S. Peszat

Analiza stochastyczna

5 marca 2018

Spis treści

Przedmowa

Tekst zawiera notatki do semestralnych wykładów z ćwiczeniami p.t. "Analiza stochastyczna" i "Analiza stochastyczna w finansach" prowadzonego przez autora dla studentów czwartego roku matematyki WMiI UJ. Oparty jest w dużej mierze na książkach [2, 18, 25]. Ostatnia część poświęcona stochastycznym stopą procentowym oparta jest na notatkach Prof. Tomasza Zastawniaka z Uniwersytetu York.

Zagadniena na egzamin z Analiza Stochastyczna

- Zastosowanie twierdzenie o zbieżności martyngałów do aproksymacja w $L^2(0,T)$.
- Aproksymacja procesu klasy $\mathcal{L}^2$ procesami prostymi.
- Całka z procesów klasy $\mathcal{L}^2$.
- Problemy z progresywną mierzalnością.
- Całka z procesów klasy $\mathcal{P}^2$ - lokalizacja.
- Własności całki funkcji klasy $\mathcal{P}^2$.
- Całka jako granica według prawdopodobieństa.
- Martyngły lokalne i procesy Itô.
- Wzór Itô (z przykładami).
- Wzór Itô - szkic dowodu.
- Różniczka iloczynu.
- Powracanie i uciekanie.
- Twierdzenie o reprezentacji.
- Wielomiany Hermite'a.
- Semimartyngały.
- Twierdzenie Lévy'ego.
- Twierdzenie Girsanowa.

Zagadniena na egzamin z Analiza Stochastyczna w Finansach

- Całka z procesów klasy $\mathcal{L}^2$.
- Całka z procesów klasy $\mathcal{P}^2$ - lokalizacja.

- Własności całki funkcji klasy $\mathcal{P}^2$.
- Martyngły lokalne i procesy Itô.
- Wzór Itô (z przykładami).
- Wzór Itô - szkic dowodu.
- Różniczka iloczynu.
- Twierdzenie o reprezentacji.
- Semimartyngały.
- Twierdzenie Lévy'ego.
- Twierdzenie Girsanowa.
- Równanie Blacka–Scholesa.
- Wzory na cenę opcji europejskiej dla modelu BS z Fundamentalnego Twierdzenia Wyceny.
- Miary martyngałowe spot i forward.
- Modele stopy krótkiej.
- Model Mertona.
- Model Vasicka.
- Modele afiniczne.
- Model HJM (model Heath–Jarrow–Morton).
- Wycena obligacji na drzewach binarnych (warunek na brak arbitrażu).
- Model HL (model Ho–Lee).
- Model HJM (model Heath–Jarrow–Morton) na drzewie binarnym.

1

Całka stochastyczna Itô

Celem tego rozdziału jest konstrukcja całki stochastycznej Itô. Pierwsze trzy paragrafy zawierają wyniki wstępne. Najpierw przypomnimy twierdzenie Doba o zbieżności nadmartyngałów. Następnie wyprowadzimy z niego twierdzenie o aproksymacji funkcji całkowalnej z kwadratem przez funkcje proste (schodkowe). Przypomnimy pojęcie procesu progresywnie mierzalnego. Podamy twierdzenie Dellacherie–Meyera o istnieniu progresywnie mierzalnej modyfikacji procesu mierzalnego i adaptowanego. Następnie udowodnimy twierdzenie o aproksymacji procesu klasy $\mathcal{L}^2$ procesami prostymi. W paragrafie 1.5 przypomnimy definicje procesu Wienera. Następnie zdefiniujemy całkę z procesu klasy $\mathcal{L}^2$. Zbadamy jej własności. Na koniec rozszerzymy pojęcie całki na procesy klasy $\mathcal{P}^2$.

1.1 Twierdzenie o zbieżności nadmartyngałów

Niech $[a,b]$ gdzie $a < b$ będzie ustalonym przedziałem liczbowym. Dla ciągu liczbowego (x_n) definiujemy indukcyjnie

$$\begin{aligned} \tau_0 &:= \inf\{n\colon x_n < a\}, \\ \tau_1 &:= \inf\{n > \tau_0\colon x_n > b\} \end{aligned}$$

oraz dla $k = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} \tau_{2k} &:= \inf\{n > \tau_{2k-1}\colon x_n < a\}, \\ \tau_{2k+1} &:= \inf\{n > \tau_{2k}\colon x_n > b\}. \end{aligned}$$

Następnie niech

$$U_a^b := \begin{cases} \sup\{k \geq 1\colon \tau_{2k-1} < \infty\} & \text{gdy } \tau_1 < +\infty, \\ 0 & \text{gdy } \tau_1 = +\infty. \end{cases}$$

Zauważmy, że U_a^b jest liczbą przejść w górę przez przedział $[a,b]$ ciągu (x_n).

Lemat 1.1 *Ciąg liczbowy* (x_n) *jest zbieżny (do być może nieskończonej granicy) wtedy i tylko wtedy gdy*

$$U_a^b < \infty, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Q}\colon a < b. \tag{1.1}$$

Dowód. Istnienie (być może niewłaściwej) granicy oznacza, że

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

Konieczność warunku (1.1) do istnienia granicy ciągu (x_n) uzasadnimy niewprost. Załóżmy, że dla jakiś wymiernych $a < b$, $U_a^b = +\infty$. Wówczas nieskończenie przejść pociąga za sobą istnienie podciągów (k_n) i (l_n) liczb naturalnych, takich, że

$$x_{k_n} < a, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{oraz} \qquad x_{l_n} > b, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Stąd

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n \geq b, \qquad \liminf_{n\to+\infty} x_n \leq a$$

i granice nie są równe. Pokazujemy dostateczność. Jeżeli (x_n) nie jest zbieżny to dla pewnych wymiernych $a < b$ zachodzi

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n \geq b, \qquad \liminf_{n\to+\infty} x_n \leq a.$$

Stąd istnieją podciągi (k_n) i (l_n) takie, że

$$x_{k_n} < a, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{oraz} \qquad x_{l_n} > b, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Stąd $U_a^b = +\infty$. $\qquad\square$

Lemat 1.2 *Niech* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie nadmartyngałem. Wtedy dla dowolnych* $a < b$ *mamy*

$$\mathbb{E}\, U_a^b([m]) \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}\,(X_m - a)^- ,$$

gdzie $U_a^b[m]$ *oznacza (losową) liczbę przejść w górę przez odcinek* $[a, b]$ *ciągu* $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Dowód. Niech (τ_k) będą określone jak w definicji U_a^b. Niech $\tau_k' = \tau_k \wedge m$, $k \in \mathbb{N}$. Rozważmy zmienne losowe

$$X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Mamy następujące przypadki

(1) $k+1$-przejście w górę zakończyło się przed chwilą m. To znaczy $\tau_{2k} \leq m$, $\tau_{2k+1} \leq m$. Wtedy

$$X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} = X_{\tau_{2k+1}} - X_{\tau_{2k}} > b - a.$$

(2) $k+1$-wsze przejście nie zakończyło się całkowicie przed chwilą m. To znaczy: $\tau_{2k} \leq m$ ale $\tau_{2k+1} > m$. Wtedy

$$X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} = X_m - X_{\tau_{2k}} \geq X_m - a \geq -(X_m - a)^- ,$$

bo dla dowolnej liczby $x \geq -x^-$.

(3) $k+1$-wsze przejście nie rozpoczeło się przed chwilą m. Czyli $\tau_{2k} > m$. Wtedy

$$X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} = X_m - X_m = 0.$$

Dodając więc stronami otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{m} \left(X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} \right) \geq (b-a) U_a^b([m]) - (X_m - a)^- .$$

Z twierdzenia Dooba o stopowaniu[1] mamy

$$\mathbb{E}\, X_{\tau'_{2k}} \geq \mathbb{E}\, X_{\tau'_{2k+1}}.$$

Stąd

$$0 \geq \mathbb{E} \sum_{k=0}^{m} \left(X_{\tau'_{2k+1}} - X_{\tau'_{2k}} \right) \geq (b-a) \mathbb{E}\, U_a^b([m]) - \mathbb{E}\,(X_m - a)^- .$$

Czyli

$$0 \geq (b-a) \mathbb{E}\, U_a^b([m]) - \mathbb{E}\,(X_m - a)^- ,$$

co daje żądane oszacowanie. □

Możemy teraz sformułować i dowieść podstawowy wynik o zbieżności nadmartyngałów.

Twierdzenie 1.1 ***(Dooba o zbieżności nadmartyngałów)*** *Jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nadmartyngałem takim, że*

$$\sup_n \mathbb{E}\, X_n^- < +\infty,$$

to proces (X_n) zbiega $\mathbb{P}$-p.n. gdy $n \to +\infty$ do zmiennej losowej całkowalnej.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia z poprzedniego lematu. Oczywiście gdy $m \to +\infty$, to

$$U_a^b([m]) \uparrow U_a^b,$$

gdzie U_a^b oznacza liczbę przejść przez $[a, b]$ ciągu nieskończonego (X_n). Z Lematu 1.2,

[1] Twierdzenie patrz np. [20][Twierdzenie 4.5] mówi, że jeżeli (X_n) jest nadmartyngałem a τ_i, $i = 1, 2$, są momentami Markowa takimi, że $\tau_1 \leq \tau_2 \leq N$ dla pewnego N, to proces $(X_{\tau_i}, \mathfrak{F}_{\tau_i})$ jest nadmartyngałem.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\, U_a^b([m]) &\leq \frac{\mathbb{E}\,(X_m - a)^-}{b-a} \\
&\leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\frac{|X_m - a| - X_m + a}{2} \\
&\leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left(\frac{|X_m| - X_m}{2} + \frac{|a| + a}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_n \mathbb{E}\, X_m^- + a^+\right) < +\infty.
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\mathbb{E}\, U_a^b < +\infty, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Q}\colon a < b.
$$

Stąd i z Lematu 1.1, ciąg (X_n) zbiega $\mathbb{P}$-p.n. do być może granicy nieskończonej. Pozostaje więc do wykazania skończoność granicy. Mamy

$$
|X_n| = X_n^+ + X_n^- = X_n + 2X_n^-.
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|X_n| &= \mathbb{E}\, X_n - 2\mathbb{E}\, X_n^- \\
&\leq \mathbb{E}X_1 + 2\sup_n \mathbb{E}\, X_n^- < +\infty.
\end{aligned}
$$

Teraz z lematu Fatou[2] zachodzi

$$
\mathbb{E} \liminf_{n\to+\infty} |X_n| \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,|X_n| < +\infty,
$$

co dowodzi, że granica procesu (X_n) istnieje i jest zmienną całkowalną. □

Twierdzenie 1.2 ***(O zbieżności martyngałów w L^2)*** *Niech (M_n), $n = 0, 1, 2. \dots,$ będzie martyngałem w czasie dyskretnym określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ z filtracją $(\mathfrak{G}_n)$. Załóżmy, że*

$$
B := \sup_n \mathbb{E}\, M_n^2 < +\infty.
$$

Wówczas istnieje zmienna losowa M_∞ taka, że

(i) $M_n \to M_\infty$, *$\mathbb{P}$-p.n.,*
(ii) $M_\infty \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$,
(iii) $\mathbb{E}\,|M_n - M_\infty|^2 \to 0$ *gdy* $n \to +\infty$.

[2] Lemat Fatou (patrz np. [20][Lemat 1.5]) daje oszacowanie

$$
\int_E \liminf_{n\to+\infty} X_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E X_n \mathrm{d}\mu,
$$

dla dowolnej miary μ na przestrzeni mierzalnej $(E, \mathcal{E})$ i dowolnego ciągu nieujemnych funkcji mierzalnych $X\colon E \mapsto [0, +\infty]$.

Dowód. Z nierówności Jensena mamy

$$\begin{aligned}\sup_n \mathbb{E}\, M_n^- &\leq \sup_n \left[\mathbb{E}\left(M_n^-\right)^2\right]^{1/2}\\ &\leq \sup_n \left[\mathbb{E}\left(M_n\right)^2\right]^{1/2}\\ &\leq B^{1/2} < +\infty.\end{aligned}$$

Stąd z twierdzenia o zbieżności nadmartyngałów istnieje całkowalna zmienna losowa M_∞ taka, że

$$M_n \to M_\infty, \qquad \mathbb{P}\text{-p.n.}$$

Niech

$$d_n = M_n - M_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Wówczas dla $n \neq m$ mamy

$$\mathbb{E}\, d_m d_n = 0.$$

Istotnie, załóżmy, że $n > m$. Wówczas

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, d_m d_n &= \mathbb{E}\mathbb{E}\left(d_m d_n | \mathfrak{G}_m\right) = \mathbb{E}\, d_m \mathbb{E}\left(d_n | \mathfrak{G}_m\right)\\ &= \mathbb{E}\, d_m \mathbb{E}\left(M_n - M_{n-1} | \mathfrak{G}_m\right) = \mathbb{E}\, d_m\, 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Oczywiście

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1}) = M_0 + \sum_{k=1}^n d_k.$$

Stąd

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^n d_k^2 = \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^n d_k\right|^2 = \mathbb{E}\left|M_n - M_0\right|^2 \leq 2\mathbb{E}\left(M_n^2 + M_0^2\right) \leq 4B.$$

A więc

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^\infty d_k^2 \leq 4B < +\infty.$$

Stąd

$$\mathbb{E}\left|M_m - M_n\right|^2 = \mathbb{E}\left|\sum_{k=n}^m d_k\right|^2 \leq \sum_{k=n}^m \mathbb{E}\, d_k^2 \to 0 \qquad \text{gdy } n \leq m \to +\infty.$$

Tak więc $\{M_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, a więc zbieżny. $\square$

1.2 Aproksymacja funkcji z $L^2(0,T)$

Ustalmy $T \in (0,+\infty)$. Dla $g \in L^2((0,T],\mathcal{B}(0,T],\mathrm{d}t)$, niech

$$B_n(g)(t) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{t_k^n - t_{k-1}^n} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} g(s)\mathrm{d}s\, \chi_{(t_{k-1}^n,t_k^n]}(t), \qquad t \in (0,T],$$

gdzie $t_k^n = kT/2^n$.

Twierdzenie 1.3 *Niech $g \in L^2((0,T],\mathcal{B}(0,T],\mathrm{d}t)$ będzie funkcją ograniczoną. Wówczas*

$$B_n(g)(t) \to g(t) \qquad \textit{dla prawie wszystkich } t \in (0,T].$$

Ponadto

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T |B_n(g)(t) - g(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

Dowód. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega',\mathfrak{F}',\mathfrak{G}')$ gdzie $\Omega' = (0,T]$, $\mathfrak{F}' = \mathcal{B}[0,T]$, a $\mathbb{P}'(A) = |A|/T$, $|A|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru $A \in \mathcal{B}[0,T]$. Niech $\mathfrak{G}_n$ będzie σ-ciałem zadanym przez rozbicie

$$\{0\},(0,t_1^n],(t_1^n,l_2^n],\ldots,(t_i^n,t_{i+1}^n],\ldots(t_{2^n-1}^n,T]$$

przestrzeni $\Omega = [0,T]$.

Mamy (sprawdzić)

$$B_n(g) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}'}(g|\mathfrak{G}_n), \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Stąd $(B_n(g))$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{G}_n)$. Z nierówności Jensena

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}'}(B_n(g))^2 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}'}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}'}(g|\mathfrak{G}_n)\right)^2 \le \mathbb{E}^{\mathbb{P}'} g^2 = \frac{1}{T}\int_0^T g(s)^2\mathrm{d}s.$$

Stąd

$$\sup_n \mathbb{E}^{\mathbb{P}'}(B_n(g))^2 < +\infty.$$

Z Twierdzenia o zbieżności w L^2 martyngałów wynika, że istnieje zmienna losowa $B_\infty(g)$ taka, że

$$B_n(g)(t) \to B_\infty(g)(t) \qquad \text{dla prawie wszystkich } t,$$

oraz

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}'}(B_n(g) - B_\infty(g))^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (B_n(g)(t) - B_\infty(g)(t))^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$B_\infty(g)(t) = g(t) \qquad \text{dla prawie wszystkich } t. \tag{1.2}$$

W tym celu zauważmy, że z definicji warunkowej wartości oczekiwanej

$$\frac{1}{T}\int_A B_n(g)(t)\mathrm{d}t = \int_A B_n(g)\mathrm{d}\mathbb{P}' = \int_A g\mathrm{d}\mathbb{P}' = \frac{1}{T}\int_A g(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall\, n,\ \forall\, A \in \mathfrak{G}_n.$$

Ponieważ g jest ograniczona, więc $B_n(g)$ są wspólnie ograniczone. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wnioskujemy, że

$$\frac{1}{T}\int_A B_\infty(g)(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_A g(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall\, A \in \bigcup_n \mathfrak{G}_n.$$

Zauważmy, że

$$\mathcal{B}[0,T] = \sigma\left(\bigcup_n \mathfrak{G}_n\right).$$

Istotnie jeżeli I jest gęstym podzbiorem $[0,1]$, to

$$\mathcal{B}[0,T] = \sigma\left((s,t]\colon\, s,t \in I\right).$$

Więc z twierdzenia o π-λ systemach[3] wnioskujemy, że

$$\int_A B_\infty(g)(t)\mathrm{d}t = \int_A g(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}[0,T],$$

a więc zachodzi (1.2). Dokładniej łatwo pokazać, że rodzina $\mathcal{G}$ zbiorów $A \in \mathcal{B}[0,T]$ takich, że

$$\frac{1}{T}\int_A B_\infty(g)(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_A g(t)\mathrm{d}t,$$

jest λ-układem. Zawiera π-układ $\mathcal{H} = \bigcup_n \mathfrak{G}_n$, stąd

$$\mathcal{G} \supset \sigma\left(\bigcup_n \mathfrak{G}_n\right) = \mathcal{B}[0,T]. \qquad \square$$

[3] Patrz np. [20][Twierdzenie 1.11]

Definicja 1.1 Rodzina $\mathcal{G}$ podzbiorów zbioru Ω jest *π-układem*, jeśli

$$A, B \in \mathcal{G} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{G}.$$

Definicja 1.2 Rodzina $\mathcal{G}$ podzbiorów zbioru Ω jest *λ-układem*, jeśli

- $\Omega \in \mathcal{G}$,
- $\forall\, A, B \in \mathcal{G},\ B \subset A \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{G}$,
- $\forall\, \{A_n\} \subset \mathcal{G}\colon\ A_n \subset A_{n+1}\ \forall\, n,\ \bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$.

Twierdzenie 1.4 ***(Dynkina–Sierpińskiego o $\pi - \lambda$-układach)*** *Jeśli λ układ $\mathcal{G}$ zawiera π-układ $\mathcal{H}$, to $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$.*

1.3 Progresywną mierzalność

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ będzie przestrzenią z filtracją.

