakcji $[x]$, $x \in [0, 1]$. Ma on następujące własności:

- $\forall\, u, w \in \mathbb{Q}$, $u \neq w \Longrightarrow (U + u) \cap (U + w) = \emptyset$,
- Niech $\{w_n\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych odcinka $[-1, 1]$. Wówczas
$$[0, 1] \subset \bigcup_n (U + w_n) \subset [-1, 2].$$

Z powyższych własności wynika, że założenie mierzalności U prowadzi do sprzeczności. Istotnie

$$\ell_1 \left(\bigcup_n (U + w_n) \right) \leq (2 + 1) = 3.$$

Ponadto $\ell_1(U) \neq 0$, bo

$$[0, 1] \subset \bigcup_n (U + w_n)$$

oraz $\ell_1(U + w_n) = \ell_1(U)$ dla dowolnego n. Stąd sprzeczność.

1.11 Niezależność zdarzeń

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 1.20 Niech $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ będą rodzinami zdarzeń, czyli podzbiorami $\mathfrak{F}$. Mówimy, że $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ są *niezależne* wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \qquad \forall\, A \in \mathcal{G},\ \forall\, B \in \mathcal{H}.$$

Definicja 1.21 Niech ξ i η będą wektorami losowymi odpowiednio w $\mathbb{R}^d$ i $\mathbb{R}^m$. Mówimy, że ξ i η są *niezależne* wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathbb{P}(\{\xi \in A\} \cap \{\eta \in B\}) = \mathbb{P}(\xi \in A)\mathbb{P}(\eta \in B), \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Przypomnijmy (patrz Definicja 1.12), że dla wektora losowego ξ, oznaczamy przez $\sigma(\xi)$ najmniejsze σ-ciało podzbiorów Ω dla którego

$$\xi \colon (\Omega, \sigma(\xi)) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

jest mierzalne. Oczywiście

$$\sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(A) \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Stąd mamy następujący wynik.

Twierdzenie 1.16 *Wektory losowe ξ i η są niezależny wtedy i tylko wtedy gdy σ-ciała $\sigma(\xi)$ i $\sigma(\eta)$ są niezależne.*

Twierdzenie 1.17 (O aproksymacji) *Niech $\mathcal{G}$ będzie pod ciałem $\mathfrak{F}$, takim że $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{G})$. Wówczas*

$$\forall\, A \in \mathfrak{F}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_\varepsilon \in \mathcal{G} \colon \mathbb{P}(A \div A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Dowód. Niech $\tilde{\mathfrak{F}}$ oznacza ogół $A \in \mathfrak{F}$ które dają się aproksymować w powyższym sensie. Wystarczy pokazać, że $\tilde{\mathfrak{F}}$ jest σ-ciałem. Dla σ addytywności korzystamy z faktu, że jeżeli $\{A_n\} \subset \tilde{\mathfrak{F}}$ to $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ takie, że

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \div \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) < \varepsilon/2.$$

Następnie

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \div \bigcup_{n=1}^{N} A_{n,\varepsilon 2^{-n-1}}\right) \le \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}\left(A_n \div A_{n,\varepsilon 2^{-n-1}}\right) < \varepsilon/2. \qquad \square$$

Wniosek 1.5 *Niech $\mathcal{G}_i$, $i = 1, 2$ będą pod ciałami $\mathfrak{F}$. Wówczas $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\sigma(\mathcal{G}_1)$ i $\sigma(\mathcal{G}_2)$ są niezależne.*

Definicja 1.22 Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są *niezależne* wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ciągu liczb naturalnych $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_l \le n$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_l}\right) = \mathbb{P}\left(A_{k_1}\right) \mathbb{P}\left(A_{k_2}\right) \ldots \mathbb{P}\left(A_{k_l}\right).$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są *parami niezależne* wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $1 \le k_1 < k_2 \le n$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) = \mathbb{P}\left(A_{k_1}\right) \mathbb{P}\left(A_{k_2}\right).$$

Uwaga 1.2 Są przykłady, patrz [41], ciągów zdarzeń parami niezależnych, które nie są niezależne! Są też znane przykłady, patrz [41], ciągów zdażeń $A_1, \ldots, A_n$, które nie są niezależne ale dla których zachodzi

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) \mathbb{P}\left(A_2\right) \ldots \mathbb{P}\left(A_n\right).$$

Definicja 1.23 Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Mówimy, że pod-σ-ciała $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ gdzie $n \ge 2$, są *niezależne* wtedy i tylko wtedy gdy dowolne zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$, gdzie $A_i \in \mathfrak{G}_i$ są niezależne. Zmienne losowe $\xi_1, \ldots, \xi_n$ są *niezależne* gdy σ-ciała $\sigma(\xi_1), \ldots, \sigma(\xi_n)$ generowane przez zmienne losowe są niezależne.

Zadanie 1.4 Pokazać, że σ-ciała $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ciągu zdarzeń $\{A_k\}$, $k = 1, \ldots n$ takich, że $A_k \in \mathfrak{G}_k$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) \mathbb{P}\left(A_2\right) \ldots \mathbb{P}\left(A_n\right).$$

Zadanie 1.5 Pokazać, że zmienne losowe $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ciągu zbiorów borelowskich $\{B_k\}$, $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k = 1, \ldots n$ zachodzi

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\{\xi_1 \in B_1\} \cap \{\xi_2 \in B_2\} \cap \ldots \cap \{\xi_n \in B_n\}\right)\\ &\quad = \mathbb{P}\left(\xi_1 \in B_1\right) \mathbb{P}\left(\xi_2 \in B_2\right) \ldots \mathbb{P}\left(\xi_n \in B_n\right).\end{aligned}$$

1.12 Lemat Borela–Cantelliego

Z lematu Borela–Cantelliego korzysta się przy dowodzeniu, że dane zdarzenie zaszło nieskończenie wiele razy z prawdopodobieństwem 1 lub 0.

Niech $\{A_n\} \subset \mathfrak{F}$ będzie ciągiem zdarzeń. Oznaczmy przez $\limsup A_n$ zbiór

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n,$$

a przez $\liminf A_n$ zbiór

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n.$$

Nazywamy je odpowiednio *granicą górną* i *granicą dolną* ciągu $\{A_n\}$. Zauważmy że granice górna i dolna są zdarzeniami, to znaczy należą do $\mathfrak{F}$.

Zauważmy, że $\omega \in \limsup A_n$ wtedy i tylko wtedy gdy należy do nieskończenie wielu zbiorów ciągu $\{A_n\}$. Podobnie $\omega \in \liminf A_n$ wtedy i tylko wtedy gdy należy do wszystkich z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby zbiorów ciągu $\{A_n\}$.

Lemat 1.2 (Lemat Borela–Cantelliego) *Jeśli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty,$$

to

$$\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = 0.$$

Jeśli zdarzenia $\{A_n\}$ *są niezależne i*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty,$$

to

$$\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = 1.$$

Dowód. Dowód pierwszej części jest bardzo łatwy. Z ciągłości prawdopodobieństwa mamy

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Do dowodu drugiej części zauważmy, że

$$\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = \mathbb{P}\left((\liminf A_n^c)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\liminf A_n^c\right).$$

Pokazujemy więc, że

$$\mathbb{P}\left(\liminf A_n^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = 0.$$

Wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = 0, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Korzystając z twierdzenia o ciągłości oraz z niezależności zdarzeń $\{A_n\}$[2] otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{N} A_n^c\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=m}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \prod_{n=m}^{N} \exp\{-\mathbb{P}(A_n)\} = \lim_{N\to\infty} \exp\left\{-\sum_{n=m}^{N} \mathbb{P}(A_n)\right\} = 0.\end{aligned}$$

Korzystaliśmy z oszacowania

$$1 + x \leq e^x, \qquad x \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

1.13 Wartość oczekiwana

Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem mierzalnym, lub inaczej zmienną losową. Całka

[2] Jeśli A i B niezależne, to A^c i B^c są niezależne. Istotnie

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A^c \cap B^c\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(A \cup B\right) = 1 - \left(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)\right) \\ &= 1 - \left(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\right) \\ &= \left(1 - \mathbb{P}(A)\right)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) \\ &= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

$$\int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P}$$

zmiennej X po mierze $\mathbb{P}$ jest niczym innym jak wartością oczekiwaną $\mathbb{E}\,X$. Dla zmiennej X przyjmującej skończoną liczbę wartości (inaczej dla funkcji prostej)

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

mamy

$$\mathbb{E}\,X = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j .$$

1.14 Całka względem miary

Niech $(E, \mathcal{G}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą μ.

Definicja 1.24 *Funkcją prostą* jest dowolne mierzalne odwzorowanie

$$X \colon E \to \mathbb{R}$$

przyjmujące skończenie wiele wartości.

Zauważmy, że funkcje proste są postaci

$$X = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{A_j}, \tag{1.4}$$

gdzie $\{x_1, \dots, x_n\}$ są różnymi wartościami X,

$$A_j := \{\omega \in E \colon X(\omega) = x_j\}$$

a χ_A oznacza funkcje charakterystyczną zbioru A, to znaczy

$$\chi_A(\omega) := \begin{cases} 1 \text{ gdy } \omega \in A, \\ 0 \text{ gdy } \omega \notin A. \end{cases}$$

Dla nieujemnej funkcji prostej danej przez (1.4) definiujemy całkę względem μ wzorem

$$\int_E X \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} x_j \mu(A_j).$$

Przyjmujemy tutaj konwencje, że $0 \times +\infty = 0$.

Definicja 1.25 Niech $X \colon E \to [0, +\infty]$ będzie funkcją mierzalną. *Całką funkcji X względem μ* dana jest wzorem

$$\int_E X \mathrm{d}\mu = \sup \int_E Z \mathrm{d}\mu,$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich funkcjach prostych $0 \le Z \le X$.

Dla $X\colon E \to \mathbb{R}$ definiujemy jej *część datnią* X^+ i *część ujemną* X^- w następujący sposób:

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}$$
$$X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}.$$

Lemat 1.3 *Zachodzi*

$$X = X^+ - X^-, \qquad X^+ \geq 0,\ X^- \geq 0, \quad X^+X^- = 0.$$

Jeżeli X jest mierzalne to X^+ i X^- są mierzalne.

Definicja 1.26 *Całką dowolnej mierzalnej funcji $X\colon E \to [-\infty, +\infty]$* nazywamy wielkość

$$\int_E X \mathrm{d}\mu = \int_E X^+ \mathrm{d}\mu - \int_E X^- \mathrm{d}\mu,$$

o ile choć jedna z całek występujących po prawej stronie jest skończona. Mówimy, że X jest *całkowalna* gdy

$$\int_E |X| \mathrm{d}\mu = \int_E X^+ \mathrm{d}\mu + \int_E X^- \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Mówimy, że X jest *sumowalna* gdy

$$\int_E X^+ \mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{lub} \quad \int_E X^- \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Całkę X po zbiorze $A \in \mathcal{G}$ nazywamy wielkość

$$\int_A X \mathrm{d}\mu = \int_\Omega X \chi_A \mathrm{d}\mu.$$

Twierdzenie 1.18 *Niech X, Y będą nieujemnymi funkcjami mierzalnymi, niech $c \in \mathbb{R}$ będzie stałą, a $A, B \in \mathcal{G}$. Wówczas:*
(a) $X \leq Y$, to

$$0 \leq \int_E X \mathrm{d}\mu \leq \int_E Y \mathrm{d}\mu.$$

(b) Zachodzi

$$\int_E cX \mathrm{d}\mu = c \int_E X \mathrm{d}\mu.$$

(c) Jeżeli $A \subset B$, to

$$\int_A X \mathrm{d}\mu \leq \int_B X \mathrm{d}\mu.$$

(d) Jeżeli

$$\int_A X \mathrm{d}\mu = 0,$$

to $X = 0$, μ prawie na pewno na A, co oznacza, że

$$\mu \{\omega \in A\colon X(\omega) \neq 0\} = 0.$$

Dowód. Części (a) – (c) wynikają wprost z definicji. Dla dowodu (d) definiujemy

$$A_n = \{\omega \in A\colon X(\omega) \geq 1/n\}.$$

Mamy, z (a),

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} X \mathrm{d}\mu \leq \int_A X \mathrm{d}\mu = 0.$$

Stąd $\mu(A_n) = 0$. Ale

$$\{\omega \in A\colon X(\omega) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \qquad \square$$

Lemat 1.4 *Dla dowolnej mierzalnej nieujemnej funkcji X istnieje ciąg funkcji prostych X_n taki, że $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ dla każdego $\omega \in E$.*

Dowód. Kładziemy

$$X_n = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})}(X) + n\chi_{[n,+\infty)}(X).$$

Mamy

$$0 \leq X(\omega) - X_n(\omega) \leq \frac{1}{2^n}. \qquad \square$$

Twierdzenie 1.19 (Dooba–Dynkina) *Niech Ω będzie zbiorem, $X\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ i niech $Y\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem $\sigma(X)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mierzalnym. Wówczas istnieje mierzalne $f\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ takie, że $Y = f \circ X$.*

Dowód. Załóżmy, że Y przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości $y_1, \ldots, y_N$, $y_i \in \mathbb{R}$, $y_i \neq y_j$ gdy $i \neq j$. Wówczas $A_i := Y^{-1}(\{y_i\}) \in \sigma(X)$, $i = 1, \ldots, N$. Oczywiście dla każdego i istnieje zbiór borelowski $B_i \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $A_i = X^{-1}(B_i)$. Połóżmy

$$f = \sum_{i=1}^{N} y_y \chi_{B_i}.$$

Oczywiście $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ jest borelowska oraz $Y = f \circ X$.

Niech teraz $Y\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną $\sigma(X)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mierzalna funkcją. Wówczas istnieje ciąg funkcji mierzalnych $Y_n\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ przyjmujących skończone liczby wartości, i zbieżnych punktowo do Y. Niech $f_n\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją borelowską taką, że $Y_n = f_n \circ X$. Wystarczy pokazać, że zbiór

$$A := \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ istnieje}\right\}$$

jest borelowski oraz, że $Y = f \circ X$ gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) & \text{dla } x \in A, \\ 0 & \text{dla } x \notin A. \end{cases} \qquad \square$$

Twierdzenie 1.20 (Lebesgue'a–Beppo Leviego) *Jeżeli* $\{X_n\}$ *jest niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych rosnących do* X *to*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E X_n \mathrm{d}\mu = \int_E X \mathrm{d}\mu.$$

Dowód. Mamy

$$\int_E X_n \mathrm{d}\mu \le \int_E X \mathrm{d}\mu.$$

Stąd ciąg

$$\int_E X_n \mathrm{d}\mu$$

jest zbieżny, jako ciąg rosnący i ograniczony. Wystarczy pokazać, że

$$\int_E X \mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_E X_n \mathrm{d}\mu.$$

Ponieważ z definicji całki

$$\int_E X \mathrm{d}\mu = \sup \int_E Z \mathrm{d}\mu$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich funkcjach prostych Z, wystarczy pokazać, że dla dowolnej funkcji prostej $0 \le Z \le X$ zachodzi

$$\int_E Z \mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_E X_n \mathrm{d}\mu.$$

W tym celu ustalmy taką Z. Mamy

$$Z = \sum_{j=1}^{J} z_j \chi_{A_j}$$

gdzie $\{z_1, \dots, z_J\}$ są różnymi wartościami Z a $A_1, \dots, A_J$ są parami rozłącznymi elementami $\mathcal{G}$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech

$$E_k := \left\{ \omega \in E \colon \sum_{j=1}^{J} X_k(\omega)\chi_{A_j}(\omega) \ge \sum_{j=1}^{J} \max\{z_j - \varepsilon, 0\}\chi_{A_j}(\omega) \right\}.$$

Z monotoniczności całki i z faktu, że $0 \le X_k \le X_{k+1}$ mamy

$$\sum_{j=1}^{J} \max\{z_j - \varepsilon, 0\}\mu(A_j \cap E_k) \le \int_{E_k} X_k \mathrm{d}\mu \le \int_{E_k} \lim_{n\to\infty} X_n \mathrm{d}\mu \le \int_E \lim_{n\to\infty} X_n \mathrm{d}\mu.$$

Ponieważ $X_k \le X_{k+1}$, więc $E_k \subset E_{k+1}$. Stąd

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_j \cap E_k) = \mu(A_j), \qquad j = 1, \dots, J.$$

Stąd

$$\sum_{j=1}^{J} \max\{z_j - \varepsilon, 0\}\mu(A_j) \le \int_E \lim_{n\to\infty} X_n \mathrm{d}\mu, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Stąd otrzymujemy rządane oszacowanie

$$\sum_{j=1}^{J} z_j \mu(A_j) \le \int_E \lim_{n\to\infty} X_n \mathrm{d}\mu,$$

ponieważ z definicji $\mu(A_j) < +\infty$.

Podamy teraz inny dowód twierdzenia jednak przy dodatkowym założeniu, że $\mu(E) = 1$. Mianowicie niech Z będzie funkcją prostą taką, że $0 \le Z \le X$ i niech K będzie stałą ograniczającą Z. Stała taka istnieje bo Z przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości. Wówczas dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ mamy

$$Z - X_n \le K\chi_{\{Z \ge X_n + \varepsilon\}} + \varepsilon.$$

Stąd

$$\int_E Z \mathrm{d}\mu \le K\, \mu\,(Z \ge X_n + \varepsilon) + \varepsilon + \int_E X_n \mathrm{d}\mu.$$

Przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_E Z \mathrm{d}\mu &\le K\, \mu\,(Z \ge X + \varepsilon) + \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \int_E X_n \mathrm{d}\mu \\ &\le \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \int_E X_n \mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

bo

$$\mu\,(Z \ge X + \varepsilon) = \mu\,(\emptyset) = 0. \qquad \square$$

Twierdzenie 1.21 *Jeżeli X i Y są mierzalne i nieujemne, to*

$$\int_E (X + Y)\, \mathrm{d}\mu = \int_E X \mathrm{d}\mu + \int_E Y \mathrm{d}\mu.$$

Dowód. Pokazujemy addytywność całki dla funkcji prostych, a następnie aproksymujemy X i Y przez funkcje proste (X_n) i (Y_n) takie, że $X_n \le X$ i $Y_n \le Y$. $\square$

Lemat 1.5 (Fatou) *Jeżeli (X_n) jest ciągiem nieujemnych zmiennych lsowych to*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} X_n \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E X_n \mathrm{d}\mu.$$

Dowód. Niech
$$Y_n = \inf_{k\geq n} X_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Wtedy
$$Y_n \uparrow \liminf_{n\to\infty} X_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$
oraz
$$X_n \geq Y_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Zatem z twierdzenia Lebesgue'a–Beppo Levy'ego otrzymujemy
$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_E X_n \mathrm{d}\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_E Y_n \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_E Y_n \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E \lim_{n\to\infty} Y_n \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E \liminf_{n\to\infty} X_n \mathrm{d}\mu. \qquad \square\end{aligned}$$

1.15 Własności całki z dowolnej funkcji mierzalnej

Następujące twierdzenie zawiera podstawowe własności całki względem miary. Własności te dowodzi się najpierw dla funkcji prostych a następnie aproksymując dowolą funkcje całkowalną przez odpowiedni ciąg funkcji prostych.

Twierdzenie 1.22 *Jeżeli X i Y są całkowalne to:*
(a) $X + Y$ jest całkowalna oraz
$$\int_E (X+Y)\mathrm{d}\mu = \int_E X\mathrm{d}\mu + \int_E Y\mathrm{d}\mu.$$
(b) dla dowolnej stałej
$$\int_E cX\mathrm{d}\mu = c\int_E X\mathrm{d}\mu.$$
(c) $X \leq Y$ implikuje
$$\int_E X\mathrm{d}\mu \leq \int_E Y\mathrm{d}\mu.$$
(d) $\left|\int_E X\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_E |X|\mathrm{d}\mu.$
(e) Jeżeli $\{A_n\} \subset \mathcal{G}$ są rozłączne i
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$
to

$$\int_E X \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} X \mathrm{d}\mu.$$

(f) Jeśli

$$\int_A X \mathrm{d}\mu = 0, \qquad \forall\, A \in \mathcal{G},$$

to $X = 0$, μ-p.n.
(g) Zachodzi

$$\lim_{\mu(A) \to 0} \int_A |X| \mathrm{d}\mu = 0.$$

1.16 Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

Twierdzenie 1.23 (Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej) *Niech $\{X_n\}$ będzie funkcji mierzalnych z E w $\overline{\mathbb{R}}$. Jeżeli dla pewnej funkcji mierzalnej Y takiej, że*

$$\int_E Y \mathrm{d}\mu < \infty$$

zachodzi

$$|X_n(\omega)| \le Y(\omega), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \omega \in E,$$

to

$$\left| \int_E X_n \mathrm{d}\mu \right| < \infty, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto jeżeli dla jakiejś X,

$$X_n \to X, \quad \mu - p.n.,$$

to

$$\left| \int_E X \mathrm{d}\mu \right| < \infty$$

oraz

$$\lim_{n \to \infty} \int_E X_n \mathrm{d}\mu = \int_E X \mathrm{d}\mu,$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_E |X_n - X| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Dowód. Przypomnijmy, że X jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy

$$\int_E |X| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Zmienna $|X|$ jest mierzalna i $|X| \le Y$ więc X jest całkowalna. Następnie

$$|X_n - X| \leq 2Y.$$

Stąd stosując lemat Fatou dla

$$2Y - |X_n - X|$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int_E 2Y \mathrm{d}\mu &= \int_E \liminf_{n\to\infty} \left(2Y - |X_n - X|\right) \mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_E \left(2Y - |X_n - X|\right) \mathrm{d}\mu \\
&\leq 2\int_E Y \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E |X_n - X| \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E |X_n - X| \mathrm{d}\mu = 0.$$

Czyli

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |X_n - X| \mathrm{d}\mu = 0.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_E (X_n - X) \mathrm{d}\mu \right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_E |X_n - X| \mathrm{d}\mu = 0. \qquad \square$$

1.17 Twierdzenie Foubiniego

Twierdzenie Foubiniego jest uogólnieniem twierdzenia o zamianie całki podwójnej na całki iterowane. Przypomnijmy, że dla $A \subset \mathbb{R}^2$ postaci

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b,\ \psi(x) \leq y \leq \phi(x)\right\}$$

mamy

$$\begin{aligned}
\text{pole}\, A &= \iint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} dy \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |A_x| \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

gdzie

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \colon (x, y) \in A\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

a $|A_x|$ oznacza długość zbioru A_x.

Podobnie dla funkcji $F\colon A \to \mathbb{R}$ mamy

$$\iint\limits_A F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} F(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_x} F(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Niech $(E, \mathcal{G}, \mu)$ oraz $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mu})$ będą dwoma przestrzeniami mierzalnymi z miarami σ-skończonymi μ i $\tilde{\mu}$. Przypomnijmy, że σ-ciało produktowe $\mathcal{G} \times \tilde{\mathcal{G}}$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym zbiory postaci $A \times B$, gdzie $A \in \mathcal{G}$, $B \in \tilde{\mathcal{G}}$. Dowód następującego twierdzenia można znaleźć w [21].

Twierdzenie 1.24 (Foubiniego) (a) *Istnieje dokładnie jedna miara σ-skończona $\mu \times \tilde{\mu}$ na $(E \times \tilde{E}, \mathcal{G} \times \tilde{\mathcal{G}})$ taka, że*

$$\mu \times \tilde{\mu}(A \times B) = \mu(A)\tilde{\mu}(B), \qquad \forall\, A \in \mathcal{G},\ \forall\, B \in \tilde{\mathcal{G}}.$$

(b) *Jeżeli $X\colon E \times \tilde{E} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna to*

$$\int_{E\times\tilde{E}} X \mathrm{d}\mu \times \mathrm{d}\tilde{\mu} = \int_E \left(\int_{\tilde{E}} X(\omega, \tilde{\omega})\mathrm{d}\mu(\omega) \right) \mathrm{d}\tilde{\mu}(\tilde{\omega})$$
$$= \int_{\tilde{E}} \left(\int_E X(\omega, \tilde{\omega})\mathrm{d}\tilde{\mu}(\tilde{\omega}) \right) \mathrm{d}\mu(\omega),$$

przy czym całki iterowane są dobrze określone.

Następujący lemat podaje pożyteczny związek między momentami a prawdopodobieństwem ogonów $\{X \geq t\}$, $t \geq 0$, zmiennej losowej X.

Lemat 1.6 *Niech $p > 0$ oraz niech X będzie nieujemną zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Wówczas*

$$\mathbb{E}\, X^p = p \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{X \geq t\right\} t^{p-1} \mathrm{d}t = p \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{X > t\right\} t^{p-1} \mathrm{d}t.$$

Dowód.

$$\mathbb{E}\, X^p = p\mathbb{E} \int_0^X t^{p-1}\mathrm{d}t = p\mathbb{E} \int_0^{+\infty} \chi_{\{[0,X]\}}(t) t^{p-1}\mathrm{d}t$$
$$= p \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{X \geq t\right\} t^{p-1}\mathrm{d}t.$$

Ponieważ funkcje

$$t \mapsto \mathbb{P}\left\{X \geq t\right\} \qquad \text{oraz} \qquad t \mapsto \mathbb{P}\left\{X > t\right\}$$

różnią się co najwyżej na zbiorze przeliczalnym, więc

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{X \geq t\right\} t^{p-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{X > t\right\} t^{p-1}\mathrm{d}t. \qquad \square$$

1.18 Różne typy zbieżności

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a (E, ρ) przestrzenią metryczną. Na E rozważamy σ-ciało *zbiorów borelowskich* $\mathcal{B}(E)$, czyli najmniejsze σ-ciało podzbiorów E zawierające wszystkie zbiory otwarte (lub co jest równoważne wszystkie zbiory domknięte).

Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem elementów losowych w E, to znaczy $X_n \colon \Omega \to E$ mierzalne dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.27 Mówimy, że (X_n) zbiega $\mathbb{P}$-*prawie na pewno* lub *z prawdopodobieństwem* $\mathbb{P}$ *równym* 1 do elementu losowego $X \colon \Omega \to E$ gdy istnieje zdrzenie $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$ takie, że $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \qquad \forall\, \omega \in \Omega_0.$$

Jeżeli (X_n) zbiega $\mathbb{P}$-prawie na pewno do X to piszemy

$$X_n \to X, \quad \mathbb{P}\text{-p.n.}$$

lub

$$X_n \to X, \quad \mathbb{P} = 1$$

lub

$$X_n \overset{\mathbb{P}=1}{\to} X.$$

Definicja 1.28 Mówimy, że ciąg (X_n) zbiega do X *według prawdopodobieństwa* lub *stochastycznie* gdy

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \colon \rho(X_n(\omega), X(\omega)) > \varepsilon\right\} = 0.$$

Jeżeli (X_n) zbiega do X według prawdobodobieństwa to piszemy

$$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{(\mathbb{P})}{=} X$$

lub

$$X_n \overset{(\mathbb{P})}{\to} X.$$

Załóżmy, że (X_n) są rzeczywistymi zmiennymi losowymi, to znaczy $E = \mathbb{R}$ oraz $X_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mierzalne dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.29 Niech $p \in [1, +\infty)$. Mówimy, że (X_n) zbiega do zmiennej losowej X w L^p gdy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, |X_n - X|^p = 0.$$

Gdy (X_n) zbiega do X w L^p to piszemy

$$L^p - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

Oznaczym przez $C_b(E)$ przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych i ograniczonych na E. Niech (μ_n) Niech μ będzie ciągiem prawdopodobieństw na $(E, \mathcal{B}(E))$. Niech μ będzie prawdopodobieństwem na $(E, \mathcal{B}(E))$.

Definicja 1.30 Mówimy, że (μ_n) zbiega *słabo* do μ gdy

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f\mathrm{d}\mu_n = \int_E f\mathrm{d}\mu, \qquad \forall\, f\in C_b(E).$$

Jeżeli (μ_n) zbiega słabo do μ to piszemy

$$\mu_n \Rightarrow \mu.$$

Oznaczmy przez $UC_b(E)$ przestrzeń wszystkich organiczonych i jednostajnie ciągłych funkcji na E.

Twierdzenie 1.25 *Następujące warunki sa równoważne:*

(a) $\mu_n \Rightarrow \mu$,
(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f\mathrm{d}\mu_n = \int_E f\mathrm{d}\mu$, $\forall\, f\in UC_b(E)$,
(c) $\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(F)\le\mu(F)$, $\forall\, F=\overline{F}$,
(d) $\liminf\limits_{n\to\infty}\mu_n(G)\ge\mu(G)$, $\forall\, G=\operatorname{Int} G$,
(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(B)\ge\mu(G)$, $\forall\, B\in\mathcal{B}(B)$.

Dowód. Implikacja $(a)\Rightarrow(b)$ jest oczywista. Równoważność (c) i (d) wynika z dualności: F domknięty wtedy i tylko wtedy gdy F^c otwarty. Pokażemy, że $(c)\Rightarrow(a)$. W tym celu ustalmy $f\in C_b(E)$. Bez straty ogólości możemy założyć, że $0<f<1$. Gdy nie należy dokonać transformacji afinicznej. Mamy

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\frac{j-1}{k}\mu\left\{x\in E\colon \frac{j-1}{k}\le f(x)<\frac{l}{k}\right\}\\
&\le\int_E f\mathrm{d}\mu\\
&\le\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}\mu\left\{x\in E\colon \frac{j-1}{k}\le f(x)<\frac{l}{k}\right\}.
\end{aligned}$$

Niech

$$F_j=\left\{x\in E\colon \frac{j}{k}\le f(x)\right\}.$$

Wówczas powyższe nierówności zapisujemy w postaci.

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\mu(F_j)}{k}\le\int_E f\mathrm{d}\mu\le\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\mu(F_j)}{k}-\frac{1}{k}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_E f\mathrm{d}\mu_n &\le \limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\mu_n\left(F-j\right)}{k}\\ &\le \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\mu\left(F_j\right)}{k}\\ &\le \frac{1}{k}+\int_E f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Stąd

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f\mathrm{d}\mu_m \le \int_E f\mathrm{d}\mu.$$

Zamieniając f na $1-f$ otrzymujemy nierówność przeciwną (z $\liminf$), co kończy dowód $(c)\Rightarrow(a)$.

Pokażemy, teraz, że (c) jest równoważne (e). Jeżeli $\mu\left(\partial B\right) =$, to

$$\begin{aligned}\mu\left(B\right)=\mu\left(\operatorname{Int}B\right) &\le \liminf_{n\to\infty}\mu_n\left(\operatorname{Int}B\right)\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\mu_n\left(\overline{B}\right)\\ &\le \mu\left(\overline{B}\right)=\mu\left(B\right).\end{aligned}$$

Czyli

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(B\right)=\mu\left(B\right).$$

Załóżmy teraz (e). Niech $F=\overline{F}$. Dla $\delta>0$ niech

$$F_\delta := \left\{x\in E\colon \rho(x,F)\le\delta\right\}.$$

Wówczas istnieje $\delta_n\downarrow 0$ takie, że

$$\mu\left(\partial F_{\delta_n}\right)\le\mu\left\{x\in E\colon \rho(x,F)=\delta_n\right\}=0,\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\mu\left(F\right)=\lim_{l\to\infty}\mu\left(F_{\delta_l}\right) &= \lim_{l\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(F_{\delta_l}\right)\\ &\ge \limsup_{n\to\infty}\mu_n\left(F\right).\end{aligned}$$

□

1.18.1 Przypadek $E=\mathbb{R}$

W twierdzeniach poniżej $X_n\colon \Omega\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, jest ciągiem zmiennych losowych oraz $X\colon\Omega\to\mathbb{R}$ jest zmienną losową. Przez μ_n i μ oznaczamy rozkłady odpowiednio X_n i X, a przez F_n i F dystrybuanty rozkładów X_n i X.

Twierdzenie 1.26 *Załóżmy, że F jest ciągła. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) $\mu_n \Longrightarrow \mu$,
(b) $F_n(x) \to F(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.27 *Następujące warunki są równoważne:*

(a) $\mu_n \Longrightarrow \mu$,
(b) $\mathbb{E} \exp\{ixX_n\} \to \mathbb{E} \exp\{ixX\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Definicja 1.31 Dla danej zmiennej losowej X funkcję

$$\mathbb{R} \ni x \to \mathbb{E} \exp\{ixX\} \in \mathbb{C}$$

nazymamy *funkcją charakterystyczną* X.

1.19 Związki pomiędzy różnymi typami zbieżności

Następujące twierdzenie opisuje związki między różnymi typami zbieżności. W szczególności pokażemy, patrz (a), że zbieżność prawie napewno implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa. Następnie, patrz (c), że zbieżność według prawdopodobieństwa implikuje zbieżność słabą rozkładów.

Twierdzenie 1.28 *(a) Jeżeli $X_n \to X$, $\mathbb{P}$-p.n., to $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa.*
(b) Jeżeli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to istnieje podciąg (X_{n_j}) ciągu (X_n) zbieżny $\mathbb{P}$-p.n.
(c) Niech $X_1, X_2, \ldots, X$ będą zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Niech μ_n i μ będą rozkładami odpowiednio X_n i X. Jeżeli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Dowód (a). Załóżmy, że $X_n \to X$, $\mathbb{P}$-p.n. Niech $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$ będzie taki, że $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ i

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \qquad \forall\, \omega \in \Omega_0.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech

$$A_n := \{\omega \in \Omega \colon \rho(X_n(\omega), X(\omega)) \le \varepsilon\}.$$

Mamy

$$\Omega_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Ponieważ ciag

$$\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest wstępujący więc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_0) = 1 &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) = 1\\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1\\ &\Rightarrow \mathbb{P}(A_n^c) = 0\\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \colon \rho(X_n(\omega), X(\omega)) > \varepsilon\} = 0,\end{aligned}$$

co kończy dowód (a). $\square$.

Dowód (b). Pokażemy, że istnieje podciąg $\{n_j\}$ taki, że

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \colon \rho\big(X_{n_j}(\omega), X(\omega)\big) > \frac{1}{2^j}\right\} < \frac{1}{2^j}, \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

W tym celu zastosujemy tak zwaną *metodę przekontniową wyboru*. Mianowicie, niech $\{n_k^j\}$ będzie ciągiem podciągów liczb naturalnych o następujących własnościach:

1) dla każdego j, $\{n_k^{j+1}\}$ jest podciągiem $\{n_k^j\}$,

2) dla każdego j,

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \colon \rho\Big(X_{n_k^j}(\omega), X(\omega)\Big) > \frac{1}{2^j}\right\} < \frac{1}{2^j}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Ciąg podciągów $\{n_k^j\}$ konstruujemy indukcyjne (indukcja względem j). Teraz $n_j = n_j^j$ ma żądane własności.

Niech

$$A_j := \left\{\omega \in \Omega \colon \rho(X_{n_j}(\omega), X(\omega)) > \frac{1}{2^j}\right\}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Z konstrukcji ciągu (n_j) wiemy, że

$$\mathbb{P}(A_j) < \frac{1}{2^j}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Stąd

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) < \infty,$$

a więc z lematu Borela–Cantelliego

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Niech

$$\Omega_0 := \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right)^c.$$

Wiemy, że $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Pokażemy, że

$$\lim_{j\to\infty} X_{n_j}(\omega) = X(\omega), \qquad \omega \in \Omega_0.$$

Niech $\omega \in \Omega_0$. Wówczas

$$\omega \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j.$$

Czyli

$$\exists\, m \colon \forall\, j > m, \qquad \omega \in A_j^c.$$

Inaczej

$$\exists\, m \colon \forall\, j > m, \qquad \rho\big(X_{n_j}(\omega), X(\omega)\big) \le \frac{1}{2^j}.$$

Ustalmy teraz $\varepsilon > 0$. Istnieje wtedy l takie, że $2^l < \varepsilon$. Dobierając m do l otrzymujemy

$$\rho\big(X_{n_j}(\omega), X(\omega)\big) < \frac{1}{2^l} < \varepsilon. \qquad \square$$

Dowód (c). Załóżmy, że $X_n \overset{(\mathbb{P})}{\to} X$. Niech μ będzie rozkładem x oraz niech μ_n będzie rozkładem X_n. Załóżmy, że $\neg\mu_n \Rightarrow \mu$. Istnieją wówczas $f \in C_b(E)$ i $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\#\left\{n \colon |\mathbb{E}\, f(X_n) - \mathbb{E}\, f(X)| \ge \varepsilon\right\} = \infty.$$

Stąd istnieje podciąg (X_{n_j}) taki, że

$$\big|\mathbb{E}\, f(X_{n_j}) - \mathbb{E}\, f(X)\big| \ge \varepsilon, \qquad \forall\, j. \tag{1.5}$$

Z drugiej strony $X_{n_j} \overset{(\mathbb{P})}{\to} X$. Stąd istnieje podciąg $(X_{n_{j_k}})$ taki, że $X_{n_{j_k}} \overset{\mathbb{P}=1}{\to} X$. Stąd

$$f(X_{n_{j_k}}) \overset{\mathbb{P}=1}{\to} f(X).$$

Ponieważ f jest ograniczona, z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymujemy

$$\mathbb{E}\, f(X_{n_{j_k}}) \to \mathbb{E}\, f(X)$$

co jest sprzeczne z (1.5). $\square$

1.20 Nierówność Czebyszewa

Twierdzenie 1.29 (Nierówność Czebyszewa) *Niech $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową. Wówczas*

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \colon |X(\omega)| \ge a\right\} \le \frac{\mathbb{E}\,|X|}{a}, \qquad \forall\, a > 0.$$

Dowód. Niech $a > 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\omega \in \Omega\colon |X(\omega)| \geq a\} &= \int_{\{\omega\in\Omega\colon\, |x(\omega)|\geq a\}} 1\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_{\{\omega\in\Omega\colon\, |x(\omega)|\geq a\}} \frac{|X|}{a}\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \frac{1}{a}\int_{\{\omega\in\Omega\colon\, |x(\omega)|\geq a\}} |X|\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \frac{1}{a}\,\mathbb{E}\,|X|. \qquad \square\end{aligned}$$

Propozycja 1.1 *Ciąg X_n zbiega słabo do stałej zmiennej losowej c wtedy i tylko wtedy gdy X_n zbiega do c według prawdopodobieństwa.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeżeli X_n zbiega do c słabo, to X_n zbiega do c wed'lug prawdopodobieństwa. Ponieważ funkcja

$$f(x) = |x - c| \wedge 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

jest ciągła i ograniczona, więc zezbieżności $X_n \Rightarrow c$ wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|X_n - c| = 0.$$

Stąd i z nierówności Czebyszewa wynika, że $X_n \overset{(\mathbb{P})}{\to} X$. $\square$

1.21 Nierówność Jensena

Definicja 1.32 Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *wypukła* gdy dla dowolnego skończonego zbioru punktów $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych liczb $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ spełniających

$$\alpha_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

zachodzi

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j).$$

Przykładem funkcji wypukłej jest funkcja

$$f(x) = |x|^p, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $p \in [1, +\infty)$. Gdy $p < 1$ to powyższa funkcja nie jest wypukła.

Twierdzenie 1.30 (Nierówność Jensena) *Jeżeli* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją wypukłą, to dla dowolnej zmiennej losowej* X *zachodzi*

$$f(\mathbb{E}\,X) \le \mathbb{E}\,f(X).$$

Dowód. Z wypukłości funkcji f wynika, że istnieją ciągi (a_n) i (b_n) takie, że

$$f(x) = \sup_n (a_n x + b_n), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Stąd

$$f(X) \ge a_n X + b_n, \qquad \forall\, n.$$

A więc

$$\mathbb{E}\,f(X) \ge a_n \mathbb{E}\,X + b_n, \qquad \forall\, n,$$

a więc

$$\mathbb{E}\,f(X) \ge \sup_n \{a_n \mathbb{E}\,X + b_n\} = f(\mathbb{E}\,X). \qquad \square$$

Ponieważ funkcja $x \to |x|^p$ dla $p \ge 1$ jest wypukła więc mamy następujący natychmiastowy wniosek z nierówności Jensena.

Wniosek 1.6 *Niech* X *będzie zmienną losową taką, że* $\mathbb{E}\,X$ *istnieje. Wówczas dla dowolnego* $p \in [1, +\infty)$ *zachodzi*

$$|\mathbb{E}\,X|^p \le \mathbb{E}\,|X|^p.$$

Z nierówności Jensena wywnioskujemy również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.31 *Niech* (X_n) *będzie ciągiem zmiennych losowych, niech* X *będzie zmienną losową oraz niech* $p \in [1, +\infty)$. *Wówczas:*
(a) *Dla dowolnego* $q \in [1, p]$ *zachodzi*

$$\left(\mathbb{E}\,|X|^p\right)^{1/p} \ge \left(\mathbb{E}\,|X|^q\right)^q.$$

(b) *Jeżeli* $X_n \to X$ *w* L^p *to* $X_n \to X$ *w* L^q *dla dowolnego* $q \in [1, p]$.
(c) *Jeżeli* $X_n \to X$ *in* L^p, *to* $X_n \to X$ *według prawdopodobieństwa.*

Dowód (a). Niech $1 \le q \le p$. Wówczas $p/q \ge 1$, a więc funkcja

$$f(x) = |x|^{\frac{p}{q}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

jest wypukła. Stosując nierówność Jensena dla zmiennej $|X|^q$ i funkcji f otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E}\,|X|^p\right)^{1/p} &= \left(\mathbb{E}\,|X|^{q\frac{p}{q}}\right)^{1/p} \\ &\ge \left(\mathbb{E}\,|X|^q\right)^{\frac{p}{q}\frac{1}{p}} = \left(\mathbb{E}\,|X|^q\right)^{1/q}. \qquad \square \end{aligned}$$

Dowód (b). Część (b) wynika z (a). $\square$

Dowód (c). Z nierówności Chebyszewa mamy

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega\colon |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{\mathbb{E}\,|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \to 0. \qquad \square$$

1.22 Przestrzenie L^p

Niech $(E, \mathcal{E}, \mu)$ będzie przestrzenią z niekończenie skończoną miarą μ. Niech $p \in [1, +\infty)$. W dalszym ciągu utożsamiamy dwa odwzorowania borelowskie $X, \tilde{X}\colon E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ takie, że

$$\mu\Big(x \in E\colon X(x) \neq \tilde{X}(x)\Big) = 0.$$

Przez $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ oznaczamy ogół odwzorowań mierzalnych X (a dokładnie klas abstrakcji przy powyższym utożsamieniu) takich, że

$$\|X\|_{L^p} := \left(\int_E |X|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} < +\infty.$$

Twierdzenie 1.32 *(a) Dla dowolnego $p \in [1, +\infty)$, $\|\cdot\|_{L^p}$ jest normą.*
(b) Przestrzeń $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ z normą $\|\cdot\|_{L^p}$ jest przestrzenią Banacha.
(c) Niech $p, q \in (1, +\infty)$ będą takie, że $1/p + 1/q = 1$. Wówczas dla $X \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ i $Y \in L^q(E, \mathcal{E}, \mu)$, XY jest całkowalne i

$$\int_E |XY| \mathrm{d}\mu \leq \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^q}.$$

Dowód. Pokażemy (c). Jeżeli $\|X\|_{L^p} = 0$ lub $\|Y\|_{L^p} = 0$, to $X = 0$ lub $Y = 0$, μ-p.n. Stąd $\int_E XY \mathrm{d}\mu = 0$. Jeżeli $\|X\|_{L^p} \neq 0$ i $\|Y\|_{L^p} \neq 0$ ale któryś z nich jest równy $+\infty$, to nierówność ocztwiście zachodzi. Pozostaje więc przypadek $< \|X\|_{L^p}, \|Y\|_{L^q} < +\infty$. Niech

$$Z := \frac{|X|}{\|X\|_{L^p}}, \qquad H := \frac{|Y|}{\|Y\|_{L^q}}.$$

Oczywiście $\|Z\|_{L^p} = 1 = \|H\|_{L^q}$. Jeżeli $x \in E$ jest taki, że $0 < Z(x) < +\infty$ i $0 < H(x) < +\infty$, to z wypukłości funkcji wykładniczej oraz z faktu, że $1/p + 1/q = 1$, otzrymujemy

$$\begin{aligned} Z(x)H(x) &= \exp\left\{\frac{p \log Z(x)}{p} + \frac{qH(x)}{q}\right\} \\ &\leq \frac{1}{p} Z(x)^p + \frac{1}{q} H(x)^q. \end{aligned}$$

Po odcałkowaniu otrzymujemy

$$\int_E ZH \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dowód (a) zacznijmy od następującej obserwacji

$$(|X| + |Y|)^p = |X| \left(|X| + |Y|\right)^{p-1} + |X| \left(|X| + |Y|\right)^{p-1}.$$

Stosując nierówność (c) otrzymujemy

$$\int_E |X| \left(|X| + |Y|\right)^{p-1} \mathrm{d}\mu \le \|X|_{L^p} \left[\int_E \left(|X| + |Y|\right)^{(p-1)q} \mathrm{d}\mu\right]^{1/q}$$

oraz

$$\int_E |Y| \left(|X| + |Y|\right)^{p-1} \mathrm{d}\mu \le \|Y|_{L^p} \left[\int_E \left(|X| + |Y|\right)^{(p-1)q} \mathrm{d}\mu\right]^{1/q}$$

gdzie q jest takie, że $1/p + 1/q = 1$. Dodając stronami otrzymujemy

$$\int_E \left(|X| + |Y|\right)^{p} \mathrm{d}\mu \le \left[\|X\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}\right] \left[\int_E \left(|X| + |Y|\right)^{(p-1)q} \mathrm{d}\mu\right]^{1/q}.$$

Ponieważ $(1-p)q = p$ więc zachodzi

$$\int_E \left(|X| + |Y|\right)^{p} \mathrm{d}\mu \le \left[\|X\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}\right] \left[\int_E \left(|X| + |Y|\right)^{p} \mathrm{d}\mu\right]^{1/q}. \tag{1.6}$$

Możemy założyć, że $\|X\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p} < +\infty$. Wtedy

$$\int_E \left(|X| + |Y|\right)^{p} \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Istotnie, ponieważ funkcja $t \mapsto t^p$ jest wypukła, więc

$$\left(|X| + |Y|\right)^p = 2^p \left(\frac{|X| + |Y|}{2}\right)^p \le 2^p 2^{-1} \left(|X|^p + |Y|^p\right).$$

Wobec tego, możemy podzielić obie strony (1.6) przez (skończone)

$$\left[\int_E \left(|X| + |Y|\right)^{p} \mathrm{d}\mu\right]^{1/q}$$

otrzymując nierówność z punktu (a). $\square$

Własność (a) oznacza, że zachodzi nierówność trójkąta

$$\|X + Y\|_{L^p} \le \|X\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}, \qquad X, Y \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu).$$

Nierówność ta nosi nazwę *nierówności Minkowskiego*. Własność (c) nosi nazwę *nierówności Höldera*. Szczególny przypadek nierówności Höldera dla $p = q = 2$ nosi nazwę *nierówności Schwarza* lub *Cauchy'ego–Schwarza*.

Z powyższego twierdzenia wynika, że $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|X\|_{L^p} = \left(\mathbb{E}\,|X - Y|^p\right)^{1/p}.$$

Definicja 1.33 Ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ zbiega w L^p do zmiennej losowej X gdy

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{L^p} = 0.$$

Oczywiście $\{X_n\}$ zbiega do X w L^p wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathbb{E}\,|X_n - X|^p = 0.$$

Zbieżność w L^p ciągu $\{X_n\}$ do zmiennej X oznaczamy przez

$$X_n \overset{(L^p)}{\to} X.$$

Lemat 1.7 (O aproksymacji) *Niech E będzie przestrzenią metryczną z σ-ciałem $\mathcal{B}$ zbiorów borelowskich. Niech μ będzie miarą skończoną na $(E,\mathcal{B})$. Wówczas dla dowolnego $p \in [1,+\infty)$, zbiór $C_b(E)$ funkcji ciągłych ograniczonych na E jest gęsty w $L^p(E,\mathcal{B},\mu)$.*

Dowód. Jeżeli $f = \chi_U$, gdzie U jest otwartym podzbiorem E to istnieje ciąg funkcji ciągłych $\{f_n\}$, taki że $0 \le f_n \le f$ oraz $f_n \to f$ punktowo. Stąd $f_n \to f$ w L^p. Jeżeli $f = \chi_A$ dla pewnego $A \in \mathcal{B}$, to istnienie ciągu aproksymującego wynika z regularności miary μ, patrz Lemat 1.1. Tak więc teza lematu wynika z faktu, że dla dowolnej $f \in L^p$ znajdziemy ciąg funkcji prostych $\{f_n\}$ zbieżny punktowo do f oraz takich, że $|f_n| \le |f|$. $\square$

1.23 Jednakowa całkowalność

Definicja 1.34 Rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha\colon \alpha \in I\}$ jest *jednakowo całkowalna* gdy zachodzi jeden z równoważnych warunków

$$\lim_{x\to+\infty} \sup_{\alpha\in I} \int_{\{|X_\alpha|\ge x\}} |X_\alpha| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0, \tag{1.7}$$

$$\sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}\,|X_\alpha| < \infty, \qquad \lim_{\mathbb{P}(A)\to 0} \sup_{\alpha\in I} \int_A |X_\alpha| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0. \tag{1.8}$$

Zadanie 1.6 Pokazać równoważność (1.7) i (1.8).