Definicja 1.3 Proces $(X(t))$ jest *progresywnie mierzalny* gdy dla każdego $t \in (0, +\infty)$, odwzorowanie

$$X\colon [0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \mapsto X(s;\omega) \in \mathbb{R},$$

jest $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathfrak{F}_t$-mierzalne. Inaczej gdy dla każdego $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i dla każdego $t \in (0, +\infty)$,

$$X^{-1}(\Gamma) \cap [0,t] \times \Omega \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathfrak{F}_t.$$

Następujacy przykład oparty jest na pracy M. Ondrejata i J. Seidlera [19]. W pracy tej można też znaleźć dowód części (ii) Twierdzenia 1.5 poniżej. Ta część nosi nazwę twierdzenia *Dellacherie–Meyera o istnieniu progresywnie mierzalnej modyfikacji.*

1.3.1 Kontrprzykład

Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{F} = \mathcal{B}([0,1])$, a $\mathbb{P}$ niech będzie miarą Lebesgue'a na $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Niech $\mathcal{A}$ będzie σ ciałem generowanym przez zbiory skończone w Ω. Zauważmy, że $A \subset [0,1]$ należy do $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy A jest przeliczalny lub A^c jest przeliczalny. Zdefiniujemy filtrację $(\mathfrak{F}_t)$ w następujący sposób

$$\mathfrak{F}_t = \begin{cases} \mathcal{A} & \text{gdy } t \in [0,1), \\ \mathfrak{F} & \text{gdy } t \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Niech

$$\Delta := \{(t,t)\colon t \in [0, 1/2)\}$$

oraz niech

$$X(t;\omega) = \chi_\Delta(t,\omega), \qquad (t,\omega) \in [0,+\infty) \times \Omega.$$

Ponieważ $\Delta \in \mathcal{B}([0,+\infty)) \times \mathfrak{F}$ więc X jest mierzalny. Ponieważ dla ustalonego t,

$$X(t;\omega) = \chi_{\{t\}}(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

oraz $\{t\} \in \mathfrak{F}_t$, więc X jast adaptowany.

Zauważmy, że proces Y zdefiniowany jako $Y(t;\omega) = 0$ jest modyfikacją X. Istotnie dla ustalonego t,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega\colon X(t;\omega) \neq Y(t;\omega)\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega\colon \omega = t\} = \mathbb{P}\{t\} = 0$$

bo $\mathbb{P}$ jest miarą Lebesgue'a.

Pokażemy teraz, że X nie jest progresywnie mierzalny. W tym celu wystarczy pokazać, że

$$\varDelta \cap [0,1/2] \times \varOmega \notin \mathcal{B}([0,1/2]) \times \mathfrak{F}_{1/2} = \mathcal{B}([0,1/2]) \times \mathcal{A}.$$

Z definicji

$$\varDelta \cap [0,1/2] \times \varOmega = \varDelta.$$

Gdyby $\varDelta \in \mathcal{B}([0,1/2]) \times \mathcal{A}$, to byłby granicą punktową funkcji postaci

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_k \times B_k}$$

gdzie $N \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $A_k \in \mathcal{B}([0,1/2])$, $B_k \in \mathcal{A}$. Stąd istnieją ciągi $\{C_k\} \subset \mathcal{B}([0,1/2])$ oraz $\{D_k\} \subset \mathcal{A}$ takie, że

$$\varDelta \in \sigma(C_k \colon k \in \mathbb{N}) \times \sigma(D_k \colon k \in \mathbb{N}).$$

Ponieważ albo D_k albo jego uzupełnienie D_k^c jest przeliczalne, więc możemy założyć, że każde D_k jest przeliczalne. Stąd przeliczalny jest zbiór

$$D = \bigcup_k D_k.$$

Z twierdzenia Foubiniego dla każdego $t \in [0,1/2]$,

$$\{\omega \in \varOmega \colon (t,\omega) \in \varDelta\} \in \sigma(D_k \colon k \in \mathbb{N}).$$

Ponieważ

$$\sigma(D_k \colon k \in \mathbb{N}) \subset \{B, B^c \colon B \subset D\},$$

więc dla każdego $t \in [0,1/2]$,

$$\{\omega \in \varOmega \colon (t,\omega) \in \varDelta\} \in D.$$

Stąd

$$[0,1/2] = \bigcup_{t \in [0,1/2]} \{\omega \in \varOmega \colon (t,\omega) \subset \varDelta\} \subset D,$$

co przeczy temu, że D jest przeliczalny.

1.3.2 Twierdzenie Dellacherie–Meyera i nie tylko

Przypomnijmy, że część (ii) poniższego twierdzenia nosi nazwę twierdzenia Dellacherie–Meyera o istnieniu progresywnie mierzalnej modyfikacji. Jego dowód można znaleść w pracy [19].

Twierdzenie 1.5 (i) *Dowolny proces progresywnie mierzalny jest mierzalny i adaptowany.*
(ii) *Dowolny proces mierzalny i adaptowany ma progresywnie mierzalną modyfikacje.*
(iii) *Dowolny proces mierzalny i adaptowany o prawo lub lewo stronnie*

ciągłych trajektoriach jest progresywnie mierzalny.
(iv) Niech X będzie procesem mierzalnym, adaptowanym i o całkowalnych trajektoriach. Załóżmy, że każde $\mathfrak{F}_t$ zawiera zbiory miary zero z $\mathfrak{F}$. Wówczas proces

$$\int_0^t X(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0,$$

jest progresywnie mierzalny.

Dowód (i). Teza wynika z faktu, że dla każdego T, odwzorowanie

$$(\Omega, \mathfrak{F}_T) \ni \omega \mapsto (t, \omega) \in ([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \times \mathfrak{F}_T)$$

jest mierzalne. $\square$

Dowód (iii). Dla procesu X, $T \in (0, +\infty)$ oraz $n \in \mathbb{N}$ kładziemy

$$X_n(t;\omega) := \sum_{k=0}^{2^n-1} \chi_{\{[\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n})\}} X(kT/2^n;\omega)$$

oraz

$$\tilde{X}_n(t;\omega) := \chi_{\{[0,\frac{T}{2^n}]\}} X(0;\omega) + \sum_{k=1}^{2^n-1} \chi_{\{(\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}]\}} X((k+1)T/2^n;\omega).$$

Jeżeli X jest adaptowany, to dla każdego n, X_n i $\tilde{X}_n$ są adaptowane. Jeżeli X jest prawostronnie ciągły to X_n zbiega punktowo na $[0,T] \times \Omega$ do X, a jeżeli X jest lewostronnie ciągły to $\tilde{X}_n$ zbiega punktowo na $[0,T] \times \Omega$ do X. $\square$

Dowód (iv). Niech $\tilde{X}$ będzie progresywnie mierzalną modyfikacją X. Wówczas

$$\tilde{F}(t) = \int_0^t \tilde{X}(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0,$$

jest adaptowany mierzalny i o ciągłych trajektoriach. Jest więc progresywnie mierzalny. Tutaj nie potrzebujemy założenia o zupełności $\mathfrak{F}_t$. Niech

$$F(t) = \int_0^t X(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geq s.$$

Proces $F = (F(t))$ jest mierzalny i o ciągłych trajektoriach. Problemem jest tylko jego adaptowalność. W tym celu wystarczy pokazać, że $(\tilde{F}(t))$ jest modyfikacją $(F(t))$. Istotnie, ponieważ zbiory miary 0 są z $\mathfrak{F}_t$ więc $F(t)$ jest $\mathfrak{F}_t$ mierzalny.

Fakt, że F jest modyfikacją $\tilde{f}$ wynika z twierdzenia Foubiniego. Istotnie, niech $N \in \mathbb{N}$,

$$\mu_N(\Gamma) = \int_\Gamma \left| f(t;\omega) - \tilde{f}(t;\omega) \right| \wedge N \,\mathrm{d}t\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega), \qquad \Gamma \in \mathcal{B}[0,T] \times \mathfrak{F}.$$

Oczywiście μ_N jest miarą skończoną na $\mathcal{B}[0,T] \times \mathfrak{F}$. Ponieważ $\mu_N(\Gamma) = 0$ dla dowolnego prostokąta $\Gamma = [s,t] \times A$, bo

$$\mu_N(\Gamma) = \int_s^t \int_A \left| f(r;\omega) - \tilde{f}(r;\omega) \right| \wedge N\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)\, \mathrm{d}r = \int_s^t 0 \,\mathrm{d}r = 0,$$

więc $\mu_N \equiv 0$. Stąd

$$\mu_N([0,t] \times \Omega) = 0 = \int_\Omega \int_0^t \left| f(s;\omega) - \tilde{f}(s;\omega) \right| \wedge N \mathrm{d}s\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega),$$

a więc

$$\int_0^t \left| f(s) - \tilde{f}(s) \right| \mathrm{d}s = 0, \qquad \mathbb{P}\text{-p.n.}$$

1.4 Aproksymacja procesu klasy $\mathcal{L}^2$ procesami prostymi

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Przypomnijmy podstawowe definicje.

Definicja 1.4 Klasa $\mathcal{L}^2$ składa się z procesów mierzalnych i adaptowanych

$$f\colon [0,+\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

takich, że

$$\mathbb{E} \int_0^T f^2(s) \mathrm{d}s < +\infty, \qquad \forall\, T \in (0,+\infty).$$

Definicja 1.5 Klasa funkcji (procesów) prostych $\mathcal{P}$ składa się z procesów

$$f\colon [0,+\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

postaci

$$f(t) = \alpha \chi_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n$, a dla każdego i, α_i jest $\mathfrak{F}_{t_i}$ mierzalne oraz całkowalne z kwadratem, to jest

$$\mathbb{E}\, \alpha_i^2 < +\infty.$$

O α zakładamy, że jest $\mathfrak{F}_0$-mierzalne i całkowalne z kwadratem (tak naprawdę możemy nic nie zakładać o α).

Naszym celem jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.6 *Dla dowolnego $f \in \mathcal{L}^2$ istnieje ciąg $(f^{(n)})$ funkcji prostych taki, że*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left(f^{(n)}(s) - f(s)\right)^2 \mathrm{d}s = 0, \qquad \forall\, T \in (0,+\infty).$$

Definicja 1.6 Dla $T \in (0,+\infty)$, niech L^2_T oznacza klasę wszystkich procesów mierzalnych

$$f\colon [0,T]\times\Omega \mapsto \mathbb{R},$$

takich, że

$$\mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s < +\infty.$$

Niech $\mathcal{L}^2_T \subset L^2_T$ oznacza klasę wszystkich procesów $f \in L^2_T$, które są adaptowane.

Definicja 1.7 Dla $T \in (0,+\infty)$, niech $\mathcal{P}_T$ oznacza klasę wszystkich procesów prostych

$$f\colon [0,T]\times\Omega \mapsto \mathbb{R}$$

to znaczy procesów postaci

$$f(t) = \alpha\chi_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots t_n = T$, a dla każdego i, α_i jest $\mathfrak{F}_{t_i}$ mierzalne oraz

$$\mathbb{E}\,\alpha_i^2 < +\infty.$$

O α zakładamy, że jest $\mathfrak{F}_0$-mierzalne i całkowalne z kwadratem.

Twierdzenie 1.7 *Dla dowolnego $T \in (0,+\infty)$ i dla dowolnej $f \in \mathcal{L}^2_T$ istnieje ciąg $(f^{(n)}) \subset \mathcal{L}^2_T$ funkcji prostych taki, że*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left(f^{(n)}(s) - f(s)\right)^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Uwaga 1.1 Zauważmy, że Twierdzenie 1.7 wystarczy do dowodu zasadniczego twierdzenia (Twierdzenie 1.6), które mówi, że dla zadanej funkcji f istnieje ciąg funkcji prostych $(f^{(n)})$ takich, że dla dowolnego T,

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|f^{(n)}(t) - f(t)\right|^2 \mathrm{d}t \to 0.$$

Istototnie, niech $f \in \mathcal{L}^2$. Z Twierdzenia 1.7 wynika, że dla dowolnego T istnieje ciąg funkcji prostych $(f^{(n)}_T)$ takich, że dla każdego T,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left(f_T^{(n)}(s) - f(s)\right)^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Niech teraz (T_n) będzie dowolnym ciągiem rosnącym do $+\infty$. Dla każdego n istnieje n_m takie, że

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|f_{T_m}^{(n_m)}(t) - f(t)\right|^2 \mathrm{d}t \le \frac{1}{m}.$$

Możemy założyć, że $n_m \uparrow +\infty$ gdy $m \uparrow +\infty$. Wtedy ciąg

$$f^{(m)} = f_{T_m}^{(n_m)}, \qquad m \in \mathbb{N}$$

ma żądaną własność.

1.4.1 Dowód Twierdzenia 1.7

Ustalmy $T \in (0, +\infty)$. Przypomnijmy (patrz Definicja 1.6), że L_T^2 to klasa procesów mierzalnych $f\colon [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$, takich że

$$\|f\|_{L_T^2} := \left(\mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s\right)^{1/2} < +\infty.$$

Oczywiście L_T^2 jest przestrznią wektorową a $\|\cdot\|_{L_T^2}$ jest normą na L_T^2. Przez $\mathcal{L}_T^2$ oznaczamy podprzestrzeń L_T^2 złożoną z procesów adaptowanych.

Dla $f \in \mathcal{L}_T^2$ i $n \in \mathbb{N}$ niech

$$\mathcal{A}_n(f) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{t_k^n - t_{k-1}^n} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f(s)\mathrm{d}s\, \chi_{(t_k^n, t_{k+1}^n]}$$

gdzie

$$t_k^n = kT/2^n.$$

Uwaga 1.2 Oczywiście $\mathcal{A}_n$ jest liniowym odwzorowaniem L_T^2 w L_T^2. Dla dowolnego $f \in L_T^2$ proces $A_n(f)$ jest kawałkami stały. Nie jest jednak oczywiste, że $\mathcal{A}_n$ przekształca $\mathcal{L}_T^2$ w przestrzeń funkcji prostych $\mathcal{P}_T^2$. Problem jest z pokazaniem, że $\mathcal{A}_n(f)$ jest procesem adaptowalnym! By to pokazać potrzebujemy, by dla dowolnego k, zmienna losowa

$$\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f(t)\mathrm{d}t$$

była $\mathfrak{F}_{t_k^n}$-mierzalna. Do tego potrzebujemy by f był progresywnie mierzalny. Sama mierzalność i adaptowalność nie wystarczy! Niemniej jednak $\mathcal{A}_n(f) \in \mathcal{P}_T^2$ dla progresywnie mierzalnego procesu $f \in \mathcal{L}_T^2$.

Niech
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} \sup_{\omega\in\Omega} |f(t;\omega)|\,.$$

Lemat 1.3 *Dla dowolnego ograniczonego procesu $f \in L^2_T$ zachodzi*

(i) $\|\mathcal{A}_n(f)\|_{L^2_T} \le \|f\|_{L^2_T}$,
(ii) $\|\mathcal{A}_n(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$,
(iii) $\lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{A}_n(f) - f\|_{L^2_T} = 0$.

Dowód. Dowody (i) oraz (ii) są łatwe. Pokażemy (iii). Mamy
$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_n(f) - f\|_{L^2_T} &\le \|\mathcal{A}_n(f - B_m(f))\|_{L^2_T} + \|\mathcal{A}_n(B_m(f)) - f\|_{L^2_T}\\ &\le \|f - B_m(f)\|_{L^2_T} + \|\mathcal{A}_n(B_m(f)) - B_m(f)\|_{L^2_T}\\ &\quad + \|B_m(f) - f\|_{L^2_T}\\ &\le 2\|f - B_m(f)\|_{L^2_T} + \|\mathcal{A}_n(B_m(f)) - B_m(f)\|_{L^2_T}.\end{aligned}$$
Z Twierdzenia 1.3 oraz z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wnioskujemy, że
$$\lim_{m\to+\infty} \|f - B_m(f)\|_{L^2_T} = 0.$$
Pozostaje do wykazania, że również
$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{A}_n(B_m(f)) - B_m(f)\|_{L^2_T} = 0.$$
Ale funkcja $B_m(t)$ jest kawałkami stała, stała na odcinkach $(t^m_i, t^m_{i+1}]$ więc dla $n > m$ i $i = 0, \ldots, 2^m - 1$, mamy
$$\mathcal{A}_n(B_m(f))(t) = B_m(f)(t), \qquad t \in (t^m_i + T/2^n, t^m_{i+1}].$$
Stąd dla dowolnego m,
$$\mathcal{A}_n(B_m(f))(t) \to B_m(f)(t) \qquad \text{dla prawie wszystkich } t.$$
A więc zbieżność w L^2 wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. $\square$

Dowód Twierdzenia 1.7. Przypomnijmy, że Twierdzenie 1.7 implikuje Twierdzenie 1.6, patrz Uwaga 1.1. Funkcje ograniczone są gęste w $\mathcal{L}^2_T$ więc bez straty ogólności możemy założyć, że $f \in \mathcal{L}^2_T$ jest ograniczony. Z twierdzenia Dellacherie–Meyera (patrz Twierdzenia 1.5(ii)) istnieje progresywnie mierzalna modyfikacja $\tilde{f}$ procesu f. Oczywiście $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2_T$ i można przyjąć, że $\tilde{f}$ jest również ograniczony. Z Lematu 1.3,
$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{A}_n(\tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^2_T} = 0.$$
Ponadto, patrz Uwaga 1.2, ponieważ $\tilde{f}$ jest progresywnie mierzalna mamy $\{\mathcal{A}_n(\tilde{f})\} \subset \mathcal{P}^2_T$. Pozostaje tylko zauważyć, że z twierdzenia Fubiniego

$$\|f - \tilde{f}\|_{L_T^2} = \left(\mathbb{E}\int_0^T |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = 0$$

a więc

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{A}_n(\tilde{f}) - f\|_{L_T^2} = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}_n(\tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L_T^2} = 0. \qquad \square$$

1.5 Proces Wienera

Definicja 1.8 *Procesem Wienera* nazywamy proces stochastyczny $W = (W(t); t \in [0, +\infty))$ spełniający warunki:

(i) $W(0) = 0$,
(ii) W ma ciągłe trajektorie,
(iii) W ma przyrosty niezależne i stacjonarne,
(iv) dla dowolnych $0 \le s < t < +\infty$, zmienna losowa $W(t) - W(s)$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Niech $\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $(\mathfrak{F}_t)$ niech będzie filtracją pod-σ-ciał $\mathfrak{F}$.

Definicja 1.9 *Procesem Wienera względem filtracji* $(\mathfrak{F}_t)$ nazywamy proces stochastyczny $W = (W(t); t \in [0, +\infty))$ spełniający warunki:

(i) $W(0) = 0$,
(ii) W ma ciągłe trajektorie,
(iii) W jest martyngałem (lub ogólniej martyngałem lokalnym) względem $(\mathfrak{F}_t)$,
(iv) $W^2(t) - t$, $t \ge 0$, jest martyngałem (lub ogólniej martyngałem lokalnym) względem $(\mathfrak{F}_t)$.

Oczywiście proces Wienera jest procesem Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t^W)$ generowanej przez W.

Twierdzenie 1.8 ***(Lévy'ego)*** *Każdy proces Wienera względem jakiejś filtracji jest procesem Wienera w sensie Definicji 1.8, to znaczy ma przyrosty niezależne i stacjonarne oraz dla dowolnych $0 \le s < t < +\infty$, zmienna losowa $W(t) - W(s)$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t - s)$. Ponadto dla dowolnych $0 \le s \le t$ zmienna losowa $W(t) - W(s)$ nie zależy of $\mathfrak{F}_s$.*

Od tej pory zakładamy, że $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ jest ustaloną przestrzenią probabilistyczną z filtracją $(\mathfrak{F}_t)$ a $W = (W(t); t \ge 0)$ jest procesem Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$, patrz Definicja 1.9.

1.6 Całka z procesów klasy $\mathcal{L}^2$

Niech $f \in \mathcal{P}$ będzie procesem prostym postaci

$$f(t) = \alpha\chi_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t).$$

Definiujemy

$$I(f) = \int_0^{+\infty} f(s)\mathrm{d}W(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left(W(t_{i+1} - W(t_i)\right),$$

oraz dla ustalonego $t \in (0, +\infty)$,

$$I_t(f) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s) = I(\chi_{(0,t]}f) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left(W(t_{i+1} \wedge t) - W(t_i \wedge t)\right).$$

Kładziemy $I_0(f) = 0$.