Odpowiedź Pokazujemy, że (1.7) implikuje (1.8). Dla dowolnych $x > 0$ i $\alpha \in I$ mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|X_\alpha| &= \int_{\{|X_\alpha|\ge x\}} |X_\alpha| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{|X_\alpha|< x\}} |X_\alpha| \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le \int_{\{|X_\alpha|\ge x\}} |X_\alpha| \mathrm{d}\mathbb{P} + x.\end{aligned}$$

Z (1.7) istnieje $\overline{x} > 0$ takie, że

$$\sup_{\alpha\in I}\int_{\{|X_\alpha|\ge\overline{x}\}} \mathrm{d}\mathbb{P} < \infty.$$

Stąd

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\,|X_\alpha| \le \sup_{\alpha\in I}\int_{\{|X_\alpha|\ge\overline{x}\}} \mathrm{d}\mathbb{P} + \overline{x} < \infty.$$

Podobnie dla dowolnych $A\in\mathfrak{F}$, $\alpha\in I$ oraz $x>0$, mamy

$$\begin{aligned}\int_A |X_\alpha|\mathrm{d}\mathbb{P} &\le \int_{A\cap\{|X_\alpha|\ge x\}} |X_\alpha|\mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A\cap\{|X_\alpha|<x\}} |X_\alpha|\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &\le \int_{A\cap\{|X_\alpha|\ge x\}} |X_\alpha|\mathrm{d}\mathbb{P} + x\mathbb{P}(A).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Ustalmy $\varepsilon>0$. Z (1.7) istnieje $x(\varepsilon)>0$ takie, że

$$\sup_{\alpha\in I}\int_{\{|X_\alpha|\ge x(\varepsilon)\}} |X_\alpha|\mathrm{d}\mathbb{P} < \varepsilon/2.$$

Stąd i z (1.9) otrzymujemy, że dla $A\in\mathfrak{F}$ spełniających $\mathbb{P}(A)\le\varepsilon/(2x(\varepsilon))$ zachodzi

$$\sup_{\alpha\in I}\int_A |X_\alpha|\mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon.$$

Tak więc (1.7) implikuje (1.8).

Pokazujemy teraz, że (1.8) implikuje (1.7). Z nierówności Czebyszewa

$$\mathbb{P}\{|X_\alpha|\ge x\} \le \frac{\mathbb{E}\,|X_\alpha|}{x}, \qquad \forall\, x>0,\ \alpha\in I.$$

Ponieważ

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\,|X_\alpha| < \infty,$$

więc

$$\lim_{x\to+\infty}\sup_{\alpha\in I}\mathbb{P}\{|X_\alpha|\ge x\} = 0. \tag{1.10}$$

Ustalmy teraz $\varepsilon>0$. Z drugiej nierówności w (1.8) wynika, że istnieje $\delta>0$ takie, że

$$\int_A |X_\alpha|\mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon: \qquad \forall\,\alpha\in I,\ \forall\, A\in\mathfrak{F}\colon\ \mathbb{P}(A)\le\delta.$$

Z (1.10) istnieje $x(\delta)>0$ takie, że

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{P}\{|X_\alpha|\ge x\} \le \delta, \qquad \forall\, x\ge x(\delta).$$

Czyli

$$\sup_{\alpha\in I}\int_{\{|X_\alpha|\ge x\}} |X_\alpha|\mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon, \qquad \forall\, x\ge x(\delta),$$

co kończy dowód implikacji (1.7) $\Longleftarrow$ (1.8).

Następujące twierdzenie daje wygodne kryterium na jednakową całkowalność.

Twierdzenie 1.33 ***(De la Vallé-Poussina)*** *Na to aby rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha\colon \alpha \in I\}$ była jednakowo całkowalna wystarcza aby istniała funkcja $G\colon [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ taka, że*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{G(x)} = 0,$$

$$C := \sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}\, G(|X_\alpha|) < +\infty.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $M > 0$ takie, że $Cx/G(x) \le \varepsilon$. Stąd, dla $x \ge M$,

$$\int_{\{|X_\alpha|\ge x\}} |X_\alpha| \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{|X_\alpha|\ge x\}} G(|X_\alpha|)\frac{|X_\alpha|}{G(|X_\alpha|)} \mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon. \qquad \square$$

Przykładami funkcji G spełniających założenia twierdzenia De la Valle-Poussina są:

- funkcja potęgowa $G(x) = |x|^p$ dla $p > 1$,
- funkcja $G(x) = x\log(1 + |x|)$.

Tak więc jako wniosek otrzymujemy następujacy rezultat.

Twierdzenie 1.34 *Rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha\colon \alpha \in I\}$ jest jednakowo całkowalna, gdy zachodzi któryś z warunków:*

- *dla pewnego $p > 1$;*
$$\sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}\, |X_\alpha|^p < \infty,$$
-
$$\sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}\, |X_\alpha| \log(1 + |X_\alpha|) < \infty.$$

Podamy teraz lemat Fatou dla lim sup. Przypomnijmy, że podstawowy lemat Fatou (patrz Lemat 1.5) mówi, że dla dowolnego ciągu nieujemnych zmiennych losowych (X_n) zachodzi

$$\mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} X_n \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n.$$

Lemat Fatou dla *limsup* daje nierówność przeciwną dla ciągu zmiennych loswych niekoniecznie nieujemnych. Wymaga jednak jednakowej całkowalności ciągu (X_n^+).

Lemat 1.8 *Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Jeżeli ciąg (X_n^+) jest jednakowo całkowalny oraz $\mathbb{E}\, \limsup X_n$ istnieje to*

$$\mathbb{E}\, \limsup_{n\to\infty} X_n \ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n. \tag{1.11}$$

W szczególności jeżeli istnieje całkowalna zmienna losowa X taka, że dla każdego n zachodzi $X_n \le X$, $\mathbb{P}$-p.n. to ciąg (X_n^+) jest jednakowo całkowalny. Jeśli dodatkowo $\mathbb{E}\, \limsup X_n$ istnieje to zachodzi (1.11).

Dowód. Ponieważ $\mathbb{E}\limsup X_n$ istnieje, więc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\limsup X_n &= \mathbb{E}\,\limsup X_n^+ - \mathbb{E}\,\limsup X_n^- \\ &\leq \mathbb{E}\,\limsup X_n^+ - \limsup \mathbb{E}\, X_n^-,\end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z klasycznego lematu Fatou. Dowód zostanie zakończony jak tylko pokażemy, że dla dowolnego ciągu jednakowo całkowalnych nieujemnych zmiennych losowych (Y_n), w naszym przypadku $Y_n = X_n^+$,

$$\mathbb{E}\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\, Y_n.$$

Mamy

$$\mathbb{E}\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq \liminf_{x\to+\infty} \mathbb{E}\limsup_{n\to\infty} Y_n \wedge x.$$

Z klasycznego lematu Fatou dla dowolnego $x > 0$ mamy

$$\begin{aligned}x - \mathbb{E}\limsup_{n\to\infty} Y_n \wedge x &= \mathbb{E}\liminf_{n\to\infty}\,(x - Y_n \wedge x) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\,(x - Y_n \wedge x) \\ &\leq x - \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\, Y_n \wedge x.\end{aligned}$$

Czyli

$$\mathbb{E}\limsup_{n\to\infty} Y_n \wedge x \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\, Y_n \wedge x.$$

Tak więc

$$\mathbb{E}\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq \liminf_{x\to+\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\, Y_n \wedge x.$$

ponieważ

$$\mathbb{E}\, Y_n = \mathbb{E}\, Y_n \wedge x + \int_{\{Y_n \geq x\}} Y_n \mathrm{d}\mathbb{P}$$

oraz, z jednakowej całkowalności,

$$\limsup_{x\to+\infty} \sup_n \int_{\{Y_n \geq x\}} Y_n \mathrm{d}\mathbb{P} = 0,$$

więc

$$\liminf_{x\to+\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\, Y_n \wedge x = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\, Y_n.$$

W konsekwencji

$$\mathbb{E}\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\, Y_n. \qquad \square$$

Uwaga 1.3 W bardzo dobrej książce Lipcera i Sziriajewa p.t. "Statystyka procesów stochastycznych" sformułowany jest lemat Fatou dla warunkowych wartości oczekiwanych (patrz następny rozdział). Napisane jest, że jeżeli ciąg (X_n^+) jest jednakowo całkowalny oraz $\mathbb{E}\limsup X_n$ istnieje, to dla dowolnego pod-σ-ciała $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$,

$$\mathbb{E}\left(\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathfrak{G}\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n|\mathfrak{G}\right), \qquad \mathbb{P}-\text{p.n.},$$

gdzie $\mathbb{E}(X_n|\mathfrak{G})$ oznacza warunkową watrość oczekiwaną X_n względem $\mathfrak{G}$, patrz następny rozdział. Niestety taka nierówność bez dodatkowych założeń nie jest prawdziwa, patrz W. Zięba, A note on conditional Fatou lemma, Probab. Theory Related Fields 78 (1988), 73-74.

Podrozdział zakończymy ważnymi twierdzeniami o zbieżnościach według średniej i zbieżnościach w L^p.

Twierdzenie 1.35 ***(O zbieżności średnich)*** *Niech (X_n) będzie ciągiem nieujemnych zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Niech X będzie zmienną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Wówczas: jeżeli $X_n \to X$ słabo, to*

$$\mathbb{E}\, X_n \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n.$$

Ponadto

$$\mathbb{E}\, X_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n < +\infty$$

wtedy i tylko wtedy gdy ciąg (X_n) jest jednakowo całkowalny.

Dowód. Dla dowolnego $M > 0$ funkcja $x \mapsto x \wedge m$ jest ciągła i ograniczona na $[0, +\infty)$. Stąd

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n \wedge m = \mathbb{E}\, X \wedge m.$$

Przechodząc z $m \to \infty$, z twierdzenia Beppo-Levy'ego otrzymujemy żądaną nierówność.

Dowód drugiej części twierdzenia jest następujący: załóżmy, że (X_n) jest jednakowo całkowalny i zbieżny słabo do X. Z pierwszej części twierdzenia

$$\mathbb{E}\, X \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n \leq \sup_n \mathbb{E}\, X_n < +\infty.$$

Następnie, dla dowolnych n, m,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\, X_n - \mathbb{E}\, X| \leq{}& |\mathbb{E}\, X_n - \mathbb{E}\, X_n \wedge m| + |\mathbb{E}\, X_n \wedge m - \mathbb{E}\, X \wedge m| \\ &+ |\mathbb{E}\, X \wedge m - \mathbb{E}\, X|\,. \end{aligned}$$

Przechodząc do granic: najpierw z $n \to \infty$ a następnie z $m \to \infty$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}\, X = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n.$$

Załóżmy, że powyższa równość zachodzi. Wówczas dla dowolnego $m > 0$,

$$\int_{\{X_n \geq m\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mathbb{E}\left(X_n - X_n \wedge (m - X_n)^+\right) \to \mathbb{E}\left(X - X \wedge m\right).$$

Ponieważ $x \wedge (m-x)^+ \uparrow x$ gdy $m \uparrow +\infty$, więc z twierdzenia o zbieżności zdominowanej

$$\mathbb{E}\left(X - X \wedge (m - X)^+\right) \to 0. \qquad \square$$

Twierdzenie 1.36 ***(O zbieżności w L^p)*** *Niech $p \in [1, +\infty)$ oraz niech $X_1, X_2, \ldots, X \in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będą takie, że $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
(i) $X_n \to X$ w L^p,
(ii) $\|X_n\|_{L^p} \to \|X\|_{L^p}$,
(iii) zmienne losowe $(|X_n|^p)$ są jednakowo całkowalne.

Dowód. Z nierówności trójkąta $(i) \Longrightarrow (ii)$. Oczywiście jeżeli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to również $|X_n|^p \to |X|^p$ według prawdopodobieństwa. Stąd, z Twierdzenia 1.28, $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$. Pokażemy teraz, że $(ii) \Longleftarrow (i)$. W tym celu założymy (ii). Jeżeli nie zachodziłoby (i), to istnieją $\varepsilon > 0$ i podciąg (X_{n_j}) takie, że

$$\|X_{n_j} - X\|_{L^p} \geq \varepsilon, \qquad \forall\, j.$$

Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy założyć, że $X_{n_j} \to X$, $\mathbb{P}$-p.n. Z Lematu 1.8, otrzymujemy, że $X_{n_j} \to X$ w L^p co prowadzi do sprzeczności. □

1.24 Zbieżność szeregów niezależnych zmiennych losowych

W tym rozdziale podamy (przeważnie bez dowodów) kilka ważnych twierdzeń o zbieżności szeregów niezależnych zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{R}$ lub ogólniej w przestrzenia Banacha E.

Przyjmijmy oznaczenie

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pierwsze twierdzenia dotyczą zmiennych losowych o wartościch w $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.37 ***(Szeregi o nieujemnych składnikach)*** *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych i nieujemnych zmiennych losowych. Wówczas szereg*

$$\sum_n X_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

zbiega $\mathbb{P}$-p.n. wtedy i tylko wtedy gdy

$$\sum_n \mathbb{E}\, X_n \wedge 1 < +\infty.$$

Twierdzenie 1.38 ***(Nierówność maksymalna Kołmogorowa)*** *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średnich 0. Wówczas dla dowolnych $m \in \mathbb{N}$ i $r > 0$,*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{n=1,\ldots,m} |S_n| \geq r\right\} \leq \frac{1}{r^2}\mathbb{E}\, S_m^2 = \frac{1}{r^2}\sum_{n=1}^m \mathbb{E}\, X_n^2.$$

Twierdzenie 1.39 *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach symetrycznych, to znaczy, że $-X_n$ na taki sam rozkład jak X_n. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
(i) szereg $\sum_n X_n$ zbiega $\mathbb{P}$-p.n.,
(ii) szereg $\sum_n X_n^2$ zbiega $\mathbb{P}$-p.n.,
(iii) $\sum_n \mathbb{E}\, X_n^2 \wedge 1 < \infty$.
Ponadto gdy któryś z powyższych warunków nie jest spełniony, to

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|S_n| \geq r\} = 1, \qquad \forall\, r > 0.$$

Twierdzenie 1.40 ***(Kołmogorowa o trzech szeregach)*** *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Wówczas szereg $\sum_n X_n$ zbiega $\mathbb{P}$-p.n. wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $r > 0$ (lub równoważnie dla dowolnego $r > 0$):*
(i) $\sum_n \mathbb{P}\{|X_n| > r\} < +\infty$,
(ii) $\sum_n \mathbb{E}\, X_n \chi_{\{|X_n| \leq r\}}$ zbiega,
(iii) $\sum_n \mathrm{Var}\left(X_n \chi_{\{|X_n|\leq r\}}\right) < +\infty$.

Niech teraz $(E, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Jeżeli (X_n) jest ciągiem losowych elementów w E, to przyjmujemy, że

$$S_n := \sum_n X_n, \qquad S_n^+ := \max_{1\leq i\leq n} \|S_i\|, \qquad X_n^* := \max_{1\leq i\leq n} \|X_i\|.$$

Twierdzenie 1.41 ***(Nierówność Lévy-Oktaviani)*** *Jeżeli (X_n) jest ciągiem niezależnych elementów losowych o wartościach w niekoniecznie ośrodkowej przestrzeni Banacha E, to*

$$\mathbb{P}\{S_n^* > t\} \leq 3 \max_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}\{\|S_i\| > t/3\}, \qquad \forall\, t > 0. \tag{1.12}$$

Ponadto, jeżeli rozkłady X_n są symetryczne, to

$$\mathbb{P}\{S_n^* > t\} \leq 2\mathbb{P}\{\|S_n\| > t\}, \qquad \forall\, t > 0.$$

Dowód. Dla zadanych $t, s > 0$ oraz $i = 1, 2, \ldots$ oznaczmy przez A_i zdarzenie

$$A_i := \{\|S_j\| \leq t + s \quad \text{dla } j < i, \qquad \|S_i\| > t + s\}.$$

Oczywiście zdarzenia A_i są parami rozłączne (to znaczy $A_i \cap A_j = \emptyset$ gdy $i \neq j$) oraz

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{S_n^* > t + s\}.$$

Ponadto A_i nie zależy od $X_{i+1}, \ldots, X_n$ oraz

$$A_i \cap \{\|S_n - S_i\| \leq s\} \subset A_i \cap \{\|S_n\| > t\}.$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\|S_n\| > t\} &\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i \cap \{\|S_n\| > t\}\} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i \cap \{\|S_n - S_i\| \leq s\}\} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i\} \min_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_n - S_i\| \leq s\} \\
&\geq \mathbb{P}\{S_n^* > t+s\} \min_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_n - S_i\| \leq s\}.
\end{aligned}
$$

A więc

$$
\mathbb{P}\{S_n^* > t+s\} \leq \frac{\mathbb{P}\{\|S_n\| > t\}}{1 - \max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_n - S_i\| > s\}}.
$$

Teraz jeśli

$$
\max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_n - S_i\| > s\} \geq \frac{1}{3},
$$

to żądana nierówność (1.12) zachodzi. Natomiast gdy

$$
\max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_n - S_i\| > s\} < \frac{1}{3},
$$

to

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_n^* > t\} &\leq \frac{\mathbb{P}\{\|S_n\| > t/3\}}{1 - \max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_n - S_i\| > 2t/3\}} \\
&\leq \frac{\max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_i\| > t/3\}}{1 - 2\max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_i\| > t/3\}}
\end{aligned}
$$

bo

$$
\begin{aligned}
\max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_n - S_i\| > 2t/3\} &\leq \mathbb{P}\{\|S_n\| > t/3\} + \max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_i\| > t/3\} \\
&\leq 2 \max_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}\{\|S_i\| > t/3\}.
\end{aligned}
$$

Ponieważ dla $0 \leq x \leq 1/3$ mamy

$$
\frac{x}{1-2x} \leq 3x,
$$

więc również zachodzi (1.12).

Przechodzimy teraz do dowodu drugiej części twierdzenia. Niech

$$
B_i := \{\|S_j\| \leq t \quad \text{dla} \quad j < i \text{ oraz } \|S_i\| > t\}.
$$

Wtedy

$$
B_i \subset B_i \cap \{\|\|S_n\| > t\} \cup \{\|2S_i - S_n\| > t\|\}
$$

bo z $\|S_i\| > t$ i $\|S_n\| \leq t$ wynika, że

$$\|2S_i - S_n\| \geq \|2S_i\| - \|S_n\| > 2t - t \geq t.$$

W efekcie

$$\mathbb{P}\{B_i\} \leq \mathbb{P}\left\{B_i \cap \{\|S_n\| > t\}\right\} + \mathbb{P}\left\{B_i \cap \{\|2S_i - S_n\| > t\}\right\}.$$

Ponieważ zmienne losowe X_i są symetryczne

$$\mathbb{P}\left\{B_i \cap \{\|S_n\| > t\}\right\} = \mathbb{P}\left\{B_i \cap \{\|2S_i - S_n\| > t\}\right\}.$$

Tak więc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{S_n^* > t\right\} &= \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right\}\\ &\leq 2\mathbb{P}\left\{S_n^* > t \text{ rm oraz } \|S_n\| > t\right\}\\ &\leq 2\mathbb{P}\left\{\|S_n\| > t\right\}. \qquad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 1.42 ***(Itô–Nissio)*** *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościch w ośrodkowej przestrzeni Banacha E. Następujące warunki są równoważne:*
(i) Szereg $\sum X_n$ zbiega $\mathbb{P}$-p.n.
(ii) Szereg $\sum X_n$ zbiega według prawdopodobieństwa.
(iii) Szereg $\sum X_n$ zbiega słabo.
Ponadto, jeżeli rozkłady $X_1, X_2, \ldots$ są symetryczne, to warunki $(i) - (iii)$ są równoważne każdemu z następujących warunków:
(iv) Rodzina rozkładów $\mathcal{L}(S_n)$, $n \in \mathbb{N}$, jest względnie słabo zwarta.
(v) Istnieje element losowy S o wartościach w E oraz rodzina $D \subset E^*$ oddzielająca punkty E takie, że dla każdego $x \in E^*$, szereg $\sum_n x(X_n)$ zbiega $\mathbb{P}$-p.n. do $x(S)$.
(vi) Istnieje miara probabilistyczna μ na $(E, \mathcal{B}(E))$ oraz rodzina $D \subset E^*$ oddzielająca punkty E takie, że dla każdego $x \in E^*$, szereg $\sum_n x(X_n)$ zbiega słabo do rozkładu do $x(\mu)$, gdzie $x(\mu)$ jest transportem miary μ przez odwzorowanie $E \ni \xi \to x(\xi) \in \mathbb{R}$.

Dowód. Oczywiście $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$. Implikacje $(ii) \Longrightarrow (i)$ wywnioskujemy z nierówności Lévy–Octaviani. Mianowicie niech A oznacza zbiór tych $\omega \in \Omega$, dla których ciąg $(S_n)(\omega)$ nie jest Cauchy'ego. Mamy

$$\begin{aligned}A &= \{\omega \in \Omega \colon \exists \varepsilon > 0 \colon \forall n \exists m, m' \geq n \colon \|S_m(\omega) - S_{m'}(\omega)\| \geq \varepsilon\}\\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m,m' \geq n} \left\{\omega \in \Omega \colon \|S_m(\omega) - S_{m'}(\omega)\| \geq \frac{1}{k}\right\}.\end{aligned}$$

Stąd

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

gdzie

$$A_k := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega \colon \sup_{m \in \mathbb{N}} \|X_n(\omega) + \ldots + X_{n+m}(\Omega)\| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnego k, $\mathbb{P}(A_k) = 0$. Oczywiście dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}\left\{ \|X_n + \ldots + X_{n+m}\| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Ze zbieżności według prawdopodobieństwa

$$\lim_{n,m \to \infty} \mathbb{P}\left\{ \|X_n + \ldots + X_{n+m}\| \geq \frac{1}{k} \right\} = 0.$$

Stąd $\mathbb{P}(A_k) = 0$.

Pokazujemy teraz, że $(iii) \Longrightarrow (ii)$. Wystarczy pokazać, że ciąg (S_n) jest Cauchy'ego w sensie zbieżności według prawdopodobieństwa, to znaczy, że

$$\lim_{n,m \to \infty} \mathbb{P}\left\{ \|S_n - S_m\| \geq \varepsilon \right\} = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Z Propozycji 1.1 wnioskujemy, że wystarczy pokazać zbieżność rozkładów $\mathcal{L}(S_n - S_m)$ do rozkładu δ_0 skoncentrownego w 0. Ze słabej zbieżności S_n wynika ciasność rozkładów ciągu $\mathcal{L}(S_n)$. Ponieważ dla dowolnego zbioru mierzalnego $K \subset E$,

$$\mathbb{P}\left\{ S_n - S_m \notin K - K \right\} \leq \mathbb{P}\left\{ S_n \notin K \right\} + \mathbb{P}\left\{ S_m \notin -K \right\}$$

więc ciąg $(\mathcal{L}(S_n - S_m))$ jest ciasny, a więc słabo zwarty. Niech μ będzie rozkładem granicznym ciągu $(\mathcal{L}(S_n))$, a ν niech będzie rozkładem granicznym jakiegoś podciągu $(\mathcal{L}(S_{n_k} - S_{m_k}))$ ciągu $(\mathcal{L}(S_n - S_m))$. Możemy założyć, że $n_k > m_k$ dla dowolnego k. Mamy

$$\mathcal{L}(S_{m_k}) * \mathcal{L}(S_{n_k} - S_{m_k}) \Longrightarrow \mu * \nu,$$

a z drugiej strony, z niezależności S_{m_k} i $S_{n_k} - S_{m_k}$, mamy

$$\mathcal{L}(S_{m_k}) * \mathcal{L}(S_{n_k} - S_{m_k}) = \mathcal{L}(S_{n_k}) \Longrightarrow \mu.$$

Czyli $\mu = \mu * \nu$, a więc $\nu = \delta_0$. $\square$

1.25 Ciasność rodzin rozkładów

Niech (E,ρ) będzie przestrzenią metryczną.

Definicja 1.35 Mówimy, że rodzina miar probabilistycznych $(\mu_\alpha\colon \alpha\in I)$ na przestrzeni mierzalnej $(E,\mathcal{B}(E))$ jest *ciasna* gdy dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje zbiór zwarty $K_\varepsilon\subset E$ taki, że

$$\mu_\alpha(K_\varepsilon)\geq 1-\varepsilon, \qquad \forall\,\alpha\in I.$$

Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczna (E,τ) jest *przestrzenią polską* gdy na E istnieje metryka ρ, która generuje topologię τ taka, że (E,ρ) jest przestrzenią ośrodkową i zupełną.

Dla $\varepsilon>0$ i $\Gamma\subset E$ niech

$$\Gamma^\varepsilon := \{x\in\Gamma\colon \rho(x,\Gamma)<\varepsilon\}$$

będzie ε-*otoczką* Γ.

Niech $\mathcal{P}(E)$ oznacza zbiór wszystkich miar probabilistycznych borelowskich na E wyposażony w topologię zbieżności słabej.

Zdefiniujemy tak zwaną *metrykę Prokhorowa* na $\mathcal{P}(E)$ kładąc dla $\mu,\nu\in\mathcal{P}(E)$,

$$p(\mu,\nu):=\inf\left\{\varepsilon>0\colon \mu(F)\leq\nu(F^\varepsilon)+\varepsilon\quad\text{dla dowolnego } F=\overline{F}\subset E\right\}.$$

Twierdzenie 1.43 *Funkcja $p\colon \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)\mapsto[0,1]$ zdefiniowana powyżej jest metryką. Na $\mathcal{P}(E)$ wyznacza ona topologię τ zbieżności słabej. Jeżeli E jest polska, to $(\mathcal{P}(E),\tau)$ lub równoważnie $(\mathcal{P}(E),p)$ jest polska.*

Twierdzenie 1.44 *Jeżeli E jest przestrzenią polską, to rodzina rozkładów $(\mu_\alpha\colon \alpha\in I)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy jest słabo względnie zwarta.*

Przypomnijmy, że dowolna miara skończona μ na przestrzeni metrycznej (E,ρ) jest regularna (patrz Lemmat 1.1), to znaczy, że

$$\mu(B)=\sup_{F\subset B\colon F=\overline{F}}\mu(F)=\inf_{U\supset B\colon U=\operatorname{Int}U}\mu(U), \qquad \forall\,B\in\mathcal{B}(E).$$

Ponieważ rodzina jednoelementowa jest oczywiście słabo zbieżna (a więc i zwarta), otrzymujemy następujący wniosek z Twierdzenia 1.44, który przypisuje się Stanisławowi Ulamowi.

Twierdzenie 1.45 ***(Ulama)*** *Niech μ będzie miarą skończoną na przestrzeni polskiej E. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje zbiór zwarty $K_\varepsilon\subset E$ taki, że*

$$\mu\left(E\setminus K_\varepsilon\right)\leq\varepsilon.$$

Definicja 1.36 Mówimy, że prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$ na $(E,\mathcal{B}(E))$ jest *wewnętrznie regularne* gdy

$$\mathbb{P}(B)=\sup_{K\subset B,\ K\,\text{zwarty}}\mathbb{P}\left(K\right).$$

Twierdzenie 1.46 *Załóżmy, że E jest przestrzenią Polską. Wówczas, każde prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$ na $(E,\mathcal{B}(E))$ jest wewnętrznie regularne.*

Dowód. W pierwszym kroku pokażemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K_ε taki, że

$$\mathbb{P}\left(K_\varepsilon^c\right) < \varepsilon.$$

W tym celu zauważmy, że ponieważ E jest ośrodkowa więc dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje ciąg kul $B(\sigma_n^\delta, \delta)$ o środkach w punktach $\sigma_n^\delta \in E$ i promieniau δ taki, że

$$\bigcup_n B(\sigma_n^\delta, \delta) = E.$$

Dla dowolnego n istnieje l_n takie, że

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{l_n} B(\sigma_j^{1/n}, 1/n)\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Kładziemy

$$K_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{l_n} B(\sigma_j^{1/n}, 1/n).$$

Wówczas, K jest zwarty ponieważ dla dowolnego $\delta > 0$, K można pokryć skończoną liczbą kul o średnicy $\leq \delta$. Ponadto

$$\mathbb{P}\left(K^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{l_n} B(\sigma_j^{1/n}, 1/n)\right)^c\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2},$$

co kończy dowód pierwszego kroku.

W drugim kroku dowodu ustalmy $B \in \mathcal{B}(E)$. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje domknięty $F \subset F$ taki, że $F \subset F$ oraz

$$\mathbb{P}\left(B\right) \leq \mathbb{P}\left(F\right)) + \varepsilon.$$

Teraz zbiór $F_\varepsilon = F \cap K_\varepsilon$ jest zwarty oraz

$$\mathbb{P}\left(F\right) \leq \mathbb{P}\left(F_\varepsilon\right) + \varepsilon.$$

Stąd

$$\mathbb{P}\left(B\right) \leq \mathbb{P}\left(F_\varepsilon\right) + 2\varepsilon.$$

□

1.26 Twierdzenie o izomorfizmie

Podamy teraz bez dowodu kilka użytecznych faktów z bardziej zaawansowanej teorii miary. Pierwszy to tak zwane twierdzenie Borela o izomorfizmie. Wynik ten został jednak po raz pierwszy sformułowany i udowodniony przez Kuratowskiego w 1934 r.

Definicja 1.37 Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$ i $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$ będą dwoma przestrzeniami mierzalnymi. Odwzorowanie $j\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ jest *mierzalnym homeomorfizmem* gdy j jest mierzalną bijekcją i odwzorowanie odwrotne j^{-1} jest mierzalne.

Przypomnijmy, że ℓ_1 oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.47 *Niech E będzie przestrzenią Polską a $\mathbb{P}$ będzie bezatomową*[3] *miarą probabilistyczną na $(E, \mathcal{B}(E))$. Wówczas istnieje mierzalny homeomorfizm $j\colon E \mapsto [0,1]$ taki, że*

$$\ell_1(j(A)) = \mathbb{P}(A), \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}(E).$$

Przypomnijmy, ze przestrzeń topologiczna E jest Polska gdy jest homeomorficzna z jakąś ośrodkową zupełną przestrzenią metryczną. To znaczy, że istnieją: ośrodkowa zupełna przestrzeń metryczna $\tilde{E}$ oraz ciągły homeomorfizm $j\colon E \to \tilde{E}$. Przypomnijmy, że j jest ciągłym homeomorfizmem, gdy jest ciągłą bijekcją i j^{-1} jest ciągła.

Definicja 1.38 Przestrzeń topologiczna E jest *przestrzenią Łusina* gdy jest homeomorficzna (ciągły homeomorfizm) z podzbiorem Borelowskim zwartej przestrzeni metrycznej. To znaczy, że istnieją zwarta przestrzeń metryczna I, podzbiór Borelowski $\tilde{E} \in \mathcal{B}(I)$ oraz ciągły homeomorfizm $j\colon E \to \tilde{E}$, gdzie na $\tilde{E}$ rozważamy topologię indukowaną z I.

Niech E będzie przestrzenią topologiczną. Przez G_δ oznaczamy klasę wszystkich przeliczalnych przecięć podzbiorów otwartych E. To znaczy zbiorów postaci

$$\bigcap_n G_n,$$

gdzie (G_n) jest jakimś ciągiem podzbiorów otwartych E.

Twierdzenie 1.48 *Przestrzeń topologiczna E jest Polska wtedy i tylko wtedy gdy jest homeomorficzna z podzbiorem typu G_δ zwartej przestrzeni metrycznej. W szczególności, każda przestrzeń Polska jest przestrzenią Łusina.*

1.27 Problemy

W tym rozdziale sformułujemy dwa dość trudne problemy:

[3] To znaczy $\mathbb{P}\{\omega\} = 0$ dla każdego $\omega \in E$.

Problem 1 Niech U będzie wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^d$. Pokazać, że brzeg ∂U nie musi być zbiorem Borelowskim, ale jest mierzalny w sensie Lebesgues, to znaczy należy do uzupełnienia $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ o zbiory miary Lebesgue'a 0. Dodatkowo, $\ell_d(\partial U) = 0$. Dowód mierzalności w sensie Lebesgue'a i faktu, że $\ell_d(\partial U) = 0$ jest równoważny następującej obserwacji:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, B_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \colon \partial U \subset B_\varepsilon \quad \text{oraz} \quad \ell_d(B_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Zauważmy, że bez straty ogólności można założyć, że U jest zbiorem ograniczonym. Dla ułatwienia można ograniczyć się do wymiaru $d = 2$.

Problem 2 Niech $(\Omega, \mathfrak{F})$ i $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$ będą przestrzeniami mierzalnymi. Rozważmy przestrzeń produktową $(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathfrak{F} \times \tilde{\mathfrak{F}})$. Rozważmy projekcje π i $\tilde{\pi}$ zbiorów mierzalnych w produkcie na Ω i $\tilde{\Omega}$, to znaczy dla

$$A \in \mathfrak{F} \times \tilde{\mathfrak{F}} := \sigma\left(B \times \tilde{B} \colon B \in \mathfrak{F},\ \tilde{B} \in \tilde{\mathfrak{F}}\right)$$

$$\pi(A) = \left\{\omega \in \Omega \colon \exists\, \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \colon (\omega, \tilde{\omega}) \in A\right\}$$

oraz

$$\tilde{\pi}(A) = \left\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \colon \exists\, \omega \in \Omega \colon (\omega, \tilde{\omega}) \in A\right\}.$$

Zastanowić się czy dla dowolnego $A \in \mathfrak{F} \times \tilde{\mathfrak{F}}$, $\pi(A) \in \mathfrak{F}$ i $\tilde{\pi}(A) \in \tilde{\mathfrak{F}}$. Rozważyć przypadek $\Omega = \mathbb{R}^d$ i $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^l$, a $\mathfrak{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ i $\tilde{\mathfrak{F}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$. W szczególności wziąść $d = l = 1$. Projekcje zbiorów Borelowskich to tak zwane *zbiory analityczne*. Klasa zbiorów analitycznych jest większa od klasy zbiorów Borelowskich. Zastanowić się czy zbiory analityczne są mierzalne w sensie Lebesgue'a.

2

Warunkowa wartość oczekiwana

Rozdział poświęcony jest warunkowej wartości oczekiwanej. Większość zadań pochodzi z [6], [18], [21].

2.1 Definicja

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną a $\mathcal{G}$ niech będzie pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$, to znaczy, że $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω i $\mathcal{G} \subset \mathfrak{F}$.

Niech $X\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ będzie całkowalną zmienną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

Definicja 2.1 Warunkową wartością oczekiwaną X względem σ-ciała $\mathcal{G}$, nazywamy zmienną losową Y taką, że:

(i) Y jest $\mathcal{G}$-mierzalna,
(ii) dla każdego $A \in \mathcal{G}$,

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Y \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Oczywiście do rozstrzygnięcia jest problem istnienia i jedyności warunkowej wartości oczekiwanej. Problem ten rozwiązany jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.1 *Dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X i dowolnego pod-σ-ciała $\mathcal{G}$ istnieje warunkowa wartość oczekiwana X względem $\mathcal{G}$. Ponadto, jeżeli Y i $\tilde{Y}$ są warunkowymi wartościami oczekiwanymi X względem $\mathcal{G}$, to $Y = \tilde{Y}$, $\mathbb{P}$-p.n., czyli*

$$\mathbb{P}\left(Y = \tilde{Y}\right) = 1.$$

Dowód. Niech X_+ i X_- będą odpowiednio częściami dodatnią i ujemną zmiennej X. Na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{G})$ rozważamy trzy miary: μ równą obcięciu $\mathbb{P}$ do $\mathcal{G}$, oraz

$$\nu_+(A) = \int_A X_+ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_+ \mathrm{d}\mu, \quad \nu_-(A) = \int_A X_- \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_- \mathrm{d}\mu, \qquad A \in \mathcal{G}.$$

Z Twierdzenia 1.22, wynika, że $\nu_+ \ll \mu$ i $\nu_- \ll \mu$. A więc z twierdzenia Radona–Nikodyma, istnieją gęstości

$$\rho_+ := \frac{\mathrm{d}\nu_+}{\mathrm{d}\mu}, \qquad \rho_- := \frac{\mathrm{d}\nu_-}{\mathrm{d}\mu}.$$

Zauważmy, że $\rho_+ - \rho_-$ jest warunkową wartością oczekiwaną X względem $\mathcal{G}$.

Pokazujemy teraz jedyność. Niech Y i $\tilde{Y}$ będą warunkowymi wartościami X względem $\mathcal{G}$. Wówczas Y i $\tilde{Y}$ są $\mathcal{G}$-mierzalne oraz

$$\int_A (Y - \tilde{Y}) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = 0, \qquad \forall\, A \in \mathcal{G}.$$

Z Twierdzenia 1.22(f), wnioskujemy, że $Y - \tilde{Y} = 0$, $\mathbb{P}$-p.n.. $\square$

2.2 Warunkowa wartość oczekiwana względem σ-ciała generowanego przez rozbicie Ω

Definicja 2.2 Skończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathfrak{F}$ nazywamy rozbiciem Ω gdy:

(i) A_j, $j = 1, \ldots, n$, są parami rozłączne, to znaczy $A_j \cap A_i = \emptyset$ dla $i \neq j$,
(ii) $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Lemat 2.1 *Załóżmy, że $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$ gdzie $A_1, \ldots A_n$ jest rozbiciem Ω. Wówczas*

$$\mathcal{G} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \colon I \subset \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Ponadto, odwzorowanie $Y \colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ jest $\mathcal{G}$-mierzalne wtedy i tylko wtedy gdy jest stałe na każdym zbiorze A_i.

Dowód. Oczywiście

$$\tilde{\mathcal{G}} := \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \colon I \subset \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$$

jest σ-ciałem zawierającym $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Stąd $\mathcal{G} \subset \tilde{\mathcal{G}}$. Ponieważ dla każdego $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{G},$$

więc $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$.

Niech Y będzie $\mathcal{G}$-mierzalne. Załóżmy nie wprost, że Y nie jest stałe na którymś A_i, na przykład na A_{i_0}. Wówczas istnieje x takie, że

$$Y^{-1}((-\infty, x]) \cap A_{i_0} \neq \emptyset \quad \text{i} \quad Y^{-1}((x, +\infty)) \cap A_{i_0} \neq \emptyset.$$

Stąd $Y^{-1}((-\infty, x]) \cap A_{i_0}$ jest właściwym podzbiorem A_{i_0} należącym do $\mathcal{G}$, co jest sprzeczne z postacią zbiorów z $\mathcal{G}$. $\square$

Twierdzenie 2.2 *Załóżmy, że $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$ gdzie $A_1, \ldots, A_n$ jest rozbiciem Ω. Wówczas dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X mamy*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(X; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} \chi_{A_i},$$

gdzie przyjmujemy, że $0/0$ równe jest dowolnej liczbie (n.p. 0).

Dowód. Z Lematu 2.1,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

dla pewnych liczb $a_1, \ldots, a_n$. Liczbę a_i wyliczamy z warunku

$$\int_{A_i} \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P} = a_i \mathbb{P}(A_i) = \int_{A_i} X \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}(X; A_i). \qquad \square$$

Przyklad 2.1 Niech $\Omega = \{1, 2, 3, ...10\}$, niech $\mathfrak{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów Ω, niech $\mathbb{P}\{i\} = 1/10$ dla każdego i, niech $X(i) = i$ oraz niech $\mathcal{G} = \sigma(\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\})$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) &= \frac{(1+2)1/10}{1/5} \chi_{\{1,2\}} + \frac{(3+4)1/10}{1/5} \chi_{\{3,4\}} \\
&\quad + \frac{(5+6)1/10}{1/5} \chi_{\{5,6\}} + \frac{(7+8)1/10}{1/5} \chi_{\{7,8\}} + \frac{(9+10)1/10}{1/5} \chi_{\{9,10\}} \\
&= \frac{3}{2} \chi_{\{1,2\}} + \frac{7}{2} \chi_{\{3,4\}} + \frac{11}{2} \chi_{\{5,6\}} + \frac{15}{2} \chi_{\{7,8\}} + \frac{19}{2} \chi_{\{9,10\}}.
\end{aligned}$$

2.3 Warunkowa wartość oczekiwana względem σ-ciała generowanego przez zmienną losową

Niech X i Y będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Przypomnijmy (patrz Definicja 1.12), że $\sigma(Y)$ oznacza σ-ciało generowane przez Y. Warunkową wartość oczekiwaną X względem $\sigma(Y)$ będziemy oznaczać krótko przez $\mathbb{E}(X|Y)$, czyli

$$\mathbb{E}(X|Y) := \mathbb{E}(X|\sigma(Y)).$$

Z definicji $\mathbb{E}(X|Y)$ jest $\sigma(Y)$-mierzalna. Z twierdzenia Dooba–Dynkina (Twierdzenie 1.19) istnieje funkcja borelowska $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, taka że

$$\mathbb{E}(X|Y) = f(Y).$$

Przyjmujemy oznaczenie

$$\mathbb{E}(X|Y = y) := f(y).$$

Zadanie 2.1 Pokazać, że jeżeli $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, to

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \frac{\mathbb{E}(X; \{Y = y\})}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

Ogólnie mamy następujący rezultat.

Twierdzenie 2.3 *Niech Y będzie zmienną losową przyjmującą skończoną liczbę różnych wartości $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Załóżmy, że*

$$\mathbb{P}(Y = y_i) > 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Wówczas σ-ciało $\sigma(Y)$ jest σ-ciałem generowanym przez podział $\{A_1, \ldots, A_n\}$ gdzie

$$A_i := \{Y = y_i\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ponadto dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X zachodzi

$$\mathbb{E}(X|Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(X; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} \chi_{A_i}.$$

Inaczej

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}(X;A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} & \textit{gdy } y = y_i \textit{ dla pewnego } i, \\ 0 & \textit{gdy } y \notin \{y_1, \ldots, y_n\}. \end{cases}$$

2.4 Własności warunkowej wartości oczekiwanej

Następujące twierdzenie podaje podstawowe własności warunkowej wartości oczekiwanej.

Twierdzenie 2.4 *(i) Jeżeli X jest całkowalną zmienną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ jest pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$ a X jest $\mathcal{G}$ mierzalna, to*

$$\mathbb{E}\,(X|\mathcal{G}) = X, \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

(ii) Jeżeli X jest całkowalną zmienną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ i $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, to

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X, \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

(iii) Niech X i Y będą całkowalnymi zmiennymi losowymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$. Wówczas dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left(aX + bY|\mathcal{G}\right) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

(iv) Jeżeli X jest całkowalną zmienną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ jest pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$, a $\mathcal{H}$ jest pod-σ-ciałem $\mathcal{G}$, to

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{H}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)|\mathcal{H}\right), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

(v) Niech X będzie zmieną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$. Załóżmy, że $X \geq 0$, $\mathbb{P}$-p.n. Wówczas

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) \geq 0, \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

(vi) Niech X i Y będą zmiennymi losowymi na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$. Załóżmy, że X i Y są całkowalne oraz, że $X \leq Y$, $\mathbb{P}$-p.n. Wówczas

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) \leq \mathbb{E}\left(Y|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Mamy następujące uogólnienia klasycznych twierdzeń o zbieżności wartości oczekiwanej.

Twierdzenie 2.5 ***(Warunkowe twierdzenie Lebesgue'a–Beppo Leviego)*** *Jeśli (X_n) jest niemalejącym ciągiem zmiennych losowych nieujemnych zbieżnych $\mathbb{P}$-p.n. do zmiennej X, to dla dowolnego pod-σ-ciała $\mathcal{G} \subset \mathfrak{F}$,*

$$\mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) \uparrow \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Dowód. Z Twierdzenia 2.4(v) wynika, że $\mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, jest ciągiem rosnącym ograniczonym przez $\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)$. Stąd jest on zbieżny $\mathbb{P}$-p.n. do jakiejś zmiennej losowej $Y \leq \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)$. Ponieważ wszystkie zmienne $\mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right)$ są $\mathcal{G}$-mierzalne, więc Y jest $\mathcal{G}$-mierzalną. Niech $A \in \mathcal{G}$. Mamy pokazać, że

$$\int_A Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Stosując (nie warunkowe) twierdzenie Lebesgue'a–Beppo Leviego do ciągu $\chi_A \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$\int_A \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) \mathrm{d}\mathbb{P} \to \int_A Y \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Z drugiej strony

$$\int_A \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Stosując znowu (nie warunkowe) twierdzenie Lebesgue'a–Beppo Leviego, tym razem do ciągu $\chi_A X_n$, $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$\int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \to \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

□

Twierdzenie 2.6 ***(Warunkowa wersja lematu Fatou)*** *Jeżeli (X_n) jest ciągiem zmiennych losowych całkowalnych nieujemnych na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, to dla dowolnego pod-$\sigma$-ciała $\mathcal{G}$ zachodzi*

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}\right) \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P}-p.n.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy jak w przypadku oryginalnego lematu Fatou. Niech

$$Y_n = \inf_{k\ge n} X_k, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad Y = \liminf_{n\to\infty} X_n.$$

Wówczas $Y_n \uparrow Y$ oraz $X_n \ge Y_n$. Z Twierdzeń 2.4(v) i 2.5,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) \ge \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Y_n|\mathcal{G}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Y_n|\mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\left(Y|\mathcal{G}\right).$$

□

Twierdzenie 2.7 ***(Warunkowa wersja twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej)*** *Jeżeli X, X_n, $n \in \mathbb{N}$, są zmiennymi losowymi na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, takimi, że*

- *istnieje całkowalna zmienna losowa Y, dla której*

$$|X_n| \le Y, \qquad \mathbb{P}-p.n.,$$

- $X_n \to X$, $\mathbb{P}$-*p.n.*

to X i X_n, $n \in \mathbb{N}$, są całkowalne oraz dla dowolngo pod-σ-ciała $\mathcal{G}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P}-p.n.$$

Dowód. Całkowalność wynika z klasycznego twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności dominowanej. Z lematu Fatou (warunkowego)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y|\mathcal{G}\right) + \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\pm X_n|\mathcal{G}\right) &= \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Y \pm X_n|\mathcal{G}\right)\\ &\ge \mathbb{E}\left(Y + \liminf_{n\to\infty} \pm X_n|\mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\left(Y|\mathcal{G}\right) \pm \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right).\end{aligned}$$

Stąd

$$\liminf_{n\to\infty} \pm\mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) \ge \pm\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right),$$

a więc

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) \ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) \ge \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right).$$

□

W rozdziale poświęconym martyngałom (patrz Rozdział 4.7) podamy twierdzenia o zbieżności typu

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}_n\right) \to \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}_\infty\right),$$

gdzie $(\mathcal{G}_n)$ jest ciągiem zstępujących lub wstępujących pod-σ-ciał $\mathcal{F}$, a

$$\mathcal{G}_\infty = \bigcap_n \mathcal{G}_n \qquad \text{lub} \qquad \mathcal{G}_\infty = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{G}_n\right).$$

Następne twierdzenie jest uzupełnieniem Twierdzenia 2.4 o pozostałe podstawowe własności warunkowej wartości oczekiwanej.

Twierdzenie 2.8 (i) *Niech X i Z będą zmiennymi losowymi na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$. Załóżmy, że X i XZ są całkowalne oraz, że Z jest $\mathcal{G}$-mierzalne. Wówczas*

$$\mathbb{E}\left(ZX|\mathcal{G}\right) = Z\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P}-p.n.$$

(ii) *Niech X będzie zmieną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$. Załóżmy, że X nie zależy od $\mathcal{G}$. Wówczas*

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) = \mathbb{E}X, \qquad \mathbb{P}-p.n.$$

Dowód. Oczywiście zmienna losowa $Z\mathcal{E}\left(Y|\mathcal{G}\right)$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna. Mamy pokazać, że dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ zachodzi

$$\int_A ZX\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Jeżeli Z jest funkcją prostą

$$Z = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{B_j},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $B_j \in \mathcal{G}$, $a_j \in \mathbb{R}$, to

$$\int_A ZX\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{j=1}^n \int_{A\cap B_j} a_j X\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{j=1}^n \int_{A\cap B_j} a_j\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Jeżeli teraz Z jest $\mathcal{G}$-mierzalne i takie, że ZX jest całkowalne, to istnieje (patrz Lemat 1.2) ciąg funkcji prostych, $\mathcal{G}$-mierzalnych (Z_n) takich, że $Z_n \to Z$, $\mathbb{P}$-p.n. oraz $|Z_n| \leq |Z|$. Rządana równość wynika z (bezwarunkowego) twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zdominowanej.

Dowód drugiej części twierdzenia zaczniemy od przypomnienia, że X nie zależy od $\mathcal{G}$ gdy σ-ciała $\sigma(X)$ i $\mathcal{G}$ są niezależne, to znaczy

$$\mathbb{P}\left(A\cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right), \qquad \forall\, A \in \sigma(X),\ B \in \mathcal{G}.$$

Niech teraz (X_n) będzie ciągiem funkcji prostych $\sigma(X)$-mierzalnych takich, że $X_n \to X$, $\mathbb{P}$-p.n. oraz $|X_n| \leq |X$. Wtedy

$$X_n = \sum_{j=1}^{m_n} a_{j,n}\chi_{A_{j,n}},$$

gdzie $m_n \in \mathbb{N}$, $A_{j,n} \in \sigma(X)$, $a_{j,n} \in \mathbb{R}$. Dla dowolnego $B \in \mathcal{G}$ mamy

$$\int_B X_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{m_n} a_{j,n}\mathbb{P}\left(A_{j,n} \cap B\right) = \mathbb{P}\left(B\right)\sum_{j=1}^{m_n} a_{j,n}\mathbb{P}\left(B\right) = \int_B \mathbb{E}\, X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy równość

$$\int_B X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}\, X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Ponieważ $\mathbb{E}\, X$ jest $\mathcal{G}$-mierzalne, więc $\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\, X$. $\square$

Następne twierdzenie jest uogólnieniem klasycznej nierówności Jensena dla wartości oczekiwanej na warunkową wartość oczekiwaną.

Twierdzenie 2.9 ***(Nierówność Jensena)*** *Niech $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą (w doł). Niech X będzie zmienną losową całkowalną taką, że $f(X)$ jest całkowalna. Wówczas dla dowolnego pod-σ-ciała $\mathcal{G}$ zachodzi*

$$f\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right) \leq \mathbb{E}\left(f(X)|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Niech $g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją wklęsłą (w górę). Niech X będzie zmienną losową całkowalną taką, że $g(X)$ jest całkowalna. Wówczas dla dowolnego pod-σ-ciała $\mathcal{G}$ zachodzi

$$g\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right) \geq \mathbb{E}\left(g(X)|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Dowód. Z wypukłości funkcji f wynika, że istnieją ciągi (a_n) i (b_n) takie, że

$$f(x) = \sup_n \left(a_n x + b_n\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Stąd

$$f(X) \geq a_n X + b_n, \qquad \forall\, n.$$

A więc

$$\mathbb{E}\left(f(X)|\mathcal{G}\right) \geq a_n \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) + b_n \qquad \forall\, n,$$

a więc

$$\mathbb{E}\left(f(X)|\mathcal{G}\right) \geq \sup_n \left\{a_n \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) + b_n\right\} = f\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right).$$

Dla funkcji wklęsłej istnieją ciągi (c_n) i (d_n) takie, że

$$g(x) = \inf_n \left(c_n x + d_n\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Stąd

$$\mathbb{E}\left(g(X)|\mathcal{G}\right) \leq c_n \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) + d_n.$$

$\square$

Następujące twierdzenie jest uogólnieniem znanego faktu, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X całkowalnej z kwadratem jest rzutem ortogonalnym X w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ na przestrzeń funkcji stałych, czyli $\mathbb{E}\, X$ jest (jedyną) liczbą taką, że

$$\int_\Omega |X - \mathbb{E}\, X|^2 \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_\Omega |X - a|^2 \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 2.10 *Jeżeli X jest zmienną losową całkowalną z kwadratem (to jest $\mathbb{E}X^2 < \infty$), to dla dowolnego pod-σ-ciała $\mathcal{G}$ warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ jest rzutem ortogonanym X w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ na podprzestrzeń domkniętą $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.*

Dowód. Z nierówności Jensena, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Mamy pokazać, że dla dowolnej $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ zachodzi

$$\mathbb{E}\, |X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})|^2 \le \mathbb{E}\, |X - Z|^2 .$$

Wystarczy pokazać, że dla dowolnej $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ zachodzi

$$\mathbb{E}\, (X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))\, Z = 0.$$

Wynika to z następującego rozumowania

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, (X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))\, Z &= \mathbb{E}\mathbb{E}\, ((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))\, Z|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}Z\mathbb{E}\, ((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))\, |\mathcal{G}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 2.10 można sformułowć w następujący równoważny sposób.

Twierdzenie 2.11 *Niech X będzie zmienną losową całkowalną z kwadratem, a $\mathcal{G}$ niech będzie pod-σ-ciałem. Wówczas*

$$\mathbb{E}\, |X - \mathbb{E}\, (X|\mathcal{G})|^2 = \inf \mathbb{E}\, |X - Z|^2 ,$$

gdzie operator inf *jest brany po wszystkich zmiennych losowych $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.*

Dowód. Niech $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Ponieważ weklory $\mathbb{E}\, (X|\mathcal{G}) - Z$ i $X - \mathbb{E}\, (X|\mathcal{G})$ są prostopadłe, więc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, |X - Z|^2 &= \mathbb{E}\, |X - \mathbb{E}\, (X|\mathcal{G}) + \mathbb{E}\, (X|\mathcal{G}) - Z|^2 \\ &= \mathbb{E}\, |X - \mathbb{E}\, (X|\mathcal{G})|^2 + \mathbb{E}\, |\mathbb{E}\, (X|\mathcal{G}) - Z|^2 \\ &\ge \mathbb{E}\, |X - \mathbb{E}\, (X|\mathcal{G})|^2 .\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 2.12 *Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{G}$ będą pod-σ-ciałami $\mathfrak{F}$. Niech X będzie całkowalną zmienną losową niezależną od $\mathcal{H}$. Wówczas*

$$\mathbb{E}\left(X|\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})\right) = \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P}-p.n.$$

Dowód. Niech

$$\mathcal{B} := \{A\cap B\colon A\in\mathcal{G},\ B\in\mathcal{H}\}$$

oraz niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną tych $A\in\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})$ takich, że

$$\int_A \mathbb{E}\left(X|\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})\right)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

W dowodzie korzystamy z twierdzenia Dynkina–Sierpińskiego o π-λ układach (Twierdzenie 1.11). Łatwo pokazać, że $\mathcal{A}$ jest λ-układem. Oczywiście $\mathcal{B}$ jest π-układem. Mamy pokazać, że $\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})\subset\mathcal{A}$. Ponieważ $\sigma(\mathcal{B})=\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})$ wystarczy pokazać, że $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$, czyli, że

$$\int_{A\cap B}\mathbb{E}\left(X|\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})\right)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B}\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} X\mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall\, A\in\mathcal{G},\ B\in\mathcal{H}.$$

W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap B} X\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_\Omega \chi_A\chi_B X\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}\,\chi_A\chi_B X\\
&= \mathbb{E}\,\mathbb{E}\left(\chi_A\chi_B X|X\right)\\
&= \mathbb{P}(B)\,\mathbb{E}\left(X;A\right)\\
&= \mathbb{P}(B)\,\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{G});A\right)\\
&= \mathbb{E}\,\mathbb{E}\left(\chi_B\chi_A\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|X\right)\\
&= \mathbb{E}\chi_A\chi_B\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\\
&= \int_{A\cap B}\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

□

2.5 Inny dowód istnienia warunkowej wartości oczekiwanej

W poprzednim rozdziale udowodniliśmy istnienie warunkowej wartości oczekiwanej za pomocą twierdzenia Radona–Nikodyma o istnieniu gęstości.

Twierdzenie 2.10 sugeruje inny dowód istnienia warunkowej wartości oczekiwanej. Mianowicie niech $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, X zmienną losową całkowalną określoną na $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$, a $\mathcal{G}$ pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$. Konstruujemy warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ w trzech krokach:

Krok 1. Załóżmy, że X jest całkowalna z kwadratem. Niech $\mathit{\Pi}$ będzie projekcją ortogonalną przestrzeni Hilberta $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ na jej domkniętą podprzestrzeń $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Pokażemy, że $\mathit{\Pi} X$ jest warunkową wartością oczekiwaną X względem $\mathcal{G}$. Mierzalność $\mathit{\Pi} X$ względem $\mathcal{G}$ wynika z definicji $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Są to przestrzenie $\mathcal{G}$-mierzalne i całkowalne z kwadratem. Aby pokazań, że

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathit{\Pi} X \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall\, A \in \mathcal{G},$$

ustalmy $A \in \mathcal{G}$. Z charakteryzacji rzutu ortogonalnego wektor $X - \mathit{\Pi} X$ jest prostopadły do $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Czyli

$$\langle X - \mathit{\Pi} X, Y \rangle = \mathbb{E}\,(X - \mathit{\Pi} X)\, Y = 0, \qquad \forall\, Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}).$$

Biorąc $Y = \chi_A$, otrzymujemy

$$0 = \mathbb{E}\,(X - \mathit{\Pi} X)\, \chi_A = \int_A (X - \mathit{\Pi} X)\, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

A więc

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathit{\Pi} X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Stąd $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathit{\Pi} X$ przy założeniu, że $\mathbb{E}\, X^2 < +\infty$.

Krok 2. Załóżmy, że $X \geq 0$. Wówczas istnieje ciąg X_n zmiennych losowych ograniczonych takich, że $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ dla każdego $\omega \in \Omega$. Istotnie, jako X_n można przyjąć

$$X_n(\omega) = X(\omega) \wedge n.$$

Ponieważ każde X_n jest ograniczone, więc $X_n \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Z poprzedniego kroku wynika istnienie $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$ dla każdego n. Ponieważ $\{X_n\}$ jest ciągiem rosnącym ciąg warunkowych wartości oczekiwanych $\{\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\}$ jest również rosnący, a więc i zbieżny punktowo. Niech

$$Y(\omega) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})(\omega), \qquad \omega \in \Omega.$$

Pokażemy, że Y jest warunkową wartością oczekiwaną X względem $\mathcal{G}$. Jako granica zmiennych $\mathcal{G}$-mierzalnych Y jest $\mathcal{G}$-mierzalne. Niech $A \in \mathcal{G}$. Wówczas, z twierdzenia Lebesguea-Beppo-Levy'ego

$$\int_A Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n \to \infty} \int_A \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n \to \infty} \int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Stąd $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

Krok 3. Niech X będzie teraz dowolną całkowalną zmienną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Wówczas $X = X^+ - X^-$. Ponieważ X^+ i X^- są nieujemne z poprzedniego kroku istnieją warunkowe wartości oczekiwane $\mathbb{E}\,(X^+|\mathcal{G})$ i $\mathbb{E}\,(X^-|\mathcal{G})$. Oczywiście

$$\mathbb{E}\left(X^+|\mathcal{G}\right) - \mathbb{E}\left(X^-|\mathcal{G}\right)$$

jest warunkową wartością oczekiwaną X względem $\mathcal{G}$.

2.6 Estymatory średnio kwadratowe

Niech (X, Y) będzie wektorem losowym określony na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Załóżmy, że $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Będziemy interpretować Y jako wynik z oberwacji. Na jej podstawie estymujemy wielkość nieobserwowaną X. Tak więc szukamy funkcji borelowskiej $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ takiej, że

$$\mathbb{E}\left|X - f(Y)\right|^2 \le \mathbb{E}\left|X - g(Y)\right|^2,$$

dla dowolnej funkcji borelowskiej $g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Z Twierdzenia 2.11 wnioskujemy, że

$$f(y) = \mathbb{E}\left(X|Y = y\right), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

2.7 Rozkłady warunkowe

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$.

Dla $A \in \mathfrak{F}$, kładziemy

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) := \mathbb{E}(\chi_A|\mathcal{G}).$$

Z definicji $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$ jest zmienną losową wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do zbioru $\mathbb{P}$ miary zero (zależnym być może od A).

Definicja 2.3 Funkcja $\mathbb{P}\colon \mathfrak{F} \times \Omega \mapsto [0,1]$ spełniającą warunki:

- dla każdego $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\cdot, \omega)$ jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathfrak{F})$,
- dla każdego $A \in \mathfrak{F}$, $\mathbb{P}(A, \cdot)$ jest $\mathcal{G}$ mierzalna,
- dla każdego $A \in \mathfrak{F}$,

$$\mathbb{P}(A, \cdot) = \mathbb{P}(A|\mathcal{G}), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

nazywamy *regularnym warunkowym rozkładem prawdopodobieństwa względem* $\mathcal{G}$ lub krótko *regularnym prawdopodobieństwem warunkowym.*

Istnienie regularnego prawdopodobieństwa warunkowego oznacza, że prawdopodobieństwo warunkowe można określić w taki sposób, aby dla każdego ω zadawały one miarę probabilistyczną na $(\Omega, \mathfrak{F})$.

Twierdzenie 2.13 *Jeżeli* $\mathbb{P}(A, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $A \in \mathfrak{F}$, *jest prawdopodobieństwem warunkowym to dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej* X,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\cdot) = \int_\Omega X(u)\mathbb{P}(\mathrm{d}u, \cdot).$$

Dowód. Wystarczy pokazać rządaną równość dla funkcji prostej X. Niech więc

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathfrak{F}$, $a_j \in \mathbb{R}$. Wtedy z definicji prawdopodobieństwa warunkowego

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{E}\left(\chi_{A_j}|\mathcal{G}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{P}(A_j|\mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{P}(A_j, \cdot) \\ &= \int_{\Omega} X(u)\mathbb{P}(\mathrm{d}u, \cdot).\end{aligned}$$

□

Niech $X\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^k$ będzie wektorem losowym i niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$.

Definicja 2.4 Funkcja $\mathcal{L}_X(\cdot|\mathcal{G}) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \Omega \mapsto [0,1]$ spełniającą warunki:

- dla każdego $\omega \in \Omega$, $\mathcal{L}_X(\cdot|\mathcal{G})(\omega)$ jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathfrak{F})$,
- dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, $\mathcal{L}_X(A|\mathcal{G})$ jest $\mathcal{G}$ mierzalna,
- dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$,

$$\mathcal{L}_X(A|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left(\chi_{\{X\in A\}}|\mathcal{G}\right), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

nazywamy *regularnym warunkowym rozkładem wektora losowego X względem $\mathcal{G}$* lub krótko *regularnym rozkładem warunkowym.*

Jeżeli dla pewnej zmiennej lub ogólniej dla pewnego elementu losowego Y zachodzi $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, to piszemy

$$\mathcal{L}_X(A|Y) = \mathcal{L}_X(A|\mathcal{G}).$$

Twierdzenie 2.14 *Załóżmy, że wektor losowy (X,Y) w $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ ma rozkład z gęstością g. Wówczas*

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{g(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^k} g(x,y)\mathrm{d}x} & \text{gdy } \int_{\mathbb{R}^k} g(x,y)\mathrm{d}x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } \int_{\mathbb{R}^k} g(x,y)\mathrm{d}x = 0, \end{cases}$$

jest gęstością warunkową rozkładu X względem Y, to znaczy

$$\mathcal{L}_X(A|Y)(\omega) = \int_A f_{X|Y}(x|Y(\omega))\mathrm{d}x, \qquad (A,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \Omega,$$

Ponadto, dla dowolnej funkcji borelowskiej $\psi\colon \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ takiej, że $\psi(X)$ jest całkowalna zachodzi

$$\mathbb{E}(\psi(X)|Y)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^k} \psi(x) f_{X|Y}(x|Y(\omega))\mathrm{d}x.$$

Dowód. Z twierdzenia Foubiniego zmienna losowa

$$Z(\omega) = \int_{\mathbb{R}^k} \psi(x) f_{X|Y}(x|Y(\omega))\mathrm{d}x, \qquad \omega \in \Omega,$$

jest $\mathcal{G}$-mierzalna. Mamy pokazać, że dla każdego $A \in \mathcal{G}$,

$$\int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \psi(X)\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Ponieważ $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, więc $A = Y^{-1}(B) = \{Y \in B\}$ dla pewnego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$. Stąd (przyjmijmy konwencje, że $0/0 = 0$)

$$\begin{aligned}
\int_A Z\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{\{\omega\colon Y(\omega)\in B\}} \int_{\mathbb{R}^k} \psi(x) f_{X|Y}(x|Y(\omega))\mathrm{d}x\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\int_B\int_{\mathbb{R}^k} \psi(x) f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x g(x',y)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\int_B\int_{\mathbb{R}^k} \psi(x) \frac{g(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^k} g(x'',y)\mathrm{d}x''}\mathrm{d}x g(x',y)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\int_B \psi(x) g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\{Y\in B\}} \psi(X)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \psi(X)\mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

□

2.8 Istnienie regularnego rozkładu warunkowego

Najpierw podamy przykład, w którym nie istnieje regularny rozkład warunkowy. Następnie podamy warunki na istnienie rozkładu warunkowego. Rozdział ten oparty jest na książce Rogersa i Williamsa [34].

Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{G} = \mathcal{B}([0,1])$ oraz niech μ będzie miarą Lebesgue'a ograniczoną do odcinka $[0,1]$. Niech Z będzie podzbiorem Ω niemierzalnym w sensie Lebesgue'a (patrz Rozdziały 1.6, 1.10). Dokładniej załóżmy, że jego miara zewnętrzna

$$\mu^\star(Z) := \inf \sum_n \mu(A_n) = 1,$$

a miara wewnętrzna

$$\mu_\star(Z) := \sup \mu(B) = 0,$$

gdzie imfimum jest brane po wszystkich ciągach $(A_n) \subset \mathfrak{G}$ takich, że $Z \subset \bigcup A_n$ a supremum po wszystkich $B \in \mathfrak{G}$ takich, że $B \subset Z$. Niech $\mathfrak{F}$ będzie najmniejszym σ-cialem podzbiorów Ω zawierającym $\mathfrak{G}$ i zbiór Z.

Zauważmy, że $\mathfrak{F}$ składa się ze zbiorów Δ postaci

$$\Delta = (Z \cap A) \cup (Z^c \cap B),$$

gdzie $A, B \in \mathfrak{G}$. Następnie zauważmy,

$$\mu^\star(Z \cap \Delta) = \mu^\star(Z \cap A) = \mu(A),$$

$$\mu^\star(Z^c \cap \Delta) = \mu^\star(Z^c \cap B) = \mu(B).$$

Zdefiniujmy prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathfrak{F})$ wzorem

$$\mathbb{P}(\Delta) = \frac{1}{2}\left(\mu^\star(Z \cap \Delta) + \mu^\star(Z^c \cap \Delta)\right) = \frac{1}{2}\left(\mu(A) + \mu(B)\right).$$

Pokażemy, że nie istnieje regularne prawdopodobieństwo warunkowe względem $\mathfrak{G}$. Istotnie, załóżmy, że $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{G})$ jest regularnym prawdopodobieństwem warunkowym. Niech $\Gamma, G \in \mathfrak{G}$. Wówczas

$$\int_G \chi_{Z\cap\Gamma} \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{P}(Z \cap \Gamma \cap G) = \frac{1}{2}\mu(\Gamma \cap G) = \int_G \frac{1}{2}\chi_\Gamma \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Tak więc

$$\mathbb{P}(Z \cap \Gamma|\mathfrak{G})(\omega) = \frac{1}{2}\chi_\Gamma(\omega), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Niech $\mathcal{G}$ będzie przeliczalnym π-układem takim, że $\sigma(\mathcal{G}) = \mathfrak{G}$. Niech

$$\begin{aligned} A &:= \left\{\omega \in \Omega\colon \mathbb{P}(Z \cap \Gamma|\mathfrak{G})(\omega) = \frac{1}{2}\chi_\Gamma(\omega),\ \forall\, \Gamma \in \mathfrak{G}\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega\colon \mathbb{P}(Z \cap \Gamma|\mathfrak{G})(\omega) = \frac{1}{2}\chi_\Gamma(\omega),\ \forall\, \Gamma \in \mathcal{G}\right\}. \end{aligned}$$

Wówczas $A \in \mathfrak{G}$ oraz $\mathbb{P}(A) = \mu(A) = 1$. Teraz jeśli $\omega \in A$ to

$$\mathbb{P}(Z \cap A|\mathfrak{G})(\omega) = \frac{1}{2}\chi_A(\omega) \neq \frac{1}{2}\chi_{A\setminus\{\omega\}}(\omega) = \mathbb{P}(Z \cap [A \setminus \{\omega\}]|\mathfrak{G})(\omega).$$

Czyli $Z \cap A \neq Z \cap (A \setminus \{\omega\})$, a więc $\omega \in Z$. Czyli $A \subset Z$. Ponieważ $\mu(A) = 1$, więc Z ma miarę wewnętrzną 1, co jest sprzeczne z założeniem.

Przypomnijmy (patrz Definicja 1.38), że przestrzeń topologiczna E jest Łusina gdy jest homeomorficzna z podzbiorem Borelowskim zwartej przestrzeni metrycznej, oraz, że każda przestrzeń Polska jest Łusina (patrz Twierdzenie 1.48). Mamy następujący wynik o istnieniu regularnego rozkładu warunkowego.

Twierdzenie 2.15 ***(Dooba–Kuratowskiego)*** *Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Załóżmy, że Ω jest przestrzenią Łusina oraz $\mathfrak{F} = \mathcal{B}(\Omega)$. Wówczas dla dowolnego pod σ-ciała $\mathfrak{G}$ ciała $\mathfrak{F}$ istnieje regularny rozkład warunkowy $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{G})$. Ponadto, jeśli $\mathfrak{G}$ jest przeliczalnie generowana; to znaczy istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{G}$ taka, że $\mathfrak{G} = \sigma(\mathcal{G})$, to* *(i) Zbiór*

$$I := \{\omega \in \Omega \colon \mathbb{P}(G|\mathfrak{G})(\omega) = \chi_G(\omega), \quad \forall\, G \in \mathfrak{G}\}$$

należy do σ-ciała $\mathfrak{G}$ oraz $\mathbb{P}(I) = 1$.

(ii) Jeżeli $A(\omega)$ oznacza najmniejszy podzbiór z $\mathfrak{G}$ zawierający ω[1] *, to zbiór*

$$B := \{\omega \in \Omega \colon \mathbb{P}(A(\omega)|\mathfrak{G})(\omega) = 1\}$$

należy do $\mathfrak{G}$ oraz $\mathbb{P}(B) = 1$.

2.9 Warunkowanie zmiennych gaussowskich

Niech $m \in \mathbb{R}^n$, $Q \in M(n \times n)$. Przez $\mathcal{N}(m, Q)$ oznaczamy *rozkład gaussowski* w $\mathbb{R}^n$ ze średnią m i macierzą kowariancji Q. Gdy Q jest ściśle dodatnio określona to rozkład $\mathcal{N}(m, Q)$ ma gęstość

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det Q}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left\langle Q^{-1}(x-m),\, x-m \right\rangle \right\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

W wielu zastosowaniach (n.p. w teorii filtracji) zasadnicze znaczenie mają wzory na rozkłady warunkowe w przypadku gdy wielowymiarowa zmienna losowa (X, Y) jest gaussowska.

Twierdzenie 2.16 *Załóżmy, że gaussowska zmienna losowa (X, Y) przyjmująca wartości w $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ ma wektor wartości oczekiwanych (m_X, m_Y) i macierz kowariancji*

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{XX},\, Q_{XY} \\ Q_{YX},\, Q_{YY} \end{pmatrix}.$$

Wówczas rozkład warunkowy $\mathcal{L}_X(A|Y)(\omega)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, $\omega \in \Omega$, zmiennej X względem Y jest gaussowski. Ponadto

$$\mathcal{L}_X(A|Y)(\omega) = \mathcal{N}(\widehat{m}(Y(\omega)), \widehat{Q})(A), \qquad \omega \in \Omega,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k),$$

gdzie

$$\widehat{m}(y) = m_X + Q_{XY} Q_{YY}^{-1}(y - m_y),$$
$$\widehat{Q} = Q_{XX} - Q_{XY} Q_{YY}^{-1} Q_{YX}.$$

Dowód. Wyliczymy warunkową gęstość przy założeniu, że wektor gaussowski $(X, Y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ ma gęstość

$$g(x, y)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k+l} \det Q}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left\langle Q^{-1} \begin{pmatrix} x - m_X \\ y - m_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - m_X \\ y - m_Y \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

[1] Taki zbiór istnieje bo $\mathfrak{G}$ jest przeliczalnie generowane.

Niech
$$Q=\begin{pmatrix} Q_{XX}\ , Q_{XY} \\ Q_{YX}\ , Q_{YY}\end{pmatrix}, \qquad Q^{-1}=R=\begin{pmatrix} R_{11}\ , R_{12} \\ R_{21}\ , R_{22}\end{pmatrix}.$$
Z Twierdzenia 2.12 mamy
$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= c_1(y)\exp -\frac{1}{2}\left\{\langle R_{11}(x-m_X)+R_{12}(y-m_Y), x-m_X\rangle\right.\\ &\quad \left.+\ \langle R_{21}(x-m_X)+R_{22}(y-m_Y), y-m_Y\rangle\right\}\\ &= c_2(y)\exp -\frac{1}{2}\left\{\left\langle R_{11}\left((x-m_X)+R_{11}^{-1}R_{12}(y-m_Y)\right),\right.\right.\\ &\quad \left.\left. x-m_X+R_{11}^{-1}R_{12}(y-m_Y)\right\rangle\right\}, \end{aligned}$$
bo
$$\langle R_{11}(x-m_X), R_{11}^{-1}R_{12}(y-m_Y)\rangle = \langle R_{21}(x-m_X), y-m_Y\rangle.$$
Stąd
$$\begin{aligned} g(x|y) &= c_2(y)\exp -\frac{1}{2}\left\langle R_{11}\left(x-\left[m_X-R_{11}^{-1}R_{12}(y-m_Y)\right]\right),\right.\\ &\quad \left. x-\left[m_X-R_{11}^{-1}R_{12}(y-m_Y)\right]\right\rangle. \end{aligned}$$
Stąd wynika, że gęstość warunkowa jest gaussowska z wektorem wartości średniej
$$\widehat{m}(y)=M_X-R_{11}^{-1}R_{12}(y-m_Y)$$
oraz z macierzą kowariancji R_{11}^{-1}.

Ponieważ $QR=I$ mamy
$$Q_{XX}R_{11}+Q_{XY}R_{21}=I, \qquad Q_{YX}R_{11}+Q_{YY}R_{21}=0.$$
Dlatego
$$\begin{gathered} R_{11}^{-1}=Q_{XX}+Q_{XY}R_{21}R_{11}^{-1},\\ Q_{YX}=-Q_{YY}R_{21}R_{11}^{-1}, \qquad Q_{YY}^{-1}Q_{YX}=-R_{21}R_{11}^{-1}. \end{gathered}$$
Czyli
$$\begin{aligned} R_{11}^{-1} &= Q_{XX}-Q_{XY}Q_{YY}^{-1}Q_{YX},\\ R_{11}^{-1}R_{12} &= -Q_{XY}Q_{YY}^{-1}. \end{aligned}$$
Ostatecznie
$$\begin{aligned} \widehat{m}(y) &= m_X+Q_{XY}Q_{YY}^{-1}(y-m_Y),\\ \widehat{Q} &= Q_{XX}-Q_{XY}Q_{YY}^{-1}Q_{YX}. \qquad \square \end{aligned}$$

Wniosek 2.1 *Warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}(X|Y)$ jest identyczna z rzutem ortogonalnym X na podprzestrzeń zmiennych losowych*
$$\left\{a\chi_{\mathbb{R}^l}+BY\colon a\in\mathbb{R}^k,\ B\in M(l\times k)\right\} := L_k^2(\chi,Y)\subset L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^k).$$

Wniosek 2.2 *Jeżeli* (X, Y, Z) *jest gaussowskim wektorem losowym, takim że* Y *i* Z *są niezależne, to*

$$\mathbb{E}\,(X|Y,Z) = \mathbb{E}\,(X|Y) + \mathbb{E}\,(X|Z) - \mathbb{E}\,X.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\mathbb{E}\,Y = 0$ i $\mathbb{E}\,Z = 0$. Z pierwszego wniosku wynika, że $\mathbb{E}\,(X|Y,Z)$ jest rzutem ortogonalnym na przestrzeń

$$L^2_k(\chi, Y, Z)$$

będącą sumą dwóch przestrzeni ortogonalnych

$$L^2_k(\chi, Y) \qquad \text{i} \qquad L^2_k(\chi, Z).$$

Wystarczy więc zauważyć, że rzut ortogonalny na przestrzeń $L^2_k(\chi, Z)$ jest równy $\mathbb{E}\,(X|Z) - \mathbb{E}\,X$. $\square$

Zadanie 2.2 Niech ξ i η będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\mathcal{N}(0,1)$. Niech $X = \xi + 2\eta$ i $Y = \xi - \eta$. Znaleźć rozkład (X,Y) i rozkład warunkowy $\mathcal{L}_X(\cdot|Y)$.

Zadanie 2.3 Niech ξ i η będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\mathcal{N}(0,1)$. Niech $X = \xi + \eta$ i $Y = \xi - \eta$. Znaleźć rozkład (X,Y) i rozkład warunkowy $\mathcal{L}_X(\cdot|Y)$.

2.10 Zadania

Zadanie 2.4 Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza liczbę orłów a Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$. Ile wynosi $\sigma(Y)$?

Odpowiedź Kładziemy

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{10})\colon \omega_i \in \{0,1\}\},$$

$$\mathfrak{F} = \{A\colon A \subset \Omega\},$$

$$\mathbb{P}\{\omega\} = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{2^{10}}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Następnie

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{10} \omega_i, \qquad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{4} \omega_i.$$

Mamy

$$\sigma(Y) = \sigma\{A_0, A_1, A_2, A_3\},$$

gdzie

$$A_i := \{Y = i\} = Y^{-1}\{i\}.$$

Stąd, z Twierdzenia 2.2,

$$\mathbb{E}\,(X|Y) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\int_{A_i} X \mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A_i)} \chi_{A_i}.$$

Musimy policzyć

$$a_i := \frac{\int_{A_i} X \mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A_i)}.$$

Mamy

$$\int_{A_i} X \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{\omega \in A_i} X(\omega)\mathbb{P}\{\omega\} = \frac{1}{2^{10}} \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) = \frac{1}{2^{10}} \sum_{j=0}^{6} (i+j) \binom{4}{2} \binom{6}{j}$$

oraz

$$\mathbb{P}(A_i) = \binom{4}{2} 2^6 \frac{1}{2^{10}}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\sum_{j=0}^{6} (i+j) \binom{6}{j}}{2^6} = i \frac{\sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j}}{2^6} + \frac{\sum_{j=0}^{6} j \binom{6}{j}}{2^6} \\ &= i + 3. \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbb{E}\,(X|Y) = 3 + \sum_{i=0}^{4} i \chi_{\{Y=i\}} = 3 + Y. \qquad \square$$

Zadanie 2.5 Niech $\Omega = \{1, 2, ..., 10\}$. Znaleźć $\sigma(\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 6\})$.

Zadanie 2.6 Niech $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ i niech $\mathbb{P} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ będzie miarą Lebesgue'a. Niech $X(x, y) = x$ i $Y(x, y) = y$. Policzyć $\mathbb{E}\,(f(X, Y)|\mathcal{G})$ gdy

(i) $f(x, y) = x$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.
(ii) $f(x, y) = x^2 y$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.
(iii) $f(x, y) = x - y$, $\mathcal{G} = \sigma(X + Y)$.

Zadanie 2.7 Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla $A, B \in \mathfrak{F}$ policzyć $\mathbb{E}(\chi_A|\chi_B)$.

Zadanie 2.8 Znaleźć $\mathbb{E}\,(X|Y)$ gdy $\Omega = [0, 1]$, $\mathbb{P} = \mathrm{d}x$, a $X(x) = 2x^2$ i

$$Y(x) = \begin{cases} 2x & x \le 1/2, \\ 2x - 1, & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 2.9 Niech $\Omega = [0, 1]$ i niech $\mathbb{P} = \mathrm{d}x$. Znaleźć $\mathbb{E}\,(X|Y)$ gdy $X(x) = x^2$,

$$Y(x) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } x \in [0, 1/2), \\ x^2 & \text{gdy } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 2.10 Niech $\Omega = [0,1]$ i niech $\mathbb{P} = \mathrm{d}x$. Znaleźć $\mathbb{E}\,(X|Y)$ gdy $X(x) = x^2$, $Y(x) = 1 - |2x-1|$.

Zadanie 2.11 Niech $\Omega = [0,1]$ i niech $\mathbb{P} = \mathrm{d}x$. Znaleźć $\mathbb{E}\,(X|\mathcal{G})$ gdy

(i) $X(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{G} = \sigma([0,1/4),[1/4,1])$,
(ii) $X(x) = -x$, $\mathcal{G} = \sigma([0,1/2],(1/3,1])$.

Zadanie 2.12 Na $\Omega = [0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a. Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y)$ gdy:

(i) $X(x) = x^2 + 1$, a

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1/3), \\ 2 & \text{dla } x \in [1/3,2/3), \\ 0 & \text{dla } x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

(ii) $X(x) = x - 1$, a

$$Y(x) = \begin{cases} 10 & \text{dla } x \in [0,1/2), \\ 2 & \text{dla } x \in [1/2,2/3), \\ 0 & \text{dla } x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Zadanie 2.13 Na $\Omega = [0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a. Niech $Y(x) = x(1-x)$. Pokazać, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X,

$$\mathbb{E}(X|Y)(x) = \frac{X(x) + X(1-x)}{2}, \qquad x \in \Omega.$$

Zadanie 2.14 Z taśmy produkcyjnej wyszło n-produktów. Produkt jest wadliwy z prawdopodobieństwem p. Kontrola jakości z prawdopodobieństwem $\overline{p}$ wykrywa wadliwy produkt. Niech X oznacza liczbę wadliwych produktów, a Y liczbę produktów, które zostały wykryte jako wadliwe. Policzyć $\mathbb{E}\,(X|Y)$.

Zadanie 2.15 Załóżmy, że w populacji n osób prawdopodobieństwo zachorowania na daną chorobę wynosi p. Do badania na występowania choroby stosuje się test medyczny, który z prawdopodobieństwem $1 - q_1$ daje wynik negatywny gdy badana osoba jest zdrowa, a z prawdopodobieństwem q_2 daje wynik negatywny gdy badana osoba jest chora. Zakładamy, że $p, q_1, q_2 \in (0,1)$. Niech X oznacza liczbę osób chorych, a Y osób z pozytywnym wynikiem testu. Policzyć $\mathbb{E}\,(X|Y)$.

Zadanie 2.16 Niech $X_1, \ldots, X_5$ będą niezależnymi zmienymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z porametrem 1. Niech $Y = \chi_{[3,+\infty]}(X_1)$ oraz $T = X_1 + \ldots + X_5$. Policzyć $\mathbb{E}\,(Y|T = 5)$.

Zadanie 2.17 Sąsiadka upiekła placek, którego zjedzenie więcej niż połowy powoduje niestrawność. Najpierw jej najstarszy syn wziął sobie kawałek a następnie młodszy syn odkroił sobie trochę z tego co zostało. Zakładamy, że wielkość porcji jest losowa i ma rozkład jednostajny po tym co jest dostępne, policzyć wartość oczekiwaną rozmiaru placka, który pozostał przy założeniu, że żaden z synów nie zachorował. Co byłoby gdyby synowie przyszli równocześnie? W którym przypadku zostałoby więcej ciasta dla Ojca?

Zadanie 2.18 Niech X i Y będą zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Uzasadnić, że dla dowolnego y, $\mathbb{E}(X|Y = y)$ zależy tylko od rozkładu łącznego wektora losowego (X, Y). Czy to samo można powiedzieć o $\mathbb{E}(X|Y)$?

Zadanie 2.19 Niech X i Y będą niezależnymi całkowalnymi z kwardatem zmiennymi losowymi. Załóżmy, że rozkłady X i Y są symetryczne, to znaczy, że rozkład X jest ten sam jak rozkład $-X$ i rozkład Y jest ten sam jak rozkład $-Y$. Pokazać, że $\mathbb{E}\left((X+Y)^2|X^2+Y^2\right) = X^2+Y^2$.

Zadanie 2.20 Na $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Załóżmy, że wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$\rho(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y)\in\Omega, \\ 0, & (x,y)\notin\Omega. \end{cases}$$

Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 2.21 Na $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Załóżmy, że wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & (x,y)\in\Omega, \\ 0, & (x,y)\notin\Omega. \end{cases}$$

Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 2.22 Na $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2\le 1\}$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i znormalizowaną miarę Lebesgue'a, to jest

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad A\in\mathcal{B}(\Omega).$$

Niech X i Y będą projekcjami na osie układów współrzędnych. Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2|Y)$.

Zadanie 2.23 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi całkowalnymi o tym samym rozkładzie. Policzyć $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

Zadanie 2.24 Niech (X_k) ciąg niezależnych zmiennych losowych całkowalnych o tym samym rozkładzie. Pokazać, że

$$\mathbb{E}\left(X_1|X_1+...+X_n\right)=\frac{1}{n}\left(X_1+...+X_n\right).$$

Zadanie 2.25 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Niech $f\colon \mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ będzie takie, że

$$\mathbb{E}|f(X,Y)|<\infty.$$

Pokazać, że

$$\mathbb{E}\left(f(X,Y)|Y=y\right)=\mathbb{E}f(X,y).$$

Zadanie 2.26 Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych całkowalnych o tym samym rozkładzie. Niech

$$S_n=X_1+....X_n,\quad \mathcal{G}_n=\sigma(S_n,S_{n+1},...).$$

Policzyć $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}_n)$.

Zadanie 2.27 Niech X i Y będą niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie μ. Policzyć

$$\mathbb{E}\left(X|X^2+Y^2\right)$$

dla dwóch różnych μ.

Zadanie 2.28 Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y)$ gdy (X,Y) ma rozkład z gęstością:

- $g(x,y)=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}$ dla $0\le x\le y<\infty$ i 0 w przeciwnym przypadku,
- $g(x,y)=x\mathrm{e}^{-x(y+1)}$ dla $x,y\ge 0$ i 0 w przeciwnym przypadku.

Zadanie 2.29 Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ_X, λ_Y, λ_Z. Policzyć

$$\mathbb{P}\left(X<Y<Z\right).$$

Zadanie 2.30 Niech (X,Y) ma rozkład łączny o gęstości

$$g(x,y)=\begin{cases} cx(y-x)\mathrm{e}^{-y} & \text{dla } 0\le x\le y<\infty,\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

- Znaleźć parametr c.
- Pokazać, że dla $0\le x\le y<\infty$,

$$f_{X|Y}(x|y)=6x(y-x)y^{-3},$$
$$f_{Y|X}(y|x)=(y-x)\mathrm{e}^{x-y}.$$

- Wywnioskować, że $\mathbb{E}(X|Y)=\frac{1}{2}Y$ i $\mathbb{E}(Y|X)=X+2$.

Zadanie 2.31 Niech θ i ρ oznaczają długość i szerogość geograficzną losowo wybranego punktu sfery jednostkowej. Policzyć $\mathbb{E}(\theta|\rho)$ i $\mathbb{E}(\rho|\theta)$.

Zadanie 2.32 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, 1)$ gdzie $\mu \in \mathbb{R}$ jest zadane. Znaleźć rozkład warunkowy wektora losowego (X, Y) względem $X + Y$.

Zadanie 2.33 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{G}$ niech będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$, a X zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Jeżeli $\mathbb{E}X^2 < \infty$, to możemy zdefiniować *warunkową wariancję*

$$\mathrm{Var}\,(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}\,(X|\mathcal{G}))^2\,|\mathcal{G}\right).$$

Udowodnić, że

$$\mathrm{Var}\,X = \mathbb{E}\,(\mathrm{Var}\,(X|\mathcal{G})) + \mathrm{Var}\,(\mathbb{E}\,(X|\mathcal{G}))\,.$$

Zadanie 2.34 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$, a $\mathcal{H}$ niech będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{G}$. Pokazać, że dla dowolnej zmiennej X spełniającej $\mathbb{E}\,X^2 < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}\,|X - \mathbb{E}\,(X|\mathcal{H})|^2 \geq \mathbb{E}\,|X - \mathbb{E}\,(X|\mathcal{G})|^2\,.$$

Zadanie 2.35 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$. Udowodnić następującą wersję twierdzenia Bayesa:

$$\mathbb{P}\,(B|A) = \frac{\int_B \mathbb{P}\,(A|\mathcal{G})\,\mathrm{d}\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{P}\,(A|\mathcal{G})\,\mathrm{d}\mathbb{P}}, \qquad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}.$$

Zadanie 2.36 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$, a X zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ całkowalną. Niech $\rho \geq 0$ będzie zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ taką, że $\mathbb{E}\,\rho = 1$ i niech $\mathbb{Q}$ oznacza prawdopodobieństwo na $(\Omega, \mathcal{F})$ dane wzorem

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \rho\,\mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Oznaczmy przez $\mathbb{E}^*\,(X|\mathcal{G})$ warunkową wartość oczekiwaną X względem $\mathcal{G}$ ze względu na prawdopodobieństwo $\mathbb{Q}$. Udowodnić następującą wersję twierdzenia Bayesa:

$$\mathbb{E}^*\,(X|\mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}\,(\rho X|\mathcal{G})}{\mathbb{E}\,(\rho|\mathcal{G})}.$$

Zadanie 2.37 Niech $\Omega = [0, \pi]$, $\mathfrak{F} = \mathcal{B}([0, \pi])$, oraz $\mathbb{P} = \alpha \mathrm{d}x$. Wyznaczyć α dla którego $\mathbb{P}$ jest miarą probabilistyczną. Policzyć $\mathbb{E}\,(X|Y)$ gdy $X(\omega) = \sin\omega$ a $Y(\omega) = \cos\omega$.

Zadanie 2.38 ***Nierówność Harrisa*** Niech $f, g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będą funkcjami niemalejącymi, a X zmienną losową. Zakładając, że odpowiednie wartości oczekiwane są skończone pokazać, że

$$\mathbb{E}\left(f(X)g(X)\right) \geq \mathbb{E}\, f(X)\, \mathbb{E}\, g(X).$$

Podp. Udowodnij najpierw, że

$$\left(f(x) - f(y)\right)\left(g(x) - g(y)\right) \geq 0, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 2.39 Niech (X, Y) będzie wektorem Gaussowskim w $\mathbb{R}^2$ o wektorze wartości oczekiwanych

$$m = (1, 1)$$

i macierzy kowariancji

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć rozkład warunkowy $\mathcal{L}_X(\cdot|Y)$.

Zadanie 2.40 Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\mathfrak{G}$ pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$. Niech $A, B \in \mathfrak{F}$. Pokazać, że jeżeli $\mathbb{P}(B) = 0$, to

$$\mathbb{P}\left(A \cup B|\mathfrak{G}\right) = \mathbb{P}\left(A|\mathfrak{G}\right).$$

Ogólniej, jeżeli X i Y są zmiennymi losowymi takimi, że

$$\mathbb{P}\left(X \neq Y\right) = 0,$$

to

$$\mathbb{E}\left(X|\mathfrak{G}\right) = \mathbb{E}\left(Y|\mathfrak{G}\right).$$

3

Procesy stochastyczne - podstawowe pojęcia

Podamy podstawowe pojęcia teorii: procesu stochastycznego, filtracji, procesu adaptowanego. Ta część ma charakter częściowo opisowy. Ostatnia część poświęcona pojęciu momentu Markowa lub momentu stopu jest bardziej techniczna.

3.1 Definicja procesu stochastycznego, jego rozkładu skończenie wymiarowego i trajektorii

Proces stochastyczny to rodzina zmiennych losowych $X = (X_t)$ określona na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ indeksowanych parametrem $t \in T$, który jest zwykle interpretowany jako czas.

Czas może być dyskretny (dni, lata), wtedy $T \subset \mathbb{Z}$, zwykle $T = \mathbb{N} = 0, 1, 2, \ldots$, lub T jest skończonym podzbiorem $\mathbb{N}$. Czas może też być ciągły, wtedy T jest przedziałem $T = [0, S]$, lub całą półprostą $T = [0, +\infty)$.

Definicja 3.1 Mówimy, że proces $X = (X_t)_{t \in T}$ jest *modyfikacją* procesu $Y = (Y_t)_{t \in T}$ gdy są one określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ oraz
$$\mathbb{P}\left(X_t \neq Y_t\right) = 0, \qquad \forall\, t \in T.$$

Zadanie 3.1 Niech $X = (X_t)$, $t \in T$, będzie procesem stochastycznym. Pokazać, że dla dowolnego ciągu skończonego indeksów $I = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_i \in T$, oraz dowolnego ciągu $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$, $\Gamma_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zdarzenie

$$\mathcal{C}(I, (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)) := \{\omega \in \Omega \colon X_{t_i}(\omega) \in \Gamma_i, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n, \}$$

należy do $\mathfrak{F}$.

Definicja 3.2 *Zbiorami cylindrycznymi* w $\mathbb{R}^T$ nazywamy zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{R}^T \colon X_{t_i} \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, (t_i), $i = 1, \ldots, n$ jest ciągiem skończonym elementów T, a (Γ_i), $i = 1, \ldots, n$, jest skończomym ciągiem zbiorów Borelowskich.

Zbiór wszystkich zbiorów cylindrycznych w $\mathbb{R}^T$ oznaczmy przez $\mathcal{B}_T$.

Zadanie 3.2 Pokazać, że dla dowolnego T, rodzina zbiorów cylindrycznych $\mathcal{B}_T$ jest ciałem zbiorów. Uzasadnić, że $\mathcal{B}_T$ nie musi być σ-ciałem.

Definicja 3.3 *Rozkładem skończenie wymiarowowym* procesu $X = (X_t)$ nazywamy odwzorowanie

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{B}_T \to [0, 1],$$

dane wzorem

$$\mathbb{P}_X\{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_i} \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, n\} := \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : X_{t_i}(\omega) \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Zadanie 3.3 Pokazać, że rozkład skończenie wymiarowy procesu jest miarą skończenie addytywną.

Zadanie 3.4 Pokazać, że jeżeli proces Y jest modyfikacją X to ich rozkłady skończenie wymiarowe są sobie równe.

Zadanie 3.5 Niech $\mathcal{B}_T$ będzie ciałem zbiorów cylindrycznych. Niech $\mathfrak{B}_T$ oznacza klasę podzbiorów $\mathbb{R}^T$ postaci

$$\{x \in \mathbb{R}^T : X_{t_i} \in \Gamma_i,\ i \in \mathbb{N}\}$$

gdzie (t_i) jest dowolnym ciągiem elementów T, a (Γ_i) jest dowolnym ciągiem zbiorów Borelowskich. Pokazać, że

$$\sigma(\mathcal{B}_T) = \mathfrak{B}_T.$$

Pokazać, że na przykład zbiory postaci

$$\left\{x \in \mathbb{R}^T : \sup_{t\in T} x_t \geq a\right\}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

nie należą do $\sigma(\mathcal{B}_T)$. Pokazać, że $\mathfrak{B}_T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, gdzie na $\mathbb{R}^T$ rozważamy topologię produktową.

Uwaga 3.1 Z twierdzenia Kołmogorowa o rozkładach zgodnych (patrz Twierdzenie 3.3) wynika, że rozkład skończenie wymiarowy $\mathbb{P}_T$ rozszerza się do prawdopodobieństwa na $\mathfrak{B}_T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.

Definicja 3.4 Niech $\omega \in \Omega$. *Trajektorią procesu stochastycznego* $X = (X_t)_{t\in T}$ *odpowiadającą zdarzeniu elementarnemu* ω nazywamy funkcje

$$T \ni t \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}.$$

W poniższej definicji zakładamy, że czas T jest ciągły.

Definicja 3.5 Mówimy, że proces stochastyczny $X = (X_t)_{t\in T}$ ma *ciągłe (prawostronnie ciągłe, lewostronnie ciągłe) trajektorie* gdy dla każdego $\omega \in \Omega$, odpowiadająca mu trajektoria $t \mapsto X_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą (prawostronnie ciągłą, lewostronnie ciągłą).

Definicja 3.6 Proces X jest càdlàg (z francuskiego continu à droite at limites à gauche) gdy ma trajectorie prawostronnie ciągłe, które posiadają granice lewostronne w każdym punkcie $t \in T$.

Oczywiście proces jest càdlàg gdy jego trajektorie nie mają nieciągłości drugiego rodzaju.