Twierdzenie 1.9 ***(Własności całki z funkcji prostej)***
(i) Całka z funkcji prostej jest dobrze zdefiniowana i liniowa (nie zależy od reprezentacji, funkcja prosta pomnożona przez funkcję charakterystyczną zbioru $(0, t]$ jest funkcją prostą).
(ii) Całka jest liniowa: kombinacja liniowa funkcji prostych jest funkcją prostą oraz

$$I_t(af + bg) = aI_t(f) + bI_t(g), \qquad \forall\, t \in (0, +\infty),\ \forall\, ab \in \mathbb{R},\ \forall\, f, g \in \mathcal{P}.$$

(iii) Dla dowolnej funkcji prostej $f \in \mathcal{P}$, proces $(I_t(f))$ jest martyngałem (względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$) o ciągłych trajektoriach. Ponadto $I_0(f) = 0$.
(iv) Dla dowolnej funkcji prostej $f \in \mathcal{P}$, proces

$$I_t^2(f) - \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$

jest martyngałem (o ciągłych trajektoriach, względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$).

Dowód twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi. Zwrócimy uwagę na pewny szczegół techniczny w dowodzie części (iv). Mianowicie należy pokazać, że zmienna losowa postaci

$$\alpha_k \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) \alpha_j \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)$$

jest całkowalna. Oczywiście z elementarnej algebry

$$|ab| \leq 2a^2 + 2b^2, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

mamy

$$\begin{aligned}&|\alpha_k\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)\alpha_j\left(W(t_{j+1})-W(t_j)\right)|\\&\qquad\le 2\left[\alpha_k\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)\right]^2+2\left[\alpha_k\left(W(t_{j+1})-W(t_j)\right)\right]^2.\end{aligned}$$

Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnego k

$$\mathbb{E}\left[\alpha_k\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)\right]^2<+\infty.$$

Ponieważ α_k jest $\mathfrak{F}_{t_k}$ mierzalne, więc nie zależy od $W(t_{k+1})-W(t_k)$, patrz Twierdzenie Lévy'ego. Stąd

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\alpha_k\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)\right]^2&=\mathbb{E}\,\alpha_k^2\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^2\\&=\mathbb{E}\,\alpha_k^2\,\mathbb{E}\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^2<+\infty.\end{aligned}$$

Wniosek 1.1 *Dla dowolnej funkcji prostej $f\in\mathcal{P}$;*

$$\mathbb{E}\left(I_t(f)\right)^2=\mathbb{E}\int_0^t\left(f(s)\right)^2\mathrm{d}s,\qquad\forall\,t\in(0,+\infty).\tag{1.3}$$

Niech $f\in\mathcal{L}^2$. Z Twierdzenia 1.6 wynika, że istnieje ciąg $(f^{(n)})\subset\mathcal{P}$ taki, że

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\int_0^T\left(f(s)-f^{(n)}(s)\right)^2\mathrm{d}s=0,\qquad\forall\,T\in(0,+\infty).$$

Stąd i z (1.3) wynika, że dla każdego t, ciag $(I_t(f^{(n)}))$ jest Cauchy'ego w $L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$. Z zupełności przestrzeni $L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ wynika zbieżność ciągu $(I_t(f^{(n)}))$ w $L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$. Oznaczmy przez $I_t(f)$ granicę w $L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ ciągu $(I_t(f^{(n)}))$. Granicę ta nazywamy *całką Itô procesu (funkcji)* $f\in\mathcal{L}^2$. Często piszemy (to tylko inne oznaczenie na całkę stochastyczną)

$$I_t(f)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s).$$

Następujące twierdzenie podaje najważniejsze własności całki z funkcji klasy $\mathcal{L}^2$. Dowody części (i) oraz (ii) są bardzo łatwe.

Twierdzenie 1.10 ***(Własności całki z funkcji klasy $\mathcal{L}^2$)***
(i) Całka z funkcji klasy $\mathcal{L}^2$ jest dobrze zdefiniowana (nie zależy od ciągu aproksymującego $(f^{(n)})$).
(ii) Całka jest liniowa: kombinacja liniowa funkcji klasy $\mathcal{L}^2$ jest funkcją klasy $\mathcal{L}^2$ oraz

$$I_t(af+bg)=aI_t(f)+bI_t(g),\qquad\forall\,t\in(0,+\infty),\ \forall\,a,b\in\mathbb{R},\ \forall\,f,g\in\mathcal{L}^2.$$

(iii) Dla dowolnej $f\in\mathcal{L}^2$, proces $(I_t(f))$ jest martyngałem (względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$) o ciągłych trajektoriach (dokładniej ma ciągłą modyfikację). Ponadto

[3] Od tej pory zakładamy, że $I_t(f)$, $t\ge 0$, ma ciągłe trajektorie, to znaczy zawsze rozważamy ciągłą modyfikacje całki.

$I_0(f) = 0$ *oraz, ponieważ wartość oczekiwana martyngału jest stała w czasie, mamy*

$$\mathbb{E}\, I_t(f) = 0, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

(iv) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{L}^2$, proces

$$I_t^2(f) - \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$

jest martyngałem (o ciągłych trajektoriach) względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$. W szczególności zachodzi tak zwana izometria Itô

$$\mathbb{E}\, I_t^2(f) = \mathbb{E}\int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

(v) Dla dowolnej $f \in \mathcal{L}^2$ i dla dowolnego $T \in (0, +\infty)$,

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(f)|^2 \leq 4\mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s.$$

(vi) Dla dowolnych $f \in \mathcal{L}^2$, $T \in (0, +\infty)$ oraz $R > 0$,

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(f)| \geq R\right\} \leq \frac{1}{R^2}\mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s.$$

(vii) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{L}^2$, jeżeli $f(t;\omega) = 0$ dla prawie wszystkich $t \in [0,T]$ i $\mathbb{P}$ prawie wszystkich $\omega \in A \in \mathfrak{F}_T$, to dla wszystkich $t \in [0,T]$ i dla $\mathbb{P}$-prawie wszystkich $\omega \in A$, $I_t(f)(\omega) = 0$.
(viii) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{L}^2$, oraz dowolnego momentu Markowa τ, takiego, że $\tau \leq T$ dla pewnego $T \in (0, +\infty)$, zachodzi

$$I_\tau(f) = I_T(f\chi_{(0,\tau]}).$$

(ix) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{L}^2$, oraz dowolnego momentu Markowa τ, takiego, że $\tau < +\infty$ oraz

$$\mathbb{E}\int_0^{+\infty} f^2(s)\chi_{(0,\tau]}(s)\mathrm{d}s < +\infty$$

zachodzi

$$I_\tau(f) = I_{+\infty}(f\chi_{(0,\tau]}),$$

gdzie $I_{+\infty}(f\chi_{(0,\tau]})$ jest granicą w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ciągu

$$\int_0^T f(s)\chi_{(0,\tau]}(s)\mathrm{d}W(s),$$

gdy $T \uparrow +\infty$.

Dowód (i). Niech $\{f^{(n)}\} \subset \mathcal{P}$ i $\{\tilde{f}^{(n)}\} \subset \mathcal{P}$ będą ciągami aproksymującymi $f \in \mathcal{L}^2$. To znaczy, że dla każdego $T \in (0, +\infty)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \int_0^T \left|f(t) - f^{(n)}(t)\right|^2 \mathrm{d}t = 0 = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \int_0^T \left|f(t) - \tilde{f}^{(n)}(t)\right|^2 \mathrm{d}t.$$

Niech

$$g^{(n)} = \begin{cases} f^{(n)} & \text{gdy } n \text{ parzyste,} \\ \tilde{f}^{(n)} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

Oczywiscie $\{g^{(n)}\}$ jest ciągiem funkcji prostych aproksymujący f w $\mathcal{L}^2$. Stąd dla każdego T, ciąg całek jest Cauchy'ego w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{P})$ bo z izometrii Itô dla funkcji prostych

$$\mathbb{E} \left|I_T(g^{(n)}) - I_T(g^{(m)})\right|^2 = \mathbb{E} \int_0^T \left|g^{(n)}(s) - g^{(m)}(s)\right|^2 \mathrm{d}s.$$

Stad granice jego podciągów muszą być sobie równe. $\square$

Dowód (ii). Liniowość zachodzi dla funkcji prostych. Zachodzi więc dla granic. $\square$

Dowód (iii). Łatwo pokazać, że $(I_t(f))_{t\geq 0}$ jest martyngałem. Istotnie niech $\{f^{(n)}\} \subset \mathcal{P}$ będzie ciągiem procesów prostych aproksymujących f in $\mathcal{L}^2$, to znaczy takich, że

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \int_0^T |f(r) - f^{(n)}(r)|^2 \mathrm{d}r = 0, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty).$$

Niech $0 \leq s < t$. Ponieważ (patrz Twierdzenie 1.9(iii)) procesy $(I_t(f^{(n)}))$ są martyngałami mamy

$$\mathbb{E}\left(I_t(f^{(n)})|\mathfrak{F}_s\right) = I_s(f^{(n)}). \tag{1.4}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \left|I_t(f^{(n)}) - I_t(f)\right|^2 = 0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \left|I_s(f^{(n)}) - I_s(f)\right|^2,$$

więc przechodząc w (1.4) z $n \to +\infty$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}\,(I_t(f)|\mathfrak{F}_s) = I_s(f),$$

czyli $(I_t(f))$ jest martyngałem.

Dla dowolnego $t \geq 0$, $I_t(f)$ jest całkowalna z kwadratem jako granica w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ciągu zmiennych losowych $(I_t(f^{(n)}))$. Oczywiście $I_0(f) = 0$, bo $I_0(f^{(n)}) = 0$ dla każdego n. Pokażmy, że proces $(I_t(f))_{t\geq 0}$ ma ciągłą modyfikacje. Ustalmy $S > 0$. Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy założyć, że $f^{(0)} = 0$,

$$\mathbb{E}\int_0^S \left|f^{(n+1)}(t) - f^{(n)}(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Szereg

$$I_t(f^{(1)}) + I_t(f^{(2)} - f^{(1)}) + I_t(f^{(3)} - f^{(4)}) + \dots$$

jest zbieżny w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ do $I_t(f)$. Składniki szeregu są ciągłe. Ponadto (z nierówności maksymalnej dla podmartyngałów[4] (patrz dowód części (v)) mamy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq S}\left|I_t\left(f^{(n+1)} - f^{(n)}\right)\right| > \frac{1}{n^2}\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^4}{2^n} < +\infty.$$

Z lematu Borela–Cantelliego[5] istnieje $\Omega_0 \in \Omega \colon \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ taki, że dla każdego $\omega \in \Omega_0$ istnieje $N = N(\omega)$, że

$$\sup_{t\leq S}\left|I_t\left(f^{(n+1)} - f^{(n)}\right)(\omega)\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Czyli, szereg zbiega jednostajnie dla $\omega \in \Omega_0$. Ponieważ granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest ciągła otrzymujemy ciągłość $(I_t(f))_{t\geq 0}$. $\square$

Dowód (iv). Jak w dowodzie (iii) niech $\{f^{(n)}\} \subset \mathcal{P}$ będzie ciągiem procesów prostych aproksymujących f in $\mathcal{L}^2$, to znaczy takich, że

---

[4] Nierówność maksymalna dla podmartyngałów (patrz np. Twierdzenie 4.7 z [20]) mówi, że jeżeli $X = (X_n)$ jest podmartyngałem to dla dowolnych $r > 0$ i $m \in \mathbb{N}$,

$$r\,\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\dots m} X_k \geq r\right) \leq \int_{\{\max_{k=1,\dots,m} X_k \geq r\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mathbb{E}\, X_m^+ \leq \mathbb{E}\,|X_m|\,.$$

[5] Niech $\{A_n\} \subset \mathfrak{F}$ będzie ciągiem zdarzeń. Oznaczmy przez $\limsup A_n$ granicę górną ciągu $\{A_n\}$, to jest zbiór

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n.$$

Zauważmy, że $\omega \in \limsup A_n$ wtedy i tylko wtedy gdy należy do nieskończenie wielu zbiorów ciągu $\{A_n\}$.

Lemat Borela–Cantelliego (patrz np. [20], Lemat 1.4) mówi, że jeśli

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) < +\infty,$$

to

$$\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T |f(r) - f^{(n)}(r)|^2 \mathrm{d}r = 0, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty).$$

Niech $0 \le s < t$. Ponieważ (patrz Twierdzenie 1.9(iv))

$$\mathbb{E}\left(I_t^2(f^{(n)}) - \int_0^t \left(f^{(n)}(r)\right)^2 \mathrm{d}r | \mathfrak{F}_s \right) = I_s^2(f^{(n)}) - \int_0^t \left(f^{(n)}(r)\right)^2 \mathrm{d}r$$

więc (patrz dowód części (iii)) przechodząc z $n \to +\infty$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}\left(I_t^2(f) - \int_0^t (f(r))^2 \,\mathrm{d}r | \mathfrak{F}_s \right) = I_s^2(f) - \int_0^t (f(r))^2 \,\mathrm{d}r. \qquad \square$$

Dowód (v). Ponieważ $I_t(f)$, $t \ge 0$, jest martyngałem, więc $|I_t(f)|$, $t \ge 0$, jest podmartyngałem. Ponieważ ma on ciągłe trajektorie więc gdy $n \to +\infty$ mamy

$$\sup_{k=0,\ldots 2^n} |I_{\frac{kT}{2^n}}(f)|^2 \uparrow \sup_{t\in[0,T]} |I_t(f)|^2$$

Stąd

$$\mathbb{E} \sup_{k=0,\ldots 2^n} |I_{\frac{kT}{2^n}}(f)|^2 \uparrow \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |I_t(f)|^2.$$

Z nierówności maksymalnej na p-ty moment dla nieujemnych podmartyngałów[6] (oraz $p = 2$) mamy

$$\mathbb{E} \max_{k=0,\ldots 2^n} |I_{\frac{kT}{2^n}}(f)|^2 \le 4\,\mathbb{E}|I_T(f)|^2 = 4\,\mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s. \qquad \square$$

Dowód (vi). Jak w dowodzie (v) korzystamy z nierówności maksymalnej dla podmartyngałów [7]. Wiemy, że $(I_t(f))^2$, $t \ge 0$, jest podmartyngałem o ciągłych trajektoriach. Stąd

[6] Nierówność Dooba, patrz np. Twierdzenie 4.9 z [20] mówi, że jeżeli $p > 1$ i jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieujemnym całkowalnym z p-tą potęgą podmartyngałem, to dla dowolnego m,

$$\mathbb{E}\left|\max_{k=1,\ldots,m} X_k\right|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\, X_m^p.$$

[7] Nierówność maksymalna dla podmartyngałów (patrz np. Twierdzenie 4.7 z [20]) mówi, że jeżeli $X = (X_n)$ jest podmartyngałem to dla dowolnych $r > 0$ i $m \in \mathbb{N}$,

$$r\,\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots m} X_k \ge r\right) \le \int_{\{\max_{k=1,\ldots,m} X_k \ge r\}} X_m \mathrm{d}\mathbb{P} \le \mathbb{E}\, X_m^+ \le \mathbb{E}\,|X_m|\,.$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|I_t(f)|\ge R\right\} &= \mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|I_t(f)|^2\ge R^2\right\}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left\{\max_{k=0,\ldots 2^n}|I_{\frac{kT}{2^n}}(f)|^2\ge R^2\right\}\\
&\le \frac{1}{R^2}\mathbb{E}\,|I_T(f)|^2=\frac{1}{R^2}\mathbb{E}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Dowód (vii). Bez straty ogólności możemy założyć, że f jest ograniczona. Niech $T\in(0,+\infty)$. Niech $\tilde{f}$ będzie progresywnie mierzalną modyfikacją f.

Zauważmy, że dla prawie każdego $t\in[0,T]$, $\tilde{f}(t;\omega)=0$ dla $\mathbb{P}$-prawie wszystkich $\omega\in A$. Z Lematu 1.3 mamy

$$
\mathbb{E}\int_0^T\left|\mathcal{A}_n(\tilde{f})(t)-\tilde{f}(t)\right|^2\mathrm{d}t\to 0.
$$

Z konstrukcji operatora $\mathcal{A}_n$ wynika, że dla każdego n i dla prawie każdego $t\in[0,T]$, $A_n(\tilde{f})(t;\omega)=0$ dla $\mathbb{P}$ prawie wszystkich $\omega\in A$.

Stąd, z konstrukcji całki dla funkcji prostych, dla wszystkich $t\in[0,T]$ i $n\in\mathbb{N}$, $I_t(\mathcal{A}_n(\tilde{f}))(\omega)=0$ dla $\mathbb{P}$ prawie wszystkich $\omega\in A$. Przechodząc (by zachodziła zbieżność $\mathbb{P}$-p.n.) ewentualnie do podciągu otrzymujemy, że $I_t(\tilde{f})(\omega)=0$ dla $t\in[0,T]$ i dla $\mathbb{P}$ prawie wszystkich $\omega\in A$. Ponieważ proces $(I_t(\tilde{f}))$ ma ciągłe trajektorie, więc istnieje $A_0\subset A$, $A_0\in\mathfrak{F}_T$ takie, że $\mathbb{P}(A\setminus A_0)=0$ i

$$
I_t(f)(\omega)=0,\qquad \forall\, t\in[0,T],\ \forall\,\omega\in A_0.
$$

Teraz wystarczy zauważyć, że (z ciągłości $t\mapsto I_t(f)(\omega)$ oraz $t\mapsto I_t(\tilde{f})(\omega)$ dla $\mathbb{P}$-prawie wszystkich $\omega\in\Omega$) istnieje $\Omega_0\in\Omega$ pełnej miary taki (to znaczy $\mathbb{P}(\Omega_0)=1$ taki, że

$$
I_t(f)(\omega)=I_t(\tilde{f})(\omega),\qquad \forall\, t\in[0,T],\ \forall\,\omega\in\Omega_0. \qquad \square
$$

Dowód (viii). Udowodnimy najpierw tezę dla funkcji prostej. Biorąc pod uwagę liniowość można założyć, że

$$
f=\alpha\chi_{(t_1,t_2]}
$$

gdzie $0\le t_1<t_2$ oraz α jest $\mathfrak{F}_{t_1}$-mierzalna. Zachodzi

$$
I_t(f)=\alpha\left(W(t\wedge t_2)-W(t\wedge t_1)\right).
$$

A więc mamy pokazć, że $I_\tau(f)$ równe

$$
\alpha\left(W(\tau\wedge t_2)-W(\tau\wedge t_1)\right)
$$

równa się $I_T(f\chi_{(0,\tau]})$. Problemem jest to, że

$$f\chi_{(0,\tau]} = \alpha\chi_{(t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau]}$$

nie jest funkcją prostą. Musimy ją aproksywmować funkcjami prostymi. W tym celu niech $t_i^n = iT/n$ oraz niech

$$f^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha\chi_{(t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau]}(t_i^n)\chi_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}(t).$$

Zauważmy, że $f^{(n)}$ jest funkcją prostą. Mamy

$$I_T(f^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha\chi_{(t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau]}(t_i^n)\left(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\right).$$

Trzeba pokazać, że $I_T(f^{(n)})$ zbiega do $I_\tau(f)$ oraz, że $f^{(n)}$ aproksymuje f, a więc, że

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|f^{(n)}(t) - f(t)\right|^2 \mathrm{d}t \to 0. \tag{1.5}$$

Mamy

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha\chi_{(t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau]}(t_i^n)\left(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\right) = \alpha\left(W(\tau_n) - W(\rho_n)\right),$$

gdzie gdy

$$\{t_i^n,\ i = 0,\ldots,n\} \cap (t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau] \neq \emptyset,$$

to

$$\rho_n = \min\{t_i^n \colon t_i^n \in (t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau]\},$$

jest najmniejszym t_i^n, który należy do przedziału $(t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau]$, a

$$\tau_n = \max\{t_i^n \colon t_i^n \in (t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau]\} + \frac{T}{n}.$$

jest najmniejszym t_i^n większym of $t_2\wedge\tau$. Gdy

$$\{t_i^n,\ i = 0,\ldots,n\} \cap (t_1\wedge\tau, t_2\wedge\tau] = \emptyset,$$

to przyjmujemy $\rho_n = \tau_n = 0$.