Definicja 3.7 Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t\in T}$ jest:

- *całkowalny* gdy
$$\mathbb{E}\,|X_t| < \infty, \qquad \forall\, t \in T,$$
- *całkowalny z kwadratem* gdy
$$\mathbb{E}\,|X_t|^2 < \infty, \qquad \forall\, t \in T,$$
- *całkowalny z p-tą potęgą* gdy
$$\mathbb{E}\,|X_t|^p < \infty, \qquad \forall\, t \in T.$$

Następna definicja dotyczy tylko czasu ciągłego

Definicja 3.8 Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t\in T}$ jest *stochastycznie ciągły* gdy dla każdego $t \in T$, $X_s \to X_t$ według prawdopodobieństwa gdy $s \to t$, czyli gdy

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon \quad \mathbb{P}\left(|X_t - X_s| \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon, \qquad \forall\, s \in T\colon |t-s| \leq \delta.$$

Twierdzenie 3.1 *Jeżeli proces $(X_t)_{t\in T}$ ma modyfikacje $(\tilde{X}_t)_{t\in T}$ o ciągłych trajektoriach to $(X_t)_{t\in T}$ jest stochastyczne ciągły.*

Dowód. Ustalmy $t \in T$ i $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego $s \in T$ mamy

$$\mathbb{P}\left(|X_t - X_s| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \geq \varepsilon\right).$$

Z ciągłości $\tilde{X}$ wynika, że dla każdego $\omega \in \Omega$ i każdego $u \in T$, istnieje $\delta > 0$ taka, że $|\tilde{X}_u(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \leq \varepsilon/2$ dla $s \in T\colon |u-s| \leq \delta$. Niech

$$A_n := \left\{\omega \in \Omega\colon |\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \leq \varepsilon/2 \text{ dla } s \in T \cap \mathbb{Q}\colon |s-t| \leq 1/n\right\}.$$

Ponieważ $\tilde{X}$ ma ciągłe trajektorie

$$A_n := \left\{\omega \in \Omega\colon |\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \leq \varepsilon/2 \text{ dla } s \in T\colon |s-t| \leq 1/n\right\}.$$

Dla dowolnego n, $A_n \in \mathfrak{F}$, $A_n \supset A_{n+1}$ i $A_n \in \mathfrak{F}$. Ponadto $\bigcup_n A_n = \Omega$. Stąd istnieje $n_0\colon \mathbb{P}(A_{n_0}) \geq 1 - \varepsilon$. Przyjmując $\delta < 1/n_0$ otrzymujemy

$$\forall\, s \in T\colon |t-s| \leq \delta \qquad \mathbb{P}\left(|X_t - X_s| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(A_n^c\right) \leq \varepsilon.$$

□

Uwaga 3.2 Oczywiście modyfikacja procesu o ciągłych trajektoriach nie musi mieć ciągłe trajektorie. Z powyższego twierdzenia wynika, że proces o ciągłych trajektoriach jest procesem stochastycznie ciągłym. Oczywiście modyfikacja procesu stochastycznie ciągłego jest procesem stochastycznie ciągłym.

Podamy teraz przykład procesu stochastycznie ciągłego, który nie ma modyfikacji ciągłej.

Przyklad 3.1 Niech $T = [0,1]$ niech Z będzie zmienną losową o wartościach w $[0,1]$, której rozkład jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a. Niech

$$X_t(\omega) = \chi_{[0,Z(\omega)]}(t), \qquad t \in [0,1].$$

Pokażemy, że X jest stochastycznie ciągły. W tym celu ustalmy $t \in [0,1]$ i $\varepsilon > 0$. Ponieważ rozkład Z ma gęstość więc istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\mathbb{P}\left(|Z - t| \leq \delta\right) \leq \varepsilon.$$

Ponieważ

$$\{\omega \in \Omega\colon |X_t(\omega) - X_s(\omega)| > 0\} = \{\omega \in \Omega\colon |Z(\omega) - t| \leq |t-s|\},$$

więc gdy $s \in T\colon |t-s| \leq \delta$, to

$$\mathbb{P}\left(|X_t - X_s| > \varepsilon\right\} \leq \mathbb{P}\left(|Z-t| \leq |t-s| \leq \delta\right) \leq \varepsilon.$$

Definicja 3.9 Proces $X = (X_t)$, $t \in T$, nazywamy *ośrodkowym* gdy istnieje przeliczalny podzbiór $T_0 \subset T$ taki, że

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega\colon \forall\, t \in T \setminus T_0,\ X_t(\omega) \quad \text{jest punktem skupienia } X_s(\omega),\ s \in T_0\right\} = 1$$

Innymi słowy z prawdopodobieństwem 1, wykres $(t, X_t(\omega),\ t \in T \setminus T_0)$, zawiera się w domknięciu wykresu $(t, X_t(\omega),\ t \in T_0)$.

Twierdzenie 3.2 *Niech $X = (X_t)$ będzie stochastycznie ciągłym procesem określonym na zupełnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Wówczas istnieje ośrodkowa modyfikacja Y procesu X.*

3.2 Twierdzenie Kołmogorowa o rozkładach zgodnych

Podamy ważne twierdzenie Kołmogorowa przydatne przy dowodzie istnienia procesu o żądanych rozkładach skończenie wymiarowych.

Niech T będzie (dowolnym) zbiorem wskaźników. Rozważmy zbiór $\mathcal{T}$ wszystkich skończonych podzbiorów $I \subset T$ z częściowym porządkiem zadanym przez relacje zawierania. Załóżmy, że dla każdego $I \in \mathcal{T}$ dana jest miara probabilistyczna $\mathbb{P}_I$ na $\left(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^I\right)\right)$. Dla $I_1 \subset I_2 \subset T$ i $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_1})$ niech

$$C_{I_2,I_1}(A) := \left\{\omega \in \mathbb{R}^{I_2} \colon \{\omega(t); t \in I_1\} \in A\right\}.$$

Oczywiście

$$C_{I_2,I_1} \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_2}).$$

Dla $I \subset T$ i $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^I)$ niech

$$C_I(A) = \left\{\omega \in \mathbb{R}^T \colon \{\omega(t); t \in I\} \in A\right\}.$$

Oczywiście $C_I = C_{T,I}$ oraz

$$C_I \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^I) \mapsto \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

Definicja 3.10 Rodzina miar $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{T}}$ jest *zgodna* gdy dla dowolnych $I_1 \subset I_2 \in \mathcal{T}$

$$\mathbb{P}_{I_1}(A) = \mathbb{P}_{I_2}\left(C_{I_2,I_1}(A)\right), \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{I_1}\right).$$

Twierdzenie 3.3 ***(Kołmogorowa o rozkładach zgodnych)*** *Jeżeli rodzina $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{T}}$ jest zgodna, to na $\left(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^T\right)\right)$ istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna $\mathbb{P}$ taka, że*

$$\mathbb{P}\left(C_I(A)\right) = \mathbb{P}_I\left(A\right), \qquad \forall\, I \in \mathcal{T},\ \forall\, A \in \mathbb{B}\left(\mathbb{R}^I\right).$$

Dowód. Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór cylindrów w $\mathbb{R}^T$, to znaczy

$$\mathcal{C} := \left\{C_I(A) \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^I),\ I \in \mathcal{T}\right\}.$$

Oczywiście zbiór cylindrów $\mathcal{C}$ jest ciałem oraz $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Na $\mathcal{C}$ definiujemy $\mathbb{P}_0$ kładąc

$$\mathbb{P}_0(C_I(A)) = \mathbb{P}_I(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^I),\ I \subset T.$$

Ze zgodności rodziny $(\mathbb{P}_I)$ wynika łatwo, że $\mathbb{P}_0$ jest dobrze określone i skończenie addytywne. Dowód zostanie zakończony jak tylko pokażemy, że $\mathbb{P}_0$ rozszerza się jednoznacznie do prawdopodobieństwa na $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$. Z twierdzenia Carathéodory'ego o rozszerzeniu (patrz Twierdzenie 1.13) wynika, że wystarczy pokazać, że dla dowolnego ciągu zdarzeń $(A_n) \subset \mathcal{C}$ takiego, że

$$A_{n+1} \subset A_n, \qquad \bigcap_n A_n = \emptyset, \tag{3.1}$$

zachodzi $\mathbb{P}_0(A_n) \to 0$. Niech (A_n) będzie ciągiem spełniającym (3.1). Załóżmy, że istnieje $\delta > 0$ takie, że $\mathbb{P}_0(A_n) \geq \delta$ dla każdego n. Mamy $A_n = C(B_n)$ gdzie $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_n})$, $I_n \subset I_{n+1}$, $B_{n+1} \subset C_{I_{n+1},I_n}(B_n)$. Z twierdzenia Ulama (patrz Twierdzenie 1.45) oraz z regularności miary wynika, że dla każdego n istnieje zbiór zwarty $K_n \subset \mathbb{R}^{I_n}$ taki, że $K_n \subset B_n$ oraz $\mathbb{P}\left(B_n \setminus K_n\right) < \delta 2^{-n}$. Stąd

$$\mathbb{P}_0(A_n \setminus C_{I_n}(K_n)) < \delta 2^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Niech

$$D_n := \bigcap_{l=1}^{n} C_{I_l}(K_l), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście D_n są cylindrami (bo $\mathcal{C}$ jest zamknięte ze względu na skończone przecięcia). Ponadto

$$\mathbb{P}_0\left(A_n \setminus D_n\right) \leq \sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}_{I_n}\left(B_n \setminus K_n\right) \leq \delta \sum_{l=1}^{n} 2^{-l} < \delta.$$

Stąd $\mathbb{P}_0(D_n) \geq \mathbb{P}_0(A_n) - \delta > 0$. Czyli każde D_n jest niepuste. Ze zwartości K_n, pokazujemy, że

$$\emptyset \neq \bigcap_n D_n \subset \bigcap A_n,$$

co prowadzi do sprzeczności. □

3.3 Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu ciągłej modyfikacji

W tym rozdziale podamy kryterium pochodzące od Kołmogorowa, które bywa bardzo pomocne w badaniu regularności trajectorii procesów stochastycznych. Przypomnijmy, następującą definicje.

Definicja 3.11 Mówimy, że funkcja $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ jest *hölderowska z wykładnikiem* $\alpha \in (0,1)$ gdy

$$\sup_{t,s\in[a,b],\, t\neq s} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha} < +\infty.$$

Zadanie 3.6 Pokazać, że każda funkcja hölderowska jest ciągła. Ponadto, że jeżeli f jest hölderowska z wykładnikiem α gdy istnieje stała L taka, że

$$|f(t) - f(s)| \leq L\,|t-s|^{\alpha}\,.$$

Zadanie 3.7 Pokazać, że jeżeli f jest hölderowska z wykładnikiem α to jest również hölderowska z dowolnym wykładnikiem $\gamma \leq \alpha$.

Twierdzenie 3.4 ***(Kołmogorow–Loéve–Chentsow o ciągłości)*** *Niech $T = [a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym na zadanej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Jeżeli istnieją stałe $p > 0$, $K > 0$ oraz $\varepsilon > 0$, takie że*

$$\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^p \le K\,|t-s|^{1+\varepsilon}, \qquad \forall\, t, s \in T,$$

to X ma modyfikacje hölderowską z dowolnym wykładnikiem $\alpha \in (0, \varepsilon/p)$.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $[a, b] = [0, 1]$. Oczywiście proces spełniający założenia twierdzenia jest stochastycznie ciągły. Niech

$$D_n := \{k2^{-n};\, k = 0, 1, \ldots, 2^n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz niech

$$Y_n = \max\left\{|X_s - X_t| \colon t, s \in D_n,\ |t-s| = 2^{-n}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ liczba par $(s, t) \in D_n \times D_n$ takich, że $|t-s| = 2^{-n}$, jest ograniczona przez 2^n, więc dla dowolnego $\alpha \in (0, \varepsilon/p)$ mamy

$$\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty}(2^{\alpha n}Y_n)^p = \sum_{n=1}^{\infty}2^{\alpha pn}\mathbb{E}\,Y_n^p \le \sum_{n=1}^{\infty}2^{\alpha pn}2^nK2^{-n(1+\varepsilon)} < +\infty. \tag{3.2}$$

Teraz niech $D = \bigcup_n D_n$. Niech $t, s \in D$ będą takie, że $|t-s| \le 2^{-m}$. Wówczas

$$|X_t - X_s| \le 2\sum_{n=m}^{\infty} Y_n. \tag{3.3}$$

Istotnie dowolny element $t \in D\cap(k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]$ można połączyć z końcem $(k+1)2^{-m}$ skończoną liczbą odcinków o długościach 2^{-l}, $l = n, m+1$, tak by odcinek o długości 2^{-l} występował co najwyżej raz. Z (3.3) dla $r \in [2^{-m-1}, 2^{-m}]$,

$$\sup\{|X_t - X_s| \colon t, s \in D,\ |t-s| \le r\} \le 2\sum_{n=m}^{\infty} Y_n.$$

Z (3.2), wynika, że istnieje skończona zmienna losowa ξ taka, że

$$\sup\{|X_t - X_s| \colon s, t \in D,\ |s-t| \le r\} \le \xi r^{\alpha}, \qquad r \in (0, 1), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Stąd X ma trajektorie hölderowskie na D z wykładnikiem α. Istnieje więc proces Z o ciągłych trajektoriach na $[0, 1]$ taki, że $X = Z$ na D. Pokażemy, że Z jest modyfikacją X. Niech $t \in [0, 1]$. Instnieje $(t_n) \subset D$ taki, że $t_n \to t$. Mamy $X_{t_n} = Z_{t_n}$. Ponadto $Z_{t_n} \to Z_t$, $\mathbb{P}$-p.n. Ponieważ X jest stochastycznie ciągły, $X_{t_n} \to X_t$, według prawdopodobieństwa. Czyli $X_t = Z_t$, $\mathbb{P}$-p.n. $\square$

Zadanie 3.8 Niech $X = (X_t)_{t\geq 0}$ będzie procesem o następujących własnościach:

- $X_0 = 0$,
- dla dowolnych $0 < s < t < \infty$ zmienna losowa $X_t - X_s$ na rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t-s)$.

Pokazać, że X ma modyfikacje której trajektorie na dowolnym skończonym przedziale $[a, b] \subset [0, +\infty)$ są hölderowskie z wykładnikiem $\alpha < 1/2$.

3.4 Twierdzenie Garsii-Rademicha–Rumsey'a

Niech $\Psi, p\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ będą parzystymi funkcjami ciągłymi. Załóżmy ponadto, że p jest rosnąca na półprostej $[0, +\infty)$, $p(0) = 0$, Ψ jest wypukła oraz $\Psi(x) \to +\infty$ gdy $|x| \to +\infty$. Niech $Q = [a, b]^d$ będzie kostką. Niech $e(Q) = b - a$ będzie długością jej krawędzi a $|Q| = (b-a)^d$ jej objętością. Ponadto niech $Q_1 = [0, 1]^d$ będzie kostką jednostkową.

Twierdzenie 3.5 ***(Garsia–Rademich–Rumsey)*** *Jeżeli f jest funkcją mierzalną na Q_1 taką, że*

$$\int_{Q_1} \int_{Q_1} \Psi \left(\frac{f(y) - f(x)}{p(|y-x|/\sqrt{d})} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = B < +\infty,$$

to istnieje zbiór $K \subset Q_1$ miary Lebesgue'a 0 taki, że dla wszystkich $y, x \in Q_1 \setminus K$,

$$|f(y) - f(x)| \leq 8 \int_0^{|y-x|} \Psi^{-1} \left(\frac{B}{u^{2d}} \right) \mathrm{d}p(u).$$

Jeżeli ponadto funkcja f jest ciągła to powyższa nierówność zachodzi dla wszystkich $x, y \in Q_1$.

Jako wniosek z twierdzenia Garsii–Rememicha–Rumsey'a wywnioskujemy następującą mocniejszą wersje twierdzenia Kolmogorowa–Loéve–Chentsowa.

Wniosek 3.1 *Niech (X_t), $t \in \mathbb{R}^d$, będzie procesem stochastycznym (polem losowym na $\mathbb{R}^d$). Załóżmy, że istnieją stałe $K > 0$, $p > 1$, $\varepsilon > 0$, takie, że*

$$\mathbb{E}\, |X_t - X_s|_{\mathbb{R}}^p \leq K\, |t - s|_{\mathbb{R}^d}^{d+\varepsilon}, \qquad \forall\, t, s \in \mathbb{R}^d.$$

Wówczas
(i) X ma ciągłą modyfikacje.
(ii) Istnieją stałe C i γ, zależne tylko od d, k, ε, oraz zmienna losowa Y takie, że dla wszystkich $t, s \in \mathbb{R}^d$,

$$|X_t - X_s|_{\mathbb{R}} \leq Y\ |t - s|_{\mathbb{R}^d}^{\varepsilon/p} \left(\log \frac{\gamma}{|t - s|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{2/p}.$$

oraz $\mathbb{E}\, Y^p \le CK$.
(iii) Jeżeli dla pewnego t, $\mathbb{E}\, |X_t|^p_{\mathbb{R}^d} < +\infty$, *to*

$$\mathbb{E} \sup_{t \in \mathbb{R}^d} |X_t|^p_{\mathbb{R}} < +\infty.$$

Dowód. Podamy tylko idee dowodu. Mianowicie stosujemy twierdzenie Garsii–Rodemicha–Rumseya dla trajekotrii procesu X. Stosując notacje s i t zamiast x i y, oraz zastępując $f(x)$ przez $X_t(\omega)$ kładziemy

$$\Psi(x) := |x|^p_{\mathbb{R}^d},$$

$$p(x) := |x|_{\mathbb{R}^d}^{\frac{2d+\varepsilon}{p}} \left(\log \frac{\gamma}{|x|_{\mathbb{R}^d}} \right)^{2/p},$$

$$\gamma = \sqrt{d} e^{\frac{p}{n}}.$$

3.5 Twierdzenie Chentsowa

Niech $X = (X_t)$, $t \in [0, T])$ będzie procesem ośrodkowym o wartościach w przestrzeni metrycznej (U, ρ). Rozszerzmy X na $\mathbb{R}$ kładąc $X_t = X_0$ dla $t < 0$ i $X_t = X_T$ dla $t \ge T$. Zachodzi następujący wynik (patrz [14], Lemma 3 i Theorem 1 of Chapter 3). Przypomnijmy, że funkcja f ma w punkcie t_0 nieciągłość drugiego rodzaju jeśli nie istnieje któraś z granic jednostronnych funkcji w tym punkcie.

Twierdzenie 3.6 ***(Chentsow)*** *Załóżmy, że istnieją: rosnąca funkcja*

$$g\colon (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$$

i funkcja

$$q\colon (0, +\infty) \times (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$$

takie, że dla wszystkich $C, h > 0$,

$$\mathbb{P}\left\{ [\rho(X_t, X_{t-h}) > Cg(h)] \cap [\rho(X_t, X_{t+h}) > Cg(h)] \right\} \le q(C, h)$$

oraz

$$G := \sum_{n=1}^{\infty} g(T2^{-n}) < \infty, \qquad Q(C) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(C, T2^{-n}) < \infty.$$

Wówczas z prawdopodobieństwem 1, X *nie ma nieciągłości drugiego rodzaju. Ponadto dla dowolnego* $N > 0$,

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{t,s \in [0,T]} \rho(X_t, X_s) > N \right\} \le \mathbb{P}\left\{ \rho(X_0, X_T) > \frac{N}{2G} \right\} + Q\left(\frac{N}{2G} \right).$$

Wniosek 3.2 *Załóżmy, że istnieją $p, r, K > 0$ takie, że dla wszystkich $t \in [0, T]$ i $h > 0$,*

$$\mathbb{E}\left[\rho\left(X_t, X_{t-h}\right)\rho\left(X_t, X_{t+h}\right)\right]^p \leq K h^{1+r}.$$

Wówczas z prawdopodobieństwem 1 proces X nie ma nieciągłości drugiego rodzaju. Ponadto dla $1 \leq q < 2p$,

$$\mathbb{E} \sup_{t,s\in[0,T]} (\rho(X_t, X_s))^q \leq (2G)^q \mathbb{E}\left(\rho(X_T, X_0)\right)^q + R,$$

gdzie $0 < r' < r$,

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} (T 2^{-n})^{r'/(2p)} < \infty,$$

oraz $R := 1 + \frac{q}{2p-q} \frac{K(2G)^{2p} T^{1+r-r'}}{1-2^{r'-r}}$.

Dowód. Niech $0 < r' < r$. Wówczas założenia Twierdzenia 3.6 zachodzą z

$$g(h) := h^{r'/(2p)} \qquad \text{i} \qquad q(C, h) := \frac{K}{C^{2p}} h^{1+r-r'}.$$

Z nierówności Czebyszewa

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{[\rho(X_t, X_{t-h}) > C g(h)] \cap [\rho(X_t, X_{t+h}) > C g(h)]\right\} \\
&\quad \leq \mathbb{P}\left\{\rho(X_t, X_{t-h})\rho(X_t, X_{t+h}) > C^2 g^2(h)\right\} \\
&\quad \leq \frac{K h^{1+r}}{C^{2p} g^{2p}(h)} = \frac{K h^{1+r-r'}}{C^{2p}}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla G zdefiniowanego jak wyżej, zachodzi

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{N}{2G}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{K(2G)^{2p}}{N^{2p}} (T 2^{-n})^{1+r-r'} = \frac{K(2G)^{2p}}{N^{2p}} T^{1+r-r'} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(r-r')} \\
&= \frac{K(2G)^{2p} T^{1+r-r'}}{1 - 2^{r'-r}} N^{-2p}.
\end{aligned}$$

Aby pokazać oszacowanie na momenty weźmy $q \geq 1$. Ponieważ

$$\mathbb{E} \sup_{t,s\in[0,T]} (\rho(X_t, X_s))^q = q \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{t,s\in[0,T]} \rho(X_t, X_s) \geq N\right\} N^{q-1} \mathrm{d}N,$$

z Twierdzena 3.6 wnioskujemy, że

$$\mathbb{E} \sup_{t,s\in[0,T]} (\rho(\xi(t), \xi(s)))^q \leq (2G)^q \mathbb{E}\left(\rho(\xi(T), \xi(0))\right)^q + 1 + q \int_1^{\infty} Q\left(\frac{N}{2G}\right) N^{q-1} \mathrm{d}N,$$

co daje żądane oszacowanie. $\square$

3.6 Pewne klasy procesów

Niech T będzie jednym ze zbiorów $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ lub $\mathbb{R}$ lub $T = [0, \infty)$.

Definicja 3.12 Proces X jest *stacjonarny* gdy dla dowolnego skończonego ciągu $t_1 < t_2, \ldots < t_n$ elementów T i dla dowolnego $h \in T$, wektory losowe

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}),$$

$$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$$

mają ten sam rozkład.

Definicja 3.13 Proces X jest o *przyrostach niezależnych* gdy dla dowolnego skończonego zbioru $t_1 < t_2, \ldots < t_n$ elementów T, zmienne losowe

$$X_{t_2} - X_{t_1},\, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

są niezależne. Jeżeli dodatkowo rozkład przyrostu $X_t - X_s$ zależy tylko od różnicy $t - s$, to mówimy, że X na *przyrosty niezależne i stacjonarne.*

Definicja 3.14 Proces $X = (X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem *Lévy'ego* gdy

- $X_0 = 0$,
- X jest stochastycznie ciągły,
- X ma przyrosty niezależne i stacjonarne.

Uwaga 3.3 Można pokazać, że procesy Lévy'ego mają modyfikacje càdlàg.

Uwaga 3.4 Procesy Lévy'ego są procesami Markowa (patrz Rozdział 7).

3.7 Filtracje, procesy adaptowane

Definicja 3.15 Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech T będzie przedziałem czasowym. *Filtracją* nazywamy niemalejącą rodzinę $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ pod-σ-ciał $\mathfrak{F}$.

Oczywiście $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ jest niemalejąca rodziną gdy

$$\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t, s \in T \colon s \leq t.$$

Zwykle element $\mathfrak{F}_t$ filtracji interpretujemy jako σ-ciało zdarzeń, które zaszły do momentu t.

Następująca definicja dotyczy czasu ciągłego.

Definicja 3.16 Filtracja $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ jest *prowostronnie ciągła* gdy

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+} := \bigcap_{s > t, s \in T} \mathfrak{F}_s, \qquad \forall\, t \in T,$$

Definicja 3.17 Czwórkę $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ gdzie $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ jest filtracją nazywamy *przestrzenią z filtracją*.

Definicja 3.18 Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym określonym na przestrzeni z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$. Mówimy, że X jest *adaptowany do filtracji* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ jeżeli dla każdego $t \in T$, zmienna losowa X_t jest $\mathfrak{F}_t$-mierzalna.

Definicja 3.19 Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. *Filtracją generowaną przez proces* X nazywamy filtrację $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ w której każde $\mathfrak{F}_t$ jest generowane przez $X_s\colon s \in T, s \leq t$. Czyli dla każdego $t \in T$, $\mathfrak{F}_t$ jest najmniejszym pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}$ takim, że wszystkie zmienne losowe X_s gdzie $s \in T,\ s \leq t$, są $\mathfrak{F}_t$-mierzalne.

Filtracje generowaną przez X oznaczamy przez $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in T}$, a to że $\mathfrak{F}_t^X$ jest generowane przez X_s, $s \in T,\ s \leq T$, zapisujemy symboliczne

$$\mathfrak{F}_t^X = \sigma(X_s\colon s \leq t).$$

Zadanie 3.9 Pokazać, że filtracja generowana przez proces prawostronnie ciągły jest prawostronnie ciągła.

3.8 Procesy progresywnie mierzalne i prognozowalne

W tym rozdziale czas jest ciągły, czyli $T = [0, +\infty)$ lub T jest przedziałem $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie procesem zdefiniowanym na przestrzeni probabilistycznej z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$.

Definicja 3.20 Process X jest *mierzalny* gdy X traktowany jako odwzorowanie

$$X\colon \Omega \times T \ni (\omega, t) \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$$

jest $\mathfrak{F} \times \mathcal{B}(T)$-mierzalne.

Definicja 3.21 Proces X jest *progresywnie mierzalny* gdy jest $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$-adaptowany i dla dowolnego $t \in T$,

$$X\colon \Omega \times T \cap (-\infty, t] \ni (\omega, s) \mapsto X_s(\omega) \in \mathbb{R},$$

jest $\mathfrak{F}_t \times \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t])$-mierzalne.

W poniższym przykładzie pokażemy, że proces adaptowany i mierzalny nie musi być progresywnie mierzalny.

Przyklad 3.2 Niech $\Omega = [0, 1]$, $\mathfrak{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, a $\mathbb{P}$ niech będzie miarą Lebesgue'a na $(\Omega, \mathfrak{F})$. Niech $\mathcal{A} = \sigma(N \subset [0, 1]\colon \#N < \infty)$. Oczywiście $A \in \mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy A jest przeliczalny lub jego dopełnienie A^c jest przeliczalne.

Zdefiniujemy filtrację $(\mathfrak{F}_t)$ w następujący sposób:

$$\mathfrak{F} = \begin{cases} \mathcal{A} & \text{dla } t \in [0,1[, \\ \mathfrak{F} & \text{dla } t \geq 1. \end{cases}$$

Niech $\Delta := \{(t,t) \colon t \in [0,1/2]\} \subset [0,1] \times [0,1]$ oraz niech

$$X_t(\omega) = \chi_\Delta(t,\omega) = \chi_{\{t\}}(\omega), \qquad t \geq 0,\ \omega \in \Omega.$$

Zauważmy, że X jest procesem mierzalnym (dokładnie X jest odwzorowaniem $\mathcal{B}([0,1]) \times \mathfrak{F} = \mathcal{B}([0,1]) \times \mathcal{B}([0,1])$-mierzalnym). Istotnie $X = \chi_\Delta$ i $\Delta \in \mathcal{B}([0,1]) \times \mathfrak{F}$. Następnie zauważmy, że X jest procesem $(\mathfrak{F}_t)$-adaptowanym. Istotnie dla $t \geq 0$ i $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy

$$\begin{aligned} X_t^{-1}(A) &= \{\omega \in [0,1] \colon \chi_{\{t\}}(\omega) \in A\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{gdy } 0 \notin A \text{ i } 1 \notin A, \\ \{t\} & \text{gdy } t \in [0,1/2],\ 1 \in A \text{ i } 0 \notin A, \\ [0,1] & \text{gdy } t \in [0,1/2],\ 1 \in A \text{ i } 0 \in A, \\ [0,1] \setminus \{t\} & \text{gdy } t \in [0,1/2,\ 1 \notin A \text{ i } 0 \in A, \\ [0,1] & \text{gdy } t > 1/2 \text{ i } 0 \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

Tak więc $X_t^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_t$. Zauważmy, że $Y \equiv 0$ jest progresywnie mierzalną modyfikacją X. Istotnie da $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_0\right) = \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega \colon X_t(\omega) = 0\right) = \mathbb{P}\left([0,1] \setminus \{t\}\right) = 1.$$

Najtrudniejsze do pokazania jest to, że X nie jest progresywnie mierzalny. W tym celu wystarczy pokazać, że

$$\Delta = \Delta \cap [0,1/2] \times [0,1/2] \notin \mathcal{B}([0.1/2]) \times \mathfrak{F}_{1/2} = \mathcal{B}([0.1/2]) \times \mathcal{A}.$$

Pokażemy, że założenie $\Delta \in \mathcal{B}([0.1/2]) \times \mathcal{A}$ prowadzi do sprzeczności. Istotnie, gdyby $\Delta \in \mathcal{B}([0,1/2]) \times \mathcal{A}$, to istniałyby ciągi $\{A_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ zbiorów z $\mathcal{B}([0,1/2])$ oraz $\{D_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ podzbiorów przeliczalnych $[0,1/2]$ takie, że

$$\Delta \in \sigma(A_k \colon k \in \mathbb{N}) \times \sigma(D_k \colon k \in \mathbb{N}).$$

Z twierdzenia Foubiniego dla każdego $t \in [0,1/2]$,

$$\{t\} = \{\omega \in \Omega \colon (t,\omega) \in \Delta\} \in \sigma(D_k \colon k \in \mathbb{N}).$$

Niech $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$. Wówczas

$$\sigma(D_k \colon k \in \mathbb{N}) \subset \{\Gamma, \Gamma \cup \Omega \setminus D \colon \Gamma \subset D\}.$$

Stąd dla dowolnego $\{t\} \in \sigma(D_k \colon k \in \mathbb{N})$, $\{t\} \subset D$. A więc $[0,1/2] \subset D$ co przeczy przeliczalności D.

W poniższym twierdzeniu nie żądamy żadnych dodatkowych założeń o filtracji! W miarę prosty dowód twierdzenia można znaleźć w [32].

Twierdzenie 3.7 ***(Dellacherie–Meyera)*** *Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ będzie przestrzenią z filtracją, (D, ρ) ośrodkową zupełną przestrzenia metryczną (czyli przestrzenią Polską) a $X\colon [0, +\infty) \times \Omega \to D$ niech będzie mierzalnym i $(\mathfrak{F}_t)$ adaptowanym procesem. Istnieje wówczas progresywnie mierzalna modyfikacja procesu X, czyli progresywnie mierzalny proces $Y\colon [0, +\infty) \times \Omega \to D$ taki, że*

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1, \qquad \forall\, t \in [0, +\infty).$$

3.8.1 Procesy prognozowalne

Na $\Omega \times T$ wprowadzimy σ-ciało $\mathcal{P}_T$ zbiorów prognozowalnych w następujący sposób.

Definicja 3.22 σ-ciało $\mathcal{P}_T$ *zbiorów prognozowalnych* to najmniejsze σ-ciało zawierające zbiory postaci

$$A \times (s, t], \qquad s, t \in T,\ s < t,\ A \in \mathfrak{F}_s.$$

Definicja 3.23 Proces X jest *prognozowalny* (*$(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$-prognozowalny*) gdy odwzorowanie

$$X\colon \Omega \times T \ni (\omega, t) \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R},$$

jest $\mathcal{P}_T$-mierzalne.

Można dowieść następujący rezultat.

Twierdzenie 3.8 ***(Dellacherie–Meyera)*** *Załóżmy, że filtracja $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ jest prawostronnie ciągła. Wówczas każdy mierzalny, adaptowany i stochastycznie ciągły proces ma prognozowalną modyfikacje.*

3.9 Momenty Markowa

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją.

Definicja 3.24 *Momentem stopu* lub *momentem Markowa* nazywamy zmienną losową $\tau\colon \Omega \mapsto T \cup \{+\infty\}$ taką, że

$$\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t \in T.$$

Zadanie 3.10 Pokazać, że dla każdego $t \in T$, $\tau \equiv t$ jest momentem Markowa.

Następujące twierdzenia podają nietrywialne przykłady momentów Markowa. Przyjmujemy, że $\inf \emptyset = +\infty$.

Twierdzenie 3.9 *Załóżmy, że* $X = (X_t)_{t\in T}$ *jest* $(\mathfrak{F}_t)$ *adaptowanym procesem stochastycznym. Załóżmy ponadto, że czas jest dyskretny. Wówczas dla dowolnego* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *moment pierwszego wejścia procesu* X *do zbioru* B, *to jest*

$$\tau = \inf\{t \in T\colon X_t \in B\}$$

jest momentem Markowa.

Dowód. Dla dowolnego $t \in T$ mamy

$$\{\tau \le t\} = \bigcup_{s\in T\colon s\le t} \{X_s \in B\}.$$

Ponieważ z adaptowalności $\{X_s \in B\} \in \mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$, zachodzi $\{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$. $\square$.

Zadanie 3.11 Czy moment drugiego (ogólnie k-tego wejścia do zbioru borelowskiego B jest momentem Markowa? Czy moment ostatniego wejścia do zbioru jest momentem Markowa?

Ciągłym odpowiednikiem powyższego twierdzenia jest Twierdzenie 3.10 podane po następujących przygotowawczych lematach.

Lemat 3.1 *Jeżeli* τ *jest momentem stopu to dla każdego* $t \in T$, *zdarzenia* $\{\tau > t\}$, $\{\tau = t\}$ *oraz* $\{\tau < t\}$ *należą do* $\mathfrak{F}_t$.

Dowód. Mamy

$$\{\tau > t\} = \{\tau \le t\}^c.$$

Ponieważ $\{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ i $\mathfrak{F}_t$ jest σ-ciałem, $\{\tau > t\} \in \mathfrak{F}_t$. Fakt, że $\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}$ wynika z tego, że

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{s<t, s\in\mathbb{Q}\cap T} \{\tau \le s\},$$

gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych. Ponieważ $\{\tau = t\} = \{\tau \le t\} \setminus \{\tau < t\}$ więc $\{\tau = t\} \in \mathfrak{F}_t$ bo $\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}$. $\square$

Generalnie warunku $\{\tau \le t\}$ w definicji momentu Markowa nie daje się zastąpić warunkiem $\{\tau < t\}$ lub $\{\tau = t\}$. Zachodzą jednak następujące lematy.

Lemat 3.2 *Jeżeli* $T = [0, +\infty)$, *fitracja* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ *jest prawostronnie ciągła i* $\tau\colon \Omega \mapsto T \cup \{+\infty\}$ *jest takie, że*

$$\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t \in T,$$

to τ *jest momentem Markowa.*

Dowód. Mamy

$$\{\tau \le t\} = \bigcup_{s>t, s\in\mathbb{Q}\cap T} \{\tau < s\} \in \mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t. \qquad \square$$

Lemat 3.3 *Jeżeli* (τ_n) *jest ciągiem momentów Markowa, to* $\sup \tau_n$ *jest również momentem Markowa. Jeżeli* $T = [0, +\infty)$ *i filtracja* $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ *jest prawostronnie ciągła, to* $\inf \tau_n$, $\limsup \tau_n$ *oraz* $\liminf \tau_n$ *są momentami Markowa.*

Dowód. Mamy

$$\{\sup \tau_n \leq t\} = \bigcup \{\tau_n \leq t\} \in \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t \in T.$$

Załóżmy, że filtracja jest prawostronnie ciągła. Wówczas, z Lematu 3.2 wynika, że wystarczy pokazać, że dla każdego t zdarzenia $\{\inf \tau_n < t\}$, $\{\limsup \tau_n < t\}$ oraz $\{\liminf \tau_n < t\}$ należą do $\mathfrak{F}_t$. Zachodzi to ponieważ

$$\{\inf \tau_n < t\} = \bigcup_{s<t, s \in \mathbb{Q}} \{\tau_n < s\},$$

$$\{\limsup \tau_n < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\tau_m < t - 1/k\},$$

$$\{\liminf \tau_n > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{\tau_m > t + 1/k\}.$$

Twierdzenie 3.10 *(i) Niech* $T = [0, +\infty)$, $X = (X_t)_{t \in T}$ *będzie prawostronnie ciągłym procesem stochastycznym adaptowanym do prawostronnie ciągłej filtracji* $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$. *Niech* C *i* D *będą otwartym i domkniętym podzbiorem* $\overline{\mathbb{R}}$. *Wówczas zmienne losowe*

$$\tau_C := \inf\{t \in T \colon X_t \in C\}, \qquad \rho_C := \inf\{t \in T,\, t > 0 \colon X_t \in C\}$$

oraz

$$\tau_D := \inf\{t \in T \colon X_t \in D\}$$

są momentami Markowa.
(ii) Niech $X = (X_t)$ *będzie procesem mierzalnym adaptowanym do filtracji* $(\mathfrak{F}_t)$ *oraz mający ciągłe trajektorie. Wówczas dla dowolnego zbioru domkniętego* $K \subset \mathbb{R}$ *zmienna losowa*

$$\tau_K := \inf\{t \geq 0 \colon X_t \in K\}$$

jest momentem Markowa względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$[1].

Dowód. Niech C będzie otwartym podzbiorem $\overline{\mathbb{R}}$. Ponieważ filtracja jest prawostronnie ciągła, z Lematu 3.2 wynika, że τ_C jest momentem Markowa gdy dla każdego $t \in T$, $\{\tau_C < t\} \in \mathfrak{F}_t$, co jest równoważne temu, że dla każdego $t \in T$, $\{\tau_C \geq t\} \in \mathfrak{F}_t$. Oczywiście dla dowolnego $t \in T$,

$$\{\tau_C \geq t\} = \{X_s \in C^c,\ s \in T,\ s < t\}.$$

[1] W tym punkcie nic nie zakładamy o filtracji $(\mathfrak{F}_t)$

Ponieważ, X ma trajektorie prawostronnie ciągłe

$$\{X_s \in C^c,\ s \in T,\ s < t\} = \bigcap_{s \in T \cap \mathbb{Q}\colon\, s<t} \{X_s \in C^c\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Aby pokazać, że pierwszy po 0 moment ρ_C trafienia do C jest Markowa zauważmy, że dla dowolnego $t \in T$,

$$\{\rho_C > t\} = \bigcap_{s \in T \cap \mathbb{Q}\colon\, 0<s<t} \{X_s \in C^c\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Przechodzimy do dowodu faktu, że τ_D jest momentem Markowa. Mamy

$$\tau_D = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau_{D^\varepsilon},$$

gdzie D^ε jest otwartą ε-otoczką D, czyli zbiorem puktów, których odległość od D jest silnie mniejsza od ε. Oczywiście D^ε jest zbiorem otwartym, więc τ_{D^ε} jest momentem Markowa. Tak więc z Lematu 3.3 wnioskujemy, że τ_D jest momentem Markowa.

Przechodzimy teraz do dowodu drugiej części twierdzenia. Ponieważ funkcja odległości od zbioru K;

$$\rho_K(x) = \inf \{|x-y|\colon y \in K\}$$

jest ciągła, więc proces $\rho_K(X_t)$, $t \geq 0$, ma ciągłe trajektorie, jest mierzalny i adaptowany. Mamy

$$\{\tau_K > t\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{q \leq t,\, q \in \mathbb{Q}} \left\{\omega \in \Omega\colon \rho_K(X_q) \geq \frac{1}{n}\right\}. \qquad \square$$

Zadanie 3.12 Niech τ_A oznacza moment pierwszego trafienia danego procesu X do zbioru A. Kiedy $\tau_{\overline{A}} = \tau_{\partial A}$? a kiedy $\tau_{\overline{A}} = \tau_{\mathrm{Int}\,(A)}$?

Gdy czas jest dyskretny możemy pokazać coś więcej niż w Lematach 3.1 i 3.2.

Lemat 3.4 *Załóżmy, że T jest dyskretny. Niech $\tau\colon \Omega \mapsto T \cup \{+\infty\}$. Rozważmy następujące warunki:*

(i) τ *jest momentem Markowa,*
(ii) dla każdego $t \in T$, $\{\tau = t\} \in \mathfrak{F}_t$,
(iii) dla każdego $t \in T$, $\{\tau > t\} \in \mathfrak{F}_t$,
(iv) dla każdego $t \in T$, $\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t$,
(v) dla każdego $t \in T$, $\{\tau \geq t\} \in \mathfrak{F}_t$.

Wówczas (i) $\Longleftrightarrow$ *(ii)* $\Longleftrightarrow$ *(iii)* $\Longrightarrow$ *(iv)* $\Longleftrightarrow$ *(v).*

Dowód. Jeżeli τ jest momentem Markowa, to

$$\{\tau = t\} = \{\tau \le t\} \setminus \bigcup_{s\in T, s<t} \{\tau \le s\}.$$

Stąd $(i) \Longrightarrow (ii)$. Jeżeli zachodzi (ii), to ponieważ

$$\{\tau \le t\} = \bigcup_{s\le t, s\in T} \{\tau = s\},$$

mamy (i). Równoważność $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ wynika z faktu, że

$$\{\tau \le t\} = \{\tau > t\}^c, \qquad \forall\, t \in T.$$

Podobnie, równoważność $(iv) \Longleftrightarrow (v)$ wynika z faktu, że

$$\{\tau < t\} = \{\tau \ge t\}^c, \qquad \forall\, t \in T.$$

Załóżmy, (ii). Wówczas

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{s<t,\ s\in T} \{\tau = s\} \in \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t \in T,$$

co dowodzi $(ii) \Longrightarrow (iv)$. $\square$

Następujący lemat dotyczy przypadków czasu dyskretnego i ciągłego.

Lemat 3.5 *Niech τ i ρ będą momentami Markowa względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$. Wówczas*

(i) jeżeli $\tau + \rho$ ma sens (to jest przyjmuje wartości w T) oraz jeżeli τ i ρ są nieujemne[2], to $\tau + \rho$ jest momentem Markowa,
(ii) $\tau \wedge \rho := \min\{\tau, \rho\}$ jest momentem Markowa,
(iii) $\tau \vee \rho := \max\{\tau, \rho\}$ jest momentem Matrkowa.

Dowód. Pokażemy, że dla każdego t, $\{\tau + \rho > t\} \in \mathfrak{F}_t$. Mamy

$$\{\tau + \rho > t\} = \{\tau = 0\} \cap \{\rho > t\} \cup \bigcup_{s\in T\cap\mathbb{Q}\cap[0,+\infty)} \{\tau > s\} \cap \{\rho \ge t - s\},$$

co dowodzi (i). Części (ii) oraz (iii) wynikają z następujących równości:

$$\{\tau \wedge \rho \le t\} = \{\tau \le t\} \cap \{\rho \le t\}$$

oraz

$$\{\tau \vee \rho \le t\} = \{\tau \le t\} \cup \{\rho \le t\}. \qquad \square$$

[2] Niech $T = \mathbb{Z}$ i $\rho = -1$. Oczywiście jeśli τ jest momentem Markowa, to zwykle $\tau - 1$ nie jest momentem Markowa. Stąd założenie nieujemności jest potrzebne.

3.10 σ-ciało zdarzeń obserwowalnych do momentu Markowa τ

Niech τ będzie momentem Markowa względem fitracji $(\mathfrak{F}_t)$. Definiujemy rodzinę zbiorów $\mathfrak{F}_\tau$ obserwowalnych do momentów τ w następujący sposób

$$\mathfrak{F}_\tau = \{A \in \mathfrak{F} \colon A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t,\ \forall\, t\}\,.$$

Lemat 3.6 *Rodzina $\mathfrak{F}_\tau$ jest σ-ciałem. Moment Markowa τ jest $\mathfrak{F}_\tau$-mierzalny.*

Dowód. Z definicji momentu Markowa $\Omega \in \mathfrak{F}_\tau$. Istotnie

$$\Omega \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t \in T.$$

Załóżmy, że $A \in \mathfrak{F}_\tau$. Wówczas

$$A^c \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \setminus A \cap \{\tau \le\} \in \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t \in T.$$

Więc $A^c \in \mathfrak{F}_\tau$. Niech (A_n) będzie ciągiem zdarzeń z $\mathfrak{F}_\tau$. Wówczas dla każdego $t \in T$,

$$\Big(\bigcup A_n\Big) \cap \{\tau \le t\} = \bigcup A_n \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t,$$

a więc $\bigcup A_n \in \mathfrak{F}_\tau$, co kończy dowód stwierdzenia, że $\mathfrak{F}_\tau$ jest σ-ciałem. Aby pokazać, że τ jest $\mathfrak{F}_\tau$ mierzalne należy pokazać, że dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$, zdarzenie $\{\tau \le s\}$ należy do $\mathfrak{F}_\tau$. Możemy założyć, że $s \in T$. Wówczas

$$\{\tau \le s\} \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t \wedge s\} \in \mathfrak{F}_{t\wedge s} \subset \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t \in T. \qquad \square$$

Lemat 3.7 *Niech τ i ρ będą momentami Markowa względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$. Wówczas:*

(i) jeżeli $\tau = t$, to $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_t$,
(ii) jeżeli $\tau \le \rho$, to $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_\rho$,
(iii) następujące zdarzenia: $\{\tau < \rho\}$, $\{\tau = \rho\}$, $\{\tau > \rho\}$, $\{\tau \le \rho\}$, $\{\tau \ge \rho\}$ należą zarówno do $\mathfrak{F}_\tau$ jak i do $\mathfrak{F}_\rho$.

Dowód. Niech $\tau = t$ i niech $A \in \mathfrak{F}_t$. Wówczas $A \cap \{\tau \le s\} = A$ gdy $s \ge t$ i należy do $\mathfrak{F}_t$ lub $A \cap \{\tau \le s\} = \emptyset \in \mathfrak{F}_s$ gdy $s < t$. Tak więc $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_\tau$. Niech $A \in \mathfrak{F}_\tau$. Mamy $A = A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$, czyli $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_t$.

Jeżeli $\tau \le \rho$ i $A \in \mathfrak{F}_\tau$ to dla dowolnego $t \in T$,

$$A \cap \{\rho \le t\} = A \cap \{\tau \le t\} \cap \{\rho \le t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Czyli $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_\rho$.

Przechodzimy do dowodu trzeciej części lematu. Mamy

$$\{\tau < \rho\} \cap \{\tau \le t\} = \bigcup_{s \in T\cap\mathbb{Q},\, s\le t} \{\tau \le s\} \cap \{\rho > s\} \cup \{\tau = t\} \cap \{\rho > t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Czyli $\{\tau < \rho\} \in \mathfrak{F}_\tau$. Podobnie

$$\{\tau < \rho\} \cap \{\rho \leq t\} = \bigcup_{s \in T \cap \mathbb{Q}, s \leq t} \{\tau \leq s\} \cap \{\rho > s\} \cap \{\rho \leq t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Czyli $\{\tau < \rho\} \in \mathfrak{F}_\rho$. Ponieważ

$$\{\tau = \rho\} = \{\tau < \rho\}^c \cap \{\tau > \rho\}$$

oraz $\{\tau < \rho\}$ i $\{\rho < \tau\}$ należą do $\mathfrak{F}_\tau$ i $\mathfrak{F}_\rho$, otrzymujemy, że $\{\tau = \rho\}$ należy do $\mathfrak{F}_\tau$ i $\mathfrak{F}_\rho$. Ponieważ

$$\{\tau \leq \rho\} = \{\tau < \rho\} \setminus \{\tau = \rho\}$$

więc $\{\tau \leq \rho\} \in \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\rho$. Z symetrii otrzymujemy, że $\{\rho \leq \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\rho$. □

Twierdzenie 3.11 *Załóżmy, że czas jest dystretny. Niech X będzie procesem adaptowanym do filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ a τ momentem Markowa ze względu na $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$. Wówczas zmienna losowa X_τ jest $\mathfrak{F}_\tau$-mierzalna na zbiorze $\tau < \infty$.*

Dowód. Przyjmijmy, że n.p. $X_\infty = +\infty$. Mamy pokazać, ze zmienna losowa $X_\tau \chi_{\{\tau<\infty\}}$ jest $\mathfrak{F}_\tau$-mierzalna. Niech $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

$$\left\{X_\tau \chi_{\{\tau<\infty\}} \in \Gamma\right\} \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \in \Gamma\} \cap \{\tau = k\} \in \mathfrak{F}_n. \qquad \square$$

W przypadku czasu ciągłego mamy następujący wynik.

Twierdzenie 3.12 *Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią z filtracją. Niech $X = (X_t)_{t\geq 0}$ będzie progresywnie mierzalnym procesem stochastycznym oraz niech τ będzie momentem Markowa spełniającym $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Wówczas zmienna losowa X_τ jest $\mathfrak{F}_\tau$-mierzalna.*

Dowód. Niech $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mamy pokazać, że dla dowolnego $t \geq 0$,

$$\{X_\tau \in \Gamma\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Ustalmy t. Z progresywnej mierzalności, odwzorowanie

$$\Omega \times [0, t] \ni (\omega, s) \mapsto X_s(\omega) \in \mathbb{R}$$

jest $\mathfrak{F}_t \times \mathcal{B}([0, t])$- mierzalne. Ponieważ $\tau \wedge t$ jest momentem Markowa (patrz Zadanie 3.10 i Lemmat 3.5 (ii)) więc z Twierdzenia 1.6, odwzorowanie

$$\Omega \ni \omega \mapsto (\omega, \tau(\omega) \wedge t) \in \Omega \times [0, t]$$

jest $\mathfrak{F}_t/\mathfrak{F} \times \mathcal{B}([0, t])$-mierzalne. Tak więc odwzorowanie

$$I \colon \Omega \ni \omega \mapsto X_{\tau(\omega)\wedge t} \in \mathbb{R}$$

jest $\mathfrak{F}_t$-mierzalne jako złożenie dwóch odwzorowań mierzalnych. Oczywiście

$$\{X_\tau \in \Gamma\} \cap \{\tau \leq t\} = I^{-1}(\Gamma) \cap \{\tau \leq t\}$$

należy do $\mathfrak{F}_t$ jako przecięcie dwóch zdarzeń z $\mathfrak{F}_t$, patrz Lemat 3.1.

3.11 Zadania

Zadanie 3.13 Niech τ i ρ będą momentami Markowa względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Niech $A \in \mathfrak{F}_\tau$. Pokazać, że:

(i) $\mathfrak{F}_{\tau\wedge\rho} = \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\rho$.
(ii) $A \cap \{\tau \leq \rho\} \in \mathfrak{F}_\rho$.

Zadanie 3.14 Niech τ i ρ będą momentami Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ i niech X będzie całkowalną zmienną losową. Udowodnij, że na zbiorze $\{\tau \leq \rho\}$,

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{F}_\tau\right) = \mathbb{E}\left(X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\rho}\right), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Zadanie 3.15 Niech τ będzie momentem Markowa. Które z następujących zmiennych losowych są momentami Markowa?

(i) $\tau + 1$, gdy $T = \mathbb{N}$ lub $T = [0, \infty)$,
(ii) $\tau - 1$, gdy $T = \mathbb{N}$ lub $T = [0, \infty)$,
(iii) τ^2, gdy $T = \mathbb{N}$ lub $T = [0, \infty)$, lub $T = [0, 1]$,
(iv) $\sqrt{\tau}$, gdy $T = \mathbb{N}$ lub $T = [0, \infty)$, lub $T = [0, 1]$.

Zadanie 3.16 Niech $\tau\colon \Omega \mapsto [0, +\infty]$ będzie momentem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dla jakich $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ istnieje niepusty zbiór $T_a \subset [0, +\infty]$ taki, że $\rho = \tau^2/a + a$ jest momentem Markowa względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T_a}$?

Zadanie 3.17 Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Niech

$$\tau := \inf\{n\colon X_1 + \ldots + X_n \geq 1\}.$$

Policzyć $\mathbb{E}\,\tau$.

Poprzednie zadanie można uogólnić w następujący sposób:

Zadanie 3.18 Niech $\{X_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym on odcinku $[0, 1]$. Dla $0 < x \leq 1$ zdefiniujemy

$$N(x) := \inf\{n\colon X_1 + X_2 + \ldots X_n \geq x\}$$

Pokazać, że

$$\mathbb{P}\left(N(x) \geq n\right) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Policzyć $\mathbb{E}\,N(x)$ i $\operatorname{var} N(x)$.

Zadanie 3.19 Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Niech F będzie dystrybuantą tego rozkładu a f jego gęstością. Niech

$$N := \inf\{n\colon X_n > X_0\}$$

oraz niech

$$M := \min\{n \geq 1\colon X_0 \geq X_1 \geq \ldots \geq X_{n-1} < X_n\}.$$

Pokazać, że X_N ma dystrybuantę

$$F + (1-F)\log(1-F).$$

Znaleźć $\mathbb{P}(M = m)$.

Zadanie 3.20 Niech τ będzie momentem Markowa. Czy $\sigma(\tau) = \mathfrak{F}_\tau$?

Zadanie 3.21 Niech

$$\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{N}} = \{(\varepsilon_k)\colon \varepsilon \in \{-1,1\}\}.$$

Niech

$$X_k((\varepsilon_j)) = \varepsilon_k, \qquad k \in \mathbb{N},\ (\varepsilon_k) \in \Omega.$$

Niech

$$\mathfrak{F}_n := \sigma(X_k\colon k \leq n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

oraz niech

$$\mathfrak{F} = \sigma\left(\bigcup_n \mathfrak{F}_n\right),$$

$$\mathbb{P} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mu,$$

gdzie $\mu\{-1\} = q$, $\mu\{1\} = p$. Czy łatwo znaleźć $A \subset \Omega$ taki, że $A \notin \mathfrak{F}$? Niech

$$\tau = \inf\{k\colon X_k = 1\}, \sigma = \inf\{n\colon S_n = 1\},$$

gdzie

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Czy τ, σ są momentami Markowa? Czy $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_\sigma$? Jaka jest postać $\mathfrak{F}_\tau$ i $\mathfrak{F}_\sigma$? Jaki jest rozkład τ i ile wynosi $\mathbb{E}\,\tau$? Aby zobaczyć ile wynosi $\mathbb{E}\,\sigma$ patrz Zadanie 3.25.

Poniższe zadanie zainspirowane było dyskusją z Profesorem Markiem Capińskim.

Zadanie 3.22 Niech $\tau\colon \Omega \mapsto (0,+\infty)$ będzie zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$. Niech $\sigma(\tau)$ będzie σ-ciałem generowanym przez τ, a

$$I(t) = \chi_{\{t\leq\tau\}}, \qquad t \geq 0.$$

Niech $(\mathfrak{F}_t)$ będzie filtracją generowaną przez proces $I(t)$, $t \geq 0$.
(a) Pokazać, że dla dowolnego $t \geq 0$,

$$\sigma(I(t)) = \{\Omega, \emptyset, \{\tau \leq t\}, \{\tau > t\}\}.$$

(b) Pokazać, że dla dowolnego $t \geq 0$,

$$\mathfrak{F}_t = \{\{t \leq \tau\} \cup C, \{t > \tau\} \cap C \colon C \in \sigma(\tau)\}\,.$$

(c) Pokazać, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X,

$$\mathbb{E}\left(X\chi_{\{t\leq\tau\}}|\mathfrak{F}_t\right) = \chi_{\{t\leq\tau\}}\frac{\mathbb{E}\,X\chi_{\{t\leq\tau\}}}{\mathbb{P}\,(t \leq \tau)}$$

oraz

$$\mathbb{E}\,(X|\mathfrak{F}_t) = \chi_{\{t\leq\tau\}}\frac{\mathbb{E}\,X\chi_{\{t\leq\tau\}}}{\mathbb{P}\,(t \leq \tau)} + \chi_{\{t>\tau\}}\mathbb{E}\,(X|\sigma(\tau))\,.$$

(d) Pokazać, że τ jest momentem Markowa względem $(\mathfrak{F}_t)$.
(e) Pokazać, że $\mathfrak{F}_\tau = \sigma(\tau)$.

3.12 Tożsamość Walda

Zadanie 3.23 Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Niech

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Niech τ będzie momentem Markowa względem $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pokazać, że dla dowolnego n zmienne losowe X_n i $\chi_{\{\tau\geq n\}}$ są niezależne.

Twierdzenie 3.13 ***(Tożsamość Walda)*** *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz niech τ będzie momentem Markowa względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)$ generowanej przez ciąg (X_n). Załóżmy, że $\mathbb{E}\,|X_1| < \infty$ oraz. że $X_n \geq 0$, $\mathbb{P}$-p.n. lub $\mathbb{E}\,\tau < \infty$. Wówczas*

$$\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau} X_k = \mathbb{E}\,\tau\,\mathbb{E}\,X_1.$$

Dowód. Z niezależności X_n od $\{\tau \geq n\}$ (patrz Zadanie 3.23) mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau} X_k &= \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty} X_k\chi_{\{\tau\geq k\}}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\,(\tau \geq k)\,\mathbb{E}\,X_k\\ &= \mathbb{E}\tau\,\mathbb{E}\,X_1,\end{aligned}$$

bo $\mathbb{E}\,X_k = \mathbb{E}\,X_1$ oraz

$$\mathbb{E}\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\tau \geq k),$$

dla dowolnej zmiennej τ przyjmującej wartości naturalne. Przejście z wartością oczekiwaną pod znak sumy to jest równość

$$\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty} X_k\chi_{\{\tau\geq k\}} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\, X_k\chi_{\{\tau\geq k\}}$$

można uzasadnić z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i z twierdzenia Lebesgue'a–Beppo Levy'ego. Istotnie jeśli zmienne losowe X_n są nieujemne to stosujemy twierdzenie Lebesgue'a–Beppo Levy'ego. Jeżeli $\mathbb{E}\,\tau < \infty$, to z twierdzenia Lebesgue'a–Beppo Levy'ego

$$\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|\chi_{\{\tau\geq k\}} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\tau\geq k\right)\mathbb{E}\,|X_k| = \mathbb{E}\tau\,\mathbb{E}\,|X_1| < \infty.$$

Stąd zmienne losowe

$$\sum_{k=1}^{n} X_k\chi_{\{\tau\geq k\}}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

są zmajoryzowne przez całkowalną zmienną losową

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|\chi_{\{\tau\geq k\}}. \qquad \square$$

Zadanie 3.24 Rzucamy kostką tak długo aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów. Znaleźć wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

Zadanie 3.25 Niech (X_n) ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwumiennym $\mathbb{P}(X_k = -1) = q$ i $\mathbb{P}(X_k = 1) = p = 1 - q$. Niech σ będzie pierwszym momentem w którym liczba sukcesów przewyższa liczbę porażek. Policzyć $\mathbb{E}\,\sigma$, oczekiwany czas wyjścia na plus w grze.

Zadanie 3.26 (Zadanie zakomunikowane autorowi przez Pana Doktora Marcina Piterę). Rzucamy równocześnie dwoma sześciennymi kostkami do momentu aż wypadnie taka sama liczba oczek na obu kostkach. Ile wynosi oczekiwana wartość łącznej liczby wyrzuconych oczek? Dodajemy kolejno wyrzucone sumy oczek na obu kostkach aż do ostatniego rzutu.

Zadanie 3.27 Niech (X_n) będzie procesem stochastycznym adaptowanym do filtracji $(\mathfrak{F}_n)$. Czy

$$\tau = \min\{n\colon \exists\, m\leq n\colon X_m < n\}$$

jest momentem Markowa względem $(\mathfrak{F}_n)$.

Zadanie 3.28 Rzucamy kostką. Niech ξ_n oznacza liczbę oczek w n-tym rzucie. τ będzie pierwszym momentem, w którym wypadły 1 i 2 oczka. Czy jest to moment Markowa względem filtracji generowanej przez ciąg (ξ_n)?

Zadanie 3.29 Rzucamy kostką. Niech ξ_n oznacza liczbę oczek w n-tym rzucie. τ będzie pierwszym momentem, w którym w kolejnych dwóch rzutach wypadły 1 i 2 oczka. Czy jest to moment Markowa względem filtracji generowanej przez ciąg (ξ_n)?

4

Martyngały

Podamy definicje martyngału, podmartyngału (submartyngłu) i nadmartyngału (supermartyngału), ich przykłady i podstawowe własności. W tym rozdziale najpierw czas jest dowolny $T = [0, +\infty)$, $T = [a, b]$ lub $T = \mathbb{N}$ lub $T = \mathbb{Z}$. Potem ograniczymy się do czasu dyskretnego. Zakładamy, że $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ jest ustaloną przestrzenią probabilistyczną z filtracją.

4.1 Podstawowe definicje

Definicja 4.1 Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$-adaptowanym procesem całkowalnym. Mówimy, że X jest

- *martyngałem (martyngałem względem* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$*)* gdy
$$\mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_s) = X_s, \quad \mathbb{P} - p.n., \qquad \forall\, t, s \in T\colon s \le t,$$
- *submartyngałem lub podmartyngałem (submartyngałem względem* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$*, podmartyngałem względem* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$*)* gdy
$$\mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_s) \ge X_s, \quad \mathbb{P} - p.n., \qquad \forall\, t, s \in T\colon s \le t,$$
- *supermartyngałem lub nadmartyngałem (supermartyngałem względem* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$*, nadmartyngałem względem* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$*)* gdy
$$\mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_s) \le X_s, \quad \mathbb{P} - p.n., \qquad \forall\, t, s \in T\colon s \le t.$$

Często zamiast X jest martyngałem (sub- czy supermartyngałem) względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ piszemy $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ jest martyngałem (sub- czy supermartyngałem).

Powyższą definicje można przeformułować w następującej równoważnej postaci.

Definicja 4.2 Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$-adaptowanym procesem całkowalnym. Mówimy, że X jest

- *martyngałem (martyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$)* gdy

$$\int_A X_t \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_s \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall\, t,s \in T\colon s \le t,\ \forall\, A \in \mathfrak{F}_s.$$

- *submartyngałem lub podmartyngałem (submartyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$, podmartyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$)* gdy

$$\int_A X_t \mathrm{d}\mathbb{P} \ge \int_A X_s \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall\, t,s \in T\colon s \le t,\ \forall\, A \in \mathfrak{F}_s.$$

- *supermartyngałem lub nadmartyngałem (supermartyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$, nadmartyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$)* gdy

$$\int_A X_t \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_A X_s \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall\, t,s \in T\colon s \le t,\ \forall\, A \in \mathfrak{F}_s.$$

Twierdzenie 4.1 (i) *Jeżeli X jest martyngałem to*

$$\mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, X_s, \qquad \forall\, t,s \in T.$$

(ii) *Jeżeli X jest podmartyngałem to*

$$\mathbb{E}\, X_t \ge \mathbb{E}\, X_s, \qquad \forall\, t,s \in T,\ t \ge s.$$

(iii) *Jeżeli X jest nadmartyngałem to*

$$\mathbb{E}\, X_t \le \mathbb{E}\, X_s, \qquad \forall\, t,s \in T,\ t \ge s.$$

Dowód. Jeżeli X jest martyngałem to dla $t,s \in T\colon t > s$ zachodzi

$$\mathbb{E}\,(X_t|\mathfrak{F}_s) = X_s.$$

Stąd

$$\mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\,(X_t|\mathfrak{F}_s) = \mathbb{E}\, X_s.$$

Jeżeli X jest podmartyngałem, to dla $t,s \in T\colon t > s$ zachodzi

$$\mathbb{E}\,(X_t|\mathfrak{F}_s) \ge X_s.$$

Stąd

$$\mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\,(X_t|\mathfrak{F}_s) \ge \mathbb{E}\, X_s.$$

Jeżeli X jest nadmartyngałem, to dla $t,s \in T\colon t > s$ zachodzi

$$\mathbb{E}\,(X_t|\mathfrak{F}_s) \le X_s.$$

Stąd

$$\mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\,(X_t|\mathfrak{F}_s) \le \mathbb{E}\, X_s. \qquad \square$$

Zadanie 4.1 Pokazać, że proces $X = (X_t)_{t \in T}$ jest podmartyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $-X = (-X_t)_{t \in T}$ jest nadmartyngałem.

Zadanie 4.2 Niech (ξ_i) bedzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych całkowalnych. Niech $T = \mathbb{N}$,

$$X_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad \mathfrak{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Pokazać, że: jeśli $\mathbb{E}\, \xi_i = 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to $(X_n, \mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest martyngłem, jeżeli $\mathbb{E}\, \xi_i \geq 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to $(X_n, \mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest podmartyngłem, a jeżeli $\mathbb{E}\, \xi_i \geq 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to $(X_n, \mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nadmartyngłem.

Zadanie 4.3 Niech η będzie całkowalną zmienną losową. Niech

$$X_t := \mathbb{E}\left(\eta | \mathfrak{F}_t\right), \qquad t \in T.$$

Pokazać, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest martyngałem.

Zadanie 4.4 Niech $T \in (0, +\infty)$ i niech $X = (X_t \colon t \in [0, T])$ będzie nadmartyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$. Pokazać, że X jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}\, X_0 = \mathbb{E}\, X_T$.

Zadanie 4.5 Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych całkowalnych z kwadratem i o zerowych wartościach oczekiwanych. Niech $(\mathfrak{F}_n)$ będzie filtracją generowaną przez ciąg (X_n). Niech $Y_1 = 0$ i niech

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1} X_k, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Pokazać, że (Y_n) jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_n)$.

Uwaga 4.1 Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie martyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$. Jeżeli czas T jest ograniczony i zachodzi

$$\overline{T} := \sup_{t \in T} \in T,$$

to

$$X_t = \mathbb{E}\left(X_{\overline{T}} | \mathfrak{F}_t\right), \qquad \forall\, t \in T.$$

Definicja 4.3 Jeżeli martyngał X jest postaci

$$X_t = \mathbb{E}\left(\eta | \mathfrak{F}_t\right), \qquad t \in T,$$

dla pewnej zmiennej losowej η, to X nazywamy *martyngałem regularnym.*

Przyklad 4.1 Załóżmy, że (ξ_i) jest ciągiem i.i.d (niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie). Jak w Zadaniu 4.2, niech $T = \mathbb{N}$,

$$X_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad \mathfrak{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Jeżeli $\xi_i \neq 0$, to X nie jest martyngałem regularnym. Intuicyjnie, gdyby był, to powinna by istnieć granica

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i.$$

Granica ta nie istnieje bo szereg po prawej stronie nie jest zbieżny. Więcej na ten temat będzie można znaleźć w rozdziale poświęconym twierdzeniu Dooba o zbieżności martyngałów (patrz Twierdzenie 4.10*)*.

Twierdzenie 4.2 *Jeżeli* $X = (X_t)_{t\in T}$ *jest martyngałem a* $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *jest funkcją wypukłą, to proces* $f(X) = (f(X_t)_{t\in T})$ *o ile całkowalny jest podmartyngałem*

Dowód. Z nierówności Jensena (patrz Twierdzenie 2.9) otrzymujemy dla $t, s \in T\colon t > s$,

$$f(X_s) = f\left(\mathbb{E}\left(X_t|\mathfrak{F}_s\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(f(X_t)|\mathfrak{F}_s\right), \qquad \square$$

Wniosek 4.1 *Niech* $p \geq 1$. *Jeżeli* X *jest martyngałem całkowalnym z* p*-tą potegą, to* $|X|^p = (|X_t|^p)_{t\in T}$ *jest podmartyngałem.*

4.2 Martyngały i gry losowe

W tym rozdziale czas $T = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Zakładamy, że $\mathfrak{F}_{-1}$ jest pod-σ-ciałem $\mathfrak{F}_0$.

Definicja 4.4 Proces $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *prognozowalny* gdy dla każdego n, V_n jest $\mathfrak{F}_{n-1}$-mierzalna.

Twierdzenie 4.3 *Niech* $X = (X_n)$ *będzie martyngałem względem* $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niech będzie procesem* $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$*-prognozowalnym. Załóżmy, że dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *zmienne losowe* X_nV_n *i* $X_{n+1}V_n$ *są całkowalne. Wówczas proces*

$$Z_n := V_0X_0 + V_1\left(X_1 - X_0\right) + \ldots + V_n\left(X_n - X_{n-1}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngłem względem $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Przyklad 4.2 Niech (Y_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie

$$\mathbb{P}\left(Y_n = 1\right) = p, \qquad \mathbb{P}\left(Y_n = -1\right) = 1 - p,$$

gdzie $p \in (0, 1)$. Interpretujemy $Y_n = 1$ jako wygraną w n-tej grze. Rozważmy filtracje $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ generowaną przez $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, czyli

$$\mathfrak{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Strategia martyngałowa w ruletce jest następująca: w pierwszej grze obstawiamy 1, w każdej następnej grze podwajamy stawkę gdy przegraliśmy lub się wycofujemy z gry gdy wygraliśmy. Niech X_n oznacza nasz majątek w grze w chwili n a W_n stawkę w n-tej grze. Proces (W_n) dany jest wzorem $W_1 = 1$ oraz

$$W_n = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{gdy } Y_1 = Y_2 = \dots Y_{n-1} = -1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Oczywiście W_n jest $\mathfrak{F}_{n-1}$-mierzalny, czyli proces $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest prognozowalny. Proces (X_n) dany jest wzorem

$$X_n = X_{n-1} + W_n Y_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} W_k Y_k.$$

Gdy $p = 1/2$, $\mathbb{E}\, Y_n = 0$, a więc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) &= X_n + \mathbb{E}\,(W_{n+1}Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) \\ &= X_n + W_{n+1}\mathbb{E}\, Y_{n+1} = X_n. \end{aligned}$$

Stąd X jest martyngałem. Gdy $p > 1/2$, to $\mathbb{E}\, Y_n > 0$, a więc X jest podmartyngałem bo $W_n \geq 0$.

4.3 Martyngały w matematyce finansowej

Teoria martyngałów odgrywa bardzo ważną role w analizie matematycznej (patrz na przykład książki R. Bassa [1, 2], D. Stroocka [42]) oraz w matematyce finansowej. W tym rozdziale naszkicujemy pewne zastosowanie teorii martyngałów w finansach.

Podstawowym problemem matematyki finansowej jest arbitrażowa wyceniania instrumentów finansowych. W rozwiązaniu tego problemu istotną role pełni teoria martyngałów. Bez wchodzenia w techniczne szczegóły w modelu występuje arbitraż gdy inwestor może startując z zerowego kapitału uzyskać z dodatnim prawdopodobieństwem zysk w ustalonym czasie bez ryzyka wpadnięcia w długi. Trochę dokładniej niech (X_t^π) oznacza kapitał inwestora w chwili t odpowiadający samofinansujęcej się strategii inwestycyjnej π. Arbitraż to taka strategia π, że $X_0^\pi = 0$, a dla ustalonego $T > 0$,

$$\mathbb{P}\,\{X_T \geq 0\} = 1, \qquad \mathbb{P}\,\{X_T > 0\} > 0.$$

Postawowe Twierdzenie Wyceny Delbaena i Schachermayera mówi, że w modelu rynku nie ma arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy istnieje miara martyngałowa równoważna wyjściowej względem której wszystkie procesy zdyskontowanych cen są (lokalnymi) martyngałami. Dyskontujemy dzieląc kapitał przez rachunek bankowy.

Rozważmy szczególny przypadek. Niech $r \in \mathbb{R}$ będzie złożoną stopą na depozyty/pożyczki bankowe. To znaczy, że jeżeli w chwili 0 w banku ulokujemy kwotę $B(0)$ to w chwili $n \in \mathbb{N}$, nasz kapitał $B(n) = \mathrm{e}^{rn}B(0)$. Podobnie, jeżeli w chwili 0 pożyczymy w banku $B(0)$ to w chwili n nasz dług wynosi $B(n) = \mathrm{e}^{nr}B(0)$. Tutaj ważne jest to, że stopa oferowana przez bank na pożyczki jest równa stopie oferowanej na lokaty! Przez rachunek bankowy rozumiemy $B(n)$ czyli wartość rachunku w chwili n to kapitał w banku w chwili n pod warunkiem, że w chwili 0 mamy 1. Załóżmy, teraz, że $S(0)$ i $S(1)$ są losowymi cenami jakiegoś aktywu ryzykownego S (na przykład akcji) w chwilach 0 i 1. Przyjmijmy, że $S(0)$ i $S(1)$ są określone na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ oraz, że $S(1)$ jest zmienną losową która przyjmuje wartości $F(S(0); \mathrm{u})$ z prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$ i $F(S(0); \mathrm{d})$ z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$, gdzie $F\colon \mathbb{R} \times \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\} \mapsto \mathbb{R}$ jest ustaloną funkcją. Dokładniej p i q są prawdopodobieństwami warunkowymi

$$p = \mathbb{P}\left(S(1) = F(s; \mathrm{u}) | S(0) = s\right), \qquad q = \mathbb{P}\left(S(1) = F(s; \mathrm{d}) | S(0) = s\right).$$

Rozważmy filtrację $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1$ generowaną przez proces $S(0)$ i $S(1)$. Strategia arbitrażowa polegałaby albo na wzięciu w chwili 0 pożyczki bankowej i kupnie S albo na krótkiej sprzedaży S i ulokowaniu uzyskanej kwoty na rachunku bankowym.

Rozważmy pierwszą strategię: w chwili 0 bierzemy pożyczkę bankową wysokości $S(0)$ i kupujemy S. W chwili 1 mamy kapitał równy $S(1) - \mathrm{e}^r S(0)$. Strategia ta prowadzi do arbitrażu gdy

$$F(S(0), \mathrm{u}) > \mathrm{e}^r S(0) \quad \text{oraz} \quad F(S(0), \mathrm{d}) \geq \mathrm{e}^r S(0)$$

lub

$$F(S(0), \mathrm{d}) > \mathrm{e}^r S(0) \quad \text{oraz} \quad F(S(0), \mathrm{u}) \geq \mathrm{e}^r S(0).$$

Rozważmy teraz drugą strategię: w chwil 0 sprzedajemy S a uzyskaną kwotę $S(0)$ lokujemy w banku. W chwili 1 mamy kapitał równy $e^r S(0) - S(1)$. Strategia ta prowadzi do arbitrażu gdy

$$\begin{cases} F(S(0), \mathrm{u}) < \mathrm{e}^r S(0) \quad \text{oraz} \quad F(S(0), \mathrm{d}) \leq \mathrm{e}^r S(0) \\ \quad \text{lub} \\ F(S(0), \mathrm{d}) < \mathrm{e}^r S(0) \quad \text{oraz} \quad F(S(0), \mathrm{u}) \leq \mathrm{e}^r S(0). \end{cases} \tag{4.1}$$

Tak więc w modelu jest arbitraż wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathrm{e}^r S(0) \leq F(S(0), \mathrm{d}) \wedge F(S(0), \mathrm{u}) < F(S(0), \mathrm{d}) \vee F(S(0), \mathrm{u})$$

lub

$$\mathrm{e}^r S(0) \geq F(S(0), \mathrm{d}) \vee F(S(0), \mathrm{u}) > F(S(0), \mathrm{d}) \wedge F(S(0), \mathrm{u}).$$

Z drugiej strony Fundamentalne Twierdzenie Wyceny mówi, że modelu nie ma arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy istnieje prawdopodobieństwo $\mathbb{P}^*$

równoważne $\mathbb{P}$ względem którego zdyskontowany proces cen $(S(1)\mathrm{e}^{-r}, \mathfrak{F}_1)$, $(S(0), \mathfrak{F}_0)$ jest martyngałem. Ponieważ dla oryginalnego prawdopodobieństwa mamy

$$\mathbb{P}\left(S(1) \in \{F(S(0), \mathrm{u}), F(S(0), \mathrm{d})\}\right) = 1$$

więc z tego, że $\mathbb{P}^*$ jest równoważne $\mathbb{P}$ wynika

$$\mathbb{P}^*\left(S(1) \in \{F(S(0), \mathrm{u}), F(S(0), \mathrm{d})\}\right) = 1.$$

Mamy więc

$$S(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left(S(1)e^{-r}|\mathfrak{F}_0\right) = \mathrm{e}^{-r}\left(F(S(0), \mathrm{u})p^* + F(S(0), \mathrm{d})(1 - p^*)\right),$$

gdzie

$$p^* := \mathbb{P}^*\left(S(t) = F(S(0), \mathrm{u})|S(0)\right) \in (0, 1).$$

Warunek na brak arbitrażu przyjmuje więc postać

$$p^* := \frac{S(0)\mathrm{e}^r - F(S(0), \mathrm{d})}{F(S(0), \mathrm{u}) - F(S(0), \mathrm{d})} \in (0, 1). \tag{4.2}$$

Zauważmy, że warunki (4.1) i (4.2) są równoważne. Fundamentalne Twierdzenie Wyceny oraz p^* wyliczone w (4.2) pozwala jednak wyliczyć ceny opcji na S. Niech $C(n), n = 0, 1$ oznacza cenę w chwili n opcji kupna (call) waloru S z momentem wygaśnęcia opcji w chwili 2 po cenie sprzedaży K. Przypomnijmy, że opcja ta daje prawo (ale nie obowiązek) posiadaczowi kupna w chwili 1 waloru S po cenie K. Stąd opcja w chwili wygaśnięcia jest warta $C(1) = (S(1) - K)^+$. Ponieważ względem $\mathbb{P}^*$ zdyskontowany proces cen $(C(0), C(1)\mathrm{e}^{-r})$ jest martyngałem więc

$$\begin{aligned}
C(0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left(C(1)\mathrm{e}^{-r}|\mathfrak{F}_0\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left((S(1) - K)^+ \mathrm{e}^{-r}|\mathfrak{F}_0\right) \\
&= \mathrm{e}^{-r}\left[(F(S(0), \mathrm{u}) - K)^+ p^* + (F(S(0), \mathrm{d}) - K)^+ (1 - p^*)\right].
\end{aligned}$$

4.4 Twierdzenie Dooba o stopowaniu

W tym i następnych dwóch rozdziałach czas jest dyskretny, $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ jest ustaloną przestrzenią probabilistyczną z filtracją a $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest procesem $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-adaptowanym.

Twierdzenie 4.4 *Jeżeli X jest podmartyngałem (nadmartyngałem, martyngałem) a τ momentem Markowa (oba względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$), to proces zastopowany*

$$X^\tau = (X_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$$

jest odpowiednio podmartyngałem (nadmartyngałem, martyngałem) względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód. Wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku gdy X jest podmartyngałem. Mamy

$$X_{n\wedge\tau} = \sum_{k=1}^{n-1} X_k \chi_{\{\tau=k\}} + X_n \chi_{\{\tau\geq n\}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Stąd X^τ jest całkowalny. Mamy

$$X_{(n+1)\wedge\tau} - X_{n\wedge\tau} = \chi_{\{\tau>n\}} \left(X_{n+1} - X_n\right).$$

Stąd

$$X_{n\wedge\tau} = X_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(X_{(k+1)\wedge\tau} - X_{k\wedge\tau}\right) = X_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \chi_{\{\tau>k\}} \left(X_{k+1} - X_k\right),$$

a więc X^τ jest $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-adaptowany.

Ponieważ $\{\tau > n\} = \{\tau \leq n\}^c \in \mathfrak{F}_n$, więc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_{(n+1)\wedge\tau}|\mathfrak{F}_n\right) &= \mathbb{E}\left(X_{n\wedge\tau} + X_{(n+1)\wedge\tau} - X_{n\wedge\tau}|\mathfrak{F}_n\right) \\
&= X_{n\wedge\tau} + \mathbb{E}\left((X_{n+1} - X_n)\chi_{\{\tau>n\}}|\mathfrak{F}_n\right) \\
&= X_{n\wedge\tau} + \chi_{\{\tau>n\}}\mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n|\mathfrak{F}_n\right) \\
&\geq X_{n\wedge\tau},
\end{aligned}$$

bo z warunku podmartyngałowości X mamy

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n|\mathfrak{F}_n\right) \geq 0. \qquad \square$$

Twierdzenie 4.5 ***(Dooba)*** *Jeżeli X jest nadmartyngałem (podmartyngałem, martyngałem) a τ_i, $i = 1, 2$, momentami Markowa, takimi, że*

- $\tau_1 \leq \tau_2$,
- *dla pewnej liczby $N \in \mathbb{N}$, $\tau_2 \leq N$.*

Wówczas proces $\tilde{X} = (X_{\tau_i}, \mathfrak{F}_{\tau_i})_{i=1,2}$ jest nadmartyngłem (podmartyngałem, martyngałem).

Dowód. Z Lematu 3.7(*ii*), $(\mathfrak{F}_{\tau_i})_{i=1,2}$ jest filtracją, a z Twierdzenia 3.11, X_{τ_i} jest $\mathfrak{F}_{\tau_i}$-mierzalny. Stąd $\tilde{X}$ jest $(\mathfrak{F}_{\tau_i})_{i=1,2}$-adaptowany. Ponieważ

$$\mathbb{E}\left|X_{\tau_i}\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left|X_n\right| < \infty,$$

proces $\tilde{X}$ jest całkowalny. Niech $A \in \mathfrak{F}_{\tau_1}$. Mamy do pokazania, że

$$\int_A X_{\tau_1} \mathrm{d}\mathbb{P} \geq \int_A X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Niech $B := \{\tau_1 = k\} \cap A$. Wystarczy pokazać, że funkcja

$$\{k, k+1, \dots N, N-1\} \ni n \mapsto \int_B X_{n \wedge \tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P}$$

jest nierosnąca, bo na zbiorze B, dla $n = k$, $n \wedge \tau_2 = \tau_1$, a dla $n = N$, $n \wedge \tau_2 = \tau_2$, a więc wtedy

$$\int_B X_{\tau_2 \wedge N} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_B X_{\tau_2 \wedge k} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X_{\tau_1} \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Do rozstrzygnięcia jest więc czy?

$$\int_B X_{\tau_2 \wedge (n+1)} \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_B X_{\tau_2 \wedge n} \mathrm{d}\mathbb{P} \leq 0, \qquad n = k, \dots N-1.$$

Ale

$$\int_B X_{\tau_2 \wedge (n+1)} \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_B X_{\tau_2 \wedge n} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{B \cap \{\tau_2 > n\}} (X_{n+1} - X_n) \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Ponieważ X jest nadmartyngałem, prawa strona jest mniejsza lub równa 0 o ile $B \cap \{\tau_2 > n\} \in \mathfrak{F}_n$. Ponieważ $\{\tau_2 > n\} \in \mathfrak{F}_n$ wystarczy pokazać, że $B \in \mathfrak{F}_n$. Ale

$$B = A \cap \{\tau_1 = k\} = A \cap \{\tau_1 \leq k\} \setminus A \cap \{\tau_1 \leq k-1\},$$

gdzie $A \in \mathfrak{F}_{\tau_1}$. Stąd $B \in \mathfrak{F}_k$. $\square$

4.4.1 Strategia na egzamin

Jako zastosowanie twierdzenia Dooba o stopowaniu rozważmy następujący problem wyboru optymalnej strategii na egzamin.

Student zna listę wszystkich możliwych pytań na egzamin. Niestety tylko na część z nich zna odpowiedz. Dokładnie niech w oznacza liczbę pytań, na które zna odpowiedz, a niech b oznacza liczbę pytań, na które nie potrafi odpowiedzieć. Student może wybrać moment τ przystąpienia na egzamin, bazując na obserwacji pytań, które były wylosowane wcześniej. Pytania raz zadane są eliminowane z zestawu pytań. Czy istnieje strategia maksymalizująca prawdopodobieństwo zdania egzaminu?

Niech w_n i b_n oznacza liczbę pytań w n-tej turze, na które student zna i nie zna odpowiedzi. Oczywiście $w_n \leq w$ i $b_n \leq b$. Ponadto $w_0 = w$, $b_0 = b$. Niech

$$\mathfrak{F}_n = \sigma((w_k, b_k) \colon k \leq n), \qquad n \leq w + b$$

oraz niech

$$X_n = \frac{w_n}{w_n + b_n}, \qquad n = 0, \dots, w+b.$$

Zadanie 4.6 Pokazać, że $(X_n, \mathfrak{F}_n)_{n=0,\dots,w+b}$ jest martyngałem.

Zadanie 4.7 Niech τ oznacza moment przystąpienia do egzaminu. Oczywiście jest to moment Markowa. Jakie jest prawdopodobieństwo zdania egzaminu przy strategii τ? Czy można go zmaksymalizować przez sprytny wybór τ?

Odpowiedź Zauważmy, że

$$X_\tau = \frac{w_\tau}{w_\tau + b_\tau}$$

jest prawdopodobieństwem warunkowym zdania egzaminu przy strategii τ, pod warunkiem, że w chwili przystąpienia do egzaminu znamy odpowiedź na w_τ pytań. Stąd ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite prawdopodobieństwo zdania egzaminu przy strategii τ jest równe

$$\sum_k \frac{w_k}{w_k + b_k} \mathbb{P}\left\{\text{w chwili } \tau \text{ znamy odpowiedź na } w_k\text{-pytań}\right\} = \mathbb{E}\, X_\tau = \mathbb{E}\, X_1.$$

4.4.2 Twierdzenie Dooba o opcji wyboru

Mamy następujące uogólnienie twierdzenia Dooba o stopowniu (Twierdzenie 4.5).

Twierdzenie 4.6 *Niech $X = (X_n, \mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie martyngałem oraz niech τ_1 i τ_2 niech będą skończonymi momentami stopu, takimi, że*

$$\mathbb{E}\,|X_{\tau_i}| < \infty, \qquad i = 1, 2 \tag{4.3}$$

oraz

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n|\chi_{\{\tau_i > n\}}\right) = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{4.4}$$

Wówczas

$$\mathbb{E}\,(X_{\tau_2}|\mathfrak{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1} \quad \mathbb{P}\text{-}p.n. \text{ na zbiorze } \{\tau_2 \geq \tau_1\}.$$

Dowód. Należy pokazać, że dla dowolnego $A \in \mathfrak{F}_{\tau_1}$ zachodzi

$$\int_{A\cap\{\tau_2\geq\tau_1\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap\{\tau_2\geq\tau_1\}} X_{\tau_1} \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Ponieważ τ_1 przyjmuje wartości naturalne $1, 2, \ldots$, wystarczy pokazać, że

$$\int_{A\cap\{\tau_2\geq\tau_1\}\cap\{\tau_1=n\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap\{\tau_2\geq\tau_1\}\cap\{\tau_1=n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ustalmy, $n \in \mathbb{N}$ i $A \in \mathfrak{F}_{\tau_1}$. Niech $B := A \cap \{\tau_1 = n\}$. Mamy pokazać, że

$$\int_{B\cap\{\tau_2\geq n\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{B\cap\{\tau_2\geq n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P}. \tag{4.5}$$

Mamy

$$
\begin{aligned}
\int_{B\cap\{\tau_2\geq n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{B\cap\{\tau_2=n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{B\cap\{\tau_2>n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{B\cap\{\tau_2=n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{B\cap\{\tau_2>n\}} \mathbb{E}\left(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n\right) \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{B\cap\{\tau_2=n\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{B\cap\{\tau_2\geq(n+1)\}} X_{n+1} \mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}
$$

W tym momencie wykorzystaliśmy fakt, że

$$
B \cap \{\tau_2 \geq (n+1)\} = A \cap \{\tau_1 = n\} \cap \{\tau_2 \geq (n+1)\} \in \mathfrak{F}_n
$$

oraz to, że X jest martyngałem. Stąd

$$
\begin{aligned}
\int_{B\cap\{\tau_2\geq n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{B\cap\{\tau_2=n\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{B\cap\{\tau_2\geq(n+1)\}} X_{n+1} \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{B\cap\{\tau_2=n\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{B\cap\{\tau_2=(n+1)\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\quad + \int_{B\cap\{\tau_2>(n+1)\}} X_{n+1} \mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}
$$

Postępując tak odpowiednią ilość razy otrzymamy, że

$$
\int_{B\cap\{\tau_2\geq n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{B\cap\{n\leq\tau_2\leq m\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{B\cap\{\tau_2>m\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall m \geq n.
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
\int_{B\cap\{\tau_2\geq n\}} X_{\tau_2} \mathrm{d}\mathbb{P} &= \limsup_{m\to\infty} \left[\int_{B\cap\{n\leq\tau_2\leq m\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{B\cap\{\tau_2>m\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P}\right] \\
&= \int_{B\cap\{\tau_2\geq n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \liminf_{m\to\infty} \int_{B\cap\{\tau_2>m\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{B\cap\{\tau_2\geq n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P},
\end{aligned}
$$

co jest żądaną równością (4.5), bo z założenia (4.4),

$$
-\liminf_{m\to\infty} \int_{B\cap\{\tau_2>m\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P} = 0. \qquad \square
$$

Uwaga 4.2 Jeżeli dla jakiegoś $K \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$
\mathbb{P}\left(\tau_1 \leq K\right) = \mathbb{P}\left(\tau_2 \leq K\right) = 1,
$$

to spełnione są założenia Twierdzenia 4.6. Jeżeli ponadto $\mathbb{P}\left(\tau_1 \leq \tau_2\right) = 1$, to

$$
\mathbb{E}\left(X_{\tau_2}|\mathfrak{F}_{\tau_1}\right) = X_{\tau_1}, \qquad \mathbb{P} - p.n.
$$

Uwaga 4.3 Przyjmijmy, że $\mathbb{N} = 1, 2, \ldots$. Jeżeli $\tau_1 = 1$ i dla τ_2 spełnione są założenia Twierdzenia 4.6, to

$$\mathbb{E}\,(X_{\tau_2}|\mathfrak{F}_1) = X_1, \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

oraz $\mathbb{E}\,X_{\tau_2} = \mathbb{E}\,X_1$.

4.4.3 Zadania

Zadanie 4.8 Niech (ξ_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, całkowalnych z kwadratem i o średnich 0. Niech

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że proces

$$S_n^2 - n\mathbb{E}\,\xi_1^2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (ξ_n).

Zadanie 4.9 Korzystając z poprzedniego zadania pokazać następującą wersje tożsamości Walda

$$\mathbb{E}\,(S_\tau - \tau\mathbb{E}\,\xi_1)^2 = \mathbb{E}\,\tau \mathrm{var}\,\xi_1,$$

gdzie (ξ_n) i S_n są jak w poprzednim zadaniu, a τ jest momentem Markowa o skończonej średniej $\mathbb{E}\,\tau < \infty$.

Zadanie 4.10 Udowodnić, że w symetrycznym zagadnieniu ruiny średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy wynosi ab.

Zadanie 4.11 Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie martyngałem. Zbadać (zakładając odpowiednią całkowalność) czy następujące procesy są pod- czy nadmartyngałami:

- $(|X_t|^p)$ gdy $p \geq 1$,
- $(X_t \wedge a)$,
- $(X_t \vee a)$.

Zadanie 4.12 Niech (ξ_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie

$$\mathbb{P}\,(\xi_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\,(\xi_i = -1)\,.$$

Niech $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, będzie procesem błądzenia przypadkowego. Pokazać, że $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez (ξ_n). Niech

$$\tau_K := \inf\{n \colon |S_n| = K\}$$

będzie czasem dojścia do bariery $K \in \mathbb{Z}$. Ile wynosi $\mathbb{E}\,\tau_K$? Jaka jest "prędkość" błądzenia $\frac{K}{\mathbb{E}\,\tau_K}$? Co byłoby, gdyby

$$\tau_K := \inf\{n \colon S_n = K\}.$$

Zadanie 4.13 Niech (ξ_n) oraz (S_n) będą takie jak w poprzednim zadaniu. Pokazać, że

$$\zeta_n := (-1)^n \cos \pi S_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez (ξ_n).

Zadanie 4.14 Niech (ξ_n) oraz (S_n) będą takie jak w poprzednim zadaniu. Pokazać, że dla dowolnego $K \in \mathbb{N}$,

$$\zeta_n = (-1)^n \cos \pi (S_n + K), \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngałem (względem filtracji generowanej przez (ξ_n)). Wywnioskować stąd, że dla

$$\tau_K := \inf\{n \colon |S_n| = K\}$$

zachodzi

$$\zeta_{\tau_K} = (-1)^{\tau_K}.$$

Czyli

$$\mathbb{E}\,(-1)^{\tau_K} = (-1)^K.$$

4.5 Nierówności martyngałowe

Przypomnijmy (patrz początek poprzedniego rozdziału), że w tym rozdziale czas T jest dyskretny; $T = 1, 2, 3, \ldots = \mathbb{N}$, $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczna z filtracją.

Twierdzenie 4.7 ***(Nierówność maksymalna dla podmartyngałów)*** *Załóżmy, że $X = (X_n)$ jest podmartyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wówczas dla dowolnych $r > 0$ i $m \in \mathbb{N}$,*

$$r\,\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots m} X_k \geq r\right) \leq \int_{\{\max_{k=1,\ldots,m} X_k \geq r\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mathbb{E}\,X_m^+ \leq \mathbb{E}\,|X_m|\,.$$

Dowód. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\tau := \inf\{k \in \mathbb{N} \colon X_k \geq r\},$$

$$A := \left\{\max_{k=1,\ldots,m} X_k \geq r\right\},$$

$$A_k := A \cap \{\tau = k\} = \{\tau = k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Oczywiście τ jest momentem Markowa (patrz Twierdzenie 3.9), z Lematu 3.1 mamy $A_k = \{\tau = k\} \in \mathfrak{F}_k$. Ponadto

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k, \qquad A_j \cap A_k = \emptyset \text{ gdy } j \neq k.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\int_A X_m \mathrm{d}\mathbb{P} &= \sum_{k=1}^m \int_{A_k} X_m \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{k=1}^m \int_{A_k} \mathbb{E}\left(X_m | \mathfrak{F}_k\right) \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\geq \sum_{k=1}^m \int_{A_k} X_k \mathrm{d}\mathbb{P} \geq r \sum_{k=1}^m \mathbb{P}\left(A_k\right) \\
&\geq r\, \mathbb{P}\left(A\right).
\end{aligned}$$

W przed-przed ostatniej nierówności korzystaliśmy z tego, że

$$X_k \geq r \qquad \text{na zbiorze } A_k.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots,m} X_k \geq r\right) \\
&\leq \frac{1}{r} \int_{\left\{\max\limits_{k=1,\ldots,m} X_k \geq r\right\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leq \frac{1}{r} \mathbb{E}\, X_m^+ \leq \frac{1}{r} \mathbb{E}\, |X_m|. \qquad \square
\end{aligned}$$

4.5.1 Nierówność Kołmogorowa

W tym rozdziale wyprowadzimy poniższy klasyczny wynik Kołmogorowa z nierówności martyngałowej Dooba.

Twierdzenie 4.8 ***(Nierówność Kołmogorowa)*** *Niech* (ξ_k) *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średnich* 0 *i skończonych wariancjach. Wówczas*

$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots m} |\xi_1 + \ldots + \xi_k| \geq r\right) \leq \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\xi_k^2.$$

Dowód. Niech

$$X_n := \left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right)^2, \qquad \mathfrak{F}_n := \sigma\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ X jest kwadratem martyngału (patrz Zadanie 4.2) z Wniosku 4.1 otrzymujemy, że (X_n) jest podmartyngałem. Stosując więc nierówność maksymalną Dooba (Twierdzenie 4.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots m} |\xi_1 + \ldots + \xi_k| \geq r\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots,m} X_k \geq r^r\right) \\
&\leq \frac{1}{r^2}\, \mathbb{E}\, |X_m| = \frac{1}{r^2}\, \mathbb{E} \sum_{k=1}^m \xi_k^2. \qquad \square
\end{aligned}$$

4.5.2 Nierówność na p-ty moment maximum

Twierdzenie 4.9 ***(Nierówność Dooba)*** *Niech $p > 1$. Jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieujemnym całkowalnym z p-tą potęgą podmartyngałem, to dla dowolnego m,*

$$\mathbb{E}\left|\max_{k=1,\dots,m} X_k\right|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\, X_m^p$$

Dowód. Niech

$$X_m^* := \max_{k=1,\dots,m} X_k.$$

Wówczas z nierówności maksymalnej i faktu, że dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej Y,

$$\mathbb{E}\, Y^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\,\mathbb{P}\,(Y \ge t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall\, p \ge 1,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(X_m^*)^p &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}\,(X_m^* \ge t)\,\mathrm{d}t \\
&\le p\int_0^\infty t^{p-2}\mathbb{E}\left(X_m\chi_{\{X_m^*\ge t\}}\right)\mathrm{d}t \\
&= p\int_0^\infty t^{p-2}\int_{\{X_m^*\ge t\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P}\mathrm{d}t \\
&= p\int_\Omega X_m \int_0^{X_m^*} t^{p-2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \frac{p}{p-1}\int_\Omega X_m\,(X_m^*)^{p-1}\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\le \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}\, X_m^p\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}\,(X_m^*)^p\right)^{1-1/p}.
\end{aligned}$$

Stąd po podzieleniu otrzymujemy

$$\left(\mathbb{E}\,(X_m^*)^p\right)^{1/p} \le \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}\, X_m^p\right)^{1/p}. \qquad \square$$

4.5.3 Zadania

Zadanie 4.15 Pokazać, że dla podmartyngału $(X_k)_{k=0,\dots,n}$ i dowolnego $r > 0$ zachodzi

$$r\mathbb{P}\left(\min_{k\le n} X_k \le -r\right) \le \mathbb{E}\left(X_n\chi_{\{\min_{k\le n} X_k > -r\}}\right) - \mathbb{E}\, X_0 \le \mathbb{E}\, X_n^+ - \mathbb{E}\, X_0.$$

Zadanie 4.16 Pokazać, że dla podmartyngału $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi

$$r\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\dots,n} |X_k| \ge r\right) \le 3\max_{k=1,\dots,n} \mathbb{E}\,|X_k|, \qquad \forall\, r > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 4.17 Pokazać, że dla nadmartyngału $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\max_{k=0,\ldots,n}|X_k|\geq r\right)\leq\frac{K}{r}\max_{k=1,\ldots,n}\mathbb{E}\,|X_k|\,,\qquad\forall\,r>0,\ \forall\,n\in\mathbb{N},$$

gdzie $K=1$ gdy (X_n) jest martyngałem lub ma nadmartyngałem o stałym znaku, a $K=3$ w ogólnym przypadku.