Zauważmy, że $\rho_n \to t_1\wedge\tau$ a $\tau_n \to t_2\wedge\tau$, a więc z ciągłości trajektorii procesu Wienera wynikają zbieżności $W(\tau_n)$ do $t_2\wedge\tau$ i $W(\rho_n)$ do $t_1\wedge\tau$. Tak więc $I_T(f^{(n)})$ zbiega do $I_\tau(f)$. Proste wykazanie (1.5) pozostawiamy czytelnikowi.

Mając pokazaną równość dla funkcji prostych argumentujemy następująco: niech $f^{(n)}$ będzie ciągiem funkcji prostych aproksymujących f w $\mathcal{L}^2$. Z punktu (v) wynika, że

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]} |I_t(f^{(n)}) - I_t(f)|^2 \to 0$$

oraz

$$\mathbb{E}\,|I_T(f^{(n)}\chi_{(0,\tau]}) - I_T(f\chi_{(0,\tau]})|^2 \to 0.$$

Wybierając podciąg możemy założyć, że $\mathbb{P}$-p.n.

$$\sup_{t\in[0,T]} |I_t(f^{(n)}) - I_t(f)|^2 \to 0, \qquad |I_T(f^{(n)}\chi_{(0,\tau]}) - I_T(f\chi_{(0,\tau]})|^2 \to 0.$$

A więc

$$|I_\tau(f^{(n)}) - I_\tau(f)|^2 \to 0, \qquad |I_T(f^{(n)}\chi_{(0,\tau]}) - I_T(f\chi_{(0,\tau]})|^2 \to 0.$$

Ponieważ

$$I_\tau(f^{(n)}) = I_T(f^{(n)}\chi_{(0,\tau]}),$$

więc dla granic też otrzymujęmy równość

$$I_\tau(f) = I_T(f\chi_{(0,\tau]}). \qquad \square$$

Dowód (*ix*). Z części (*vii*) mamy

$$I_{T\wedge\tau}(f) = \int_0^T f(s)\chi_{(0,\tau\wedge T]}(s)\mathrm{d}W(s).$$

Z izometrii Itô mamy dla $0 \le S \le T < +\infty$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\int_0^T f(s)\chi_{(0,\tau\wedge T]}(s)\mathrm{d}W(s) - \int_0^S f(s)\chi_{(0,\tau\wedge S]}(s)\mathrm{d}W(s)\right|^2 \\
&\qquad = \mathbb{E}\int_{S\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f^2(s)\mathrm{d}(s).
\end{aligned}$$

Stąd ciąg

$$\int_0^T f(s)\chi_{(0,\tau\wedge T]}(s)\mathrm{d}W(s), \qquad T > 0,$$

jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Ma więc granicę, którą oznaczmy przez I. Ponieważ proces $(I_t(f))$ ma ciągle trajektorie, więc

$$I_{T\wedge\tau}(f) \to I_\tau(f), \qquad \mathbb{P} - p.n.$$

Stąd

$$I_\tau(f) = Z = I_{+\infty}(f\chi_{(0,\tau]}) := \int_0^{+\infty} f(s)\chi_{(0,\tau]}(s)\mathrm{d}W(s). \qquad \square$$

Uwaga 1.3 Oszacowanie

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T} |I_t(f)|^2 \le 4\,\mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s$$

można uogólnić do następującej nierówności Burkholdera–Davisa-Gundy'ego

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T} |I_t(f)|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left(\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s\right)^{p/2}, \qquad \forall\, p \ge 2.$$

Jako wniosek z Twierdzenia 1.10(v), patrz również Uwaga 1.3 otrzymujemy następujący ważny rezultat o zbieżności całek stochastycznych.

Wniosek 1.2 *Niech* $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^2$, $f \in \mathcal{L}^2$ *oraz niech* $T \in (0, +\infty)$. *Jeżeli*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \int_0^T |f_n(s) - f(s)|^2 \, \mathrm{d}s = 0$$

to

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} |I_t(f_n) - I_t(f)|^2 = 0.$$

Niech $p \geq 2$. *Jeżeli*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \left(\int_0^T |f_n(s) - f(s)|^2 \, \mathrm{d}s \right)^{p/2} = 0$$

to

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} |I_t(f_n) - I_t(f)|^p = 0.$$

Zadanie 1.1 Pokazać, że dla dowolnych $f, g \in \mathcal{L}^2$ oraz dla dowolnego $T \in (0, +\infty)$ zachodzi równość

$$\mathbb{E} \int_0^T f(s) \mathrm{d}W(s) \int_0^T g(s) \mathrm{d}W(s) = \mathbb{E} \int_0^T f(s) g(s) \mathrm{d}s.$$

Można skorzystać z Twierdzenia 1.10(iv) oraz ze wzoru polaryzacyjnego

$$ab = \frac{1}{4} \left([a+b]^2 - [a-b] \right), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

1.7 Tożsamość Walda

W czasie dyskretnym mamy następujący wynik (patrz np. [20], Twierdzenie 3.13)

Twierdzenie 1.11 ***(Tożsamość Walda dla ciągu niezależnych zmiennych losowych)*** *Niech* (X_n) *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz niech* τ *będzie momentem Markowa względem filtracji* $(\mathfrak{F}_n)$ *generowanej przez ciąg* (X_n). *Załóżmy, że* $\mathbb{E}\,|X_1| < +\infty$ *oraz. że* $X_n \geq 0$, $\mathbb{P}$-*p.n. lub* $\mathbb{E}\,\tau < +\infty$. *Wówczas*

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{\tau} X_k = \mathbb{E}\,\tau\, \mathbb{E}\, X_1.$$

Jako wniosek z Twierdzenia **??**(viii) otrzymamy następującą tożsamość:

Twierdzenie 1.12 ***(Tożsamość Walda dla procesu Wienera)*** *Niech $W = (W_t)$ będzie procesem Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$ a τ niech będzie momentem Markowa względem $(\mathfrak{F}_t)$. Jeżeli*

$$\mathbb{E}\,\tau < +\infty$$

to

$$\mathbb{E}\,W(\tau) = 0, \qquad \mathbb{E}\,W^2(\tau) = \mathbb{E}\,\tau.$$

Dowód. Mamy

$$W(\tau) = \int_0^{+\infty} \chi_{(0,\tau]}(t)\mathrm{d}W(t).$$

Stąd

$$\mathbb{E}\,W(\tau) = 0$$

oraz

$$\mathbb{E}\,W^2(\tau) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} \chi_{(0,\tau]}(t)\mathrm{d}W(t)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^{\tau} \mathrm{d}t = \mathbb{E}\,\tau. \qquad \square$$

Uwaga 1.4 Warunek w tożsamości Walda $\mathbb{E}\,\tau < +\infty$ jest potrzebny. Bo na przykład dla momentu Markowa

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \colon W(t) = 1\}$$

mamy

$$W(\tau) \equiv 1,$$

a więc

$$\mathbb{E}\,W(\tau) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{E}\,W^2(\tau) = 1.$$

Stąd oczywiście wnioskujemy, że

$$\mathbb{E}\,\tau = +\infty.$$

Mimo tego można pokazać, że $\mathbb{P}\{\tau < +\infty\} = 1$, patrz np. Zadania 4.16 oraz 4.17.

1.8 Policzenie całki w pewnym szczególnym przypadku

Niech W będzie procesem Wienera. Pokażemy z definicji całki stochastycznej, że

$$\int_0^t W(s)\mathrm{d}W(s) = \frac{W^2(t)}{2} - \frac{t}{2}, \qquad t \geq 0.$$

Niech

$$f(t) = W(t), \qquad t \geq 0,$$

oraz niech

$$f^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n^2-1} W(t_i^n)\, \chi_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}(t),$$

gdzie

$$t_i^n = \frac{i}{n}.$$

Oczywiście $f \in \mathcal{L}^2$ oraz $f^{(n)} \in \mathcal{P}$.

Pokażemy, że dla dowolnego $T \in (0, +\infty)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E} \int_0^T \left(f^{(n)}(s) - f(s) \right)^2 \mathrm{d}s = 0, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty), \tag{1.6}$$

oraz

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E} \left| \int_0^t f^{(n)}(s) \mathrm{d}W(s) - \frac{W^2(t) + t}{2} \right|^2 = 0, \qquad \forall\, t \in (0, +\infty), \tag{1.7}$$

Ustalmy $T \in (0, +\infty)$. Mamy, dla $n \geq T$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^T \left(f^{(n)}(s) - f(s) \right)^2 \mathrm{d}s &= \sum_{i=0}^{n^2-1} \mathbb{E} \int_{t_i^n \wedge T}^{t_{i+1}^n \wedge T} \left(f^{(n)}(s) - f(s) \right)^2 \mathrm{d}s \\
&= \sum_{i=0}^{n^2-1} \mathbb{E} \int_{t_i^n \wedge T}^{t_{i+1}^n \wedge T} \left(W(t_i^n) - W(s) \right)^2 \mathrm{d}s \\
&= \sum_{i=0}^{n^2-1} \int_{t_i^n \wedge T}^{t_{i+1}^n \wedge T} (t_i^n - s)^2 \, \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n^2-1} \int_{t_i^n \wedge T}^{t_{i+1}^n \wedge T} (s - t_i^n) \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n^2-1} \int_{t_i^n \wedge T}^{t_{i+1}^n \wedge T} s \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{T}{n} \sum_{i=0}^{n^2-1} \int_{t_i^n \wedge T}^{t_{i+1}^n \wedge T} \mathrm{d}s = \frac{T^2}{n}.
\end{aligned}$$

Stąd oczywiście wynika (1.6). Pozostaje do wykazania (1.7). Ustalmy t. Mamy

$$\int_0^t f^{(n)}(s)\mathrm{d}W(s) = \sum_{i=0}^{n^2-1} W(t_i^n \wedge t)\left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n^2-1}\left[W(t_{i+1}^n \wedge t)^2 - W(t_i^n \wedge t)^2 - \left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)\right)^2\right]$$

$$= \frac{W^2(n \wedge t)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n^2-1}\left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)\right)^2.$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left|\sum_{i=0}^{n^2-1}\left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)\right)^2 - t\right|^2 = 0.$$

Niech

$$X_n := \sum_{i=0}^{n^2-1}\left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)\right)^2.$$

Mamy

$$\mathbb{E}\,X_n = \sum_{i=0}^{n^2-1}\mathbb{E}\left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)\right)^2 = \sum_{i=0}^{n^2-1}\left(t_{i+1}^n \wedge t - t_i^n \wedge t\right) = t \wedge n.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left|\sum_{i=0}^{n^2-1}\left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)\right)^2 - t\right|^2 \\
&\quad= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,|X_n - \mathbb{E}\,X_n + \mathbb{E}\,X_n - t|^2 \\
&\quad\le 2\lim_{n\to+\infty}\left[\mathbb{E}\,|X_n - \mathbb{E}\,X_n|^2 + |\mathbb{E}\,X_n - t|^2\right] \\
&\quad\le 2\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,|X_n - \mathbb{E}\,X_n|^2 + 2\lim_{n\to+\infty}|t \wedge n - t|^2 \\
&\quad\le 2\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,|X_n - \mathbb{E}\,X_n|^2 = 2\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Var} X_n.
\end{aligned}$$

Ponieważ W ma przyrosty niezależne więc

$$\operatorname{Var} X_n = \sum_{i=0}^{n^2-1}\operatorname{Var}\left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)\right)^2.$$

Oczywiście zmienne losowe $W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t)$ mają rozkład normalny $\mathcal{N}\left(0, t_{i+1}^n \wedge t - t_i^n \wedge t\right)$. Zauważmy, że jeżeli zmienna losowa Y ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, to

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var} Y^2 &= \mathbb{E}\, Y^4 - \left(\mathbb{E}\, Y^2\right)^2 = \mathbb{E}\, Y^4 - \sigma^4 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^4 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y - \sigma^4 \\
&= \sigma^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^4 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y - \sigma^4 \\
&= \sigma^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^4 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y - 1 \right) \\
&= \sigma^4 C,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^4 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y - 1
$$

jest stała niezależną od σ. Stąd

$$
\operatorname{Var} X_n = C \sum_{i=0}^{n^2-1} \left(t_{i+1}^n \wedge t - t_i^n \wedge t \right)^4 \le C \frac{t}{n} \to 0.
$$

Uwaga 1.5 Pokazaliśmy, że

$$
\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E} \left| \sum_{i=0}^{n_m-1} \left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t) \right)^2 - t \right|^2 = 0.
$$

Inaczej, że

$$
L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) - \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n_m-1} \left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t) \right)^2 = t
$$

gdzie (t_k^n);

$$
0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{n_m}^n = t
$$

jest ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$ takim, że

$$
\delta_n := \max \left\{ t_{k+1}^n - t_k^n \colon k = 0, \ldots n_m \right\} \to 0.
$$

Wynika z tego też, że

$$
\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n_m-1} \left(W(t_{i+1}^n \wedge t) - W(t_i^n \wedge t) \right)^2 = t,
$$

gdzie granica jest według prawdopodobieństwa.

Zadanie 1.2 Pokazać z definicji całki stochastycznej, że

$$
\int_0^t s \mathrm{d}W(s) = tW(t) - \int_0^t W(s) \mathrm{d}s.
$$

Zadanie 1.3 Pokazać z definicji całki stochastycznej, że

$$
\int_0^t W^2(s) \mathrm{d}W(s) = \frac{1}{3} W^3(t) - \int_0^t W(s) \mathrm{d}s.
$$

1.9 Całka z procesów klasy $\mathcal{P}^2$

Dotychczas zdefiniowaliśmy całkę stochastyczną Itô $I_t(f)$, $t \in [0,T]$, z funkcji klasy $\mathcal{L}^2$. Celem tego rozdziału będzie rozszerzenie pojęcia całki na funkcje $f \in \mathcal{P}^2$, gdzie klasa $\mathcal{P}^2 \supset \mathcal{L}^2$ jest zdefiniowana poniżej.

Definicja 1.10 $\mathcal{P}^2$ to klasa wszystkich procesów mierzalnych i adaptowanych

$$f\colon [0,+\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R},$$

takich że

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s < \infty\right\} = 1, \qquad \forall\, T \in (0,+\infty).$$

1.9.1 Lokalizacja

Niech $f \in \mathcal{P}^2$. Niech $\tilde{f}$ będzie progresywnie mierzalną modyfikacją f. Istnienie takiej modyfikacji wynika z twierdzenia Dellacherie–Meyrea (patrz Twierdzenie 1.5(ii)). Ustalmy $T \in (0,+\infty)$. Niech

$$\tau_n = \inf\left\{t \in [0,T]\colon \int_0^t \tilde{f}^2(s)\mathrm{d}s \geq n\right\}, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

tutaj przyjmujemy $\inf \emptyset = T$. Z Twierdzenia 1.5(iii) proces $\int_0^t \tilde{f}(s)^2\mathrm{d}s$, $t \in [0,T]$ jest progresywnie mierzalny a więc mierzalny i adaptowany. Ma on oczywiście ciągłe trajektorie. Z następującego faktu wynika, że dla dowolnego n, τ_n jest momentem stopu. Można też użyć Twierdzenie 3.10 z [20]. Ważne jest, że wobec ciągłości trajektorii procesu

$$\int_0^t \tilde{f}^2(s)\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$

nie musimy nic zakładać o filtracji!

Lemat 1.4 *Niech $X = (X(t))$ będzie procesem mierzalnym adaptowanym do filtracji $(\mathfrak{F}_t)$ oraz mający ciągłe trajektorie. Wówczas dla dowolnego zbioru domkniętego $K \subset \mathbb{R}$ zmienna losowa*

$$\tau_K := \inf\{t \geq 0\colon X(t) \in K\}$$

jest momentem Markowa względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$.

Dowód. Ponieważ funkcja odległości od zbioru K;

$$\rho_K(x) = \inf\{|x-y|\colon y \in K\}$$

jest ciągła, więc proces $\rho_K(X(t))$, $t \geq 0$, ma ciągłe trajektorie, jest mierzalny i adaptowany. Mamy

$$\{\tau_K > t\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{q \leq t,\, q \in \mathbb{Q}} \left\{\omega \in \Omega\colon \rho_K(X(q)) \geq \frac{1}{n}\right\}. \qquad \square$$

Niech
$$f^{(n)}(t) = f(t)\chi_{[0,\tau_n]}(t), \qquad t \geq 0. \tag{1.8}$$
Mamy, jak w dowodzie Twierdzenia 1.5(iv),
$$\int_0^T \left| f(t) - \tilde{f}(t) \right|^2 \mathrm{d}t = 0, \qquad \mathbb{P} - p.n.$$
Stąd
$$\mathbb{E}\int_0^T \left| f(t) - \tilde{f}(t) \right|^2 \chi_{(0,\tau_n]}(t)\mathrm{d}t = 0.$$
Oczywiście
$$\int_0^{+\infty} \left(\tilde{f}(s)\chi_{(0,\tau_n]}(t) \right)^2 \mathrm{d}s \leq n.$$
Ponieważ
$$\int_0^{+\infty} \left(\tilde{f}(s)\chi_{(0,\tau_n]}(t) \right)^2 \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \left(f^{(n)}(s) \right)^2 \mathrm{d}s, \qquad \mathbb{P} - p.n.$$
więc
$$\int_0^{+\infty} \left(f^{(n)}(s) \right)^2 \mathrm{d}s \leq n, \qquad \mathbb{P} - p.n.$$
Stąd $f^{(n)} \in \mathcal{L}^2$. Z Twierdzenia 1.10(v) dla $n \leq m$ mamy
$$I_t(f^{(n)})(\omega) = I_t(f^{(m)})(\omega) \qquad \text{prawie wszystkich dla } \omega \in A_n,$$
gdzie
$$A_n := \{\omega \in \Omega \colon \tau_n(\omega) = T\} = \left\{ \omega \in \Omega \colon \int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s \leq n \right\}.$$
Istotnie wystarczy pokazać, że $f^{(n)}(t;\omega) = f^{(m)}(t;\omega)$ dla $t \in [0,T]$ i $\omega \in A_n$. Ale to wynika z definicji $f^{(n)}$ i $f^{(m)}$ oraz z tego, że $\tau_m = \tau_n = T$ na A_n. Ponieważ $A_n \subset A_{n+1}$ oraz
$$\bigcup_n A_n = \Omega_0 := \left\{ \omega \in \Omega \colon \int_0^T f^2(t;\omega)\mathrm{d}t < +\infty \right\},$$
$\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, więc możemy zdefiniować całkę $I_t(f)$, $t \in [0,T]$, jako proces o ciągłych trajektoriach zadany wzorem
$$I_t(f)(\omega) = I_t(f^{(n)})(\omega), \qquad \omega \in A_n,\ t \in [0,T]. \tag{1.9}$$
Tak jak w przypadku $f \in \mathcal{L}^2$ dla $f \in \mathcal{P}^2$ przyjmujemy notacje
$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s) = I_t(f), \qquad t \geq 0.$$

1.9.2 Własności całki funkcji klasy $\mathcal{P}^2$

Z konstrukcji całki stochastycznej i z własności całki funkcji klasy $\mathcal{L}^2$ wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.13 *(i) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{P}^2$, proces $I_t(t)$, $t \geq 0$, ma ciągłe trajektorie.*
(ii) Całka jest liniowa, to znaczy dla dowolnych $f, g \in \mathcal{P}^2$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathcal{P}^2$ oraz

$$I_t(af + bg) = aI_t(f) + bI_t(g), \qquad t \geq 0.$$

(iii) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{P}^2$, jeżeli $f(t;\omega) = 0$ dla wszystkich $t \in [0,T]$ i $\omega \in A \in \mathfrak{F}_T$, to