4.6 Twierdzenie o zbieżności nadmartyngałów

Niech $[a,b]$ gdzie $a<b$ będzie ustalonym przedziałem liczbowym. Dla ciągu liczbowego (x_n) definiujemy indukcyjnie

$$\begin{aligned}\tau_0&:=\inf\{n\colon x_n<a\},\\ \tau_1&:=\inf\{n>\tau_0\colon x_n>b\}\end{aligned}$$

oraz dla $k=1,2,\ldots,$

$$\begin{aligned}\tau_{2k}&:=\inf\{n>\tau_{2k-1}\colon x_n<a\},\\ \tau_{2k+1}&:=\inf\{n>\tau_{2k}\colon x_n>b\}.\end{aligned}$$

Następnie niech

$$U_a^b:=\begin{cases}\sup\{k\geq1\colon\tau_{2k-1}<\infty\} & \text{gdy } \tau_1<\infty,\\ 0 & \text{gdy } \tau_1=\infty.\end{cases}$$

Zauważmy, że U_a^b jest liczbą przejść w górę przez przedział $[a,b]$ ciągu (x_n).

Lemat 4.1 *Ciąg liczbowy (x_n) jest zbieżny (do być może nieskończonej granicy) wtedy i tylko wtedy gdy*

$$U_a^b<\infty,\qquad\forall\,a,b\in\mathbb{Q}\colon a<b. \tag{4.6}$$

Dowód. Istnienie (być może niewłaściwej) granicy oznacza, że

$$\liminf_{n\to\infty}x_n=\limsup_{n\to\infty}x_n.$$

Konieczność warunku (4.6) do istnienia granicy ciągu (x_n) uzasadnimy niewprost. Załóżmy, że dla jakiś wymiernych $a<b$, $U_a^b=\infty$. Wówczas nieskończenie przejść pociąga za sobą istnienie podciągów (k_n) i (l_n) liczb naturalnych, takich, że

$$x_{k_n}<a,\ \ \forall\,n\in\mathbb{N}\qquad\text{oraz}\qquad x_{l_n}>b,\ \ \forall\,n\in\mathbb{N}.$$

Stąd

$$\limsup_{n\to\infty}x_n\geq b,\qquad\liminf x_n\leq a$$

i granice nie są równe. Pokazujemy dostateczność. Jeżeli (x_n) nie jest zbieżny to dla pewnych wymiernych $a < b$ zachodzi

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \geq b, \qquad \liminf x_n \leq a.$$

Stąd istnieją podciągi (k_n) i (l_n) takie, że

$$x_{k_n} < a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{oraz} \qquad x_{l_n} > b, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Stąd $U_a^b = \infty$. $\square$

Lemat 4.2 *Niech* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie nadmartyngałem. Wtedy dla dowolnych* $a < b$ *mamy*

$$\mathbb{E}\, U_a^b([m]) \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\,(X_m - a)^-\,,$$

gdzie $U_a^b[m]$ *oznacza (losową) liczbę przejść w górę przez odcinek* $[a,b]$ *ciągu* $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Dowód. Niech (τ_k) będą określone jak w definicji U_a^b. Niech $\tau'_k = \tau_k \wedge m$, $k \in \mathbb{N}$. Rozważmy zmienne losowe

$$X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Mamy następujące przypadki

(1) $k+1$-przejście w górę zakończyło się przed chwilą m. To znaczy $\tau_{2k} \leq m$, $\tau_{2k+1} \leq m$. Wtedy

$$X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} = X_{\tau_{2k+1}} - X_{\tau_{2k}} > b - a.$$

(2) $k+1$-wsze przejście nie zakończyło się całkowicie przed chwilą m. To znaczy: $\tau_{2k} \leq m$ ale $\tau_{2k+1} > m$. Wtedy

$$X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} = X_m - X_{\tau_{2k}} \geq X_m - a \geq -\,(X_m - a)^-\,,$$

bo dla dowolnej liczby $x \geq -x^-$.

(3) $k+1$-wsze przejście nie rozpoczeło się przed chwilą m. Czyli $\tau_{2k} > m$. Wtedy

$$X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} = X_m - X_m = 0.$$

Dodając więc stronami otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{m}\left(X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}}\right) \geq (b-a)U_a^b([m]) - (X_m - a)^-\,.$$

Z twierdzenia Dooba o stopowaniu (Twierdzenie 4.5)

$$\mathbb{E}\, X_{\tau'_{2k}} \geq \mathbb{E}\, X_{\tau'_{2k+1}}.$$

Stąd

$$0 \geq \mathbb{E} \sum_{k=0}^{m} \left(X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} \right) \geq (b-a) \mathbb{E}\, U_a^b([m]) - \mathbb{E}\,(X_m - a)^-$$

Czyli

$$0 \geq (b-a) \mathbb{E}\, U_a^b([m]) - \mathbb{E}\,(X_m - a)^- ,$$

co daje żądane oszacowanie. $\square$

Możemy teraz sformułować i dowieść podstawowy wynik o zbieżności nadmartyngałów.

Twierdzenie 4.10 ***(Dooba o zbieżności nadmartyngałów)*** *Jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nadmartyngałem takim, że*

$$\sup_n \mathbb{E}\, X_n^- < \infty,$$

to proces (X_n) zbiega $\mathbb{P}$-p.n. gdy $n \to \infty$ do zmiennej losowej całkowalnej.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia z poprzedniego lematu. Oczywiście gdy $m \to \infty$, to

$$U_a^b([m]) \uparrow U_a^b,$$

gdzie U_a^b oznacza liczbę przejść przez $[a,b]$ ciągu nieskończonego (X_n). Z Lematu 4.2,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, U_a^b([m]) &\leq \frac{\mathbb{E}\,(X_m - a)^-}{b-a} \\
&\leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E} \frac{|X_m - a| - X_m + a}{2} \\
&\leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E} \left(\frac{|X_m| - X_m}{2} + \frac{|a| + a}{2} \right) \\
&\leq \frac{1}{b-a} \left(\sup_n \mathbb{E}\, X_m^- + a^+ \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbb{E}\, U_a^b < \infty, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Q} \colon a < b.$$

Stąd i z Lematu 4.1, ciąg (X_n) zbiega $\mathbb{P}$-p.n. do być może granicy nieskończonej. Pozostaje więc do wykazania skończoność granicy. Mamy

$$|X_n| = X_n^+ + X_n^- = X_n + 2X_n^- .$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|X_n| &= \mathbb{E}\, X_n - 2\mathbb{E}\, X_n^- \\
&\leq \mathbb{E} X_1 + 2 \sup_n \mathbb{E}\, X_n^- < \infty.
\end{aligned}$$

Teraz z lematu Fatou (patrz Lemat 1.5) zachodzi

$$\mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} |X_n| < \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|X_n| < \infty,$$

co dowodzi, że granica procesu (X_n) istnieje i jest zmienną całkowalną. $\square$

Wniosek 4.2 *Każdy nieujemny nadmartyngał jest zbieżny.*

Uwaga 4.4 Jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nadmartyngałem, to

$$\sup_n \mathbb{E}\,X_n^- < \infty \Longleftrightarrow \sup_n \mathbb{E}\,|X_n| < \infty.$$

Istotnie

$$|X_n| = X_n + 2X_n^-.$$

Stąd

$$\mathbb{E}\,|X_n| \le \mathbb{E}\,X_1 + 2\mathbb{E}\,X_n^-.$$

Implikacja w przeciwną strone wynika z trywialnego oszacowania $X_n^- \le |X_n|$.

Wniosek 4.3 *Jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest podmartyngałem to ponieważ $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nadmartyngałem, więc (X_n) zbiega $\mathbb{P}$-p.n. gdy*

$$\sup_n \mathbb{E}\,X_n^+ < \infty,$$

na co wystarczy, ale nie jest równoważne, by

$$\sup_n \mathbb{E}\,|X_n| < \infty.$$

4.6.1 Mocne prawo wielkich liczb

Jako wniosek z Twierdzenia 4.10 wyprowadzimy klasyczne mocne prawo wielkich liczb.

Twierdzenie 4.11 *Jeżeli (ξ_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średnich 0 i takich, że*

$$\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < \infty,$$

to szereg $\xi_1 + \xi_2 + \ldots$ zbiega $\mathbb{P}$-p.n. do zmiennej losowej całkowalnej.

Dowód. Proces

$$X_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg (ξ_k). Stąd (patrz Wniosek 4.1), $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ jest podmartyngałem. Ponieważ

$$\sup_n \mathbb{E}\,X_n^2 = \sup_n \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\,\xi_k^2 < \infty,$$

Twierdzenie 4.11 zapewnia zbieżność. $\square$

4.7 Zbieżność martyngałów w L^p

Lemat 4.3 *Jeżeli X jest całkowalną zmienną losową na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ a $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ rodziną pod-σ-ciał $\mathfrak{F}$, to rodzina*

$$\mathbb{E}\left(X|\mathfrak{F}_\alpha\right), \ \alpha \in I,$$

jest jednakowo całkowalna.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_\alpha)|\geq x\}} |\mathbb{E}\left(X|\mathfrak{F}_\alpha\right)| \, \mathrm{d}\mathbb{P} &\leq \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_\alpha)|\geq x\}} \mathbb{E}\left(|X||\mathfrak{F}_\alpha\right) \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_\alpha)|\geq x\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P},\end{aligned}$$

bo $\{|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_\alpha)| \geq x\} \in \mathfrak{F}_\alpha$. Wiadomo, że całka jest "ciągła", to znaczy jeżeli ξ zmienną losowa całkowalna, to

$$\lim_{\mathbb{P}(A)\to 0} \int_A |\xi| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0,$$

patrz Twierdzenie 1.22(g). Wystarczy więc pokazać, że

$$\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, \eta > 0 \colon \forall\, \alpha \in I, \qquad \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}\left(X|\mathfrak{F}_\alpha\right)| \geq \eta\right) \leq \varepsilon.$$

Jest to jednak wniosek z nierówności Czebyszewa, bo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}\left(X|\mathfrak{F}_\alpha\right)| \geq \eta\right) &\leq \frac{1}{\eta}\, \mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left(X|\mathfrak{F}_\alpha\right)\right| \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\,|X|}{\eta}. \qquad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 4.12 *Jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $p > 1$, to następujące warunki są równoważne:*

(i) ciąg $\left(\mathbb{E}\,|X_n|^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
(ii) ciąg $\left(|X_n|^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednakowo całkowalny,
(iii) istnieje zmienna losowa $Z \in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ taka, że

$$X_n = \mathbb{E}\left(Z|\mathfrak{F}_n\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto, jeżeli któryś warunek zachodzi to (X_n) zbiega $\mathbb{P}$-p.n. i w L^p do zmiennej losowej X_∞ oraz

$$X_n = \mathbb{E}\left(X_\infty|\mathfrak{F}_n\right), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dowód. Załóżmy (i). Z nierówności Dooba (Twierdzenie 4.9) mamy

$$\mathbb{E}\left|\sup_n X_n\right|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n \mathbb{E}\,|X_n|^p < \infty.$$

Stad wynika jednakowa całkowalność ciągu $(|X_n|^p)$. Istotnie, warunek

$$\sup_n \mathbb{E}\,|X_n|^p < \infty$$

wynika, z założenia. Mamy teraz pokazać, że

$$\lim_{\mathbb{P}(A)\to 0} \sup_n \int_A |X_n|^p \mathrm{d}\mathbb{P} = 0. \tag{4.7}$$

Oczywiście

$$\sup_n \int_A |X_n|^p \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_A \sup_n |X_n|^p \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{F}.$$

Ponieważ

$$Y := \sup_n |X_n|^p \tag{4.8}$$

jest całkowalna, więc (4.7) wynika z ciągłości całki (patrz Twierdzenie 1.22(g)). Tak więc $(i) \Longrightarrow (ii)$. Oczywiście $(ii) \Longrightarrow (i)$, a więc (i) jest równoważne (ii).

Implikacja $(iii) \Longrightarrow (ii)$ wynika z Lematu 4.3. Pozostaje więc pokazanie, że $(ii) \Longrightarrow (iii)$. W tym celu załóżmy (i). Zauważmy, że ponieważ

$$\sup_n \mathbb{E}|X_n| \leq \left(\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

więc z twierdzenia Dooba o zbieżności nadmartyngałów ciąg X_n zbiega $\mathbb{P}$-p.n. do zmiennej losowej X_∞ całkowalnej. Następnie z Wniosku 4.1 wynika, że $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ jest podmartyngałem. Stąd $(-|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nadmartyngałem. Ponieważ zachodzi (ii) z twierdzenia Dooba o zbieżności nadmartyngałów (Twierdzenie 4.1) wynika, że $(|X_n|^p)$ zbiega $\mathbb{P}$-p.n. do zmiennej losowej całkowalnej. Stąd (X_n) zbiega do zmiennej losowej $X_\infty \in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Ponieważ Y dane wzorem (4.8) jest całkowalne, więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dla warunkowej wartości oczekiwanej (patrz Twierdzenie 2.6) wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(X_m|\mathfrak{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_\infty|\mathfrak{F}_n\right). \qquad \square$$

Ponieważ

$$\mathbb{E} \sup_n X_n^p < +\infty$$

oraz $X_n \to X_\infty$, $\mathbb{P}$-p.n. więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej X_n zbiega do X_∞ w L^p.

W pozostałej części tego rozdziału, zakładamy, że czas jest dyskretny odwrócony, to znaczy $T = \mathbb{Z}_- := -\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$. Oczywiście definicje filtracji, martyngału i nadmartyngału są takie same jak w przypadku $T = \mathbb{N}$, tak więc rodzina pod-σ-ciał $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ jest filtracją gdy

$$\mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{F}_m, \qquad \forall, n, m \in \mathbb{Z}_- : n \leq m.$$

Rodzina całkowalnych zmiennych losowych $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ jest martyngałem, odp. nadmartyngałem, względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ gdy jest adaptowana (to, jest X_n jest $\mathfrak{F}_n$-mierzalna) oraz

$$\mathbb{E}\left(X_m|\mathfrak{F}_n\right) = X_n, \qquad \mathbb{P} - p.n.\ \ \forall\, n, m \in \mathbb{Z}_-,$$

odp.

$$\mathbb{E}\left(X_m|\mathfrak{F}_n\right) \leq X_n, \qquad \mathbb{P} - p.n.\ \ \forall\, n, m \in \mathbb{Z}_-.$$

Twierdzenie 4.13 *Jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ jest nadmartyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ takim, że*

$$\sup_n \mathbb{E}\,|X_n| < \infty,$$

to X_{-n} zbiega gdy $n \to \infty$, $\mathbb{P}$-p.n. i w L^1 do zmiennej losowej $X_{-\infty}$. Jeżeli ponadto (X_n) jest martyngałem, to

$$X_{-\infty} = \mathbb{E}\left(X_{-1}|\mathfrak{F}_{-\infty}\right),$$

gdzie

$$\mathfrak{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_-} \mathfrak{F}_n.$$

Dowód. Dla $a < b$ niech $U_a^b([m])$ oznacza liczbę przejść z dołu w górę przez odcinek $[a, b]$ ciągu

$$X_{-m}, X_{-m+1}, \ldots, X_{-1}.$$

Oczywiście $U_a^b([m]) \uparrow U_a^b$ gdy $m \to \infty$, gdzie U_a^b jest liczbą przejść przez $[a, b]$ procesu $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$. Z dowodu Twierdzenia 4.10,

$$\mathbb{E}\,U_a^b(m) \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left(X_{-1} - a\right)^-,$$

bo X_{-1} jest ostatnim wyrazem ciągu $X_{-m}, \ldots, X_{-1}$. Stąd i z założenia twierdzenia mamy

$$\mathbb{E}\,U_a^b \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left(X_{-1} - a\right)^-,$$

czyli ciąg (X_{-n}) zbiega (do być może niewłaściwej granicy) $X_{-\infty}$. Z lematu Fatou, mamy jednak

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\liminf_{m\to\infty} |X_{-m}| &\leq \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}\,|X_{-m}| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_-} \mathbb{E}\,|X_n| < \infty,\end{aligned}$$

czyli $\mathbb{E}|X_{-\infty}| < \infty$. Mamy więc zbieżność do $\mathbb{P}$-p.n. do całkowalnej zmiennej losowej $X_{-\infty}$. Zbieżność w L^1 otrzymamy gdy pokażemy jednakową całkowalność rodziny $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$. Jeżeli X jest martyngałem, to jednakowa całkowalność wynika z Lematu 4.2, bo $X_n = \mathbb{E}(X_{-1}|\mathfrak{F}_n)$, $n \in \mathbb{Z}_-$.

Pokażemy, że

$$X_{-\infty} = \mathbb{E}(X_{-1}|\mathfrak{F}_{-\infty}). \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

W tym celu zauważmy, że ponieważ $X_n = \mathbb{E}(X_{-1}|\mathfrak{F}_n)$ więc

$$\mathbb{E}(X_n|\mathfrak{F}_{-\infty}) = \mathbb{E}(X_{-1}|\mathfrak{F}_{-\infty}).$$

Wiemy, że $X_n \to X_{-\infty}$ w L^1. Stąd

$$\mathbb{E}(X_n|\mathfrak{F}_{-\infty}) \to \mathbb{E}(X_{-\infty}|\mathfrak{F}_{-\infty}), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

bo

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|\mathbb{E}(X_n|\mathfrak{F}_{-\infty}) - \mathbb{E}(X_{-\infty}|\mathfrak{F}_{-\infty})| \\ &\leq \mathbb{E}|X_n - X_{-\infty}| \to 0.\end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbb{E}(X_{-1}|\mathfrak{F}_{-\infty}) = \mathbb{E}(X_{-\infty}|\mathfrak{F}_{-\infty}), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Pozostaje do rozstrzygnięcia, czy $X_{-\infty}$ jest $\mathfrak{F}_{-\infty}$ mierzalne? Ale $X_{-\infty}$ jest $\mathfrak{F}_n$-mierzalne dla dowolnego n, a więc jest

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_-} \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_{-\infty}$$

mierzalne. $\square$

Wniosek 4.4 *Niech $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zstępującą rodziną pod-σ-ciał $\mathfrak{F}$. Wówczas dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X zachodzi*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_n) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{G}), \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

gdzie zbieżność jest $\mathbb{P}$-p.n. i w L^1 a

$$\mathcal{G} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n.$$

4.7.1 Prawo 0-1 Kołmogorowa

Wyprowadzimy jeszcze jeden klasyczny rezultat. Niech (ξ_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\mathfrak{F}_{n,m} := \sigma(\xi_n, \ldots, \xi_m), \quad \mathfrak{F}_{n,\infty} := \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots), \quad \mathfrak{F}_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{n,\infty}$$

Twierdzenie 4.14 ***(Prawo** $0-1$ **Kołmogorowa)*** *Jeżeli $A\in\mathfrak{F}_\infty$, to albo $\mathbb{P}(A)=1$ lub $\mathbb{P}(A)=0$.*

Dowód. Niech $A\in\mathfrak{F}_\infty$. Zmienna losowa χ_A jest $\mathfrak{F}_\infty$-mierzalna, a więc niezależna od $\mathfrak{F}_{n,m}$ dla dowolnych $n\le m$. Stąd

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{E}\,\chi_A=\mathbb{E}\,(\chi_A|\mathfrak{F}_{n,m})\to\mathbb{E}\,(\chi_A|\mathfrak{F}_\infty)=\chi_A.$$

Stąd $\mathbb{P}(A)=\chi_A$. □

4.7.2 Mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa

Na koniec jeszcze jedno mocne prawo wielkich liczb.

Twierdzenie 4.15 ***(Mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa)*** *Jeżeli (ξ_k) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o skończonej wartości oczekiwanej, to*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\mathbb{E}\,\xi_1.$$

gdzie granica jest w L^1 i $\mathbb{P}$-p.n.

Dowód. Niech

$$X_n:=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Niech

$$\mathcal{G}_n:=\sigma(X_n,X_{n+1},\ldots),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Oczywiście rodzina $\mathcal{G}_n$, $n\in\mathbb{N}$, jest zstępująca. Niech

$$\mathcal{G}:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_n.$$

Wówczas, patrz Zadanie 2.24,

$$\mathbb{E}\,(\xi_1|\mathcal{G}_n)=\mathbb{E}\,(\xi_1|X_n)=\frac{X_n}{n}.$$

Z drugiej strony

$$\mathbb{E}\,(\xi_1|\mathcal{G}_n)\to\mathbb{E}\,(\xi_1|\mathcal{G}).$$

Z prawa $0-1$ Kołmogorowa $\mathbb{E}\,(\xi_1|\mathcal{G}_\infty)$ jest stałe. Ponieważ

$$\mathbb{E}\,\mathbb{E}\,(\xi_1|\mathcal{G}_\infty)=\mathbb{E}\,\xi_1,$$

więc

$$\frac{X_n}{n}\to\mathbb{E}\,\xi_1.\qquad\square$$

4.7.3 Nierówność Hardy'ego–Littlewooda

W tym rozdziale (ξ_k) jest ciągiem Bernoulliego, to znaczy ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie

$$\mathbb{P}(\xi_k = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\xi_k = 1), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Zakładamy, że filtracja $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest generowana przez proces (ξ_k). Przyjmujemy, że

$$S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 4.18 Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ niech

$$Z_n^\alpha := \exp\left\{\alpha S_n - \frac{n\alpha^2}{2}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że $(Z_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nadmartyngałem. Czy Z_n^α zbiega gdy $n \to \infty$?

Twierdzenie 4.16 ***(Nierówność Hardy'ego–Littlewooda)*** *Dla ciągu Bernoulliego zachodzi*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n\log n}} \leq 1, \qquad \mathbb{P}-p.n.$$

Dowód. Z Zadania 4.16,

$$Z_n^\alpha = \exp\{\alpha S_n - n\alpha^2/2\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest nadmartyngałem. Niech

$$\begin{aligned}
Z_n &:= \int_{-\infty}^{\infty} Z_n^\alpha \mathrm{d}\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\alpha S_n - n\alpha^2/2\}\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n}\alpha - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{S_n^2}{2n}\right\}\mathrm{d}\alpha \\
&= \exp\left\{\frac{S_n^2}{2n}\right\}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n\alpha^2}{2}}\mathrm{d}\alpha \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\exp\left\{\frac{S_n^2}{2n}\right\}.
\end{aligned}$$

Z tego, że (Z_n^α) są nadmatyngałami wynika łatwo, że $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nadmartyngłem. Ponieważ jest nadmartyngałm nieujemnym, jest zbieżny $\mathbb{P}$-p.n. do całkowalnej zmiennej losowej Z_∞, patrz Wniosek 4.2. Ponieważ każdy ciąg zbieżny (do skończonej granicy) jest ograniczony więc istnieje zmienna losowa (oczywiście nieujemna) C taka, że

$$\sqrt{\frac{1}{n}}\exp\left\{\frac{S_n^2}{2n}\right\} \leq C, \qquad \mathbb{P}-p.n., \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Stąd

$$-\frac{1}{2}\log n + \frac{S_n^2}{2n} \leq \log C, \qquad \mathbb{P}-p.n., \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

a więc

$$\frac{S_n^2}{n\log n} \leq \frac{2\log C}{\log n} + 1, \qquad \mathbb{P}-p.n., \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $\log C = -\infty$ gdy $C = 0$ i $2\log C/(n\log n) \to 0$ gdy $C > 0$, więc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n^2}{n\log n} \leq 1, \qquad \mathbb{P}-p.n.,$$

a więc również

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n\log n}} \leq 1, \qquad \mathbb{P}-p.n. \qquad \Box$$

4.8 Martyngały w czasie ciągłym

Rozdział o martyngałach zakończymy kilkoma ważnymi faktami dotyczącymi martyngałów w czasie ciągłym. Dowody przedstwionych rezultatów można znaleźć w [14, 15, 16, 22].

4.8.1 Twierdzenie Dooba o regularności

Z poniższego rezultatu wynika, że przy bardzo słabych założeniach pod i nadmartyngały mają trajektorie càdlàg.

Twierdzenie 4.17 ***(Dooba)*** *Każdy stochastycznie ciągły podmartyngał (nadmartynał czy martyngał) ma modyfikacje càdlàg.*

4.8.2 Rozkład Dooba–Meyera

Niech $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ będzie prawostronnie ciągłą filtracją. Dla $S \in [0,\infty)$, niech Σ_S oznacza rodzine wszystkich momentów Markowa τ względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ takich, że $\mathbb{P}(\tau \leq S) = 1$.

Definicja 4.5 Prawostronnie ciągły podmartyngał X jest *klasy* (DL) gdy dla każdego $S \in [0,\infty)$ rodzina zmiennych losowych

$$\{X_\tau\} \colon \tau \in \Sigma_S\}$$

jest jednakowo całkowalna.

W ogólnej teorii całki stochastycznej podstawową role odgrywa następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.18 ***(Dooba–Meyera)*** *Każdy podmartyngał X, który jest càdlàg i klasy (DL) można w sposób jedyny zapisać w postaci*

$$X_t = M_t + A_t, \qquad t \geq 0,$$

gdzie M jest martyngałem, a A jest prognozowalnym procesem o rosnących trajektoriach spełniający $A_0 = 0$.

Lemat 4.4 *Niech X będzie martyngłem całkowalnym z kwadratem o trajektoriach càdlàg. Wówczas X^2 jest podmartyngałem klasy (DL).*

Wniosek 4.5 *Niech X będzie martyngłem całkowalnym z kwadratem o trajektoriach càdlàg. Wówczas X^2 można w sposób jedyny zapisać w postaci*

$$X_t^2 = M_t + \langle X, X \rangle_t, \qquad t \geq 0, \tag{4.9}$$

gdzie M jest martyngałem, a $\langle X, X \rangle$ jest prognozowalnym procesem o rosnących trajektoriach spełniający $\langle X, X \rangle_0 = 0$.

Definicja 4.6 Niech X będzie martyngłem całkowalnym z kwadratem o trajektoriach càdlàg. Proces $\langle X, X \rangle$ występujący w równaniu (4.9) nazywamy *wariancją kwadratową* procesu X.

4.9 Zadania uzupełniające

Zadanie 4.19 W urnie znajduje się a kul białych i b czarnych. W kolejnych krokach losujemy ze zwracaniem urnę z kuli i dokładamy do urny jeszcze c kul tego samego koloru, co wylosowana. Niech X_n oznacza liczbę białych kul w urnie po n-tym losowaniu. Wykazać, że $(X_n/(a+b+nc))$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji.

Zadanie 4.20 Niech (X_n) będzie podmartyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)$. Załóżmy, że funkcja $n \to \mathbb{E}\, X_n$ jest stała. Pokazać, że (X_n) jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_n)$.

Zadanie 4.21 W grze bierze udział trzech graczy. Na początku gry każdy gracz ma pewną skończoną liczbę żetonów. W każdej partii gry najpierw losujemy parę graczy, a następnie jednego z graczy z pary, które daje drugiemu jeden żeton. Gra kończy gdy któryś z graczy zostanie bez żetonów. Niech X_n^i oznacza liczbę żetonów i-tego gracza po n partiach, a X_0^i jego początkową liczbę żetonów.

Pokazać, że proces

$$M_n = X_n^1 X_n^2 X_n^3 + \frac{n}{3}\left(X_0^1 + X_0^2 + X_0^3\right), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

jest martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)$, gdzie

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_k^i \colon i = 1, 2, 3,\ k = 0, \ldots, n).$$

Zadanie 4.22 Trzej gracze, posiadający na początku gry odpowiednio X_0^1, X_0^2 i X_0^3 żetonów, grają w następującą grę. W każdej partii gry jeden z nich, wybrany losowo, otrzymuje od graczy będących jeszcze w grze po jednym żetonie. Niech X_n^i, $i = 1, 2, 3$, oznaczają liczby żetonów będące w posiadaniu i-tego gracza po n-tej partii. Rozważmy filtrację $(\mathfrak{F}_n)$, gdzie

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_k^i \colon i = 1, 2, 3,\ k = 0, \ldots, n).$$

Pokazać, że procesy

$$M_n = X_n^1 X_n^2 X_n^3 + n\left(X_0^1 + X_0^2 + X_0^3 - 2\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$V_n = X_n^1 X_n^2 + X_n^2 X_n^3 + X_n^1 X_n^3 - 3n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

są martyngałami, przy założeniu, że gra jest kontynuowana do momentu, gdy jednemu z graczy zabraknie żetonów. Pokaż, że w przypadku, gdy gra jest kontynuowana do momentu, gdy jeden graczy zdobędzie wszystkie żetony, ciąg

$$U_n = V_n - \frac{2M_n}{X_0^1 + X_0^2 + X_0^3 - 2}.$$

jest martyngałem.

Zadanie 4.23 Niech X_1 na rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Zdefiniujmy ciąg (X_n) w następujący sposób: jeżeli $X_{n-1} = a$, to X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, a]$. Pokazać, że (X_n) jest nadmartyngałem względem filtracji generowanej przez (X_n). Policzyć

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, X_n.$$

Zadanie 4.24 Niech $\xi_0, \xi_1, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i zerowych wartościach oczekiwanych. Niech

$$\mathfrak{F}_n := \sigma(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$X_0 = \xi_0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1}\xi_k, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Pokazać, że (X_n) jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_n)$.

4.9.1 Wybrane zadania z [12]

Zadanie 4.25 Niech $\{\xi_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Zakładamy, że

$$\mathbb{E}\, \xi_n^2 < \infty.$$

Niech

$$\mathrm{m} := \mathbb{E}\,\xi_n, \qquad \sigma := \sqrt{\mathbb{E}\,(\xi_n - \mathrm{m})^2}$$

oraz niech

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Niech $(\mathfrak{F}_n)$ będzie filtracją generowaną przez ciąg (ξ_n).

Pokazać, że:

a) Proces $\{S_n - \mathrm{m}n \colon n \in \mathbb{N}\}$ jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_n)$.

b) Proces $\left\{(S_n - \mathrm{m}n)^2 - \sigma^2 n \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_n)$.

c) Dla dowolnego $u \in \mathbb{R}$, proces

$$\exp\left\{uS_n - n \log \mathbb{E}\,\mathrm{e}^{u\xi_1}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_n)$.

d) Jeżeli dla jakiegoś $p \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}\{\xi_n = 1\} = p, \qquad \mathbb{P}\{\xi_n = -1\} = 1 - p,$$

to proces

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_n)$.

W Zadaniach 4.26, 4.27, 4.28, poniżej $\{\xi_n\}$ jest ciągniem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie:

$$\mathbb{P}\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\{\xi_n = -1\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

oraz, dla $n = 0, 1, \ldots$, $x \in \mathbb{Z}$, $\{S_n^x\}$ jest symetrycznym błądzeniem przypadkowym startującym z x;

$$S_n^x := \begin{cases} x & \text{gdy } n = 0, \\ x + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n & \text{gdy } n \geq 1. \end{cases}$$

Zadanie 4.26 Dla $t \geq 0$, niech

$$W_n(t) := \frac{nt - [nt]}{\sqrt{n}} S^0_{[nt]+1} + \frac{[nt] + 1 - nt}{\sqrt{n}} S^0_{[nt]},$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej y. Pokazać, że dla każdego $t \geq 0$, rozkład $W_n(t)$ zbiega słabo do rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji t.

Zadanie 4.27 Niech $\sigma > 0$ oraz niech

$$M_n(t) := \left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}\left([nt]+S^0_{[nt]}\right)}\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}\left([nt]-S^0_{[nt]}\right)}, \quad n\in\mathbb{N},\ t\geq 0.$$

Pokazać, że dla każdego t, rozkłady $M_n(t)$ gdy $n\to+\infty$ zmiarzają do rozkładu zmiennej losowej

$$M(t) = \exp\left\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right\},$$

gdzie W_t ma rozkład $\mathcal{N}(0,t)$.

Zadanie 4.28 Niech $N_1, N_2, x \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $N_1 \leq x \leq N_2$. Niech $\tau = \tau_{N_1}\wedge\tau_{N_2}$, gdzie

$$\tau_N = \inf\left\{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\colon S^x_n = N\right\}.$$

Pokazać, że

a) $\{S^x_n\colon n\geq 0\}$ jest martyngałem ze względu na filtrację $(\mathfrak{F}_n)$ generowaną przez ciąg (ξ_n).
b) τ_{N_1}, τ_{N_2} oraz τ są skończonymi momentami stopu względem $(\mathfrak{F}_n)$.
c) Proces $\{S^x_{\tau\wedge n}\colon n\in\mathbb{N}\}$ jest jednakowo całkowalny.
d) Zachodzi równość

$$\mathbb{P}\left\{\tau_{N_1} < \tau_{N_2}\right\} = \frac{N_2 - x}{N_2 - N_1}.$$

e) Dla $x, m\in\mathbb{Z}$ takich, że $x < m$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leq j\leq n} S^x_j \geq m\right\} = 2\mathbb{P}\left\{S^x_n\geq m\right\} - \mathbb{P}\left\{S^x_n = m\right\}.$$

W Zadaniach 4.29, 4.30, 4.31, poniżej $\{\xi_n\}$ jest ciągniem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_n = 1\right\} = p, \qquad \mathbb{P}\left\{\xi_n = -1\right\} = q := 1-p, \qquad n\in\mathbb{N},$$

gdzie $p\in(0,1)$ oraz, dla $n = 0,1,\ldots$, $x\in\mathbb{Z}$, $\{S^x_n\}$ jest (gdy $p\neq\frac{1}{2}$ niesymetrycznym) błądzeniem przypadkowym startującym z x;

$$S^x_n := \begin{cases} x & \text{gdy } n = 0,\\ x+\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n & \text{gdy } n\geq 1.\end{cases}$$

Zadanie 4.29 Niech $N_1, x, N_2\in\mathbb{Z}$ będą takie, że $N_1\leq x\leq N_2$. Niech

$$\tau^x_{N_1} = \inf\left\{n\geq 0\colon S^x_n = N_1\right\}, \qquad \tau^x_{N_2} = \inf\left\{n\geq 0\colon S^x_n = N_2\right\},$$

$$\psi(x) = \mathbb{P}\left\{\tau^x_{N_2} < \tau^x_{N_1}\right\}.$$

Pokazać, że

a) Dla dowolnego całkowitego $x \in [N_1 + 1, N_2 - 1]$ zachodzi

$$\psi(x) = p\psi(x+1) + q\psi(x-1).$$

b) Jeżeli $p \neq q$, to

$$\psi(x) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x-N_1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{N_2-N_1}}.$$

c) Jeżeli $p = q = \frac{1}{2}$, to

$$\psi(x) = \frac{x - N_1}{N_2 - N_1}.$$

Zadanie 4.30 Pokazać, że dla $x, y \in \mathbb{Z}$ takich, że $y \geq x$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{n\geq 0} S_n^x > y\right\} \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^{y-x}.$$

Zadanie 4.31 Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{E} \sup_{n\geq 0} X_n^x \leq x + \frac{1-p}{1-2p}.$$

5

Procesy Markowa w czasie dyskretnym

Rozważymy przypadek czasu dyskretnego i skończonej lub przeliczalnej przestrzeni stanów. Przypadek czasu ciągłego z przestrzenią stanów $\mathbb{R}$ rozważany będzie w osobnym rozdziale.

Rozważamy więc proces stochastyczny $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z czasem dyskretnym. Zakładamy, że zmienne losowe X_n, $n \in \mathbb{N}$, przyjmują wartości w zbiorze przeliczalnym E, na którym rozważamy σ-ciało wszystkich podzbiorów E. Zbiór E nazywamy *przestrzenią stanów* procesu X.

Intuicyjnie proces X jest Markowa gdy nasze przewidywania co do jego przyszłości na podstawie teraźniejszości i przeszłości zależą tylko od teraźniejszości. Procesy o tej własności zostały nazwane na cześć rosyjskiego matematyka Andrieja Markow (1856 –1922). W roku 1913 Markow analizował poemat Eugeniusz Oniegin Puszkina. Zdefiniował $X_n = 1$ gdy w poemacie n-ta litera jest samogłoską i $X_n = 0$ w przeciwnym przypadku. Tak więc przestrzeną stanów dla (X_n) jest $E = \{0, 1\}$. Interesowało go występowanie następstw samogłoska-spółgłoska i odwrotnie oraz częstotliwości występowania samogłosek i spółgłosek. Policzył, że empiryczne prawdopodobieństwa przejścia ze stanów

$$0 \to 0, \quad 0 \to 1, \quad 1 \to 1 \quad 1 \to 0$$

wynoszą odpowiednio

$$0,128, \quad 0,872, \quad 0,337, \quad 0,663.$$

Policzył również, że w utworze występuje średnio 43.2% samogłosek i 56,8% spółgłosek.

W tym rozdziale $\mathbb{N} = 0, 1, \ldots$, E jest ustalonym przeliczalnym zbiorem, a $X = (X_n)$ procesem o wartościach w E określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

5.1 Formalna definicja

Definicja 5.1 Proces X jest *łańcuchem Markowa* (*na przestrzeni stanów* E) gdy dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $j_0, \ldots, j_n \in E$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(X_n = j_n | X_0 = j_0, \ldots, X_{n-1} = j_{n-1}\right) = \mathbb{P}\left(X_n = j_n | X_{n-1} = j_{n-1}\right).$$

Przykład 5.1 Ciąg niezależnych zmiennych losowych o wartościach w E jest łańcuchem Markowa.

Przykład 5.2 Niech (ξ_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie

$$\mathbb{P}\left(\xi_n = -1\right) = q, \qquad \mathbb{P}\left(\xi_n = 1\right) = p = 1 - q,$$

gdzie $p \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą. Wówczas proces błądzenia przypadkowego

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \mathbb{Z}$.

Definicja 5.2 Macierz (być może nieskończenie wymiarowa) $P = (p_{i,j})_{i,j \in E}$ nazywamy *macierzą przejścia* na E gdy:

- dla dowolnych $i, j \in E$, $p_{i,j} \geq 0$,
- dla każdego $i \in E$,
$$\sum_{j \in E} p_{i,j} = 1.$$

Definicja 5.3 Macierzą przejścia łańcucha X od czasu n do $m > n$ nazywamy (być może nieskończenie wymiarową) macierz

$$P(n,m) = (p_{i,j}(n,m))_{i,j \in E},$$

gdzie

$$p_{i,j}(n,m) = \mathbb{P}\left(X_m = j | X_n = i\right).$$

Oczywiście macierz przejścia łańcucha Markowa jest macierzą przejścia (w sensie Definicji 5.2)

Definicja 5.4 Łańcuch Markowa X jest jednorodny w czasie gdy jego macierze przejścia $P(n,m)$ zależą tylko od $m-n$. Czyli istnieją macierze $P(k) = (p_{i,j}(k))$, $k = 1, 2, \ldots$ takie, że

$$P(k) = P(n, n+k), \qquad \forall\, n = 0, 1, \ldots, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Macierz $P(k)$ nazywamy *macierzą przejścia* łańcucha X w k-krokach, a macierz $P = P(1)$ macierzą przejścia łańcucha X.

Definicja 5.5 Jeżeli (X_n) jest łańcuchem Markowa, to rozkład zmiennej losowej X_0 nazywamy *rozkładem początkowym*.

Od tej pory będziemy się zajmowali tylko łańcuchami jednorodnymi.

Twierdzenie 5.1 *Dla dowlnego rozkładu μ i macierzy przejścia P istnieje jednorodny łańcuch Markowa o macierzy przejścia P i rozkładzie początkowym μ.*

Twierdzenie 5.2 *Niech $X = (X_n)$ będzie (jednorodnym) łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów E. Wówczas:*

(i) dla dowolnych czasów $n, m \in \mathbb{N}$, oraz elementów $J_0, J_1, \ldots J_n$ przestrzeni stananów E zachodzi

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(X_1 = J_1, \ldots, X_n = J_n | X_0 = J_0\right)\\ &\quad= \mathbb{P}\left(X_{m+1} = J_1, \ldots, X_{m+n} = J_n | X_m = J_0\right),\end{aligned}$$

(ii) dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $J_0, \ldots, J_m, I_1, \ldots, I_n \in E$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(X_1 = J_1, \ldots, X_m = J_m, X_{m+1} = I_1, \ldots, X_{m+n} = I_n | X_0 = J_0\right)\\ &\quad= \mathbb{P}\left(X_1 = J_1, \ldots, X_m = J_m | X_0 = J_0\right) \mathbb{P}\left(X_1 = I_1, \ldots, X_n = I_n | X_0 = J_m\right).\end{aligned}$$

(iii) dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $A \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$,

$$\mathbb{P}\left(A | X_0, \ldots, X_n\right) = \mathbb{P}\left(A | X_n\right).$$

5.2 Równania Chapmanna–Kołmogorowa

Niech (X_n) będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą przejścia P. Przypomnijmy, że, z jednorodności,

$$p_{i,j}(n) := \mathbb{P}\left(X_{l+n} = j | X_l = i\right)$$

nie zależy od l. Oczywiście

$$P(n) = \left(p_{i,j}(n)\right)_{i,j \in E}$$

jest macierzą przejścia w n-krokach łańcucha X.

Twierdzenie 5.3 *(i) Dla dowolnego n, $P(n) = P^n$. (ii) Dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$, oraz $i, j \in E$,*

$$p_{i,j}(k + l) = \sum_{u \in E} p_{i,u}(k) p_{u,j}(l).$$

5.3 Stany powracające

Niech $F_{k,j}$ oznacza prawdopodobieństwo, że łańcuch Markowa wychodzący ze stanu k dotrze kiedykolwiek do stanu j. Oczywiście

$$F_{k,j} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = j\} | X_0 = k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k,j}(n),$$

gdzie

$$f_{k,j}(n) := \mathbb{P}\left(X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = k\right)$$

jest prawdopodobieństwem, że pierwsze dojście do stanu j nastąpiło w chwili n.

Definicja 5.6 Stan j jest *powracający* gdy $F_{j,j} = 1$, a *chwilowy* gdy $F_{j,j} < 1$.

Niech

$$P_j := \sum_{n=1}^{\infty} p_{j,j}(n).$$

Twierdzenie 5.4 ***(Doeblina)*** *Stan j jest powracający wtedy i tylko wtedy gdy $P_j = \infty$, a chwilowy wtedy i tylko wtedy gdy $P_j < \infty$. Dla stanu niepowracającego j mamy*

$$F_{j,j} = \frac{P_j}{1 + P_j}.$$

Dowód. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$\begin{aligned} &P_{j,j}(n) := \mathbb{P}\left(X_n = j | X_0 = j\right) \\ &\quad = f_{j,j}(1)P_{j,j}(n-1) + f_{j,j}(2)P_{j,j}(n-2) + \ldots + f_{j,j}(n-1)P_{j,j}(1) + f_{j,j}(n). \end{aligned}$$

Wyprowadzimy wzory na funkcje tworzące

$$\mathcal{P}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{j,j}(n) z^n,$$
$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j,j}(n) z^n,$$

określonych dla $z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1$. Mamy $P_{u,u}(0) = 1$. Stąd

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{j,j}(n) z^n = 1 + \mathcal{P}(z).$$

Następnie

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{j,j}(n) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{j,j}(k) z^k P_{j,j}(n-k) z^{n-k} \\
&= (1+\mathcal{P}(z)) \sum_{k=1}^{\infty} z^k f_{j,j}(k) \\
&= (1+\mathcal{P}(z))\, \mathcal{F}(z).
\end{aligned}
$$

Czyli

$$
\mathcal{F}(z) = \frac{\mathcal{P}(z)}{1+\mathcal{P}(z)}, \qquad \mathcal{P}(z) = \frac{\mathcal{F}(z)}{1-\mathcal{F}(z)}, \qquad z \in \mathcal{C} \colon |z| < 1.
$$

Skorzystamy teraz z następującego klasycznego lematu Abela.

Lemat 5.1 ***(Abela)*** *Niech* (a_k) *będzie ciągiem liczb nieujemnych spełniającym*

$$
\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} \leq 1.
$$

Wówczas

$$
\lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k
$$

niezależnie od tego czy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny czy nie.*

Powracamy do dowodu twierdzenia Doeblina. Jeżeli $P_{j,j} = \infty$, to z lematu Abela

$$
\lim_{x\to 1} \mathcal{P}(x) = P_{j,j} = \infty.
$$

A więc

$$
\lim_{x\to 1} \mathcal{F}(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\mathcal{P}(x)}{1+\mathcal{P}(x)} = 1 = F_{j,j}.
$$

Jeżeli $F_{j,j} = 1$, to

$$
1 = F_{j,j} = \lim_{x\to 1} \mathcal{F}(x).
$$

Stąd

$$
\lim_{x\to 1} \mathcal{P}(x) = P_{j,j} = \lim_{x\to 1} \frac{\mathcal{F}(x)}{1-\mathcal{F}(x)} = \infty.
$$

Jeżeli $P_{j,j} < \infty$, to

$$
F_{j,j} = \lim_{x\to 1} \mathcal{F}(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\mathcal{P}(x)}{1+\mathcal{P}(x)} = \frac{P_{j,j}}{1+P_{j,j}}. \qquad \square
$$

Zauważmy, że liczba powrotów procesu X do stanu j wynosi

$$N_j := \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{j\}}(X_n).$$

Stąd

$$\mathbb{E}\, N_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\, \chi_{\{j\}}(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{j,j}(n) = P_{j,j}.$$

Czyli mamy następujący fakt.

Twierdzenie 5.5 *$P_{j,j}$ jest oczekiwaną liczbą powrotów do stanu j. Stan $j \in E$ jest powracający wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\mathbb{P}\,(N_j = \infty | X_0 = j) = 1,$$

a chwilowy wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathbb{P}\,(N_j < \infty | X_0 = j) = 1.$$

5.3.1 Błądzenie przypadkowe

Na $E = \mathbb{Z}^d$ rozważmy błądzenie przypadkowe. Dokładnie (X^j_n), $j = 1, \ldots, d$ niech będą niezależnymi błądzeniami na $\mathbb{Z}$, każde z tym samym prawdopodobieństwem p przejścia w prawo i $q = 1 - p$ przejścia w lewo.

Czy $0 \in \mathbb{Z}^d$ jest stanem powracającym? Oczywiście do zera możemy powrócić po parzystej liczbie kroków. Dokładnie

$$P_{0,0}(2n) = \left[\binom{2n}{n} p^n q^n \right]^d$$

oraz $P_{0,0}(2n+1) = 0$. Z formuły Strilinga

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n+\theta_n/12n},$$

dla pewnego $\theta_n \in (0,1)$. Stąd

$$P_{0,0}(2n) \approx \left[\frac{1}{\sqrt{n\pi}} (4pq)^n \right]^d = \frac{1}{(n\pi)^{d/2}} (4pg)^{nd}.$$

Czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}(n) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^{nd}}{n^{d/2}} < +\infty.$$

Jeżeli $p \neq 1/2$, to $4pq > 1$, a więc dla dowolnego d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^{nd}}{n^{d/2}} = +\infty.$$

Jeżeli $p = q = 1/2$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^{nd}}{n^{d/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{d/2}}.$$

Tak więc mamy następujący rezultat.