$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s)(\omega) = 0, \qquad t \in [0,T],\ \omega \in A.$$

(iv) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{P}^2$, oraz dowolnego momentu Markowa τ, takiego, że $\tau \leq T$, dla pewnego $T < +\infty$, zachodzi

$$I_\tau(f) = I_T(f\chi_{(0,\tau]}).$$

Dowód (i). Niech $f \in \mathcal{P}^2$. Ustalmy $T \in (0, +\infty)$. Z konstrukcji całki, istnieją ciąg funkcji $(f^{(n)}) \subset \mathcal{L}^2$ oraz rosnący ciąg zbiorów $(A_n) \subset \mathfrak{F}$, takie że dla $t \in [0,T]$ i $n \in \mathbb{N}$,

$$I_t(f)(\omega) = I_t(f^{(n)})(\omega), \qquad \omega \in A_n$$

oraz $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, gdzie

$$\Omega_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Ponieważ $I_t(f^{(n)}$, $t \geq 0$, ma ciągłe trajektorie, więc dla dowolnego $\omega \in \Omega_0$,

$$[0,T] \ni t \mapsto I_t(f)(\omega) \in \mathbb{R}$$

ma ciągłe trajektorie. Ponieważ $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ i T jest dowolne więc $I_t(f)$, $t \geq 0$, ma trajektorie ciągłe $\mathbb{P}$-p.n. $\square$
Dowód (ii). Zauważmy, że momenty stopu

$$\tau_n := \inf \left\{ t \in [0,T] \colon \int_0^t \left(\tilde{f}^2(s) + \tilde{g}^2(s) \right) \mathrm{d}s \geq n \right\}$$

lokalizują wszystkie całki. Stąd liniowość wynika z liniowości całki z procesów klasy $\mathcal{L}^2$. $\square$
Dowód (iii) oraz (iv). Mamy tezę dla ciągu lokalizującego $I(f^{(n)})$. Stąd ponieważ $I_t(f^{(n)})(\omega) = I_t(f)(\omega)$ dla ω z dostatecznie dużego zbioru A_n więc mamy tezę dla $I_t(f)$. $\square$

Uwaga 1.6 Ogólnie dla procesu $f \in \mathcal{P}^2$ całka stochastyczna $(I_t(f))$ nie musi być martyngałem (jest zawsze lokalnym martyngałem, patrz Definicja **??** oraz Uwagi 2.1, 2.2. Wartość oczekiwana $\mathbb{E}\, I_t(f)$ może nie być dobrze zdefiniowana; to znaczy może zachodzić

$$\mathbb{E}\, I_t(f)^+ = +\infty = \mathbb{E}\, I_t(f)^-.$$

Możliwe jest też, że

$$\mathbb{E}\, I_t(f) = +\infty.$$

W końcu możliwe jest, patrz Rozdział 7.4, że dla jakiegoś $f \in \mathcal{P}^2$,

$$0 \leq \mathbb{E}\, I_t(f) < +\infty.$$

1.9.3 Całka jako granica według prawdopodobieństwa

Będziemy potrzebowali następującego lematu.

Lemat 1.5 *Niech $f \in \mathcal{P}^2$. Istnieje ciąg $(f^{(n)}) \subset \mathcal{L}^2$ taki, że dla dowolnego $T \in (0, +\infty)$, według prawdopodobieństwa*

$$\int_0^T \left| f(t) - f^{(n)}(t) \right|^2 \mathrm{d}t \to 0.$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $T \in (0, +\infty)$ istnieje ciąg $(f^{(n)}) \subset \mathcal{L}^2$ taki, że według prawdopodobieństwa

$$\int_0^T \left| f(t) - f^{(n)}(t) \right|^2 \mathrm{d}t \to 0.$$

Istotnie niech dla ustalonego T istnieje ciąg jak wyżej. Oznaczmy go przez $f^{(n,T)}$. Wówczas ciąg $(f^{(n)})$, $f^{(n)} = f^{(n,n)}$ ma żądaną własność.

Ustalmy więc $T \in (0, +\infty)$. Szukanym ciągiem jest ciąg

$$f^{(n)}(t; \omega) = f(t; \omega) \chi_{[0, \tau_n(\omega)]}(t),$$

gdzie, patrz Rozdział 1.9.1,

$$\tau_n(\omega) = \inf \left\{ t \in [0, T] \colon \int_0^t \tilde{f}^2(s; \omega) \mathrm{d}s \geq n \right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

a $\tilde{f}$ jest progresywnie mierzalną modyfikacją f. Oczywiście przyjmujemy, że $\inf \emptyset = T$. $\square$

Przypomnijmy, że dla $f \in \mathcal{P}^2$ zdefiniowaliśmy całkę stochastyczną

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) \mathrm{d}W(s), \qquad t \in [0, +\infty),$$

używając lokalizacji (patrz wzór (1.9)).

Lemat 1.6 *Niech $f \in \mathcal{P}^2$, $T \in (0, +\infty)$, $A \in \mathfrak{F}_T$. Wówczas dla dowolnych stałych $N, C > 0$ zachodzi*

$$\mathbb{P}\left\{A \cap \left(\sup_{t \in 0,T]} \left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s)\right| > C\right)\right\} \le \frac{N}{C^2} + \mathbb{P}\left\{A \cap \left(\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s > N\right)\right\}.$$

W szczególności

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in [0,T]} \left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s)\right| > C\right\} \le \frac{N}{C^2} + \mathbb{P}\left\{\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s > N\right\}.$$

Dowód. Niech

$$f^{(N)}(t) = f(t)\chi_{[0,\tau_N]}(t), \qquad t \ge 0,$$

gdzie

$$\tau_N = \inf\left\{t \in [0,T] \colon \int_0^t \tilde{f}^2(s)\mathrm{d}s \ge N\right\}.$$

Wówczas

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f^{(N)}(s)\mathrm{d}W(s)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T \left(f^{(N)}(s)\right)^2 \mathrm{d}s \le N.$$

Ponadto, z (1.9), mamy

$$\begin{aligned}&\left\{\omega \in \Omega \colon \sup_{0 \le t \le T}\left|\int_0^t \left[f(s) - f^{(N)}(s)\right]\mathrm{d}W(s)(\omega)\right| = 0\right\}\\ &\quad\supset \left\{\omega \in \Omega \colon \int_0^T \tilde{f}^2(s;\omega)\mathrm{d}s \le N\right\}.\end{aligned}$$

Tak więc

$$\begin{aligned}&A \cap \left\{\omega \in \Omega \colon \sup_{0 \le t \le T}\left|\int_0^t \left[f(s) - f^{(N)}(s)\right]\mathrm{d}W(s)(\omega)\right| > 0\right\}\\ &\quad\subset A \cap \left\{\omega \in \Omega \colon \int_0^T \tilde{f}^2(s;\omega)\mathrm{d}s > N\right\}.\end{aligned}$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s)\right|>C\right)\right\}\\
&=\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\left[f(s)-f^{(N)}(s)\right]\mathrm{d}W(s)+\int_0^t f^{(N)}(s)\mathrm{d}W(s)\right|>C\right)\right\}\\
&\le\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f^{(N)}(s)\mathrm{d}W(s)\right|>C\right)\right\}\\
&\quad+\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\left[f(s)-f^{(N)}(s)\right]\mathrm{d}W(s)\right|>0\right)\right\}\\
&\le\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f^{(N)}(s)\mathrm{d}W(s)\right|>C\right\}+\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\int_0^T\tilde{f}^2(s)\mathrm{d}s>N\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Z nierówności maksymalnej dla podmartyngałów[8] mamy

$$
\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f^{(N)}(s)\mathrm{d}W(s)\right|>C\right\}\le\frac{1}{C^2}\mathbb{E}\int_0^t\left(f^{(N)}(s)\right)^2\mathrm{d}s\le\frac{N}{C^2}.
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s)\right|>C\right)\right\}\\
&\quad\le\frac{N}{C^2}+\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\int_0^T\tilde{f}^2(s)\mathrm{d}s>N\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Ponieważ

$$
\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\int_0^T\tilde{f}^2(s)\mathrm{d}s>N\right)\right\}=\mathbb{P}\left\{A\cap\left(\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s>N\right)\right\},
$$

otrzymujemy żądane oszacowanie. □

Twierdzenie 1.14 *Niech $f\in\mathcal{P}^2$, $T\in(0,+\infty)$ oraz niech $(g^{(n)})$ będzie ciągiem funkcji klasy $\mathcal{P}^2$ takich, że według prawdopodobieństwa*

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^T\left|g^{(n)}(s)-f(s)\right|^2\mathrm{d}s\to 0.
$$

Wówczas, według prawdopodobieństwa

$$
\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s)-\int_0^t g^{(n)}(s)\mathrm{d}W(s)\right|\to 0
$$

[8] Nierówność maksymalna dla podmartyngałów (patrz np. Twierdzenie 4.7 z [20]) mówi, że jeżeli $X=(X_n)$ jest podmartyngałem to dla dowolnych $r>0$ i $m\in\mathbb{N}$,

$$
r\,\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\dots m}X_k\ge r\right)\le\int_{\{\max_{k=1,\dots,m}X_k\ge r\}}X_m\mathrm{d}\mathbb{P}\le\mathbb{E}\,X_m^+\le\mathbb{E}\,|X_m|\,.
$$

Dowód. Stosując Lemat 1.6 dla $C = \varepsilon$ i $N = \varepsilon^3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s) - \int_0^t g^{(n)}(s)\mathrm{d}W(s)\right| \ge \varepsilon\right\} \\ \le \varepsilon + \mathbb{P}\left\{\int_0^T \left|f(s) - g^{(n)}(s)\right|^2 \mathrm{d}s \ge \varepsilon^3\right\}. \qquad \square\end{aligned}$$

1.10 Uwagi o filtracji

Często wymaga się by przestrzeń filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ spełniała tak zwane *zwykłe warunki* (ang. *usual conditions*). To znaczy by:

- Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ była *zupełna*, to znaczy by dla każdego podzbioru $B \subset \Omega$ dla którego istniejee $A \in \mathfrak{F}$ takie, że $\mathbb{P}(A) = 0$ i $B \subset A$ zachodziło $B \in \mathfrak{F}$ (i w konsekwencji $\mathbb{P}(B) = 0$).
- Każde $\mathfrak{F}_t$ zawierało zbiory $\mathbb{P}$-miary zero z $\mathfrak{F}$.
- Filtracja $(\mathfrak{F}_t)$ była *prawostronnie ciągła*, to znaczy, że

$$\mathfrak{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_t, \qquad \forall\, t \ge 0.$$

Z twierdzenia Carathéodory'ego (patrz np. [20], Twierdzenie 1.14), dla dowolnej przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ istnieje jedyne minimalne rozszerzenie $(\Omega, \overline{\mathfrak{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ do przestrzeni zupełnej.

Można pokazać (patrz np. [1]), że filtracja $(\mathfrak{F}_t^W)$ generowana przez proces Wienera jest prawostronnie ciągła, czyli, że

$$\mathfrak{F}_t^W = \mathfrak{F}_{t+}^W, \qquad \forall\, t \ge 0.$$

Co więcej można pokazać (patrz również [1]), że jeżeli W jest procesem Wienera zdefiniowanym na zupełnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ to filtracja $(\mathfrak{F}_t^W)$ uzupełniona zbiorami $\mathbb{P}$-miary zero z $\mathfrak{F}$ jest prawostronnie ciągła, czyli, że dla

$$\overline{\mathfrak{F}_t^W} := \sigma\left(W(s); s \le t,\ B \in \mathfrak{F} \colon \mathbb{P}(B) = 0\right),$$

zachodzi $\overline{\mathfrak{F}_t^W} = \overline{\mathfrak{F}_{t+}^W}$.

Zauważmy,[9] że filtracja generowana przez proces o ciągłych trajektoriach nie musi być prawostronnie ciągła. Istotnie jeżeli

$$X_t = tX,$$

gdzie X jest zmienną losową różna od stałej, to dla $t > 0$,

[9] Za Panem Doktorem Dawidem Tarłowskim

$$\mathfrak{F}_0^X = \sigma(0) = \{\emptyset, \Omega\} \neq \mathfrak{F}_t^X = \sigma(X).$$

Pokażemy, patrz Rozdział 6.1, że jeżeli W jest procesem Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$ to dla dowolnych $0 \leq s \leq t$ przyrost $W(t) - W(s)$ nie zależy do $\mathfrak{F}_s$.

2

Procesy i wzór Itô

2.1 Martyngały lokalne

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją.

Definicja 2.1 Proces $M = (M(t))$ jest *martyngałem lokalnym* gdy istnieje ciąg momentów stopu (τ_n) taki, że $\tau_n \uparrow +\infty$, $\mathbb{P}$-p.n. oraz dla dowolnego n zastopowany proces

$$M^{\tau_n} = (M(t \wedge \tau_n)), \qquad t \geq 0,$$

jest martyngałem.

Zadanie 2.1 Pokazać, że każdy ograniczony lokalny martyngał o ciągłych trajektoriach, jest martyngałem.

Uwaga 2.1 Dla martyngału lokalnego M i danego czasu wartość oczekiwana $\mathbb{E}\, M(t)$ może nie istnieć, może być nieskończona, a może być skończona ale różna of $\mathbb{E}\, M(0)$. Oczywiście może być też równa $\mathbb{E}\, M(0)$. Każdy martyngał jest martyngałem lokalnym. W tym przypadku wystarczy wziąć $\tau_n = n$, patrz Uwaga 1.6.

Twierdzenie 2.1 *Niech $f \in \mathcal{P}^2$. Wówczas procesy $I_t(f)$, $t \geq 0$, oraz $I_t^2(f) - t$, $t \geq 0$, są martyngałami lokalnymi.*

Dowód. Jako momenty Markowa bierzemy

$$\tau_n := \inf\left\{ t \geq 0\colon \int_0^t \tilde{f}^2(s)\mathrm{d}s \geq n \right\} \wedge n,$$

gdzie $\tilde{f}$ jest progresywnie mierzalną modyfikacją f. $\square$

Uwaga 2.2 W dalszej części podamy kilka przykładów lokalnych martyngałów, które nie są martyngałami, patrz Uwaga 1.6. Uprzedzając nieco fakty lokalnymi martyngałami, które nie są martyngałami są procesy:

$$\left(\sum_{k=1}^{d}\left(W_i(t)+x_i\right)^2\right)^{\frac{2-d}{2}}$$

gdzie $d \geq 3$, $W_1, W_2, \ldots, W_d$ są niezależnymi procesami Wienera, a $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, patrz Zadanie 4.6,

$$\left(\sum_{k=1}^{3}\left(W_i(t)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad t \geq 1,$$

gdzie W_1, W_2, W_3 są niezależnymi procesami Wienera, patrz Zadanie 4.11, oraz proces konstruowany w Rozdziale 7.4.

2.2 Procesy Itô

Niech W będzie procesem Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$. Niech

$$\mu\colon [0,+\infty) \times \Omega \ni (t,\omega) \mapsto \mu(t;\omega) \in \mathbb{R}$$

oraz

$$\sigma\colon [0,+\infty) \times \Omega \ni (t,\omega) \mapsto \sigma(t;\omega) \in \mathbb{R}$$

będą procesami mierzalnymi adaptowanymi takimi, że

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \left[|\mu(t)| + |\sigma(t)|^2\right] \mathrm{d}t < +\infty\right\} = 1, \qquad \forall\, T \in (0,+\infty).$$

Zauważmy, że $\sigma \in \mathcal{P}^2$. Niech $X(0)$ będzie zmienną losową $\mathfrak{F}_0$-mierzalną.

Definicja 2.2 Proces

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \geq 0,$$

nazywamy *procesem Itô* o *różniczce*

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W(t). \tag{2.1}$$

Zadanie 2.2 Pokazać, że procesem Itô jest proces Wienera.

Zadanie 2.3 Pokazać, że każda deterministyczna funkcja $f \in C^1([0,+\infty)$ jest procesem Itô.

Ogóniej procesem Itô jest każda funkcja absolutnie ciągła;

Definicja 2.3 Funkcja
$$f\colon [0. +\infty) \mapsto \mathbb{R}$$
jest *absolutnie ciągła* gdy
$$f(t) = f(0) + \int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s,$$
gdzie $\mu\colon [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją (deterministyczną) lokalnie całkowalną;
$$\int_0^T |\mu(t)|dt < +\infty, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty).$$

Funkcje absolutnie ciągłe są ciągłe i różniczkowalne dla prawie wszystkich (ze względu na miarę Lebesguea) t. Ponadto $f'(t) = \mu(t)$ dla dla prawie wszystkich t.

Uwaga 2.3 W Rozdziale 1.8 pokazaliśmy, że
$$\frac{W^2(t)}{2} - \frac{t}{2} = \int_0^t W(s)]dW(s).$$
Stąd proces $W^2(t), t \geq 0$, jest Itô o różniczce
$$\mathrm{d}W^2(t) = \mathrm{d}t + 2W(t)\mathrm{d}W(t).$$
Spodziewalibyśmy się jednak, że (jak w klasycznej analizie)
$$\mathrm{d}W^2(t) = 2W(t)\mathrm{d}W(t).$$
To przypuszczenie jest niesłuszne! W poprawnym wzorze
$$\mathrm{d}W^2(t) = \mathrm{d}t + 2W(t)\mathrm{d}W(t).$$
występuje tak zwana *poprawka Itô*, przy $\mathrm{d}t$, spowodowana nieregularnością procesu Wienera!

2.2.1 Przypadek wielowymiarowy

Definicja 2.4 Niech $W_1, W_2, \ldots, W_m$ będą niezależnymi procesami Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$. Proces $W = (W_1, \ldots, W_m)$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$ *nazywamy m-wymiarowym procesem Wienera.*

Niech
$$\mu\colon [0, +\infty) \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto \mu(t; \omega) \in \mathbb{R}^d$$
oraz
$$\sigma\colon [0, +\infty) \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto \sigma(t; \omega) \in M(d \times m)$$
będą procesami mierzalnymi adaptowanymi takimi, że

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T\left[\sum_{i=1}^d|\mu_i(t)|+\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^m|\sigma_{i,j}(t)|^2\right]\mathrm{d}t<+\infty\right\}=1,\qquad \forall T\in(0,+\infty).$$

Tutaj $M(d\times m)$ oznacza przestrzeń macierzy wymiaru $d\times m$.

Zauważmy, że $\sigma_{i,j}\in\mathcal{P}^2$ dla dowolnych i,j.

Definicja 2.5 Niech $X(0)=(X_1(0),\dots X_d(0))$ będzie d-wymiarowym $\mathfrak{F}_0$-mierzalnym wektorem losowym. Proces

$$X(t)=(X_1(t),\dots,X_m(t)),\qquad t\geq 0,$$

o wartościach w $\mathbb{R}^d$ taki, że dla dowolnego $i=1,\dots,m$,

$$X_i(t)=X_i(0)+\int_0^t\mu_i(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^m\int_0^t\sigma_{i,j}(s)\mathrm{d}W_j(s),\qquad t\geq 0,$$

nazywamy *procesem Itô* o *różniczce*

$$\mathrm{d}X(t)=\mu(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}W(t).\tag{2.2}$$

2.3 Wzór Itô

Wzór Itô pełni w analizie stochastycznej (teoria całki Itô i procesów Itô) podobną role jak wzór na pochodną złożenia dwóch funkcji w klasycznej analizie. Mianowicie w analizie klasycznej mamy następującą sytuacje; niech $F\in C^{1,1}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ oraz niech $g\in C^1(\mathbb{R})$. Wówczas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t,g(t))=\frac{\partial F}{\partial t}(t,g(t))+\frac{\partial F}{\partial x}(t,g(t))g'(t).$$

W postaci różniczkowej zapisujemy to następująco

$$dF(t,g(t)=\left[\frac{\partial F}{\partial t}(t,g(t))+\frac{\partial F}{\partial x}(t,g(t))g'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

Twierdzenie 2.2 *(Wzór Itô; przypadek jednowymiarowy)* *Niech X będzie procesem Itô o różniczce* (2.1). *Niech $F\in C^{1,2}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$. Wówczas proces*

$$Y(t)=F(t,X(t)),\qquad t\geq 0,$$

jest procesem Itô o różniczce

$$\mathrm{d}F(t,X(t))=\left\{\frac{\partial F}{\partial t}(t,X(t))+\frac{\partial F}{\partial x}(t,X(t))\mu(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X(t))\sigma^2(t)\right\}\mathrm{d}t$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x}(t,X(t))\sigma(t)\mathrm{d}W(t).$$

Zadanie 2.4 Policzyć różniczki następujących procesów:

(i) $X(t) = W^4(t)$.
(ii) $X(t) = \exp\{W(t) - t/2\}$.
(iii) $X(t) = W^2(t)$.