Twierdzenie 5.6 *Jeżeli $p \neq 1/2$, to 0 nie jest stanem powracającym. Jeżeli $p = 1/2$, to 0 jest stanem powracającym wtedy i tylko wtedy gdy $d = 1, 2$.*

5.4 Klasyfikacja stanów

Definicja 5.7 Łańcuch X jest *nieprzewiedlny* gdy wszystkie jego stany wzajemnie się komunikują, to znaczy gdy

$$\forall\, i, j \in E \,\exists\, n\colon \qquad \mathbb{P}\left(X_n = i | X_0 = j\right) > 0.$$

Definicja 5.8 Stan $j \in E$ jest okresowy, gdy istnieje $d > 1$ takie, że jeżeli dla jakiegoś n,

$$\mathbb{P}\left(X_n = j | X_0 = j\right) > 0,$$

to d dzieli n.

Definicja 5.9 Jeżeli stan j jest okresowy, to liczbę $O(j)$ zdefiniowaną jako największy wspólny dzielnik tych n dla, których $P_{j,j}(n) \neq 0$ nazywamy *okresem stanu j*.

Twierdzenie 5.7 *Jeżeli łańcuch X jest nieprzewiedlny, to wszystkie jego stany są tego samego typu. W szczególności wszystkie elementu mają ten sam okres.*

5.5 Rozkłady stacjonarne i twierdzenie ergodyczne

Definicja 5.10 Rozkład μ jest *stacjonarny* dla łancucha Markowa X o macierzy przejścia P wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mu P = \mu.$$

Twierdzenie 5.8 *Jeżeli X_0 ma rozkład stacjonarny μ, to dla każdego n, X_n ma rozkład μ.*

Twierdzenie 5.9 ***(Ergodyczne)*** *Niech X będzie nieprzewiedlnym, nieokresowym łańcuchem Markowa na skończonej przestrzeni stanów E dla którego istnieje rozkład stacjonarny μ. Wtedy*

(i) *(X_n) jest łańcuchem powracającym.*

(ii) Dla dowolnych stanów $i, j \in E$.

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}(n) = \mu_j.$$

Ponadto istnieją $c > 0$ oraz $h \in (0,1)$ takie, że

$$|P_{i,j}(n) - \mu_j| \leq ch^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Dla dowolnego stanu $j \in E$,

$$\mu_j = \frac{1}{T_j},$$

gdzie T_j jest oczekiwanym czasem powrotu do stanu j.

5.6 Funkcje harmoniczne

Niech (X_n) będzie łańcuchem Markowa na skończonej przestrzeni stanów E z macierzą przejścia P. Niech $Z_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ i niech $f \colon \mathbb{Z}_+ \times E \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą

$$f(n,x) = \sum_{y\in E} p_{x,y} f(n+1,y), \qquad n \in Z_+,\ x \in E.$$

Twierdzenie 5.10 *Proces $M_n = f(n, X_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, jest martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n^X)$ generowanej przez proces X.*

Dowód. Oczywiście (M_n) jest adaptowany i całkowalny bo zbiór wartości każdego M_n jest skończony. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_{n+1} - M_n | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\right) &= \mathbb{E}\left(f(n+1, X_{n+1}) - f(n, x_n) | X_n = x_n\right) \\
&= \sum_{y\in E} p_{x_n,y} f(n+1,y) - f(n,x_n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

6

Proces Wienera

Rozdział poświęcony jest "najważniejszemu" procesowi stochastycznemu w czasie ciągłym.

6.1 Definicja i podstawowe własności

Definicja 6.1 *Standardowym procesem Wienera* nazywamy proces stochastyczny $W = (W_t)_{t \geq 0}$ w czasie ciągłym spełniający warunki:

- $W_0 = 0$,
- W ma ciągłe trajektorie,
- W ma przyrosty niezależne, to znaczy dla dowolnych $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < \infty$ zmienne losowe

$$W_{t_1},\ W_{t_2} - W_{t_1},\ \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  są niezależne,
- dla dowolnych $t, u \geq 0$, $W_{t+u} - W_t$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, u)$.

Lemat 6.1 *Jeżeli W jest procesem Wienera, to*

$$\mathbb{E}\, W_t = 0, \quad \forall\, t \geq 0,$$

$$\operatorname{cov}(W_t, W_s) := \mathbb{E}\,(W_t - \mathbb{E}\, W_t)\,(W_s - \mathbb{E}\, W_s) = \mathbb{E}\, W_t W_s = t \wedge s, \quad \forall\, t, s \geq 0.$$

Dowód. Ponieważ $W_t = W_t - W_0$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, t)$, mamy $\mathbb{E}\, W_t = 0$. Następnie niech $t \geq s$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, W_t W_s &= \mathbb{E}\,(W_t - W_s + W_s)\, W_s \\
&= \mathbb{E}\,(W_t - W_s)\,(W_s - W_0) + \mathbb{E}\,(W_s - W_0)^2 \\
&= \mathbb{E}\,(W_s - W_0)^2 \\
&= s. \qquad \Box
\end{aligned}$$

Zadanie 6.1 Pokazać, że proces Wienera jest *gaussowski*, to znaczy dla dowolnych $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, wektor losowy

$$(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$$

jest gaussowski.

Zadanie 6.2 Niech W będzie standardowym procesem Wienera. Obliczyć:

(a) $\mathbb{E}W_1W_2W_3$.
(b) $\mathbb{P}(0 < W_1 < W_2 < \ldots < W_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 6.3 Niech W będzie (standardowym) procesem Wienera. Niech $(\mathcal{F}_t^W)$ będzie filtracją generowaną przez W. Dla jakich wartości parametru $\beta \in \mathbb{R}$ process

$$2W_t^3 + \beta t W_t, \qquad t \geq 0,$$

jest martyngałem.

Lemat 6.2 *Jeżeli $W = (W_t)_{t\geq 0}$ jest gaussowskim procesem spełniającym warunki:*

- $W_0 = 0$*,*
- W *ma ciągłe trajektorie,*
- $\mathbb{E}\,W(t) = 0$ *dla każdego* $t \geq 0$*,*
- *dla dowolnych* $t, s \geq 0$*,*

$$\mathrm{cov}\,(W_t, W_s) = t \wedge s,$$

to W jest standardowym procesem Wienera.

Dowód. Należy pokazać, że dla dowolnych $t, u \geq 0$, $W_{t+u} - W_t$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, u)$, oraz, że W ma przyrosty niezależne. Ale wszystko to wynika z gausowskowości i postaci kowariancji. $\square$

Zadanie 6.4 Niech $W = (W_t)$ będzie procesem Wienera. Pokazać, że

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{W_t}{t} = 0, \qquad \mathbb{P} - \text{p.n.}$$

Zadanie 6.5 Niech $W = (W_t)$ będzie procesem Wienera oraz niech $M_1, M_2 > 0$. Policzyć

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(-M_2 t < W_t < M_1 t\right).$$

Zadanie 6.6 Niech $W = (W_t)$ będzie procesem Wienera. Niech $0 < s < t < \infty$. Znaleźć rozkład łączny (i gęstości) wektorów losowych

- $(W_s, W_t - W_s)$,
- (W_s, W_t).

6.2 Istnienie

W tym rozdziale podamy dwa dowody istnienia procesu Wienera: przez twierdzenie Kołmogorowa o rozkładach zgodnych oraz konstrukcje Lévy–Ciesielskiego.

6.2.1 Istnienie przez twierdzenie Kołmogorowa o rozkładach zgodnych

Przyjmijmy, że $T := [0,+\infty)$, $\Omega := \mathbb{R}^T$, $\mathfrak{F} := \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{[0,\infty)}\right)$. Rozważmy skończony podzbiór

$$I = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subset T.$$

Załóżmy, że $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Niech μ_I będzie miarą gaussowską na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ z macierzą kowariancji

$$M_I := [t_i \wedge t_j], \qquad i,j \in I.$$

Zadanie 6.7 Czy tak zadana macierz może być macierzą kowariancji?

Dla $I = \{t_1, \ldots, t_n\}$ i $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ niech

$$C(I,\Gamma) = \{\omega \in \Omega\colon\ (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)) \in \Gamma\}.$$

Niech

$$\mathfrak{F}_I = \{C(I,\Gamma)\colon \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

będzie σ-ciałem zbiorów cylindrycznych odpowiadającym indeksom I. Rozważmy rodzinę prawdopodobieństw $\mathbb{P}_I$ na $(\Omega, \mathfrak{F}_I)$ zadanych wzorem

$$\mathbb{P}_I(C(I,\Gamma)) = \mu_I(\Gamma).$$

Zadanie 6.8 Sprawdzieć, że rodziana miar $\mathbb{P}_I$, I skończony podzbiór T jest zgodna. Uzasadnić, że

$$\mathfrak{F} = \sigma\left(\mathfrak{F}_I\colon I \text{ skończony podzbiór } T\right).$$

Z twierdzenia Kołmogorowa istnieje miara probabilistyczna $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathfrak{F})$ taka, że

$$\mathbb{P}\left(C(I,\Gamma)\right) = \mathbb{P}_I\left(C(I,\Gamma)\right), \qquad \forall\, I = \{t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T},\ \forall\, \Gamma \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Definiujemy

$$W_t(\omega) = \omega_t, \qquad t \ge 0,\ \omega \in \Omega.$$

Zadanie 6.9 Pokazać, że tak zdefiniowany proces na przestrzeni $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ jest gaussowski, startuje z zera, ma kowariancje taką samą jak proces Wienera.

Z Lematu 6.2, W jest procesem Wienera o ile ma ciągłe trajektorie. Wynika to z kryterium Kołmogorowa ciągłości (patrz Zadanie 3.8). Dokładnie mamy istnienie ciągłej modyfikacji. Modyfikacja ta jest naszym procesem.

6.2.2 Konstrukcja Lévy–Ciesielskiego

Niech (β_k) ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ określonych na jakiejś przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F})$. Niech (e_k) będzie bazą ortonormalną przestrzeni

$$L^2 := L^2([0,+\infty), \mathcal{B}([0,+\infty)), \mathrm{d}x).$$

Pokażemy, że dla dowolnego $t \geq 0$ szereg

$$\sum_k \beta_k \int_0^t e_k(x)\mathrm{d}x,$$

zbiega w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Niech W_t oznacza jego granice. Pokażemy następnie, że proces $(W_t)_{t\geq 0}$ jest gaussowski z żądaną kowariancją. Tak więc jego ciągła modyfikacja jest procesem Wienera.

Skorzystamy z tożsamości Parsevala, czyli faktu, że dla dowolnej przestrzeni Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ zachodzi

$$\sum_k \langle u, e_k\rangle_H \langle v, e_k\rangle_H = \langle u, v\rangle_H, \qquad \forall\, u, v \in H,$$

gdzie (e_k) jest dowolną bazą ortonormalną H.

Zbieżność Mamy szereg niezależnych elementów losowych w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Aby udowodnić jego zbieżność wystarczy pokazać, że

$$I := \sum_k \mathbb{E}\left(\beta_k \int_0^t e_k(x)\mathrm{d}x\right)^2 < \infty.$$

Mamy

$$\begin{aligned} I &= \sum_k \mathbb{E}\,\beta_k^2 \left(\int_0^t e_k(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \sum_k \left(\int_0^t e_k(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \sum_k \langle \chi_{[0,t]}, e_k\rangle_{L^2}^2 \\ &= \left\|\chi_{[0,t]}\right\|_{L^2}^2 = t^2. \end{aligned}$$

Ponieważ składniki szeregu są gaussowski jego granica jest gaussowska.

Postać kowariancji Dla $t, s \geq 0$, mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, W_t W_s &= \sum_k \mathbb{E}\,\beta_k^2 \left(\int_0^t e_k(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^s e_k(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_k \langle \chi_{[0,t]}, e_k\rangle_{L^2} \langle \chi_{[0,s]}, e_k\rangle_{L^2} \\ &= \langle \chi_{[0,t]}, \chi_{[0,s]}\rangle_{L^2} = t \wedge s. \end{aligned}$$

Uwaga 6.1 Można znaleźć taką baze, że szereg jest zbieżny $\mathbb{P}$-p.n. jednostajne po t z dowolnego odcinka skończonego!

6.3 Własności trajektorii procesu Wienera

Poniższe twierdzenie podaje najważniejsze własności trajektorii procesu Wienera. Pierwsza część wynika z Zadania 3.8.

Twierdzenie 6.1 *Niech W będzie procesem Wienera. Wówczas:*

- *W ma trajektorie hölderowskie z dowolnym wykładnikiem $\gamma < 1/2$,*
- *zachodzą następujące prawa lokalnego (iterowanego) logarytmu:*

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{0\leq t-s=h\downarrow 0}\frac{|W_t - W_s|}{\sqrt{2h\log 1/h}} = 1\right\} = 1,$$

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{t\to+\infty}\frac{|W_t|}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1\right\} = 1,$$

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{t\downarrow 0}\frac{|W_t|}{\sqrt{2t\log\log 1/t}} = 1\right\} = 1.$$

6.4 Własność martyngałowa

Twierdzenie 6.2 *Proces Wienera W jest martyngałem względem filtracji generowanej przez siebie.*

Dowód. Martyngałowość wynika z niezależności przyrostów i z tego, że średnia W_t wynosi 0 (inaczej z tego, że proces jest *scentrowany*). Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathfrak{F}_t^W\right) &= \mathbb{E}\left(W_{t+h} - W_t|\mathfrak{F}_t^W\right) + W_t\\ &= \mathbb{E}\left(W_{t+h} - W_t\right) + W_t\\ &= W_t. \qquad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 6.3 *Jeżeli W jest procesem Wienera to proces $X = (W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez W.*

Dowód. Oczywiście X jest $(\mathfrak{F}_t^W)_{t\geq 0}$-adaptowany. Jest całkowalny, bo W_t ma rozkład normalny. Mamy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(W_{t+h}^2-(t+h)|\mathfrak{F}_t^W\right) &= \mathbb{E}\Big(\left(W_{t+h}-W_t+W_t\right)^2-(t+h)|\mathfrak{F}_t^W\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\left(W_{t+h}-W_t\right)^2|\mathfrak{F}_t\Big)+2\mathbb{E}\left((W_{t+h}-W_t)W_t|\mathfrak{F}_t^W\right) \\
&\quad + W_t^2-(t+h) \\
&= \mathbb{E}\left(W_{t+h}-W_t\right)^2+2W_t\mathbb{E}\left(W_{t+h}-W_t\right) \\
&\quad + W_t^2-(t+h) \\
&= h+W_t^2-t-h \\
&= W_t^2-t. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Uwaga 6.2 Twierdzenie 6.3 mówi, że wariancja kwadratowa $\langle W, W\rangle$, procesu W wynosi

$$\langle W, W\rangle_t = t, \qquad t\geq 0.$$

Przypomnijmy, że zgodnie z umową filtracja jest prawostronnie ciągła.

Definicja 6.2 Proces W jest *procesem Wienera względem filtracji* $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ jeżeli:

- W ma ciągłe trajektorie, $W_0=0$,
- W jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ całkowalnym z kwadratem,
- proces $(W_t^2-t)_{t\geq 0}$ jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$.

Twierdzenie 6.4 ***(Lévy'ego)*** *Jeżeli W jest procesem Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ w sensie Definicji 6.2, to jest procesem Wienera w sensie Definicji 6.1.*

6.5 Zadania

Zadanie 6.10 Niech W będzie procesem Wienera. Zdefiniujmy

$$X_t := W_t - tW_1, \qquad t\in[0,1].$$

Zauważmy, że $X_0 = X_1$. Proces X nazywamy *mostem Browna*. Policzyć operator kowariancji X.

Zadanie 6.11 Podać przykład procesu o kowariancji równej $K(t,s)=t\wedge s$, który jednak nie jest procesem Wienera.

Zadanie 6.12 Niech W będzie procesem Winera. Wykazać, że procesy otrzymane za pomocą następujących transformacji są procesami Wienera:

(i) $Z_t := -W_t$, $t\geq 0$,
(ii) $X_t := c^{-1/2}W_{ct}$, $t\geq 0$, gdzie c ustalona liczba rzeczywista >0,
(iii)

$$Y_t := \begin{cases} tW_{1/t} & \text{dla } t>0 \\ 0 & \text{dla } t=0, \end{cases}$$

(*iv*) $V_t := W_{t+S} - W_S$, $t \geq 0$, gdzie $S > 0$ ustalone,
(*v*)

$$B_t := \begin{cases} W_t & \text{dla } t < S, \\ 2W_S - W_t & \text{dla } t \geq S, \end{cases}$$

gdzie $S > 0$ ustalone.

Zadanie 6.13 Pokazać, że dla procesu Wienera W zachodzi

$$\mathbb{E}\,|W_h|^{2m} = h^m\,\mathbb{E}\,|W_1|^{2m}, \qquad \forall\, h > 0,\, \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Wywnioskować z twierdzenia Kołmogorowa, że W ma trajektorie hölderowskie z dowolnym wykładnikiem $\gamma < 1/2$.

Zadanie 6.14 Czy proces $\big(W_t \chi_{\{1\}}(W_t),\, t \geq 0\big)$: a) Ma ciagłe trajektorie. b) Ma modyfikacje ciagłą. c) Jest gaussowski.

Zadanie 6.15 Dla $0 < s < t$ pokazać, że

$$\mathbb{P}\left(W_t > 0,\; W_s > 0\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

Dla $0 < s < t < u$, policzyć

$$\mathbb{P}\left(W_u > 0,\; W_t > 0,\; W_s > 0\right).$$

Zadanie 6.16 Niech W będzie procesem Wienera. Który z procesów jest procesem Wienera?

- $-W_t$, $t \geq 0$,
- $\sqrt{t} W_1$, $t \geq 0$,
- $W_{2t} - W_t$, $t \geq 0$.

W następnych zadaniach korzystamy z *zasady odbicia*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} W_s > r\right) = 2\mathbb{P}\left(W_t > r\right), \qquad \forall\, r \geq 0,\; \forall\, t > 0. \tag{6.1}$$

Zadanie 6.17 Dla danego $t \geq 0$, policzyś rozkład

$$W_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s.$$

Zadanie 6.18 Dla $a \in \mathbb{R}$, niech

$$\tau_a = \inf\left\{t \geq 0 \colon W_t = a\right\}.$$

Jaki jest rozkład τ_a?

Zadanie 6.19 Pokazać, że dla dowolnego $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} W_s > 0\right) = \mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq t} W_s < 0\right).$$

6.6 Zasada Donskera–Waradhana i dyskretne aproksymacje procesu Wienera

Niech $D([0,1])$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji càdlàg na odcinku $[0,1]$. Niech $\delta > 0$. Można łatwo pokazać że jeżeli $f \in D([0,1])$, to

$$\#\{t \in [0,1] \colon |f(t) - f(t-)| \geq \delta\} < +\infty.$$

Stąd można łatwo pokazać, że każda funkcja càdlàg jest ograniczona. W rezultacie $D([0,1])$ jest przestrzenią Banacha z normą supremum

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\psi(t)|, \qquad \psi \in D([0,1]).$$

Nie jest to przestrzeń ośrodkowa (wykazać!), a więc nie jest to przestrzeń Polska. Skorokhod skonstruował metrykę d_S na przestrzeni funkcji càdlàg (tak zwaną metrykę Skorokhoda) taką, że $(D([0,1]), d_S)$ jest ośrodkową i zupełną przestrzenią metryczna. Oczywiście topologia τ_∞ zbieżności w metryce supremum (inaczej zbieżności jednostajnej) jest silniejsza od topologii τ_S wyznaczonej przez metrykę Skorokhoda (uzasadnij!). Okazuje się, że $(D([0,1]), \tau_S)$ nie jest wektorową przestrzenią topologiczną (dodawanie nie jest ciągłe!). Wiecej informacji o metryce Skorokhoda można znaleźć na przykład w książkach Billingsley'a [3] lub Ethirea i Kurtza [8].

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, o średniej zero i wariancji 1. Zakładamy, że zmienne X_n są określone na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

Niech

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz niech

$$W_t^n := \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}, \qquad n \in \mathbb{N},\ t \in [0,1],$$

gdzie $[nt]$ oznacza część całkowitą liczby nt.

Problem 1. Pokazać, że dla każdego n, W^n jest mierzalnym odwzorowaniem $(\Omega, \mathfrak{F}))$ w $(D([0,1]), \mathfrak{B}_\infty)$ gdzie $\mathfrak{B}_\infty$ jest σ ciałem zbiorów Borelowskich jeżeli na $D([0,1])$ rozważamy topologię zbieżności jednostajnej. Tak więc proces W^n może być traktowany jako element losowy w przestrzeni trajektorii $D([0,1])$.

Stąd na $(D([0,1]), \mathfrak{B}_\infty)$ mamy ciąg miar probabilistycznych μ_n będących rozkładami W^n;

$$\mu_n(\Gamma) := \mathbb{P}\left\{W^n \in \Gamma\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \Gamma \in \mathfrak{B}_\infty.$$

Problem 2. Niech W będzie procesem Wienera określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$. Pokazać, że W jest mierzalnym odwzorowaniem $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbb{P}})$ w $(D([0,1]), \mathfrak{B}_\infty)$. Niech $\mathbb{P}^W$ oznacza rozkład W w $D([0,1])$. Ponieważ W ma ciągłe trajektorie więc $\mathbb{P}^W$ jest skoncentrowana na zbiorze $C([0,1])$ funkcji ciągłych na $[0,1]$. Pokazać, że $C([0,1])$ jest domkniętym (a więc i Borelowskim) podzbiorem $D([0,1])$. Dowód następującego twierdzenia można znaleźć na przykład w [8].

Twierdzenie 6.5 ***(Donskera–Waradhana)*** *Na przestrzeni* $(D([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *rozkłady* μ_n *zbiegają słabo do rozkładu* $\mathbb{P}^W$.

Rozważmy teraz ciąg niezależnych zmiennych losowych (X_n) takich, że

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2 = \mathbb{P}(X_n = 1).$$

Z twierdzenia Donskera–Waradhana W^n zbiega słabo do W. Oczywiście w tym przypadku (S_n) to proces symetrycznego błądzenia przypadkowego. Proces W^n otrzymuje się z S_n poprzez zmniejszenie wielkości jednego kroku do $X_k/\sqrt{n}$ przy równoczesnym zwiększeniu intensywności (poruszamy się co $1/n$ jednostki czasu).

Proces Wienera można otrzymać z procesu błądzenia przypadkowego (S_n) w troche inny sposób. Mianowicie dla ustalonego n, rozważmy proces $\tilde{W}^n$ zadany najpierw w punktach k/n, $k = 0, \ldots, n$ w następujący sposób: $\tilde{W}^n_0 = 0$,

$$\tilde{W}^n_{k/n} = \frac{S_k}{\sqrt{n}}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Następnie zastosujmy interpolacje liniową kładąc dla $t \in (k/n, (k+1)/n)$

$$\tilde{W}^n_t = \left(\frac{k+1}{n} - t\right) \tilde{W}^n_{k/n} + \left(t - \frac{k}{n}\right) \tilde{W}^n_{(k+1)/n}.$$

Problem 3. Pokazać, że procesy $\tilde{W}^n$, $n \in \mathbb{N}$, mają ciągłe trajktorie oraz, że $\tilde{W}^n$ jest mierzalnym odwzorowaniem $(\Omega, \mathfrak{F})$ w $(C([0,T]), \mathcal{B}(C([0,T])))$.

Niech $\tilde{\mu}_n$ oznacza rozkład $\tilde{W}^n$ w $C([0,1])$;

$$\tilde{\mu}_n(\Gamma) = \mathbb{P}\left\{\tilde{W}^n \in \Gamma\right\}, \qquad \Gamma \in \mathcal{B}(C([0,1])).$$

Twierdzenie 6.6 *Na przestrzeni* $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *ciąg* $(\tilde{\mu}_n)$ *zbiega słabo do rozkładu* $\mathbb{P}^W$ *procesu Wienera.*

6.7 Całka Wienera–Zygmunda

Całka Wienera–Zygmunda to całka stochastyczna względem procesu Wienera z funkcji deterministycznej $f \in C^1(\mathbb{R})$. Definiujemy ją przez wzór na całkowanie przez części:

$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s := f(t)W_t - \int_0^t f'(s)W(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

Mamy

$$\mathbb{E}\int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s = 0, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s\right)^2 &= \mathbb{E}\left(f(t)W_t - \int_0^t f'(s)W_s\mathrm{d}s\right)^2 \\
&= f^2(t)\mathbb{E}\,W_t^2 - ef(t)\int_0^t f'(s)\mathbb{E}\,W_sW_t\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t\int_0^t f'(s)f'(u)\mathbb{E}W_sW_u\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&= f^2(t)t - 2f(t)\int_0^t f'(s)s\mathrm{d}s + 2\int_0^t\int_0^s f'(s)f'(u)u\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&+ f^2(t)t - 2f(t)\int_0^t \left[(f(s)s)' - f(s)\right]\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\int_0^t\int_0^s f'(s)\left[(f(u)u)' - f(u)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&= f^2(t)t - 2f(t)f(t)t + 2f(t)\int_0^t f(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\int_0^t f'(s)\left[f(s)s - \int_0^s f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

6.8 Całka stochastyczna

Naszym celem jest definicja całki

$$\int_0^t X_s\mathrm{d}W_s, \qquad t \geq 0,$$

w której W jest procesem Wienera a X procesem o niekoniecznie różniczkowalnych trajektorich. Tak naprawde jest wiele różnych całek stochastycznych: całka Itô, Stratonowicza, Skorokhoda (będącą uogólnieniem całki Itô). My zajmiemy się tylko całką Itô. Ma ona dobrze określoną dziedzine. Występuje w definicji rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x. \tag{6.2}$$

Mianowicie, z definicji x jest rozwiązniem (6.2), gdy spełnia równanie całkowe

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}W_s, \qquad t \geq 0.$$

Rozwiązania równań stochastycznych modelują procesy Markowa o ciągłych trajektorich.

6.8.1 Całka z funkcji prostych

Przypomnijmy, że proces Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ to proces o następujących własnościach:

- $W_0 = 0$, W ma ciągłe trajektorie,
- W jest martyngłem całkowalnym względem $(\mathfrak{F}_t)$,
- dla dowolnych $t \geq s \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left((W_t - W_s)^2 | \mathfrak{F}_s\right) = t - s.$$

Definicja 6.3 Funkcją prostą nazywamy proces f postaci

$$f_t(\omega) = \alpha(\omega)\chi_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\omega)\chi_{(t_k, t_{k+1}]}(t), \qquad t \geq 0,\ \omega \in \Omega, \tag{6.3}$$

gdzie: α jest $\mathcal{F}_0$ mierzalną zmienną losową, $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n < \infty$ oraz dla każdego $k = 0, \ldots n-1$, α_k jest całkowalną z kwadratem zmienną losową $\mathfrak{F}_{t_k}$-mierzalną.

Klasę funkcji prostych oznaczamy przez $\mathcal{P}$. Dla $f \in \mathcal{P}$ danego wzorem (6.4) kładziemy

$$I(f) := \int_0^\infty f_s \mathrm{d}W_s := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right).$$

Następnie dla $t \geq 0$, kładziemy

$$I_t(f) := \int_0^t f_s \mathrm{d}W_s := I(\chi_{[0,t]} f).$$

Zadanie 6.20 Pokazać, że całka jest dobrze określona (nie zależy od reprezentacji (6.3)). W tym celu użyć faktu, że dla dowolnych skończonych rozbić $[0, \infty)$ istnieje rozbicie drobniejsze. Wykorzystać to również do dowodu, że kombinacja liniowa elementów $\mathcal{P}$ należy do $\mathcal{P}$.

Twierdzenie 6.7 (i) *Dla dowolnych* $f, g \in \mathcal{P}$, $a, b \in \mathbb{R}$ *oraz* $t \geq 0$,

$$I_t(af + bg) = aI_t(f) + bI_t(g).$$

(ii) Dla dowolnego $f \in \mathcal{P}$, proces $(I_t(f))_{t\geq 0}$ ma ciągłe trajektorie.
(iii) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{P}$ oraz czasów $0 \leq s < t < \infty$ mamy

$$\int_0^t f_r \mathrm{d}W_r = \int_0^s f_r \mathrm{d}W_r + \int_s^t f_r \mathrm{d}W_r,$$

gdzie

$$\int_s^t f_r \mathrm{d}W_r := I(\chi_{[s,t]} f).$$

(iv) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{P}$, proces $(I_t(f))_{t\geq 0}$ jest martyngałem całkowalnym z kwadratem względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Ponadto, $\mathbb{E}\, I_t(f) = 0$, $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(I_t(f)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^t f_s^2 \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

Dowód. Dowód (i) wynika z Zadania 6.20. Pokazujemy (ii) Ponieważ skończona suma prosesów o ciągłych trajektoriach jest procesem o ciągłych trajektoriach wystarczy pokazać, że ciągłość trajektorii procesu $(I_t(f))_{t\geq 0}$ gdzie

$$f = \alpha_{\underline{t}} \chi_{(\underline{t},\overline{t}]}, \tag{6.4}$$

$0 \leq \underline{t} < \overline{t} < \infty$ i $\alpha_{\underline{t}}$ jest całkowalną z kwadratem $\mathfrak{F}_{\underline{t}}$-mierzalną zmienną losową. Z definicji

$$I_t(f) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq \underline{t}, \\ \alpha_{\underline{t}}\left(W_t - W_{\underline{t}}\right) & \text{dla } t \in (\underline{t}, \overline{t}], \\ \alpha_{\underline{t}}\left(W_{\overline{t}} - W_{\underline{t}}\right) & \text{dla } t \geq \overline{t}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Tak więc ciągłość całki wynika z ciągłości trajektorii procesu Wienera.

Oczywiście część (iii) wynika wprost z (i). Przechodzimy do dowodu martyngałowości. Ponieważ suma skończenie wielu martyngałów całkowalnych z kwadratem jest martyngłem całkowalnym z kwadratem, więc wystarczy znowu ograniczyć się do f postaci (6.4). Wtedy $(I_t(f))_{t\geq 0}$ dane wzorem (6.5). Adaptowaność $(I_t(f))_{t\geq 0}$ wynika z adaptowaności W i tego, że $\alpha_{\underline{t}}$ jest $\mathfrak{F}_{\underline{t}}$-mierzalna. Całkowalność wynika, z tego. że dla dowolnego t, $I_t(t)$ jest iloczynem dwóch zmiennych losowych, z których każda jest co najmniej całkowalna z kwadratem. Niech $0 \leq s < t < \infty$. Mamy sprawdzić, że

$$\mathbb{E}\left(I_t(f) | \mathfrak{F}_s\right) = I_s(f).$$

W tym celu rozważamy trzy przypadki:

I $\quad 0 \leq s \leq \underline{t}$,
II $\quad \underline{t} < s \leq \overline{t}$,
III $\quad s > \overline{t}$.

W pierwszym przypadku $I_s(f) = 0$. Z drugiej strony, ponieważ $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_{\underline{t}}$ więc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(I_t(f)|\mathfrak{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\alpha_{\underline{t}}(W_t - W_{\underline{t}})|\mathfrak{F}_s\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\alpha_{\underline{t}}(W_t - W_{\underline{t}})|\mathfrak{F}_{\underline{t}}\right)|\mathfrak{F}_s\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\alpha_{\underline{t}}\mathbb{E}\left(W_t - W_{\underline{t}}|\mathfrak{F}_{\underline{t}}\right)|\mathfrak{F}_s\right)\\ &= \mathfrak{F}\left(\alpha_{\underline{t}}0|\mathfrak{F}_s\right) = 0,\end{aligned}$$

gdzie przedostatnia równość wynika z martyngałowości procesu Wienera. W drugim przypadku, ponieważ $\alpha_{\underline{t}}$ jest $\mathfrak{F}_{\underline{t}} \subset \mathfrak{F}_s$-mierzalne więc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(I_t(f)|\mathfrak{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\alpha_{\underline{t}}(W_t - W_{\underline{t}})|\mathfrak{F}_s\right)\\ &= \alpha_{\underline{t}}\mathbb{E}\left(W_t - W_{\underline{t}}|\mathfrak{F}_s\right)\\ &= \alpha_{\underline{t}}\left(W_s - W_{\underline{t}}\right)\\ &= I_s(f).\end{aligned}$$

W trzecim przypadku $I_s(f) = I_t(f)$. Stąd oczywiście $\mathbb{E}\left(I_t(f)|\mathfrak{F}_s\right) = I_s(f)$.

Pokażemy, teraz, że $\mathbb{E}\, I_t(f) = 0$. Znowu możemy założyć, że f jest postaci (6.4). Oczywiście, gdy $t \le \underline{t}$, to $I_t(f) = 0$, a więc i $\mathbb{E}\, I_t(f) = 0$. Natomiast, jeśli $t > \underline{t}$, to

$$\mathbb{E}\, I_t(f) = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\left(I_t(f)|\mathfrak{F}_{\underline{t}}\right) = \mathbb{E}\,\alpha_{\underline{t}}\mathbb{E}\left(W_{t\wedge\bar{t}}W_{\underline{t}}|\mathfrak{F}_{\underline{t}}\right) = 0,$$

be W jest martyngałem.

Pozostała do wyboru tożsamość

$$\mathbb{E}\, I_t(f) = \int_0^t \mathbb{E}\, f_s^2 \mathrm{d}s.$$

Tutaj oczywiście nie wystarczy się ograniczyć do funkcji postaci (6.4). Załóżmy, więc, że f dane jest wzorem (6.3). Niech $t \ge 0$. Mamy trzy przypadki

(I) $\quad t = 0$,
(II) $t \ge t_n$,
$(III) t \in (t_{j-1}, t_j]$ dla pewnego $j \in \{1, \dots n\}$.

W pierwszym przypadku $I_t(f) = 0$ i żądana równość oczywiście zachodzi. W drugim przypadku

$$I_t(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

Stąd

$$\mathbb{E}\, I_t^2(f) = \sum_{j,k=0}^{n-1} \mathbb{E}\,\alpha_j\alpha_k\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right).$$

Zauważmy, że jeżeli $j \neq k$. Oczywiście możemy wtedy założyć, że $j > k$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\, \alpha_j \alpha_k \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) \\
&= \mathbb{E}\, \mathbb{E} \left(\alpha_j \alpha_k \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) |\mathfrak{F}_{t_j}\right) \\
&= \mathbb{E}\, \alpha_j \alpha_k \left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) \mathbb{E}\left(\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right) |\mathfrak{F}_{t_j}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Załóżmy, że $j = k$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\, \alpha_j^2 \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\, \alpha_j^2 \mathbb{E} \left(\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)^2 |\mathfrak{F}_{t_j}\right) \\
&= \mathbb{E}\, \alpha_j^2 (t_{j+1} - t_j),
\end{aligned}$$

bo dla $t > s$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left((W_t - W_s)^2 |\mathfrak{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(W_t^2 - 2W_t W_s + W_s^2 |\mathfrak{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(W_t^2 - t |\mathfrak{F}_s\right) + t - W_s^2 \\
&= W_s^2 - s + t - W_s^2 \\
&= t - s.
\end{aligned}$$

Tak, więc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, I_t^2(f) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\, \alpha_j^2 \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\, \alpha_j^2 \left(t_{j+1} - t_j\right) \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\, f_s^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Podobne rozumowanie działa w trzecim przypadku. Mianowicie, własności (iii),

$$\mathbb{E}\, I_t^2(f) = \mathbb{E}\left(I_{t_j}(f) + \int_{t_j}^t f_s \mathrm{d}W_s\right).$$

Tak jak w poprzednim przypadku pokazujemy, że

$$\mathbb{E}\, I_{t_j}^2(f) = \int_0^{t_j} \mathbb{E} f_s^2 \mathrm{d}s.$$

Następnie

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_{t_j}^{t} f_s \mathrm{d}W_s\right)^2 &= \mathbb{E}\,\alpha_j^2\left(W_t - W_{t_j}\right)^2\\
&= \mathbb{E}\,\mathbb{E}\left(\alpha_j^2\left(W_t - W_{t_j}\right)^2|\mathfrak{F}_{t_j}\right)\\
&= \mathbb{E}\,\alpha_j^2\mathbb{E}\left(\left(W_t - W_{t_j}\right)^2|\mathfrak{F}_{t_j}\right)\\
&= \mathbb{E}\,\alpha_j^2(t - t_j)\\
&= \int_{t_j}^{t}\mathbb{E}\,f_s^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Wystarczy więc zauważyć, że

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,I_{t_j}(f)\int_{t_j}^{t} f_s \mathrm{d}W_s &= \mathbb{E}\,\mathbb{E}\left(I_{t_j}(f)\int_{t_j}^{t} f_s \mathrm{d}W_s|\mathfrak{F}_{t_j}\right)\\
&= \mathbb{E}\,I_{t_j}(f)\mathbb{E}\left(\int_{t_j}^{t} f_s \mathrm{d}W_s|\mathfrak{F}_{t_j}\right)\\
&= \mathbb{E}\,I_{t_j}(f)\alpha_j\mathbb{E}\left(W_t - W_s|\mathfrak{F}_{t_j}\right)\\
&= 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

6.9 Rozszerzenie całki na procesy z $\mathcal{L}^2$

Celem tego rozdziału jest rozszerzenie całki stochastycznej na klasę procesów $\mathcal{L}^2$ zdefiniowanej w następujący sposób.

Definicja 6.4 Proces X jst klasy $\mathcal{L}^2$ jeżeli:

- X jest mierzalny, adaptowany,
- dla każdego $t > 0$,

$$
\mathbb{E}\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s < \infty.
$$

Na $\mathcal{L}^2$ wprowadzimy metrykę $\rho_{\mathcal{L}^2}$ zadaną przez rodzinę seminorm

$$
\|X\|_{\mathcal{L}^2,t} := \mathbb{E}\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.
$$

Dokładnie

$$
\rho_{\mathcal{L}^2}(X,Y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\|X - Y\|_{\mathcal{L}^2,n} \wedge 1\right), \qquad X, Y \in \mathcal{L}^2.
$$

Zadanie 6.21 Pokazać, że $\rho_{\mathcal{L}^2}$ jest metryką, a $\left(\mathcal{L}^2, \rho_{\mathcal{L}^2}\right)$ jest przestrzenią polska (przestrzenią metryczną ośrodkową, zupełną).

Lemat 6.3 *Klasa funkcji prostych $\mathcal{P}$ jest gęsta w $\mathcal{L}^2$.*

Dowód. Niech $X \in \mathcal{L}^2$. Mamy znaleźć ciąg funkcji prostych (f_n) takich, że $f_n \to X$ w metryce $\rho_{\mathcal{L}}$.

Zrobimy to w kilku krokach. Najpierw pokażemy, że można ograniczyć się do ograniczonych i zerujących się poza skończonym przedziałem czasowym procesów X. Potem, ciągłych, następnie progresywnie mierzalnych, a w końcu dowolnych mierzalnych adaptowanych.

Niech $\mathcal{L}^2_{b,0}$ będzie podzbiorem $\mathcal{L}^2$ złożonym ze procesów $X \in \mathcal{L}^2$ ograniczonych i zerujących się poza skończonym przedziałem czasowym, to znaczy takich dla których istnieje $M < \infty$ takie, że

$$|X_t(\omega)| \leq M, \quad \mathbb{P}-p.n. \qquad \forall\, t \geq 0,$$

oraz

$$X_t(\omega) = 0, \qquad \mathbb{P}-p.n. \qquad \forall\, t \geq M.$$

Oczywiście $\mathcal{L}^2_{b,0}$ jest gęsty w $\mathcal{L}^2$, bo dla każdego $X \in \mathcal{L}^2$, i dla każdego $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \|X - X^{(N)}\|_{\mathcal{L}^2_t} = 0,$$

gdzie

$$X^{(N)}_t := \chi_{[0,N]}(t)\,(X_t \wedge N) \vee (-N), \qquad t \geq 0.$$

Jeżeli, X jest ograniczony, zeruje się poza skończonym przedziałem czasowym $[0, S]$ i ma ciągłe trajektorie, to ciąg aproksymujący $X^{(N)}$ konstruuje się w następujący sposób

$$X^{(N)}_t(\omega) = X_{\frac{kS}{n}}(\omega), \qquad t \in \left(\frac{kS}{n}, \frac{(k+1)S}{n}\right].$$

Wówczas

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^\infty \left|X_t - X^{(N)}_t\right|^2 dt = 0,$$

z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej.

Niech $X \in \mathcal{L}^2_{b,0}$ będzie progresywnie mierzalna. Niech $Y_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega)ds$, $t \geq 0$, gdzie całkę rozumie się jako całkę Lebesgue'a. Wobec progresywnej mierzalności X, proces Y jest mierzalny i adaptowany. Przyjmijmy

$$X^{(N)}_t = N\int_{t-1/N\vee 0}^t X_s \mathrm{d}s = \frac{Y_t(\omega) - Y_{(t-\frac{1}{N})\vee 0}(\omega)}{\frac{1}{N}} \qquad t \geq 0.$$

Procesy $X^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, mają ciągłe, ograniczone i znikające poza skończonym przedziałem $[0, S]$ trajektorie. Należą też do klasy $\mathcal{L}^2$. Zauważmy, że $\mathbb{P}$-p.n. dla prawie wszystkich (względem miary Lebesgue'a na $[0, S]$) t, istnieje pochodna Y'_t oraz $Y'_t = X_t$. W tych punktach (t, ω), w których pochodna $Y'_t(\omega)$ istnieje, zachodzi

$$Y_t'(\omega) = X_t(\omega) = \lim_{N\to+\infty} X_t^{(N)}(\omega).$$

Wobec, tego dla prawie wszystkich (t,ω), względem miary $\mathbb{P}\mathrm{d}t$ mamy

$$X_t^{(N)}(\omega) \to X_t(\omega) \quad \text{gdy} \quad N \to +\infty,$$

a więc znowu z twierdzenia Lebesque'a o zbieżności ograniczonej mamy

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^\infty \left|X_t - X_t^{(N)}\right|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

W ten sposób lemat został udowodniony dla funkcji progresywnie mierzalnych. W przypadku ogólnym wnioskujemy z twierdzenia Dellacherie–Meyera, zgodnie z którym każdy proces adaptowany i mierzalny ma progresywnie mierzalną modyfikacje.

Lemat 6.4 *Niech $X \in \mathcal{L}^2$ i niech $(f^{(N)})$ będzie ciągiem funkcji prostych zbieżnych do X w $\mathcal{L}^2$. Wówczas dla dowolnego $t > 0$, ciąg $(I_t(f^{(N)})$ zbiega w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathbb{P})$. Ponadto, jeżeli $(g^{(N)})$ jest innym ciągiem funkcji prostych aproksymującym X w $\mathcal{L}^2$, to*

$$\lim_{N\to\infty} I_t(f^{(N)}) = \lim_{N\to\infty} I_t(g^{(N)}).$$

Dowód. Mamy

$$\mathbb{E}\left(I_t(f^{(n)}) - I_t(f^{(m)})\right)^2 = \|f^{(n)} - f^{(m)}\|_{\mathcal{L}}.$$

Ponieważ $(f^{(n)})$ jest ciągiem zbieżnym, więc $(I_t(f^{(n)}))$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathbb{P})$. Z zupełności przestrzeni $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathbb{P})$ wynika jego zbieżność. Niech $(g^{(n)})$ będzie innym ciągiem funkcji prostych aproksymujących X. Wówszas $(f^{(n)} - g^{(n)})$ zbiega do zera w $\mathcal{L}^2$. Stąd $(I_t(f^{(n)}) - I_t(g^{(n)}))$ zbiega do zera w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. $\square$

Lemat 6.4 umożliwia nam zdefiniowanie całki z $X \in \mathcal{L}^2$.

Definicja 6.5 Niech $X \in \mathcal{L}^2$. Dla $t > 0$ definiujemy *całkę stochastyczną Itô z* X jako granice w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ciągu całek $(I_t(f^{(n)}))$ z funkcji prostych takich, że $f^{(n)} \to X$ w $\mathcal{L}^2$.

Wartość całki stochastycznej z X w chwili $t \geq 0$ oznaczamy przez $(I_t(X))$ lub $\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s$. Następujące twierdzenie podaje podstawowe własności całki stochastycznej.

Twierdzenie 6.8 (i) *Dla dowolnych stałych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz procesów $X, Y \in \mathcal{L}^2$,*

$$I_t(aX + bY) = aI_t(X) + bI_t(Y), \qquad \mathbb{P} - p.n., \quad \forall\, t \geq 0.$$

(ii) *Dla dowolnego $X \in \mathcal{L}^2$, proces $(I_t(X))_{t\geq 0}$ jest całkowalnym z kwadratem martyngałem, o ciągłych trajektoriach. Ponadto $I_0(X) = 0$,*

$$\mathbb{E}\, I_t(X) = 0, \qquad \forall, t \geq 0,$$

(iii) Dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{L}^2$,

$$\mathbb{E}\, I_t(X) I_t(Y) = \mathbb{E} \int_0^t X_s Y_s ds, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

(iv) Dla dowolnego $X \in \mathcal{L}^2$ *oraz* $0 \leq s \leq t < +\infty$,

$$\mathbb{E}\left((I_t(X) - I_s(X))^2 \,|\mathfrak{F}_s \right) = \int_s^t X_s^2 \mathrm{d}s.$$

Stąd wariancja kwadratowa martyngału $(I_t(X))$ *wynosi*

$$\langle I(X), I(X) \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s. \qquad t \geq 0.$$

(v) Dla dowolnego $X \in \mathcal{L}^2$ *i momentu stopu* τ, *takiego, że* $\mathbb{P}\,(\tau \leq S) = 1$ *dla pewnego* $S < \infty$, *zchodzi*

$$I_\tau(X) = I_S\left(\chi_{[0,\tau]} X\right), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Dowód. Pierwsza część wynika z liniowości całki stochastycznej funkcj prostych. Przechodzimy do dowodu martyngałowości. Ustalmy $X \in \mathcal{L}^2$. Niech $(f^{(n)})$ będzie ciągiem funkcji prostych zbieżnych do X w $\mathcal{L}^2$. Ustalmy $0 \leq s < t$. Mamy pokazać, że

$$\mathbb{E}\left(I_t(X)|\mathfrak{F}_s\right) = I_s(X).$$

Ponieważ

$$\mathbb{E}\left(I_t(f^{(n)})|\mathfrak{F}_s\right) = I_s(f^{(n)}) \to I_s(X),$$

więc wystarczy pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(I_t(f^{(n)})|\mathfrak{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(I_t(X)|\mathfrak{F}_s\right),$$

gdzie granica jest na przykład w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Wynika to z nierówności Jensena:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(I_t(f^{(n)})|\mathfrak{F}_s\right) - \mathbb{E}\left(I_t(X)|\mathfrak{F}_s\right)\right)^2 \\
&\leq \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\left(I_t(f^{(n)}) - I_t(X)\right)^2 |\mathfrak{F}_s\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(I_t(f^{(n)}) - I_t(X)\right)^2 \to 0 \quad \text{jak } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Wiemy, że $(I_t(X))_{t\geq 0}$ jest martyngałem. Dla dowolnego $t \geq 0$, $I_t(X)$ jest całkowalna z kwadratem jako granica w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ciągu zmiennych losowych $(I_t(f^{(n)}))$. Oczywiście $I_0(X) = 0$, bo $I_0(f^{(n)}) = 0$ dla każdego n. Pokażmy, że proces $(I_t(X))_{t\geq 0}$ ma ciągłą modyfikacje. Ustalmy $S > 0$. Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy założyć, że $f^{(0)} = 0$,

$$\mathbb{E}\int_0^S \left|f_t^{(n+1)} - f_t^{(n)}\right|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Szereg

$$I_t(f^{(1)}) + I_t(f^{(2)} - f^{(1)}) + I_t(f^{(3)} - f^{(4)}) + \ldots$$

jest zbieżny w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ do $I_t(X)$. Składniki szeregu są ciągłe. Ponadto (z nierówności maksymalnej dla podmartyngałów) mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq S}\left|I_t\left(f^{(n+1)} - f^{(n)}\right)\right| > \frac{1}{n^2}\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} < \infty.$$

Z lematu Borela–Cantelliego istnieje $\Omega_0 \in \Omega\colon \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ taki, że dla każdego $\omega \in \Omega_0$ istnieje $N = N(\omega)$, że

$$\sup_{t\leq S}\left|I_t\left(f^{(n+1)} - f^{(n)}\right)(\omega)\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Czyli, szereg zbiega jednostajnie dla $\omega \in \Omega_0$. Ponieważ granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest ciągła otrzymujemy ciągłość $(I_t(X))_{t\geq 0}$.

Twierdzenie 6.9 ***(Nierówność Burkholdera–Davisa–Gundy)*** *Dla dowolnego $p \geq 2$ istnieje stała C_p taka, że dla każdego $X \in \mathcal{L}^2$ i $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}\sup_{s\leq t}\left|\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s\right|^p \leq C_p \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s\right)^{p/2}.$$

6.10 Rozszerzenie całki na procesy z $\mathcal{P}^2$

Celem tego rozdziału jest rozszerzenie całki stochastycznej na klasę procesów $\mathcal{P}^2$ zdefiniowanej w następujący sposób.

Definicja 6.6 Proces X jest klasy $\mathcal{P}^2$ jeżeli:

- X jest mierzalny, adaptowany,
- dla każdego $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s < \infty\right) = 1.$$

Lemat 6.5 *Dla dowolnego $X \in \mathcal{P}^2$ istnieje ciąg $(X^{(N)})$ procesów klasy $\mathcal{L}^2$ takich, że dla dowolnego $S < +\infty$, według prawdopodobieństwa zachodzi*

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^S \left|X_t - X_t^{(N)}\right|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

6.11 Procesy Itô i wzór Itô

Definicja 6.7 Procesy postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s, \qquad t \geq 0, \tag{6.6}$$

gdzie X_0 jest $\mathfrak{F}_0$-mierzalną zmienną losową, a b i σ są mierzalnymi adaptowanymi procesami stochastycznymi takimi, że

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |b_s| \mathrm{d}s < \infty\right) = 1, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \sigma_s^2 \mathrm{d}s < \infty\right) = 1, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

nazywamy *procesami Itô.*

Często (6.6) zapisujemy w postaci różniczkowej

$$\mathrm{d}X_t = b_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W. \tag{6.7}$$

Mówimy wtedy, że X ma *różniczkę stochastyczną*

$$b_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t.$$

Twierdzenie 6.10 ***(Wzór Itô)*** *Jeżeli X ma różniczkę stochastyczną* (6.7) *to dla dowolnej funkcji $F \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, proces $(F(X_t, t),\, t \geq 0)$ jest procesem Itô o różniczce stochastycznej*

$$\mathrm{d}F(X_t, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial F}{\partial x}(X_t, t) b_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2\right) \mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x}(X_t, t)\sigma_t \mathrm{d}W_t.$$

6.12 Zadania

W zadaniach W, o ile nie jest to stwierdzone inaczej, jest standardowym procesem Wienera na $\mathbb{R}$.

Zadanie 6.22 Pokazać, że dla $t \geq 0$,

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2},$$

$$\int_0^t s \mathrm{d}W_s = tW_t - \int_0^t W_s \mathrm{d}s,$$

$$\int_0^t W_s^2 \mathrm{d}W_s = \frac{1}{3}W_t^2 - \int_0^t W_s \mathrm{d}s.$$

Zadanie 6.23 Udowodnij, że dla $f \in C^1(\mathbb{R})$ zachodzi wzór na całkowanie przez części:

$$\int_s^t f(r)\mathrm{d}W_r = f(t)W_t - f(s)W_s - \int_s^t f'(r)W_r\mathrm{d}r, \qquad \forall\, 0 \le s < t < +\infty.$$

Zadanie 6.24 Niech

$$X_t := \int_0^t W_s\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0.$$

Pokazać, że X jest procesem gaussowskim. Policzyć jego kowariancję.

Zadanie 6.25 Jakie równanie stochastyczne spełnia proces $Y_t := W_t^4$, $t \ge 0$? Pokazać, że $\mathbb{E}\, W_t^4 = 3t^2$ dla $t \ge 0$.

Zadanie 6.26 Policzyć różniczkę stochastyczną procesu

$$\mathrm{e}^{aW_t+bt}, \quad t \ge 0.$$

Dla jakich a, b proces ten jest martyngałem?

Zadanie 6.27 Pokazać, że proces spełniający równanie

$$\mathrm{d}X_t = -bX_t\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t, \qquad t \ge 0,$$

dany jest wzorem

$$X_t = \mathrm{e}^{-bt}X_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}\sigma\mathrm{d}W_s, \qquad t \ge 0.$$

Zadanie 6.28 Znaleźć równanie, które spełnia proces:

- $X_t = W_t/(t+1)$, $t \ge 0$,
- $X_t = \sin W_t$, $t \ge 0$.
- Proces o wartościach w $\mathbb{R}^2$,

$$X_t = a\sin W_t, \qquad Y_t = b\cos W_t, \qquad t \ge 0.$$

Zadanie 6.29 Niech $\psi(x+\mathrm{i}y) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, będzie funkcją analityczną, taką, że

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Niech $W = (W^1, W^2)$ będzie dwuwymiarowym procesem Wienera. Pokazać, że

$$\big(u(W^1,W^2), v(W^1,W^2)\big)$$

jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 6.30 Pokazać, że $Y_t := tW_t$, $t \geq 0$, jest procesem Itô. Policzyć jego różniczkę.

Zadanie 6.31 Rozważmy, tak zwany proces Winera na okręgu

$$Z_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}W_t}, \qquad t \geq 0,$$

gdzie W jest procesem Wienera. Pokazać, że $Z = X + \mathrm{i}Y$, gdzie

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= -\frac{1}{2}X\mathrm{d}t - Y\mathrm{d}W, \\ \mathrm{d}Y &= -\frac{1}{2}Y\mathrm{d}y + X\mathrm{d}Y. \end{aligned}$$

Zadanie 6.32 Niech u będzie rozwiązaniem problemu Laplace'a

$$\Delta u = 0 \text{ w obszarze } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$$

z warunkiem Dirichleta $u = \psi$ na $\partial\mathcal{O}$. Niech W będzie d-wymiarowym (standardowym) procesem Wienera. Policzyć $u(W_t)$.

Zadanie 6.33 Niech

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 0, \\ -1 & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases}$$

Pokazać, że

$$V_t = \int_0^t \operatorname{sign}(W_s)\mathrm{d}W_s, \qquad t \geq 0,$$

jest standardowym procesem Wienera.

Zadanie 6.34 Niech

$$V_t = \int_0^t \left(\sin\xi_s \mathrm{d}W_s^1 + \cos\xi_s \mathrm{d}W_s^2\right), \quad t \geq 0,$$

gdzie (W^1, W^2) jest standardowym procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$, a ξ procesem mierzalnym i adaptowanym. Pokazać, że V jest standardowym procesem Wienera.

Zadanie 6.35 Pokazać, że $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, S])$ spełnia równanie ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$V_t := u(T - t, W_t), \qquad t \in [0, S],$$

jest martyngałem.

Zadanie 6.36 Niech $\beta > 0$. Pokazać, że

$$V_t = \mathrm{e}^{-\beta t} W_{\mathrm{e}^{2\beta t}-1}, \quad t \geq 0,$$

jest procesem Ornsteina–Uhlenbecka.

Zadanie 6.37 Udowodnić, że następujące procesy są martyngałami całkowalnymi z kwadratem:

$$W_t^2 - t, \qquad \int_0^t s \mathrm{d}W_s, \qquad \int_0^t \mathrm{sign}\,(W_s) \mathrm{d}W_s.$$

Policzyć ich wariancje kwadratową.

Zadanie 6.38 Policzyć wartość oczekiwaną i wariancje zmiennej losowej $\int_0^1 |W_s| \mathrm{d}W_s$.

Zadanie 6.39 Niech W^1 i W^2 będą dwoma niezależnymi procesami Wienera, a X^1 i X^2 dwoma procesami mierzalnymi, ograniczonymi i adaptowanymi do filtracji generowanej przez W^1 i W^2. Pokazać, że proces

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s^1 \int_0^t X_s^2 \mathrm{d}W_s^2, \qquad t \geq 0,$$

jest martyngałem. Policzyć jego wariancje kwadratową.

Zadanie 6.40 Niech W będzie procesem Wienera. Udowodnij, że następujące procesy mają te same rozkłady skończenie wymiarowe: $X_t = W_t - tW_t$,

$$Y_t = \begin{cases} (1-t) \int_0^t \frac{\mathrm{d}W_s}{1-s}, & t \in [0,1), \\ 0, & t = 1. \end{cases}$$

Każdy z tych procesów nosi nazwę *mostu Browna*.

Zadanie 6.41 Niech $f \in L^2(0,T)$. Pokazać, że proces $X_t = \int_0^t f(s) \mathrm{d}W_s$, $t \in [0,T]$, jest gaussowski. Policzyć jego funkcje kowariancji

$$k(t,s) := \mathbb{E}\, X_t X_s.$$

Zadanie 6.42 Niech

$$X_i(t) = \int_0^t f_i(s) \mathrm{d}W(s),$$

gdzie $f_1, f_2 \in L^2(0,T)$. Pokazać, że proces $X_t = (X_1(t), X_2(t))$, $t \in [0,T]$, jest gaussowski. Policzyć jego macierz kowariancji

$$k_{i,j}(t,s) := \mathbb{E}\, X_i(t) X_j(s).$$

Zadanie 6.43 Niech

$$Z = Z_0 + A + M, \qquad Y = Y_0 + B + N,$$

będą ciągłymi semimartyngałami. Definiujemy całkę Stratonowicza wzorem

$$\int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}Z_s := \int_0^t Y_s \mathrm{d}Z_s + \frac{1}{2}\langle M, N\rangle_t.$$

Pokazać, że dla dowolnej funkcji $f \in C^3(\mathbb{R})$ zachodzi

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) \circ \mathrm{d}Z_s.$$

Zadanie 6.44 Pokazać, że przy oznaczeniach z poprzedniego zadania

$$\int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}Z_s = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k_n-1} \left(Y_{t_{j+1}^n} - Y_{t_j^n}\right)\left(Z_{t_{j+1}^n} - Z_{t_j^n}\right),$$

gdzie zbieżność jest według prawdopodobieństwa, a $\pi^n = (t_0^n, t_1^n, \ldots, t_{k_n}^n)$ jest ciągiem podziałów odcinka $[0,t]$ takim, że $\operatorname{diam}(\pi_n) \to 0$.

Zadanie 6.45 Niech $\mathbb{P}^W$ oznacza miarę Wienera na $C([0,1])$, to znaczy rozkład procesu Wienera na $C([0,1])$. Dla $h \in C([0,1])$ niech $\mathbb{P}_h^W(\Gamma) = \mathbb{P}^W(\Gamma + h)$, $\Gamma \in \mathcal{B}(C([0,1]))$ będzie nowym prawdopodobieństwem na $C([0,1])$. Pokazać, że:
(a) jeżeli $h(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s$, $0 \le t \le 1$, dla pewnej $g \in L^2([0,1])$ to $\mathbb{P}_h^W$ jest absolutnie ciągła względem $\mathbb{P}^W$. Znaleźć gęstość $\mathbb{P}_h^W$ względem $\mathbb{P}^W$.
(b) Pokazać, że jeśli h nie jest powyższej postaci, to $\mathbb{P}^W$ i $\mathbb{P}_h^W$ są wzajemnie singularne.

Zadanie 6.46 Niech $\sigma \in C(\mathbb{R}^d, M(d\times d))$, $b \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $a = \sigma\sigma^T$. Niech

$$L\psi(x) = \sum_{j=1}^d b_j(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Niech W będzie procesem Wienera o wartościach w $\mathbb{R}^d$, niech $\mathcal{O}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$, a (X_t^x) rozwiązaniem stochastycznego równania

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t$$

z warunkiem początkowym $X_0 = x$. Dla $x \in \mathcal{O}$ niech

$$\tau_x := \inf\left\{t \ge 0\colon X_t^x \notin \mathcal{O}\right\}.$$

Pokazać, że jeżeli istnieje funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ oraz $c > 0$ takie, że $f \ge 0$ na $\mathcal{O}$ oraz $Lf \le -c$ na $\mathcal{O}$, to $\mathbb{E}\,\tau_x < \infty$.

Zadanie 6.47 Przy założeniach z poprzedniego zadania przyjmijmy, że $\mathcal{O} = \{y \in \mathbb{R}^d : |y_1| \le R\}$, b_1 jest funkcją ograniczoną oraz

$$\inf_{y\in\mathcal{O}} a_{1,1}(y) > 0.$$

Pokazać, że $\mathbb{E}\,\tau_x < +\infty$ dla $x \in \mathcal{O}$.
Pod. Rozpatrzyć funkcję $f(y) = \cosh rR - \cosh ry_1$.

Zadanie 6.48 Niech $\Gamma(\alpha)$ będzie wnętrzem kąta na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o rozwartości α. Dla ustalonego $x \in D$ miech

$$X_t^x = x + W_t, \qquad t \ge 0$$

oraz niech

$$\tau = \inf\{t \ge 0 : X_t^x \notin D\}.$$

Pokazać, że $\mathbb{E}\,\tau < +\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha < \pi/2$.

Zadanie 6.49 Przy założeniach jak w Zadaniu 6.46 przyjmijmy dodatkowo, że obszar $\mathcal{O}$ jest ograniczony. Niech $v \in C^2(\mathbb{R}^d)$ będzie takie, że

$$Lv(x) = g(x) \text{ dla } x \in \mathcal{O}, \qquad v(x) = h(x) \text{ dla } x \in \partial\mathcal{O}.$$

gdzie $g \in C(\mathcal{O})$ i $h \in C(\partial\mathcal{O})$. Pokazać, że

$$v(x) = \mathbb{E}h(X_{\tau_x}^x) - \mathbb{E}\int_0^{\tau_x} g(X_s^x)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, x \in \mathcal{O}.$$

Zadanie 6.50 Niech $d = 1$, $\mathcal{O} = (a, b)$, $\infty < a < b < +\infty$. Załóżmy, że $\sigma^2(x) \ge \delta > 0$ dla $x \in [a, b]$. Policzyć $\mathbb{P}\{\tau_x = a\}$ dla $x \in (a, b)$.

Zadanie 6.51 Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym spełniającym warunek

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to+\infty} \langle M\rangle_t(\omega) = +\infty\right\} = 1.$$

Niech

$$\tau(t) = \inf\{s \ge 0 : \langle M\rangle_s > t\}, \qquad t \ge 0.$$

Pokazać, że dla każdego t, $\tau(t)$ jest momentem Markowa i że $B_t := M_{\tau(t)}$, $t \ge 0$, jest procesem Wienera.

Zadanie 6.52 Niech $A : [0,T] \mapsto M(d\times d)$, $\sigma : [0,T] \mapsto M(d\times m)$, $b : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^d$ będą odwzorowaniami ciągłymi. Niech W będzie m-wymiarowym procesem Wienera, a $S : [0,T] \mapsto M(d \times d)$ rozwiązanie (jedynym!) równania

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}(t) = A(t)S(t), \qquad S(0) = I.$$

Wykaż, że dla dowolnego $t \in [0, T]$, macierz $S(t)$ jest odwracalna a

$$X_t := S(t)x + \int_0^t S(t)S^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s + \int_0^T S(t)S^{-1}(s)\mathrm{d}W_s, \qquad t \in [0,T],$$

jest jedynym rozwiązaniem równania

$$\mathrm{d}X_t = (A(t)X_t + b(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x.$$

Zadanie 6.53 Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ będzie przestrzenią z filtracją, a

$$X\colon [0,+\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$$

niech będzie mierzalnym i $(\mathfrak{F}_t)$-adaptowanym procesem stochastycznym. Udowodnij, że X jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $0 \le s \le t < +\infty$ i $u \in \mathbb{R}^d$ zachodzi

$$\mathbb{E}\left(\exp\{\mathrm{i}\langle u, X_t - X_s\rangle\}|\mathfrak{F}_s\right) = \exp\{-(t-s)\|u\|^2/2\}.$$

Zadanie 6.54 ***(Twierdzenie Lévy'ego)*** Udowodnić, że jeżeli $M_1, \ldots, M_d$ są ciągłymi martyngałami lokalnymi takimi, że $\langle M_i, M_j\rangle_t = \delta_{i,j}t$ to $M = (M_1, \ldots, M_d)$ jest d-wymiarowym procesem Wienera.

Zadanie 6.55 Niech $T < +\infty$ oraz niech $X = (X_t)$ będzie procesem klasy $\mathcal{L}^2_T$. Pokazać, że jeżeli dla pewnej liczby $m \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mathbb{E}\int_0^T |X_t|^{2m}\mathrm{d}t < +\infty,$$

to

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X_t\mathrm{d}W_t\right)^{2m} \le (m(2m-1))^m\, T^{m-1}\mathbb{E}\int_0^T X_s^{2m}\mathrm{d}s.$$

Zadanie 6.56 Niech $W = (W^1, \ldots, W^d)$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera, a

$$R_t := \left(\sum_{k=1}^d \left(W_t^k\right)^2\right)^{1/2}, \qquad t \ge 0,$$

niech będzie tak zwanym procesem Bessela. Pokazać. że

$$B_t := \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{W_s^k}{R_s}\mathrm{d}W_s^k, \qquad t \ge 0,$$

jest jednowymiarowym procesem Wienera, a

$$R_t = \int_0^t \frac{d-1}{2R_s}\mathrm{d}s + B_t, \qquad t \ge 0.$$

Zadanie 6.57 Niech W będzie jednowymiarowym procesem Wienera. Korzystając z formuły na całkowanie przez części przedstawić

$$\int_0^t W_s^2 \mathrm{d}W_s, \qquad t \geq 0,$$

jako wyrażenie nie zawierające całki stochastycznej.

Zadanie 6.58 Niech W^1 i W^2 będą niezależnymi procesami Wienera. Policzyć

$$\langle W^1, W^2 \rangle.$$

Zadanie 6.59 Niech h będzie funkcją o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a, b]$, a f i g niech będą funkcjami ciągłymi na $[a, b]$. Zdefiniujmy

$$G(t) := \int_a^t g(s)\mathrm{d}h(s), \qquad t \in [a, b].$$

Udowodnij, że G ma wahanie ograniczone oraz

$$\int_a^b f(s)\mathrm{d}G(s) = \int_a^b f(s)g(s)\mathrm{d}h(s).$$

Zadanie 6.60 Niech X będzie martyngałame lokalnym takim, że $|X_t| \leq Y$, $t \geq 0$, gdzie Y jest zmienną losową spełniającą $\mathbb{E}\, Y < +\infty$. Pokazać, że X jest martyngałem.

Zadanie 6.61 Niech X będzie nieujemnym martyngałem lokalnym. Udowodnij, że X jest nadmartyngałem. Podaj przykład nieujemnego martyngału lokalnego, który nie jest martyngałem.

Zadanie 6.62 Niech M będzie całkowalnym z kwadratem martyngałem o ciągłych trajektoriach. Udowodnij. że dla dowolnego momentu Markowa τ,

$$\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau.$$

Zadanie 6.63 Niech W będzie procesem Wienera a X procesem klasy $\mathcal{P}_2$. Udowodnij, że dla dowolnego momentu Markowa

$$\int_0^{\tau \wedge t} X_s \mathrm{d}W_s = \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s^\tau = \int_0^t X_s \chi_{[0,\tau]}(s)\mathrm{d}W_s, \qquad t \geq 0.$$

Zadanie 6.64 Udowodnij, że jeżeli M jest martyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriach, to dla dowolnego mmomentu Markowa, M^τ jest martyngałem.

Zadanie 6.65 Niech $g \colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją harmoniczną w otoczeniu obszaru $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$. Niech W będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$ oraz niech

$$\tau^x := \inf\{t \geq 0 \colon W_t + x \notin \mathcal{O}\}, \qquad x \in \mathcal{O}.$$

Pokazać, że proces

$$g(W_{t\wedge\tau^x} + x), \qquad t \geq 0,$$

jest martyngałem.

Zadanie 6.66 Niech W będzie 3-wymiarowym procesem Wienera i niech $a \in \mathbb{R}^3$. Pokazać, że proces

$$X_t := \frac{1}{\|W_t - a\|_{\mathbb{R}^3}}, \qquad t \geq 0,$$

jest lokalnym martyngałem, ale nie jest martyngałem. Pokazać, że X jest nadmartyngałem oraz, że

$$\lim_{t\to+\infty} X_t = 0$$

$\mathbb{P}$-p.n. i w L^1.

Zadanie 6.67 Niech W będzie 2-wymiarowym procesem Wienera i niech $a \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$. Udowodnij, że proces

$$X_t = \log \|W_t - a\|_{\mathbb{R}^2}, \qquad t \geq 0,$$

jest martyngałem lokalnym. Wywnioskuj stąd, że z prawdopodobieństwem 1 proces W omija punkt a, ale trajektorie procesu W są dowolnie blisko a.

6.13 Zadania uzupełniające z [12]

W zadaniach W, o ile nie jest to stwierdzone inaczej, jest standardowym procesem Wienera na $\mathbb{R}$.

Zadanie 6.68 Udowodnij *mocną własność Markowa procesu Wienera*, która mówi, że dla dowolnego momentu Markowa względem filtracji $(\mathfrak{F}_t^W)$ generowanej przez W, proces

$$\{W_{t+\tau} - W_t \colon t \geq 0\}$$

jest procesem Wienera niezależnym od

$$\mathfrak{F}_\tau^+ := \bigcap_{t>\tau} \sigma\left(W_s \colon 0 \leq s \leq t\right).$$

Zadanie 6.69 Udowodnij, że proces $B = (B_t)$ zdefiniowany następująco $B_0 = 0$,

$$B_t = tW_{\frac{1}{t}}, \qquad t > 0,$$

jest procesem Wienera. W szczególności pokazać, że z prawdopodobieństwem $\mathbb{P} = 1$ zachodzi

$$\lim_{t\downarrow 0} tW_{\frac{1}{t}} = 0.$$

Zadanie 6.70 Udowodnij, że dla dowolnych $0 \leq s \leq t$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ zmienna losowa

$$aW_s + bW_t$$

ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną 0 i wariancją

$$\left(a^2 + 2ab\right) s + b^2 t.$$

Zadanie 6.71 Udowodnij, że dla dowolnych $0 < s < t \leq u < v$:

a) Zmienne losowe

$$\frac{1}{t} W_t - \frac{1}{s} W_s$$

oraz

$$aW_u + bW_v$$

są niezależne dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Zmienne losowe

$$aW_s + bW_t$$

oraz

$$\frac{1}{v} W_v - \frac{1}{u} W_u$$

są niezależne dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ spełniających $as + bt = 0$.

Zadanie 6.72 Niech $X = (X_t,\, t \geq 0)$, będzie procesem stochastycznym adaptowanym do filtracji $(\mathfrak{F}_t)$. Pokazać, że jeżeli dla dowolnych $0 \leq s \leq t$ zmienna losowa $X_t - X_s$ nie zależy of $\mathfrak{F}_s$, to proces X ma przyrosty niezależne.

Zadanie 6.73 Pokazać, że dla dowolnych $y > 0$ oraz $t > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq y\right) \leq 2\mathbb{P}\left(W_t \geq y\right).$$

Zadanie 6.74 Pokazać, że

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \to +\infty} W_t = +\infty\right) = 1 = \mathbb{P}\left(\liminf_{t \to +\infty} W_t = -\infty\right).$$

Zadanie 6.75 Udowodnić następującą *zasadę odbicia procesu Wienera*: dla dowolnego momentu Markowa τ względem filtracji generowanej przez proces Wienera W proces

$$\tilde{W}_t = \begin{cases} W_t & \text{dla } t < \tau, \\ 2W_\tau - W_t & \text{dla } t \geq \tau \end{cases}$$

jest standardowym procesem Wienera.

Zadanie 6.76 Dla $a \in \mathbb{R}$ niech

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0\colon W_t = a\}.$$

Pokazać, że gdy $a > 0$, to dla dowolnego $b \leq a$ i $t \geq 0$, zachodzi

$$\mathbb{P}\{\tau_a \leq t,\ W_t \leq b\} = \mathbb{P}\{W_t \geq 2a - b\}.$$

Zadanie 6.77 Niech $a > 0$ i niech τ_a będzie jak w poprzednim zadaniu. Niech

$$W_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s, \qquad t \geq 0.$$

Pokazać, że:

a) Zachodzi równość
$$\mathbb{P}\{W_t^* > a\} = 2\mathbb{P}\{W_t > a\}.$$

b) Rozkład momentu Markowa τ ma gęstość

$$f_a(x) = x^{-3/2} a \psi\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right), \qquad x > 0,$$

gdzie
$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, \qquad y > 0.$$

c) Dla dowolnego $t > 0$, wektor losowy (W_t^*, W_t) ma rozkład z gęstością

$$f_{W_t^*, W_t}(x, y) = \begin{cases} \frac{2(2x-y)}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(2x-y)^2}{2t}\right\} & \text{gdy } y \leq x,\ x \geq 0, \\ 0 & \text{gdy } y < x \text{ lub } x < 0. \end{cases}$$

7

Procesy Markowa w czasie ciągłym

Definicja 7.1 Rodzina miar probabilistycznych $(P_t(x,\cdot),\ t \geq 0,\ x \in E)$ na przestrzeni mierzalnej $(E, \mathcal{E})$ jest *prawdopodobieństwem przejścia* gdy:

- dla każdego $x \in E$, $P_0(x,\cdot) = \delta_x$,
- dla każdego $\Gamma \in \mathcal{E}$ i dla każdego $t \geq 0$, funkcja

  $$E \ni x \mapsto P_t(x,\Gamma) \in \mathbb{R}$$

  jest mierzalna,
- spełnione jest równanie Chapmanna–Kołmogorowa

  $$P_{t+s}(x,\Gamma) = \int_E P_t(x,\mathrm{d}y)P_s(y,\Gamma), \qquad \forall\, t,s \geq 0,\ \Gamma \in \mathcal{E}.$$

Niech $(P_t(x,\cdot))$ będzie prawdopodobieństwem przejścia na $(E,\mathcal{E})$. Niech $B_b(E)$ oznacza przestrzeń funkcji mierzalnych ograniczonych na E. Wzór

$$P_t\psi(x) := \int_E \psi(y)P_t(x,\mathrm{d}y), \qquad \psi \in B_b(E),\ t \geq 0,\ x \in E,$$

definiuje półgrupe przejścia (P_t) na $B_b(E)$, to znaczy

- $P_t\colon B_b(E) \mapsto B_b(E)$, $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, \psi \in B_b(E)$, jest odwzorowaniem liniowym,
- $P_{t+s} = P_tP_s$, $\forall\, t,s \geq 0$,
- P_0 jest odworowaniem identycznościowym.

Sprawdzimy półgrupowość. W tym celu zauważmy, że z równania Chapmanna–Kołmogorowa mamy

$$P_{t+s}(x,\mathrm{d}y) = \int_E P_t(x,\mathrm{d}z)P_s(z,\mathrm{d}y).$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
P_{t+s}\psi(x) &= \int_E \psi(y) P_{t+s}(x, \mathrm{d}y) \\
&= \int_E \int_E \psi(y) P_s(z, \mathrm{d}y) P_t(x, \mathrm{d}z) \\
&= \int_E \left(\int_E \psi(y) P_s(z, \mathrm{d}y) \right) P_t(x, \mathrm{d}z) \\
&= \int_E P_s\psi(z) P_t(x, \mathrm{d}z) \\
&= P_t \left(P_s\psi \right)(x).
\end{aligned}
$$

Niech (E,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Oznaczmy przez $C_b(E)$ przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych na E. Niech $(P_t(x,\cdot))_{x\in E,\, t\geq 0}$ będzie prawdopodobieństwem przejścia, a $(P_t)_{t\geq 0}$ odpowiadającą mu półgrupą przejścia.

Definicja 7.2 Prawdopodobieństwo przejścia $(P_t(x,\cdot))_{x\in E,\, t\geq 0}$ jest fellerowskie gdy

$$
P_t \colon C_b(E) \mapsto C_b(E), \qquad \forall\, t \geq 0.
$$

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją.

Definicja 7.3 Proces $X = (X(t))_{t\geq 0}$ o wartościach w E jest *Markowa* ze względu na filtracje $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ z prawdopodobieństwem przejścia $(P_t(x,\cdot))_{t\geq 0,\, x\in E}$ gdy:

- X jest $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptowany,
- dla dowolnych $t,h\geq 0$ oraz $\psi\in B_b(E)$ zchodzi

$$
\mathbb{E}\left(\psi(X(t+h))|\mathfrak{F}_t\right) = P_h\psi(X(t)), \qquad \mathbb{P}-p.n.
$$

Przypomnijmy, że przestrzeń metryczna E jest polską gdy jest ośrodkowa i zupełna. Niech $B(x,r)$ oznacza kule w E o środku w x i promieniu r.

Twierdzenie 7.1 ***(Kinney'a)*** *Jeżeli X jest procesem Markowa na przestrzeni polskiej E takim, że*

$$
\min_{t\downarrow 0} \sup_{x\in E} P_t\left(x, B^c(x,r)\right) = 0, \qquad \forall\, r>0,
$$

to X ma modyfikacje càdlàg.

7.1 Procesy Lévy'ego

Niech X będzie procesem Lévy'ego o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Ponieważ X ma przyrosty stacjonarne

$$
P_t(x,\Gamma) := \mathbb{P}\left(X_{t+s}\in\Gamma | X_s = x\right), \qquad t>0,\ \Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),
$$

jest dobrze określone (prawa strona nie zależy od $s>0$).

Twierdzenie 7.2 *Procesy Lévy'ego są procesami Markowa względem własnej filtracji.*

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\psi(X_{t+h})|\mathfrak{F}_t\right) &= \mathbb{E}\left(\psi(X_{t+h} - X_t + X_t)|\mathfrak{F}\right)\\ &= P_t\psi(X_t).\end{aligned}$$

Jako wniosek z twierdzenia Kinney'a mamy następujący ważny fakt.

Wniosek 7.1 *Każdy proces Lévy'ego ma modyfikacje càdlàg.*

7.1.1 Procesy Poissona

Niech $\mathcal{P}(\gamma)$ oznacza *rozkład Poissona z intensywnością* $\gamma \in (0. + \infty]$. Przypomnijmy, że

$$\mathcal{P}(+\infty)\{+\infty\} = 1,$$

$$\mathcal{P}(\gamma)\{k\} = \frac{\gamma^k}{k!}\mathrm{e}^{-\gamma}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \ \gamma < +\infty.$$

Lemat 7.1 *Jeżeli* (X_n) *jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych, takich, że* X_n *ma rozkład Poissona* $\mathcal{P}(\gamma_n)$*, to* $\sum_{n=1}^\infty X_n$ *ma rozkład Poissona* $\mathcal{P}(\sum_{n=1}^\infty \gamma_n)$.

Lemat 7.2 *Transformata Laplace'a rozkładu* $\mathcal{P}(\gamma)$ *wynosi*

$$\eta(r) = \begin{cases}\exp\left\{\gamma\left(\mathrm{e}^{-r} - 1\right)\right\} & \textit{gdy } \gamma \neq +\infty,\\ 0 & \textit{gdy } \gamma = +\infty.\end{cases}$$

Dowód. Z definicji

$$\eta(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-rk}\mathcal{P}(\{k\}).$$

Stąd $\eta(r) = 0$ gdy $\gamma = +\infty$. Gdy $\gamma \neq +\infty$, to

$$\eta(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-rk}\frac{\gamma^k}{k!}\mathrm{e}^{-\gamma} = \exp\left\{\gamma\left(\mathrm{e}^{-r} - 1\right)\right\}. \qquad \square$$

Definicja 7.4 *Procesem Poissona z intensywnością* $\gamma > 0$ nazywamy proces Lévy'ego $\Pi = (\Pi_t)_{t\geq 0}$ taki, że dla każdego $t > 0$, Π_t ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(t\gamma)$.

Twierdzenie 7.3 (*i*) *Niech* (Z_n) *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem* γ*. Wówczas*

$$\Pi_t = \begin{cases} 0 & \textit{gdy } t < Z_1,\\ k & \textit{gdy } t \in [Z_1 + \ldots + Z_k, Z_1 + \ldots Z_{k+1}),\end{cases} \tag{7.1}$$

jest procesem, Poissona z intensywnością γ.
(ii) Jeżeli Π jest procesem Poissona z intensywnością γ, to istnieje ciąg (Z_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem γ taki, że zachodzi (7.1).
(iii) Jeżeli Π jest procesem Poissona z intensywnością γ, to

$$\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{z\pi(t)} = \exp\left\{\gamma t\left(\mathrm{e}^z - 1\right)\right\}, \qquad z \in \mathbb{C},\ t \geq 0.$$

(iv) Jeżeli Π jest procesem Poissona, to Π ma skoki o długości 1, to znaczy

$$\mathbb{P}\left(\Pi_t - \Pi_{t-} \in \{0,1\}\right) = 1, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Odwrotnie, każdy proces Lévy'ego o wartościach w $\{0,1,\ldots\}$ i skokach 1 jest procesem Poissona.

Lemat 7.3 *Załóżmy, że Z jest zmienną losową o wartościach nieujemnych, taką, że*

$$\mathbb{P}\left(X > t+s | Z > t\right) = \mathbb{P}\left(Z > t\right), \qquad \forall\, t,s \geq 0.$$

Wówczas Z ma rozkład wykładniczy, to znaczy istnieje $\gamma > 0$ takie, że

$$\mathbb{P}\left(Z > t\right) = \mathrm{e}^{-\gamma t}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Dowód. Niech

$$G(s) := \mathbb{P}\left(Z > s\right), \qquad s \geq 0.$$

Oczywiście G jest funkcją nieujemną i prawostronnie ciągłą. Ponadto

$$\begin{aligned} G(t+s) &= \frac{\mathbb{P}\left(Z > t+s \text{ i } tZ > t\right)}{\mathbb{P}\left(Z > t\right)}\mathbb{P}\left(Z > t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z > t+s|Z > t\right)\mathbb{P}\left(Z > t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z > s\right)\mathbb{P}\left(Z > s\right) \\ &= G(s)G(t). \qquad \square \end{aligned}$$

Niech (ξ_k) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie

$$\mathbb{P}\left(\xi_k = 1\right) = p, \qquad \mathbb{P}\left(\xi_k = 0\right) = 1-p.$$

Wówczas zmienna losowa

$$Z = \inf\left\{n \colon \xi_n = 1\right\}$$

ma rozkład geometryczny z parametrem p, to znaczy

$$\mathbb{P}\left(Z = k\right) = (1-p)^{k-1}\,p, \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Lemat 7.4 *Niech $\gamma > 0$ oraz niech (Z_n) ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n = \gamma/n$. Niech μ_n będzie rozkładem Z_n/n. Wówczas (μ_n) zbiega słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem γ.*

Dowód. Dla ustalonych $n = 1, 2, \ldots$ i $z \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_n(z) &= \mathbb{E}\, \exp\left\{\frac{\mathrm{i}zZ_n}{n}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{\mathrm{i}zk}{n}\right\}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{k-1}\frac{\gamma}{n} \\
&= \frac{\gamma}{n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}z}{n}}\left(1 - \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}z}{n}}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Stąd ciąg $(\widehat{\mu}_n(z))$ zbiega do funkcji charakterystycznej rozkładu wykładniczego, to jest do

$$\gamma \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}zr}\mathrm{e}^{-\gamma r}\mathrm{d}r = \frac{\gamma}{\gamma - \mathrm{i}z}. \qquad \square$$

Dowód Twierdzenia 7.3(i). Niech μ będzie rozkładem wykładniczym z parametrem γ i niech (Z_k) będzie ciągiem niezależnych zmienych losowych o rozkładzie μ. Wówczas rozkładem

$$Z_1 + \ldots + Z_n$$

jest

$$\mu^n = \mu * \mu * \ldots * \mu,$$

gdzie $*$ jest operatorem splotu. Dla $n \geq 1$ miara μ^n ma gęstość

$$g_n(r) = \gamma\frac{(\gamma r)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\gamma r}, \qquad r > 0.$$

Zauważmy, że dla $k = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Pi_t = k\right) &= \mathbb{P}\left(Z_1 + \ldots + Z_n \leq t < Z_1 + \ldots + Z_n + Z_{n+1}\right) \\
&= \int\int_{\{r \leq t \leq r+z\}} g_n(r)g_1(z)\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= \int_0^t \int_{t-r}^{\infty} g_1(z)\ dz g_n(r)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^t g_n(r)\mathrm{e}^{-\gamma(t-r)}\mathrm{d}r \\
&= \frac{\gamma^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\gamma t}\int_0^t r^{n-1}\mathrm{d}r \\
&= \frac{(\gamma t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\gamma t}.
\end{aligned}$$

Czyli Π_t ma rozkład $\mathcal{P}(\gamma t)$.

Pokażemy, że Π ma przyrosty niezależne i stacjonarne. Ustalmy

$$0 \leq t_1 < \ldots < t_k.$$

Dla każdego n niech $\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że dla wszystkich m, n,

$$\mathbb{P}\left(\xi_m^n = 1\right) = \frac{\gamma}{n}, \qquad \mathbb{P}\left(\xi_m^n = -1\right) = 1 - \frac{\gamma}{n}.$$

Niech $\Pi^n(m)$ będzie liczbą sukcesów (wystąpień 1) w ciągu

$$\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_m^n.$$

Definiujemy $m_l^n = [nt_l]$. Z definicji

$$\Pi^n(m_1^n), \Pi^n(m_2^n) - \Pi^n(m_1^n), \ldots, \Pi^n(m_k^n) - \Pi^n(m_{k-1}^n),$$

są niezależne. Z Lematu 7.4, ciąg ich rozkładów łącznych zbiega do rozkładu wektora

$$\Pi(t_1), \Pi(t_2) - \Pi(t_1), \ldots, \Pi(t_k) - \Pi(t_{k-1}). \qquad \square$$

Dowód Twierdzenia 7.3(ii). Definiujemy ciąg (Z_k) w następujący sposób

$$Z_1 = \inf\{t \colon \Pi_t = 1\},$$

$$Z_1 + \ldots + Z_n = \inf\{t \colon \Pi_t = n\}.$$

Teza wynika z faktu, że pozkład Π jest jednoznacznie wyznaczony przez rodzine łącznych rozkładów $(\Pi_{t_1}, \Pi_{t_2}, \ldots, \Pi_{t_n})$. $\square$

Dowód Twierdzenia 7.3(iii). Dla $z \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$, mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, \mathrm{e}^{z\Pi_t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{zk} \mathbb{P}\left(\Pi_t = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\gamma t} \mathrm{e}^{zk} \frac{(\gamma t)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma t \mathrm{e}^z)^k}{k!} \\ &+ \mathrm{e}^{-\gamma t} \mathrm{e}^{\gamma t \mathrm{e}^z}. \qquad \square\end{aligned}$$

Zadanie 7.1 Niech $\Pi = (\Pi_t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Pokazać, że

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Pi_t}{t} = \lambda, \qquad \mathbb{P} - \text{p.n.}$$

Zadanie 7.2 Niech $\Pi = (\Pi_t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Dla $0 \leq s \leq t < \infty$ i $k \leq n, k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ policzyć

$$\mathbb{P}\left(\Pi_t = n | \Pi_s = k\right).$$

Zadanie 7.3 Niech Π_1 i Π_2 będą niezależnymi procesami Poissona z intensywnościami odpowiednio γ_1 i γ_2. Pokazać, że proces $\Pi_1 + \Pi_2$ jest Poissona z intensywnością $\gamma_1 + \gamma_2$.

Zadanie 7.4 Niech Π będzie procesem Poissona z intensywnością γ oraz niech $\tilde{\Pi}_t = \Pi_t - \gamma t$, $t \geq 0$, będzie skompensowanym procesem Poissona. Pokazać, że

$$\mathbb{E} \exp\left\{x\left(\tilde{\Pi}_t - \tilde{\Pi}_s\right)\right\} = \exp\left\{\gamma(t-s)\left(\mathrm{e}^x - x - 1\right)\right\}, \qquad 0 \leq s \leq t,\ x \in \mathbb{R}.$$

Wywnioskować z tego, że

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\tilde{\Pi}_t - \tilde{\Pi}_s\right) &= 0,\\
\mathbb{E}\left(\tilde{\Pi}_t - \tilde{\Pi}_s\right)^2 &= \gamma(t-s),\\
\mathbb{E}\left(\tilde{\Pi}_t - \tilde{\Pi}_s\right)^3 &= \gamma(t-s),\\
\mathbb{E}\left(\tilde{\Pi}_t - \tilde{\Pi}_s\right)^4 &= \gamma(t-s) + 3\gamma^2\left(t-s\right)^2.
\end{aligned}$$

Zadanie 7.5 Niech Π będzie procesem Poissona z intensywnością γ oraz niech $\tilde{\Pi}$ będzie procesem skompensowanym. Niech

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\left(\Pi_s \colon 0 \leq s \leq t\right), \qquad t \geq 0,$$

będzie filtracją generowaną przez Π.

Pokazać, że:

a) Proces
$$M_t := \tilde{\Pi}_t^2 - \gamma t, \qquad t \geq 0,$$
jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)$.

b) Dla dowolnego $\sigma > -1$ i $X_0 > 0$ proces (*geometryczny proces Poissona*)
$$X_t = X_0 \exp\left\{\Pi_t \log\left(1+\sigma\right) - \gamma\sigma t\right\}, \qquad t \geq 0,$$
jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)$.

Zadanie 7.6 Niech $\tilde{\Pi}$ będzie skompensowanym procesem Poissona z parametrem γ. Niech $t > 0$ oraz niech $\{t_k^n \colon k = 0, \ldots, l_n\}$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[0,t]$, to znaczy niech dla dowolnego n, $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots t_{l_n}^n = t$. Załóżmy, że średnica podziałów zbiega do 0 gdy $n \to +\infty$, to znaczy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \max\left\{t_{k+1}^n - t_k^n \colon k = 0, \ldots, l_n - 1\right\} = 0.$$

Pokazać, że

$$L^2 - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{l_n-1} \left(\tilde{\Pi}_{t_{k+1}^n} - \tilde{\Pi}_{t_k^n}\right)^2 = \gamma t + \tilde{N}_t.$$

7.2 Złożony proces Poissona

Niech μ będzie miarą skończoną na $\mathbb{R}^d$. Niech (ξ_k) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mu/\mu(\mathbb{R}^d)$. Niech (Z_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\gamma = \mu(\mathbb{R}^d)$. Dodatkowo zakładamy, że (Z_n) są niezależne od (ξ_k).

Definicja 7.5 Proces dany wzorem

$$L_t := \begin{cases} \xi_1 + \dots \xi_n & \text{gdy } t \in [Z_1 + \dots + Z_n, Z_1 + \dots Z_n + Z_{n+1}) \\ 0 & \text{gdy } t \in [0, Z_1), \end{cases}$$

nazywamy *złożonym procesem Poissona z miarą skoków (miarą Lévy'ego)* μ. Proces

$$\widehat{L}_t := L_t - t\mathbb{E}\, Z_1 = L_t - t \int_{\mathbb{R}^d} x\mu(\mathrm{d}x), \qquad t \geq 0,$$

nazywamy *skompensowanym złożonym procesem Poissona.*

Złożony proces Poissona oraz skompensowany złożony proces Poissona są procesami Lévy'ego.

7.3 Losowa miara Poissona

Niech L będzie procesem Lévy'ego o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Niech $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ będzie taki, że

$$0 \notin \overline{\Gamma}.$$

Wówczas dla każdego $t \in [0, +\infty)$,

$$\pi_L([0,t] \times \Gamma) := \#\{s \in [0,t] \colon \Delta L(s) = L(s) - L(s-) \in \Gamma\} < \infty, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Niech $\Sigma(\mathbb{R}^d)$ oznacza zbiór wszystkich miar ρ na $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ takich, że

$$\rho(\Gamma) \in \{0, 1, \dots\} \cup \{+\infty\} = \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Na $\Sigma(\mathbb{R}^d)$ rozważamy σ-ciało $\mathfrak{S}$ generowane przez rodzinę odwzorowań

$$\Sigma(\mathbb{R}^d) \ni \rho \mapsto \rho(\Gamma) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}, \qquad \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d).$$

Można pokazać, że π_L rozszerza się do mierzalnego odwzorowania z $(\Omega, \mathfrak{F})$ do $\big(\Sigma(\mathbb{R}^d), \mathfrak{S}\big)$.

Definicja 7.6 Tak rozszerzone odwzorowanie (ciągle oznaczone przez π_L) nazywaly *losową miarą Poissona procesu Lévy'ego* L.

Niech π_L będzie losową miarą Poissona procesu Lévy'ego L. Niech

$$\mu_L(\Gamma) := \mathbb{E}\,\pi_L([0,1]\times\Gamma) = \frac{1}{t}\mathbb{E}\,\pi_L([0,t]\times\Gamma), \qquad t\geq 0,\ \Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Okazuje się, że μ_L jest miarą na $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ spełniającą

$$\mu_L(\{0\}) = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} x^2\wedge 1\mu_L(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Miara μ_L nie zawsze jest skończona. Jest skończona gdy proces jest złożonym procesem Poissona. W pewnym sensie tylko w tym przypadku.

Definicja 7.7 Miarę μ_L nazywamy *miarą Lévy'ego* lub *miarą skoków* procesu L.

7.4 Zadania

Zadanie 7.7 Jaka jest kowariancja procesu Poissona?

Zadanie 7.8 Niech ξ będzie zmienną losową. Kiedy proces $X_t = \chi_{[0,\xi]}(t)$, $t\geq 0$, jest stochastycznie ciągły?

Zadanie 7.9 Pokazać, że skompensowany złożony proces Poisson jest martyngałem. Kiedy jest on całkowalny z kwadratem? Ile wtedy wynosi jego wariancja kwadratowa?

Zadanie 7.10 Policzyć transformacje Laplace'a i funkcje charakterystyczną (transformacje Fouriera) złożonego procesu Poissona.

Literatura

1. R.F. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*, Springer 1992.
2. R.F. Bass, *Diffusions and elliptic operators*, Springer 1997.
3. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons, New York 1968.
4. P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987.
5. A.A. Borowkow, *Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1975.
6. Z. Brzeźniak, T. Zastawniak, *Basic stochastic processes*, Springer, London 1999.
7. R.M. Dudley, *Real analysis and probability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2002.
8. S.N. Ethier, T.G. Kurtz, *Markov processes. Characterization and convergence*, John Wiley & Sons, New York 1986.
9. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa I*, PWN, Warszawa 1977.
10. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa II*, PWN, Warszawa 1981.
11. A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications*, vol. I, Academic Press 1975.
12. G. Gan, C. Ma, H. Xie, *Measure, probability, and mathematical finance; a problem-orientated approach*, Wiley 2014.
13. I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *Introduction to the theory of random processes*, Dover Publications, New York 1996.
14. I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *The theory of stochastic processes I*, Springer-Verlag, Berlin 2004.
15. I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *The theory of stochastic processes II*, Springer-Verlag, Berlin 2004.
16. I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *The theory of stochastic processes III*, Springer-Verlag, Berlin 2007.
17. G. Grimmett, D. Stirzaker, *Probability and random processes*, Oxford University Press, Oxford 2001.
18. G. Grimmett, D. Stirzaker, *One thousand exercises in probability*, Oxford University Press, Oxford 2007.
19. J. Hoffmann-Jorgensen, *Probability with a view towards statystics*, vol. I, vol. II, Chapman & Hall 2003.
20. A. Iwanik, J.K. Misiewicz, *Wykłady z procesów stochastycznych z zadaniami. Część pierwsza: Procesy Markowa*, Script, Warszawa 2010.

21. J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa 2000.
22. O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Springer, New York 2002.
23. J.F.C. Kingman, *Procesy Poissona*, PWN, Warszawa 2002.
24. S. Kwapień, S.W. Woyczynski, *Random series and stochastic integrals: single and multiple*, Birkhäuser 1992.
25. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1969.
26. F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1979.
27. R.Sz. Lipcer, A.N. Sziriajew, *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1981.
28. S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1976.
29. M. Métivier, *Semimartingales, a course on stochastic processes*, de Gruyter 1982.
30. J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.
31. J.R. Norris, *Markov chains*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.
32. M. Ondreját and J. Seidler, *On existence of progressively measurable modifications*, Electron. Commun. Probab. 18 (2013), 1–6.
33. P. Protter, *Stochastic integration and differential equations.* Springer 2005.
34. L.C.G. Rogers, D. Wiliams, *Diffusions, Markov processes and martingales vol. I, vol. II*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.
35. W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.
36. W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa 1986.
37. Z. Schuss, *Teoria i zastosowania stochastycznych równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1989.
38. Y. G. Sinai, *Probability theory*, Springer-Verlag, Berlin 1992.
39. F. Spitzer, *Principles of random walk*, Springer-Verlag, Berlin 1976.
40. J.M. Steele, *Stochastic calculus and financial applications*, Springer 2001.
41. J. Stoyanov, *Counterexamples in probability*, Dover Publications, Mineola, New York 2013.
42. D. Stroock, *Probability theory, an anlytic view*, Cambridge Univ. Press, New York 2000.
43. D. Stroock, *An introduction to Markov processes*, Springer, Berlin 2005.
44. A.D. Wentzell, *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1980.