Zadanie 2.5 Korzystając ze wzoru Itô pokaż, że następujące procesy są martyngałami

$$\begin{aligned}X_1(t) &:= \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos W(t),\\ X_2(t) &:= \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \sin W(t),\\ X_3(t) &:= (W(t) + t) \exp\left\{-W(t) - \frac{t}{2}\right\}.\end{aligned}$$

2.3.1 Wielowymiarowy wzór Itô

Twierdzenie 2.3 ***(Wzór Itô; przypadek wielowymiarowy)*** *Niech X będzie procesem Itô o różniczce* (2.2). *Niech $F \in C^{1,2}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Wówczas proces*

$$Y(t) = F(t, X(t)), \qquad t \geq 0,$$

jest procesem Itô o różniczce

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}F(t, X(t))\\ &= \left\{\frac{\partial F}{\partial t}(t, X(t)) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, X(t))\mu_i(t)\right\} \mathrm{d}t\\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_k}(t, X(t)) \left(\sigma(t)\sigma^T(t)\right)_{i,k} \mathrm{d}t\\ &\quad + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, X(t))\sigma_{i,j}(t)\mathrm{d}W_j(t).\end{aligned}$$

2.3.2 Wzór Itô dla iloczynu

Rozważmy dwa procesy Itô

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_1(t) &= \mu_1(t)\mathrm{d}t + \sigma_{1,1}(t)\mathrm{d}W_1(t) + \sigma_{1,2}(t)\mathrm{d}W_2(t)\\ \mathrm{d}X_2(t) &= \mu_2(t)\mathrm{d}t + \sigma_{2,1}(t)\mathrm{d}W_2(t) + \sigma_{2,2}(t)\mathrm{d}W_2(t).\end{aligned}$$

Policzmy różniczkę iloczynu $\mathrm{d}(X_1(t)X_2(t))$. Oczywiście

$$X_1(t)X_2(t) = F(X_1(t), X_2(t)),$$

gdzie $F(x_1 x_2) = x_1 x_2$. Mamy

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t) & \sigma_{1,2}(t) \\ \sigma_{2,1}(t) & \sigma_{2,2}(t) \end{bmatrix},$$

$$\sigma^T(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t) & \sigma_{2,1}(t) \\ \sigma_{1,2}(t) & \sigma_{2,2}(t) \end{bmatrix},$$

a więc

$$\sigma(t)\sigma^T(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}^2(t) + \sigma_{1,2}^2(t) & \sigma_{1,1}(t)\sigma_{2,1}(t) + \sigma_{1,2}(t)\sigma_{2,2}(t) \\ \sigma_{1,1}(t)\sigma_{2,1}(t) + \sigma_{1,2}(t)\sigma_{2,2}(t) & \sigma_{2,1}^2(t) + \sigma_{2,2}^2(t) \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(X_1(t)X_2(t)) \\
&= [X_2(t)\mu_1(t) + X_1(t)\mu_2(t) + (\sigma_{1,1}(t)\sigma_{2,1}(t) + \sigma_{1,2}(t)\sigma_{2,2}(t))]\,\mathrm{d}t \\
&\quad + X_1(t)\sigma_{2,1}(t)\mathrm{d}W_1(t) + X_1(t)\sigma_{2,2}(t)\mathrm{d}W_2(t) \\
&\quad + X_2(t)\sigma_{1,1}(t)\mathrm{d}W_1(t) + X_2(t)\sigma_{1,2}(t)\mathrm{d}W_2(t) \\
&= [\sigma_{1,1}(t)\sigma_{2,1}(t) + \sigma_{1,2}(t)\sigma_{2,2}(t)]\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + X_1(t)\,[\mu_2(t)\mathrm{d}t + \sigma_{2,1}(t)\mathrm{d}W_1(t) + \sigma_{2,2}(t)\mathrm{d}W_2(t)] \\
&\qquad + X_2(t)\,[\mu_1(t)\mathrm{d}t + \sigma_{1,1}(t)\mathrm{d}W_1(t) + \sigma_{1,2}(t)\mathrm{d}W_2(t)] \\
&= \langle X_1, X_2\rangle(t)\mathrm{d}t + X_1(t)\mathrm{d}X_2(t) + X_2(t)\mathrm{d}X_1(t),
\end{aligned}$$

gdzie

$$\langle X_1, X_2\rangle(t) = \sigma_{1,1}(t)\sigma_{2,1}(t) + \sigma_{1,2}(t)\sigma_{2,2}(t).$$

Ogólniej gdy

$$\mathrm{d}X_1(t) = \mu_1(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{1,j}(t)\mathrm{d}W_j(t)$$

$$\mathrm{d}X_2(t) = \mu_2(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{2,j}(t)\mathrm{d}W_j(t),$$

to

$$\mathrm{d}\,(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t)\mathrm{d}X_2(t) + X_2(t)\mathrm{d}X_1(t) + \mathrm{d}\langle X_1, X_2\rangle(t),$$

gdzie

$$\langle X_1, X_2\rangle(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{1,j}(t)\sigma_{2,j}(t).$$

Zadanie 2.6 Niech W będzie jednowymiarowym (to znaczy skalarnym) procesem Wienera. Załóżmy, że cena akcji $S = (S(t))$ jest geometrycznym ruchem Browna (model Blacka–Scholesa), to znaczy procesem spełniającym równanie

$$\mathrm{d}S(t) = S(t)\,[\mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t)]\,,$$

gdzie μ i σ są stałymi. Pokazać, że rozwiązaniem tego równania jest proces

$$S(t) = \exp\left\{\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right\} S(0).$$

Załóżmy, że złożona stopa zwrotu z depozytów/pożyczek bankowych jest stała i wynosi r. Policzyć różniczkę zdyskontowanego procesu cen

$$\tilde{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)}, \qquad t \geq 0,$$

gdzie $B(t)$ oznacza kapitał w banku w chwili t, przy założeniu, że w chwili 0 kapitał wynosi 1.

Zadanie 2.7 Niech W będzie jednowymiarowym procesem Wienera. Niech $a, b, \sigma \in \mathbb{R}$. Niech $X(0)$ będzie zmienną losową $\mathfrak{F}_0$-mierzalną. Pokazać, że proces

$$X(t) = \mathrm{e}^{-bt} X(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)} a \mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)} \sigma \mathrm{d}W(s), \qquad t \geq 0,$$

spełnia równanie różniczkowe (równanie Ornsteina–Uhlenbecka lub model Vasička; patrz Rozdział 10.8)

$$\mathrm{d}X(t) = (a - bX(t))\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t).$$

Zadanie 2.8 Który proces jest martyngałem

(a) $X(t) = W(t) + 4t$.
(b) $X(t) = W^2(t)$.
(c) $X(t) = W_1(t)W_2(t)$, gdzie W_1 i W_2 są niezależnymi procesami Wienera.
(d) Proces

$$X(t) = t^2 W(t) - 2\int_0^t sW(s)\mathrm{d}s.$$

(e) Proces

$$X(t) = W^2(t) - t.$$

2.3.3 Wyprowadzenie wprost wzoru na różniczkę iloczynu dwóch procesów Itô

Jak w poprzednim rozdziale rozważmy dwa procesy Itô

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_1(t) &= \mu_1(t)\mathrm{d}t + \sigma_{1,1}(t)\mathrm{d}W_1(t) + \sigma_{1,2}(t)\mathrm{d}W_2(t) \\ \mathrm{d}X_2(t) &= \mu_2(t)\mathrm{d}t + \sigma_{2,1}(t)\mathrm{d}W_2(t) + \sigma_{2,2}(t)\mathrm{d}W_2(t). \end{aligned}$$

Mamy

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t \mu_i(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{2} \int_0^t \sigma_{i,j}(s)\mathrm{d}W_j(s), \qquad i = 1, 2,\ t \geq 0.$$

Niech $X(t) = X_1(t)X_2(t)$, $t \geq 0$. Ustalmy $T \in (0, +\infty)$. Niech $t_i^n = iT/n$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, \ldots, n$, będzie ciągiem podziałów odcinka $[0, T]$. Mamy

$$\begin{aligned}
X(T) &= X(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\right] \\
&= X(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \left[X_1(t_{i+1}^n)X_2(t_{i+1}^n) - X_1(t_i^n)X_2(t_i^n)\right] \\
&= X(0) + \Sigma_{1,n} + \Sigma_{2,n} + \Sigma_{3,n},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\Sigma_{1,n} &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[X_1(t_{i+1}^n) - X_1(t_i^n)\right] X_2(t_i^n) \\
\Sigma_{2,n} &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[X_2(t_{i+1}^n) - X_2(t_i^n)\right] X_1(t_i^n), \\
\Sigma_{3,n} &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[X_1(t_{i+1}^n) - X_1(t_i^n)\right] \left[X_2(t_{i+1}^n) - X_2(t_i^n)\right].
\end{aligned}$$

Tutaj korzystamy z następującego rozumowania

$$\begin{aligned}
a_{i+1}b_{i+1} - a_ib_i &= (a_{i+1} - a_i + a_i)(b_{i+1} - b_i + b_i) - a_ib_i \\
&= (a_{i+1} - a_i)b_i + a_i(b_{i+1} - b_i) + (a_{i+1} - a_i)(b_{i+1} - b_i).
\end{aligned}$$

Można pokazać, że

$$\Sigma_{1,n} \to \int_0^T X_1(s)\mathrm{d}X_2(s),$$

oraz

$$\Sigma_{2,n} \to \int_0^T X_2(s)\mathrm{d}X_1(s).$$

W końcu można też pokazać, że

$$\Sigma_{3,n} \to \int_0^T \left[\sigma_{1,1}(s)\sigma_{2,1}(s) + \sigma_{1,2}(s)\sigma_{2,2}(s)\right] \mathrm{d}s.$$

2.3.4 Różniczka iloczynu ze wzoru polaryzacyjnego

Jak w poprzednim rozdziale rozważmy dwa procesy Itô

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_1(t) &= \mu_1(t)\mathrm{d}t + \sigma_1(t)\mathrm{d}W(t) \\
\mathrm{d}X_2(t) &= \mu_2(t)\mathrm{d}t + \sigma_2(t)\mathrm{d}W(t),
\end{aligned}$$

gdzie W jest procesem Wienera w $\mathbb{R}$.

Mamy, ten sam wynik jak w Rozdziale 2.3.2,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(X_1(t)X_2(t)\right) &= \mathrm{d}\frac{1}{4}\left[\left(X_1(t)+X_2(t)\right)^2-\left(X_1(t)-X_2(t)\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(X_1(t)+X_2(t)\right)\left(\mu_1(t)+\mu_2(t)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(X_1(t)+X_2(t)\right)\left(\sigma_1(t)+\sigma_2(t)\right)\mathrm{d}W(t)\\
&\quad+\frac{1}{4}\left(\sigma_1(t)+\sigma_2(t)\right)^2\mathrm{d}t\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(X_1(t)-X_2(t)\right)\left(\mu_1(t)-\mu_2(t)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(X_1(t)-X_2(t)\right)\left(\sigma_1(t)-\sigma_2(t)\right)\mathrm{d}W(t)\\
&\quad-\frac{1}{4}\left(\sigma_1(t)-\sigma_2(t)\right)^2\mathrm{d}t\\
&= X_1(t)\mathrm{d}X_2(t)+X_2(t)\mathrm{d}X_1(t)+\sigma_1(t)\sigma_2(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

3

Dowód wzoru Itô

3.1 Pierwsze pomysły

3.1.1 Przypadek deterministyczny

Zacznijmy od prostego (deterministycznego) przypadku. Niech $T \in (0, +\infty)$ oraz niech $\mu\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną całkowalną, to znaczy

$$\int_0^T |\mu(s)| \mathrm{d}s < +\infty.$$

Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz niech

$$X(t) = x + \int_0^t \mu(s) \mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T].$$

Na koniec niech $F \in C^1(\mathbb{R})$. Ustalmy $t \in [0,T]$. Rozważmy ciąg (t_k^n) podziałów odcinka $[0,t]$:

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t.$$

Mamy

$$F(X(t)) - F(x) = F(X(t)) - F(X(0)) = \sum_{k=1}^{n} \left[F(X(t_{k+1}^n)) - F(X(t_k^n)) \right].$$

Z twierdzenia Legrange'a o wartości średniej dla dowolnych k i n istnieje $\delta_k^n \in [0,1]$, takie, że

$$\begin{aligned} &\left[F(X(t_{k+1}^n)) - F(X(t_k^n)) \right] \\ &\quad = F' \left(X(t_k^n) + \delta_k^n (X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n)) \right) \left(X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n) \right) \end{aligned}$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
&F(X(t)) - F(X(0)) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} F'\left(X(t_k^n) + \delta_k^n (X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n))\right)\left(X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n)\right).
\end{aligned}
$$

Ponieważ

$$
X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n) = \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \mu(s)\mathrm{d}s,
$$

więc

$$
F(X(t)) - F(X(0)) = \int_0^t f_n(s)\mathrm{d}s,
$$

gdzie

$$
f_n(s) = \mu(s) \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{(t_k^n, t_{k+1}^n]}(s) F'\left(X(t_k^n) + \delta_k^n (X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n))\right).
$$

Jeżeli

$$
\lim_{n\to+\infty} \max_{k=0,\ldots,n_1} (t_{k+1}^n - t_k^n) = 0,
$$

to, z ciągłości F i X mamy

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(s) = F'(X(s))\mu(s), \qquad \forall\, s \in [0,t].
$$

Ponieważ F' jest funkcją ciągłą a $X\colon [0,t] \mapsto \mathbb{R}$ ma (z twierdzenia Wierestrassa) ograniczony obraz, więc istnieje stała $C < +\infty$ taka, że

$$
|f_n(s)| \le C|\mu(s)|, \qquad \forall\, s \in [0,t].
$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_0^t |f_n(s) - F'(X(s))\mu(s)|\mathrm{d}s = 0.
$$

Stąd

$$
F(X(t)) - F(X(0)) = \int_0^t F'(X(s))\mu(s)\mathrm{d}s.
$$

3.1.2 Najprostszy przypadek stochastyczny

Zastosujmy rozumowanie jak wyżej dla $F \in C^1(\mathbb{R})$ oraz

$$
X(t) = W(t) = 0 + \int_0^t \mathrm{d}W(s).
$$

Mamy

$$F(X(t)) - F(X(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} F'\left(X(t_k^n) + \delta_k^n(X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n))\right)\left(X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n)\right).$$

Ponieważ

$$X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n) = W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)),$$

więc

$$F(X(t)) - F(X(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} F'\left(X(t_k^n) + \delta_k^n(X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n))\right)\left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right).$$

Czy szereg zbiega do

$$\int_0^t F'(X(s))\mathrm{d}W(s).$$

Zwykle nie. Jeśli $F'(x) = x$, to

$$\sum_{k=0}^{n-1} F'\left(X(t_k^n) + \delta_k^n(X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n))\right)\left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} W(t_k^n)\left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k^n\left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right)^2.$$

O ile

$$\sum_{k=0}^{n-1} W(t_k^n)\left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right) \to \int_0^t W(s)\mathrm{d}W(s),$$

to

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k^n\left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right)^2$$

nie zbiega do 0. Ponieważ, patrz Rozdział 1.8,

$$\frac{W^2(t)}{2} = \int_0^t W(s)\mathrm{d}W(s) + \frac{t}{2},$$

więc w naszym przypadku

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k^n\left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right)^2 \to \frac{t}{2}.$$

3.2 Dowód wzoru Itô

Krok 1 W pierwszym kroku udowodnimy, że dla funkcji F klasy $C^2(\mathbb{R})$ z ograniczoną drugą pochodną

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

mamy

$$F(W(t)) = F(0) + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, W(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, W(s))\mathrm{d}W(s).$$

W tym celu ustalmy t i rozważmy ciąg podziałów diadycznych

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{2^n}^n = t$$

gdzie

$$t_k^n = \frac{tk}{2^n}.$$

Mamy

$$F(W(t)) = F(W(0)) + \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[F(W(t_{k+1}^n)) - F(W(t_k^n))\right]$$

Rozwijając w szereg Taylora otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(W(t_{k+1}^n)) - F(W(t_k^n)) = {} & \frac{\partial F}{\partial x}(W(t_k^n)) \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right] \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\rho_k^n)) \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\rho_k^n = W(t_k^n) + \delta_k^n \left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right)$$

jest (losowym) punktem wewnątrz przedziału

$$\left[W(t_k^n), W(t_{k_1}^n)\right]$$

dokładniej δ_k^n jest zmenną losową o wartościach w $[0, 1]$.

Stąd

$$F(W(t)) = F(W(0)) + I_n^1 + I_n^2,$$

gdzie

$$I_n^1 := \sum_{k=0}^{2^n-1} F'(W(t_k^n)) \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right],$$

a

$$I_n^2 := \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} F''(\rho_k^n)) \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2.$$

Mamy pokazać, że
$$I_n^1 \to \int_0^t F'(W(s))\mathrm{d}W(s)$$
oraz, że
$$I_n^2 \to \frac{1}{2}\int_0^t F''(W(s))\mathrm{d}s.$$
Wystarczy pokazać, że zbieżność jest według prawdopodobieństwa.

Mamy
$$I_n^1 = \int_0^t f^{(n)}(s)\mathrm{d}W(s),$$
gdzie $\{f^{(n)}\} \subset \mathcal{P}$ jest ciągiem funkcji prostych
$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} F'(W(t_k^n))\chi_{(t_k^n,t_{k+1}^n]}$$
Biorąc pod uwagę Twierdzenie 1.14 wystarczy pokazać, że
$$\int_0^t \left(f^{(n)}(s) - F'(W(s))\right)^2 \mathrm{d}s \to 0.$$
Z definicji $f^{(n)}$ mamy
$$\int_0^t \left(f^{(n)}(s) - F'(W(s))\right)^2 \mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left|F'(W(t_k^n)) - F'(W(s)\right|^2 \mathrm{d}s$$
Stąd żądana zbieżność (nawet $\mathbb{P}$-p.n.) wynika z ciągłości
$$[0,t] \ni s \mapsto F'(W(s;\omega)) \in \mathbb{R}$$
dla $\mathbb{P}$ prawie wszystkich $\omega \in \Omega$.

Pokazanie zbieżności
$$I_n^2 \to \frac{1}{2}\int_0^t F''(W(s))\mathrm{d}s.$$
jest znacznie trudniejsze. Mamy
$$I_n^2 = \frac{1}{2}\left[I_n^{2,1} + I_n^{2,2} + I_n^{2,3}\right],$$
gdzie
$$I_n^{2,1} := \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[F''(\rho_k^n) - F''(W(t_k^n))\right]\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2,$$
$$I_n^{2,2} := \sum_{k=0}^{2^n-1} F''(W(t_k^n))\left[\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right],$$
$$I_n^{2,3} := \sum_{k=0}^{2^n-1} F''(W(t_k^n))(t_{k+1}^n - t_k^n).$$

Mamy

$$I_n^{1,2} \le X_n Y_n$$

gdzie

$$X_n := \sup\left\{k = 0, \ldots, 2^n - 1\colon\ |F''(\rho_k^n) - F''(W(t_k^n))|\right\}$$

oraz

$$Y_n := \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2.$$

Z ciągłości F'', $X_n \to 0$, $\mathbb{P}$-p.n. Ponieważ, patrz Rozdział 1.8, $Y_n \to t$ według prawdopodobieństwa, więc $I_n^{2,1} \to 0$ według prawdopodobieństwa. Oczywiście $I_n^{2,3}$ jest sumą Riemanna całki

$$\int_0^t F''(W(s))\mathrm{d}s$$

stąd

$$I_n^{2,3} \to \int_0^t F''(W(s))\mathrm{d}s.$$

Pozostaje więc do pokazania, że $I_n^{2,2} \to 0$ według prawdopodobieństwa. Pokażemy, że $I_n^{2,2} \to 0$ w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, czyli, że

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(I_n^{2,2}\right)^2 = 0.$$

W tym celu zauważmy, że dla $k > l$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\, F''(W(t_k^n)) \left[\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right] F''(W(t_l^n)) \\
&\qquad \times \left[\left[W(t_{l+1}^n) - W(t_l^n)\right]^2 - (t_{l+1}^n - t_l^n)\right] \\
&= \mathbb{E}\,\mathbb{E}\Big(F''(W(t_k^n)) \left[\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right] F''(W(t_l^n)) \\
&\qquad \left[\left[W(t_{l+1}^n) - W(t_l^n)\right]^2 - (t_{l+1}^n - t_l^n)\right] |\mathfrak{F}_{t_k}\Big) \\
&= \mathbb{E}\, F''(W(t_k^n))F''(W(t_l^n)) \left[\left[W(t_{l+1}^n) - W(t_l^n)\right]^2 - (t_{l+1}^n - t_l^n)\right] \\
&\qquad \times \mathbb{E}\left(\left[\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right] |\mathfrak{F}_{t_k}\right) \\
&= \mathbb{E}\, F''(W(t_k^n))F''(W(t_l^n)) \left[\left[W(t_{l+1}^n) - W(t_l^n)\right]^2 - (t_{l+1}^n - t_l^n)\right] \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(I_n^{2,2}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\, F''(W(t_k^n))^2 \left[\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right]^2 \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\, F''(W(t_k^n))^2 \mathbb{E}\left(\left[\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right]^2 |\mathfrak{F}_{t_k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\, F''(W(t_k^n))^2 \mathbb{E}\left[\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right]^2 .
\end{aligned}
$$

Tutaj korzystaliśmy (patrz Twierdzenie 1.8 czyli twierdzenie Lévy'ego) z faktu, że $W(t) - W(s)$ nie zależy od $\mathfrak{F}_s$ oraz będziemy korzystać poniżej z faktu, że $W(t) - W(s)$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, t-s)$. Ponieważ

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right]^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1}^n - t_k^n)}} \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(t_{k+1}^n - t_k^n)}} \mathrm{d}x \\
&= (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 - 1\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= C(t_{k+1}^n - t_k^n)^2,
\end{aligned}
$$

więc mamy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(I_n^{2,2}\right)^2 &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} |F''(x)|^2 \sum_{k=0}^{2^n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \\
&\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} |F''(x)|^2 \frac{t}{2^n} t \to 0,
\end{aligned}
$$

co kończy dowód równości

$$
F(W(t)) = F(0) + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(W(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(W(s))\mathrm{d}W(s).
$$

Krok 2 W tym kroku zauważmy, że po pierwsze możemy pozbyć się założenia o ograniczoności drugiej pochodnej po x. Istotnie możemy zlokalizować równanie we wzorze Itô biorąc moment Markowa

$$
\tau_n := \inf\left\{t \geq 0 \colon |W(t)| \geq n\right\}.
$$

Po drugie możemy rozważyć funkcję $F = F(t, x)$ zależną od t. Istotnie w tym przypadku należy użyć równości

$$
\begin{aligned}
F(t,W(t)) &= F(0,0) + \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[F(t_{k+1}^n, W(t_{k+1}^n)) - F(t_k^n, W(t_k^n))\right] \\
&= F(0,0) + \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[F(t_{k+1}^n, W(t_{k+1}^n)) - F(t_k^n, W(t_{k+1}^n))\right] \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[F(t_k^n, W(t_{k+1}^n)) - F(t_k^n, W(t_k^n))\right].
\end{aligned}
$$

Następnie należy rozwinąc w szereg Taylora jak w Kroku 1;

$$
\begin{aligned}
F(t_k^n, W(t_{k+1}^n)) - F(t_k^n, W(t_k^n)) = &\frac{\partial F}{\partial x}(t_k^n, W(t_k^n)) \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_k^n, \rho_k^n)) \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2,
\end{aligned}
$$

oraz

$$
F(t_{k+1}^n, W(t_{k+1}^n)) - F(t_k^n, W(t_{k+1}^n)) = \frac{\partial F}{\partial t}(l_k^n, W(t_{k+1}^n)) \left(t_{k+1}^n - t_k^n\right),
$$

gdzie $l_k^n \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$. Jak w Kroku 1 pokazujemy, że

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{\partial F}{\partial x}(t_k^n, W(t_k^n)) \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_k^n, \rho_k^n)) \left[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\right]^2
\end{aligned}
$$

zbiega do

$$
\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, W(s))\mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, W(s))\mathrm{d}s,
$$

a

$$
\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{\partial F}{\partial t}(l_k^n, W(t_{k+1}^n)) \left(t_{k+1}^n - t_k^n\right)
$$

zbiega do

$$
\int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, W(s))\mathrm{d}s.
$$

Istotnie ciągłość $\frac{\partial F}{\partial x}$ gwarantuje zbieżność całki stochastycznej. Zbieżność całki po ds pokazujemy tak jak w Kroku 1. Ostatnim spostrzeżeniem w tym kroku jest to, że można zastąpić czas początkowy 0 przez dowolne $t_0 \in [0, t]$.

Krok 3 W poprzednim kroku pokazaliśmy, że dla $0 \leq t_0 \leq t$

$$
\begin{aligned}
F(t,W(t)) = F(t_0,W(t_0)) &+ \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial x}(s,W(s))\mathrm{d}W(s) \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial F}{\partial s}(s,W(s)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,W(s)) \right\} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

W tym kroku zauważymy, że mamy wzór Itô dla procesów X będących całkami funkcji prostych. Dokładniej, załóżmy, że

$$
X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\ dW(s),
$$

gdzie μ i σ są kawałkami stałe;

$$
\mu = \sum_{k=0}^{n} \mu(t_k)\chi_{(t_k,t_{k+1}]}, \qquad \sigma = \sum_{k=0}^{n} \sigma(t_k)\chi_{(t_k,t_{k+1}]}.
$$

Wówczas dla $t \in (t_k, t_{k+1}]$ mamy

$$
X(t) = X(t_k) + \mu(t_k)(t - t_k) + \sigma(t_k)(W(t) - W(t_k)).
$$

Następnie

$$
F(t,X(t)) = \tilde{F}(t,W(t)),
$$

gdzie

$$
\tilde{F}(s,x) = F(s, X(t_k) + \mu(t_k)(s - t_k) + \sigma(t_k)(x - W(t_k)).
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
&F(t,X(t)) = \tilde{F}(t,W(t)) \\
&= \tilde{F}(t_k,W(t_k)) + \int_{t_k}^{t} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s,W(s))\mathrm{d}W(s) \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} \left\{ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s}(s,W(s)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(s,W(s)) \right\} \mathrm{d}s \\
&= F(t_k,X(t_k)) + \int_{t_k}^{t} \sigma(t_k)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X(s))\mathrm{d}W(s) \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} \left\{ \frac{\partial F}{\partial s}(s,X(s)) + \mu(t_k)\frac{\partial F}{\partial s}(s,X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_k)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X(s)) \right\} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Krok 4 W ostatnim kroku aproksymujemy funkcję klasy $\mathcal{L}^2$ funkcjami prostymi a potem udowadniamy równość dla procesów klasy $\mathcal{P}^2$.

Uwaga 3.1 W dowodzie wzoru Itô korzystaliśmy tylko z tego, że:

(i) W jest martyngałem o ciągłych trajektoriach.
(ii) $W^2(t)$ jest całkowalna dla każdego t, oraz

$$
\mathbb{E}\left((W(t) - W(s))^2 | \mathfrak{F}_s\right) = t - s, \qquad \forall 0 \le s \le t < +\infty,
$$

(iii) Dla dowolnego $t \in (0, +\infty)$,

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\left[W(t^n_{k+1}) - W(t^n_k)\right]^2 - (t^n_{k+1} - t^n_k)\right]^2 \to 0$$

według prawdopodobieństwa, gdy (t^n_k) jest podziałem diadycznym odcinka $[0, t]$.

Oczywiście (ii) (plus (i)) jest równoważne stwierdzeniu, że $W^2(t) - t$, $t \geq 0$, jest martyngałem.

Zadanie 3.1 ***(Według Steele'a zadanie doskonałe dla duszy!)*** Uzupełnić szczegóły dowodu wzoru Itô.

Zadanie 3.2 Podać przykład funkcji $f \in C(\mathbb{R})$ takiej, że $f \not\equiv 0$ oraz zmienne losowe

$$\int_0^t f(W(s))\mathrm{d}W(s), \qquad t \geq 0,$$

są ograniczone.

Zadanie 3.3 Niech $f \in \mathcal{P}^2$. Załóżmy, że dla $T > 0$ istnieje stała $M < +\infty$, taka że

$$\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s) \right| \leq M.$$

Pokazać, że

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f(s)\mathrm{d}W(s)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s.$$

3.3 Jednoznaczność przedstawienia

Celem tego rozdziału jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1 *Niech $\mu, \sigma \colon [0, +\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ będą procesami mierzalnym i adaptowanymi takimi, że*

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \left(|\mu(s)| + \sigma^2(s)\right) \mathrm{d}s < +\infty\right\} = 1, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty).$$

Niech

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \geq 0,$$

będzie procesem Itô.
(i) Process X jest lokalnym martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T |\mu(s)|\mathrm{d}s = 0\right\} = 1, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty).$$

(ii) Jeżeli

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \tilde{\mu}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \tilde{\sigma}(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \geq 0,$$

dla procesów mierzalnych i adaptowanych, takich, że

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \left(|\tilde{\mu}(s)| + \tilde{\sigma}^2(s)\right)\mathrm{d}s < +\infty\right\} = 1, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty),$$

to

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \left(|\mu(s) - \tilde{\mu}(s)| + |\sigma(s) - \tilde{\sigma}(s)|^2\right)\mathrm{d}s < +\infty)\right\} = 1, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty),$$

Dowód. Z pierwszej części wynika druga. Aby pokazać pierwszą zauważmy, że całka

$$\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s$$

jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t \mu(r)\mathrm{d}r|\mathfrak{F}_s\right) = 0, \qquad \forall\, 0 \leq s < t.$$

Stąd

$$\mu(s) = \lim_{t\downarrow s} \frac{1}{t-s}\mathbb{E}\left(\int_s^t \mu(r)\mathrm{d}r|\mathfrak{F}_s\right) = 0. \qquad \square$$

W dowodzie powyższego twierdzenia można też skorzystać z Propozycji 3.2, której dowód i sformułowanie pochodzi książki Baudoine [2], str. 147. Potrzebujemy pojęcia wahania funkcji.

Definicja 3.1 Niech $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją na odcinku $[a,b]$. Liczbę

$$\mathrm{Wah}_{[a,b]}(f) = \sup \sum_{k=1}^{m} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|\,,$$

gdzie supremum jest po wszystkich skończonych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots, t_m = t$, przedziału $[a,b]$ nazywamy *wahaniem funkcji na przedziale* $[a,b]$. Mówimy, że funkcja f jest o *wahaniu skończonym na* $[a,b]$ gdy $\mathrm{Wah}_{[a,b]}(f) < +\infty$.

Propozycja 3.1 *Funcja monotoniczna $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ ma wahanie skończone. Ponadto*

$$Wah_{[a,b]}(f) = \begin{cases} f(b) - f(a) & \text{gdy } f \text{ jest rosnąca,} \\ f(a) - f(b) & \text{gdy } f \text{ jest malejąca.} \end{cases}$$

Odwrotnie, każda funkcja o wahaniu skończonym na przedziale $[a,b]$ jest różnicą dwóch funkcji monotonicznych. Każda funkcja absolutnie ciągła (patrz Definicja 2.3)

$$f(t) = \int_a^t g(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [a,b],$$

jest różnicą funkcji rosnących

$$\int_a^t g(s)\mathrm{d}s = \int_a^b g^+(s)\mathrm{d}s - \int_a^b g^-(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [a,b],$$

ma więc skończone wahanie oraz

$$Wah_{[a,b]}(f) = \int_a^b |g(s)|\mathrm{d}s.$$

Propozycja 3.2 *Niech $M = (M(t))$ będzie martyngałem o ciągłych trajektoriach. Jeżeli $M(\cdot;\omega)$ ma wahanie skończone na odcinku $[0,T]$ dla $\mathbb{P}$-p.w. $\omega \in \Omega$, to martyngał M jest stały na przedziale $[0,T]$.*

Dowód. Możemy założyć, że $M(0) = 0$. Ustalmy przedział skończony $[0,T]$. Rozważmy ciąg momentów stopu

$$\tau_N := \inf\{t \le T\colon |M(t)| \ge N \quad \text{lub} \quad \mathrm{Wah}_{[0,s]}M \ge N\}.$$

Ponieważ proces zastopowany $M^{\tau_N} = (M(t \wedge \tau_N))$ jest martyngałem, patrz [20], więc dla $0 \le s \le t \le T$,

$$\mathbb{E}\left(M(t\wedge\tau_N) - M(s\wedge\tau_N)\right)^2 = \mathbb{E}\left(M(t\wedge\tau_N)\right)^2 - \mathbb{E}\left(M(s\wedge\tau_N)\right)2.$$

Rozważmy teraz ciąg podziałów (t_k^n) odcinka $[0,T]$ o średnicach

$$\delta_n = \max\{t_{k+1}^n - t_k^n\colon k = 0,\ldots,m_n\} \to 0.$$

Mamy,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, M^2(\tau_N) &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(M(t_{k+1}^n \wedge \tau_N) - M(t_k^n \wedge \tau_N)\right)^2 \\ &\le \max_k \left|M(t_{k+1}^n \wedge \tau_N) - M(t_k^n \wedge \tau_N)\right| \\ &\qquad \times\ \mathbb{E} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left|M(t_{k+1}^n \wedge \tau_N) - M(t_k^n \wedge \tau_N)\right| \\ &\le N \max_k \left|M(t_{k+1}^n \wedge \tau_N) - M(t_k^n \wedge \tau_N)\right|. \end{aligned}$$

Przechodząc z $n \to +\infty$ z ciągłości M wnioskujemy, że

$$\mathbb{E}\, M^2(\tau_N) = 0,$$

czyli $M^2(\tau_N) = 0$. Przechodząc teraz z $n \to +\infty$, otrzymujemy $M(T) = 0$. $\square$

3.4 Czas lokalny

Funkcja $F(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w 0. Nie możemy więc stosować wzoru Itô by wyliczyć różniczkę procesu $X^z(t) = |W(t) - z|$ gdzie $z \in \mathbb{R}$. Dla $\varepsilon > 0$, rozważmy aproksymację funkcji F:

$$F_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & \text{gdy } |x| > \varepsilon, \\ d_\varepsilon x^2 + e_\varepsilon & \text{gdy } |x| \le \varepsilon. \end{cases}$$

Parametry $d_\varepsilon, e_\varepsilon$ dobieramy tak by F_ε była klasy C^1, to znaczy by

$$d_\varepsilon \varepsilon^2 + e_\varepsilon = \varepsilon, \qquad 2d_\varepsilon \varepsilon = 1,$$

a więc

$$d_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}, \qquad e_\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Funkcja F_ε jest klasy C^2 poza punktami $\{-1, 1\}$. Powinniśmy więc być wstanie zastosować wzór Itô. Osoby bardziej skrupulatne powinny wziąść aproksymację $F_{\varepsilon,\delta}$ funkcji F_ε. Mamy

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(W(t) - z) &= F_\varepsilon(W(0) - z) + \int_0^t F_\varepsilon'(W(s) - z)\mathrm{d}W(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t F_\varepsilon''(W(s) - z)\mathrm{d}s \\ &= F_\varepsilon(z) + \int_0^t \mathrm{sgn}(W(s) - z)\chi_{\{|W(s)-z|>\varepsilon\}}\mathrm{d}W(s) \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}(W(s) - z)\chi_{\{|W(s)-z|\le\varepsilon\}}\mathrm{d}W(s) \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \chi_{\{|W(s)-z|\le\varepsilon\}}\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Gdy $\varepsilon \to 0$, to

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|F_\varepsilon(W(t) - z) - |W(t) - z||^2 &\le \sup_{|x|\le\varepsilon} |F_\varepsilon(x)|^2 \mathbb{E}\chi_{\{|W(t)-z|\le\varepsilon\}} \\ &= \sup_{|x|\le\varepsilon} |F_\varepsilon(x)|^2 \mathbb{P}\{|W(t) - z| \le \varepsilon\} \to 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^t \operatorname{sgn}(W(s)-z)\chi_{\{|W(s)-z|>\varepsilon\}}\mathrm{d}W(s) - \int_0^t \operatorname{sgn}(W(s)-z)\mathrm{d}W(s)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \operatorname{sgn}(W(s)-z)\chi_{\{|W(s)-z|\le\varepsilon\}}\mathrm{d}W(s)\right]^2 \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\left[\operatorname{sgn}(W(s)-z)\chi_{\{|W(s)-z|\le\varepsilon\}}\right]^2 \mathrm{d}s \\
&\le \int_0^t \mathbb{P}\{|W(s)-z|\le\varepsilon\}\mathrm{d}s \to 0,
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}\left|\int_0^t \frac{W(s)-z}{\varepsilon}\chi_{\{|W(s)-z|\le\varepsilon\}}\mathrm{d}W(s)\right|^2 \le \int_0^t \mathbb{P}\{|W(s)-z|\le\varepsilon\}\mathrm{d}s \to 0.
$$

Stąd, przechodząc w (3.1) z ε do 0 otrzymujemy

$$
|W(t)-z| = |z| + \int_0^t \operatorname{sgn}(W(s)-z)\mathrm{d}W(s) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \chi_{\{|W(s)-z|\le\varepsilon\}}\mathrm{d}s,
$$

gdzie granica jest w sensie zbieżności w L^2.

W rezultacie otrzymaliśmy tak zwany *wzór Tanaki*

$$
|W(t)-z| = |z| + \int_0^t \operatorname{sgn}(W(s)-z)\mathrm{d}W(s) + L_t(z), \tag{3.2}
$$

gdzie $L_t(z)$ jest *czasem lokalnym dla procesu Wienera* i wynosi

$$
L_t(z) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \chi_{\{[-\varepsilon+z,\varepsilon+z]\}}(W(s))\mathrm{d}s = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{|s\in[0,t]\colon W(s)-z\in[-\varepsilon,\varepsilon]|}{2\varepsilon},
$$

gdzie $|A|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru $A\subset[0,t]$. Interpretujemy $L_t(z)$ jako czas jaki proces Wienera spędza w z do chwili t. Intuicja mówi nam, że czas ten powinien być równy zero. Okazuje się, że intuicja jest błędna! Patrz zadanie poniżej.

Zadanie 3.4 Pokazać, że $L_t(z)\neq 0$.

Nieformalne

$$
L_t(z) = \int_0^t \delta_z(W(s))\mathrm{d}s,
$$

gdzie δ_z jest deltą Diraca w z. Stąd można dostać, patrz np. [13, 27], bardzo wygodny wzór (z ang. *dencity occupation formula*);

Twierdzenie 3.2 *Dla $f\in C(\mathbb{R})$ oraz $t\in(0,+\infty)$ mamy*

$$
\int_0^t f(W(s))\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} f(x)L_t(x)\mathrm{d}x.
$$

Zadanie 3.5 Czy czas lokalny $(L_t(z))$ jest martyngałem, podmartyngałem czy nadmartyngałem?

Zadanie 3.6 Korzystając z Twierdzenia 3.2 policzyć

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{W^2(s)}{\varepsilon^2} \chi_{\{|W(s)| \le \varepsilon\}} \mathrm{d}s.$$

4

Powracanie i uciekanie

Niech $\mathcal{O}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$.

Definicja 4.1 Funkcja $f \in C^2(\mathcal{O})$ jest *harmoniczna w* $\mathcal{O}$ gdy

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathcal{O}.$$

Zadanie 4.1 Niech $d = 2$. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \log \|x\| = \log \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

jest harmoniczna na $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Zadanie 4.2 Pokazać, że dla dowolnego $d \geq 2$, funkcja

$$g(x) = \|x\|^{2-d}, \qquad x \in x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

jest harmoniczna na $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Oczywiście dla wymiaru $d = 2$ jest to funkcja stała.

Zadanie 4.3 Pokazać, że każda funkcja harmoniczna na dowolnym odcinku $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jest funkcją liniową.

4.1 Powracanie (reccurence) procesu Wienera w wymiarze $d \geq 2$ oraz uciekanie (transience) procesu Wienera w wymiarach $d \leq 3$.

Niech $W = (W_1, W_2, \ldots, W_d)$ będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$. Inaczej niech $W_1, W_2, \ldots W_d$ będą niezależnymi procesami Wienera o wartościach rzeczywistych.

Dla $0 < r < R$ niech $h_{r,R} = (h_{r,R}(x))$ będzie (jedyną) funkcją harmoniczną na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ taką, że

$$h_{r,R}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \|x\| = r, \\ 0 & \text{gdy } \|x\| = R. \end{cases} \tag{4.1}$$

Z Zadań 4.1, 4.2, 4.3 wynika, że

$$h_{r,R}(x) = \begin{cases} \frac{R-x}{R-r} & \text{gdy } d = 1, \\ \frac{\log R - \log \|x\|}{\log R - \log r} & \text{gdy } d = 2, \\ \frac{R^{d-2} - \|x\|^{d-2}}{R^{d-2} - r^{d-2}} & \text{gdy } d \geq 3. \end{cases} \tag{4.2}$$

Niech $\tilde{h}_{r,R}$ będzie funkcją klasy $C^2(\mathbb{R}^d)$ taką, że

$$\tilde{h}_{r,R}(x) = h_{r,R}(x), \qquad \forall\, x \colon \|x\| \geq \frac{r}{2}.$$

Dla $x \in \mathbb{R}^d \colon r <\mid x \mid< R$ niech

$$\tau_r^x = \inf\{t > 0 \colon \|x + W(t)\| \leq r\}, \quad \tau_R^x = \inf\{t > 0 \colon \|x + W(t)\| = R\}.$$

Proces $x + W(t)$, $t \geq 0$, nazywamy *procesem Wienera startującym z* x. Ze wzoru Itô mamy

$$\begin{aligned} &\tilde{h}_{r,R}(x + W(t)) \\ &= \tilde{h}_{r,R}(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta\tilde{h}_{r,R}(x + W(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \langle \nabla\tilde{h}_{r,R}(x + W(s)), \mathrm{d}W(s)\rangle. \end{aligned}$$

Stąd dla $\tau_n^x = \tau_R^x \wedge \tau_R^x \wedge n$ mamy

$$\begin{aligned} &\tilde{h}_{r,R}(x + W(\tau_n^x)) \\ &= \tilde{h}_{r,R}(x) + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_n^x} \Delta\tilde{h}_{r,R}(x + W(s))\mathrm{d}s + \int_0^{\tau_n^x} \langle \nabla\tilde{h}_{r,R}(x + W(s)), \mathrm{d}W(s)\rangle \\ &= \tilde{h}_{r,R}(x) + \frac{1}{2}\int_0^{n} \chi_{\{0 \leq s \leq \tau_n^x\}} \Delta\tilde{h}_{r,R}(x + W(s))\mathrm{d}s \\ &\qquad + \int_0^{n} \chi_{\{0 \leq s \leq \tau_n^x\}} \langle \nabla\tilde{h}_{r,R}(x + W(s)), \mathrm{d}W(s)\rangle. \end{aligned}$$

Ponieważ dla $0 \leq s \leq \tau + n^x$, $0 \leq r \leq \|x + W(s)\| \leq R$, więc

$$\tilde{h}_{r,R}(x + W(s;\omega)) = h_{r,R}(x + W(s;\omega))$$

na zbiorze

$$\{\omega \in \Omega \colon s \leq \tau^x(\omega)\}\,.$$

Stąd

$$\begin{aligned} h_{r,R}(x + W(\tau_n^x)) &= h_{r,R}(x) + \frac{1}{2}\int_0^{n} \chi_{\{0 \leq s \leq \tau_n^x\}} \Delta h_{r,R}(x + W(s))\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^{n} \chi_{\{0 \leq s \leq \tau_n^x\}} \langle \nabla h_{r,R}(x + W(s)), \mathrm{d}W(s)\rangle \\ &= h_{r,R}(x) + \int_0^{n} \chi_{\{0 \leq s \leq \tau_n^x\}} \langle \nabla h_{r,R}(x + W(s)), \mathrm{d}W(s)\rangle. \end{aligned}$$

Obkładając wartością oczekiwaną i korzystając z faktu, że

$$\mathbb{E}\int_0^n \chi_{\{0\le s\le \tau_n^x\}}\left|\nabla h_{r,R}(x+W(s))\right|^2 \mathrm{d}s<+\infty$$

otrzymujemy

$$\mathbb{E}\, h_{r,R}(x+W(\tau_n^x)) = h_{r,R}(x).$$

Przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy (używając twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej)

$$\mathbb{E}\, h_{r,R}(x+W(\tau^x)) = h_{r,R}(x).$$

Z (4.1), otrzymujemy

$$\mathbb{E}\, h_{r,R}(x+W(\tau^x)) = \mathbb{P}\left\{\tau_r<\tau_R\right\}.$$

W rezultacie

$$\mathbb{P}\left\{\tau_r^x<\tau_R^x\right\} = h_{r,R}(x).$$

Przechodzimy teraz z R do $+\infty$. Mamy

$$\lim_{R\to+\infty} h_{r,R}(x) = \begin{cases} \lim_{R\to+\infty}\frac{R-x}{R-r}=1 & \text{gdy } d=1,\\ \lim_{R\to+\infty}\frac{\log R-\log\|x\|}{\log R-\log r}=1 & \text{gdy } d=2,\\ \lim_{R\to+\infty}\frac{R^{d-2}-\|x\|^{d-2}}{R^{d-2}-r^{d-2}}=\frac{\|x\|^{d-2}}{r^{d-2}}<1 & \text{gdy } d\ge 3.\end{cases}$$

Z drugiej strony (z ciągłości trajektorii procesu Wienera) $\tau_R^x\uparrow+\infty$ gdy $R\uparrow+\infty$. Stąd

$$\lim_{R\to+\infty}\mathbb{P}\left\{\tau_r^x<\tau_R^x\right\} = \mathbb{P}\left\{\tau_r^x<+\infty\right\}.$$

Tak więc udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 *Niech $r>0$ i $x\in\mathbb{R}^d$, gdzie $d=1,2,3,\ldots$. Wówczas*

$$\mathbb{P}\left\{\tau_r^x<+\infty\right\} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } d=1,2,\\ \frac{\|x\|^{d-2}}{r^{d-2}}<1 & \text{gdy } d\ge 3.\end{cases}$$

Powyższe twierdzenie znaczy, że startując z dowolnego punktu $x\in\mathbb{R}^d$, $d=1,2$, proces Wienera trafi w skończonym czasie do dowolnej kuli z prawdopodobieństwem 1. Tak naprawdę trafi do niej nieskończenie wiele razy! Oczywiście jak powraca do kuli w wymiarze 2 to rzeczywisty proces Wienera (składowa procesu na płaszczyźnie) trafi w skończonym czasie do dowolnego odcinka z prawdopodobieństwem 1. Gdy jednak wymiar $d>2$, to dla dowolnej kuli domkniętej K w $\mathbb{R}^d$ i dla dowolnego punktu startu $x\notin K$ z niezerowym prawdopodobieństwem proces Wienera startujący z x nigdy nie trafi do K! W rzeczywistości dla $d\ge 3$ mamy następujący wynik o "uciekaniu" procesu Wienera do nieskończoności.

Zadanie 4.4 Udowodnić, że każdy nieujemny lokalny martyngał M jest nadmartyngałem.

Twierdzenie 4.2 *Niech W będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Wówczas $\mathbb{P}$-p.n.*

$$\lim_{t\to+\infty} \|x + W(t)\| = +\infty, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Dowód. Niech $x \neq 0 \in \mathbb{R}^d$. Wystarczy pokazać, że

$$\lim_{t\to+\infty} \|x + W(t)\| = +\infty.$$

Rownoważnie, że

$$\lim_{t\to+\infty} \|x + W(t)\|^{2-d} = 0.$$

Ponieważ funkcja

$$h(y) = \|y\|^{2-d}$$

jest harmoniczna na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mamy dla dowolnego m,

$$h(x + W(t \wedge \tau^x_{1/m})) = h(x) + \int_0^{t\wedge\tau^x_{1/m}} \sum_{k=1}^d \frac{\partial h}{\partial x_k}(x + W(s))\mathrm{d}W(s)$$

Ponieważ $\tau^x_{1/m} \uparrow +\infty$, więc

$$M(t) = \|x + W(t)\|^{2-d}, \qquad t \geq 0,$$

jest lokalnym martyngałem. Z Zadania 4.4 wynika, że M jest nadmartyngałem. Oczywiście zachodzi

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\, M^-(t) < +\infty,$$

Więc z twierdzenia Dooba o zbieżności nadmartyngałów (patrz Twierdzenie 1.1) wynika, że $M(t)$ zbiega $\mathbb{P}$-p.n. do zmiennej losowej całkowalnej (oznaczmy ją przez Z). Należy pokazać, że $Z = 0$. Oczywiście $0 \leq Z$, więc wystarczy pokazać, że $\mathbb{E}\, Z = 0$. Z lematu Fatou mamy

$$\mathbb{E}\, Z \leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}\, M(t).$$

Ale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, M(t) = \mathbb{E}\, \|x + W(t)\|^{2-d} &= (2\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \|x + y\|^{2-d} \mathrm{e}^{-\frac{\|y\|^2}{2t}} \mathrm{d}y \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \|x + \sqrt{t}y\|^{2-d} \mathrm{e}^{-\frac{\|y\|^2}{2}} \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Mamy więc do pokazania, że

$$\lim_{t\to+\infty} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \|x + \sqrt{t}y\|^{2-d} \mathrm{e}^{-\frac{\|y\|^2}{2}} \mathrm{d}y = 0.$$

Ponieważ

$$\|x+\sqrt{t}y\|^{2-d} \le \left|\sqrt{t}\|y\| - \|x\|\right|^{2-d}$$

więc przechodząc na współrzędne biegunowe otrzymujemy

$$(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \|x+\sqrt{t}y\|^{2-d} \mathrm{e}^{-\frac{\|y\|^2}{2}}\mathrm{d}y \le C_d \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sqrt{t}r - \|x\|\right|^{2-d} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} r^{d-1}\mathrm{d}r.$$

□

Zadanie 4.5 Udowodnić twierdzenie Liouville'a, które mówi, że każda ograniczona funkcja harmoniczna na $\mathbb{R}^d$ jest stała.

Zadanie 4.6 Pokazać, że dla d wymiarowego procesu Wienera W, jeżeli $d \ge 3$ to proces $(\|W(t)+x\|^{2-d})$ jest lokalnym martyngałem, który nie jest martyngałem.

4.2 W wymiarach ≥ 2 wszystkie punkty są polarne

Definicja 4.2 Niech $X = (X(t)$ będzie procesem stochastycznym o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}^d$ jest *polarny dla* X gdy

$$\mathbb{P}\left\{\exists\, t \ge 0\colon X(t) = x\right\} = 0.$$

Niech W będzie d-wymiarowym procesem Wienera dla $d \ge 2$. Pokażemy następujący wynik, który mówi, że w wymiarach $d \ge 2$ wszystkie punkty są polarne dla procesu Wienera.

Twierdzenie 4.3 *Dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}^d\colon x \neq 0$,

$$\mathbb{P}\left\{\exists\, t \ge 0\colon W(t) = x\right\} = 0.$$

Dowód. Niech

$$\tau_a^x := \inf\{t \ge 0\colon \|x + W(t)\| = a\}.$$

Wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{P}\left\{\tau_0^x = +\infty\right\} = 1.$$

Mamy

$$\left\{\tau_0^x < +\infty\right\} = \bigcup_{n\ge 0} \bigcap_{\{m \ge \|x\|^{-1}\}} \{\tau_{1/m}^x \le \tau_n^x\}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{\{m \ge \|x\|^{-1}\}} \{\tau_{1/m}^x \le \tau_n^x\}\right) &= \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\{\tau_{1/m}^x \le \tau_n^x\}\\ &= \lim_{m\to+\infty} \frac{\log n - \log\|x\|}{\log n - \log m^{-1}} = 0,\end{aligned}$$

więc

$$\mathbb{P}\left\{\tau_0^x < +\infty\right\} = 0. \qquad \square$$

Zauważmy, że w wymiarze $d = 1$ nie ma punktów polarnych dla procesu Wienera. Istotnie mamy następujący wynik.

Twierdzenie 4.4 *Dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left\{\exists\, t \geq 0 \colon W(t) = x\right\} = 1.$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla $0 < x < +\infty$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\tau_0^x < +\infty\} &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\{m\geq x^{-1}\}} \{\tau_{1/m}^x \leq \tau_n^x\}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\{\tau_{1/m}^x \leq \tau_n^x\} = 1.\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\mathbb{P}\{\tau_{1/m}^x \leq \tau_n^x\} = h_{1/m,n}(x) = \frac{n-x}{n-1/m},$$

więc

$$\mathbb{P}\{\tau_0^x < +\infty\} = \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} \frac{n-x}{n-1/m} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-x}{n} = 1, \qquad \square$$

4.3 Problem ruiny

Niech $A, B > 0$ oraz niech

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t),$$

gdzie W jest procesem Wienera, a $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ są stałymi.

Niech

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \colon X(t) = A \quad \text{lub} \quad X(t) = -B\}.$$

Naszym celem jest policzenie

$$\mathbb{P}\left\{X(\tau) = A\right\}.$$

W tym celu niech $h\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że

$$h(A) = 1, \qquad h(-B) = 0.$$

Wówczas, ze wzoru Itô

$$h(X(t)) = h(0) + \int_0^t \left\{\mu h'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(X(s))\right\} \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma h'(X(s))\mathrm{d}W(s).$$

Stąd (uzasadnij szczegóły) jeżeli

$$\mu h'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

to

$$\mathbb{E}\, h(X(\tau)) = h(0).$$

Ponieważ $h(-B) = 0$, $h(A) = 1$ więc

$$\mathbb{P}\{X(\tau) = A\} = h(0).$$

Pozostaje znaleźć funkcje h czyli rozwiązać problem

$$\mu h'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad h(A) = 1, \quad h(-B) = 0.$$

Mamy całkę ogólną równania

$$\mu h'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 h''(x) = 0,$$

w postaci

$$C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$$

gdzie r_1 i r_2 są rozwiązaniami równania

$$\frac{\sigma^2}{2} r^2 + \mu r = 0.$$

Przypadek $\mu \neq 0$ Gdy $\mu \neq 0$ to całka ogólna równania jest postaci

$$C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{2\mu}{\sigma^2} x}$$

Stałe C_1 i C_2 dobieramy tak by

$$C_1 + C_2 \mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\sigma^2} B} = 0, \quad C_1 + C_2 \mathrm{e}^{\frac{-2\mu}{\sigma^2} A} = 1.$$

Mamy więc

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}} - \mathrm{e}^{\frac{2\mu B}{\sigma^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2\mu A}{\sigma^2}} - \mathrm{e}^{\frac{2\mu B}{\sigma^2}}}.$$

Czyli

$$\mathbb{P}\{X(\tau) = A\} = h(0) = \frac{1 - \mathrm{e}^{\frac{2\mu B}{\sigma^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2\mu A}{\sigma^2}} - \mathrm{e}^{\frac{2\mu B}{\sigma^2}}}.$$

Przypadek $\mu = 0$ Gdy $\mu = 0$ to całką ogólną jest

$$C_1 + C_2 x.$$

Dobierając C_1 i C_2 z warunku $h(-B) = 0$ i $h(A) = 1$ otrzymujemy

$$h(x) = \frac{x + B}{A + B}.$$

Więc gdy $\mu = 0$,

$$\mathbb{P}\{X(\tau) = A\} = h(0) = \frac{B}{A + B}.$$

4.4 Zadania

Zadanie 4.7 Rozważyć problem powracania i uciekania dla procesu Wienera z dryfem

$$x + \mu t + W(t)$$

gdzie $\mu \in \mathbb{R}^d$.

Zadanie 4.8 Rozważyć problem powracania i uciekania dla procesu Ornsteina–Uhlenbecka

$$\mathrm{d}X(t) = (a - bX(t))\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = x.$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Ambitniejszym problemem jest powracanie i uciekanie procesu wielowymiarowego

$$\mathrm{d}X(t) = (a - BX(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = x,$$

gdzie W jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$ oraz $B \in M(d \times d)$.

Zadanie 4.9 Niech $f\colon \mathcal{O} \mapsto \mathbb{C}$ będzie funkcją analityczną na obszarze $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$. Wówczas jej części rzeczywista i zespolona

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

spełniają na $\mathcal{O}$ równania Cauchy–Riemanna

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pokazać, że funkcje u i v są harmoniczne. Jakie funkcje harmoniczne otrzymamy biorąc

$$f(z) = \mathrm{e}^z, \qquad f(z) = z\mathrm{e}^z.$$

Zadanie 4.10 Rozważmy rodzine hiperbol

$$H(\alpha) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = \alpha\right\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że proces Wienera $W = (W_1, W_2)$ startujący z punktu $(2, 0)$ trafi w $H(1)$ zanim trafi w $H(5)$. Do konstrukcji odpowiedniej funkcji funkcji harmonicznej użyj funkcji analitycznej $z \mapsto z^2$.

Zadanie 4.11 Pokazać, że funkcja

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-1/2}$$

jest harmoniczna na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Udowodnić, że jeżeli $W = (W_1, W_2, W_3)$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^3$ startującym z $(0, 0, 0)$ to proces

$$M(t) = f(W(t)), \qquad t \geq 1,$$

jest dobrze określonym lokalnym martyngałem (można użyć tożsamości Walda (Twierdzenie 1.12)).

Pokazać, że

$$\mathbb{E}\, M(t) = \frac{C}{\sqrt{t}}, \qquad 1 \leq t < +\infty.$$

Wywnioskować z tego, że M nie jest martyngałem.

Zadanie 4.12 Niech W będzie procesem Wienera o wartościach w $\mathbb{R}$. Pokazać, że dla dowolnego $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$M(t) = \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}\right\}, \qquad t \geq 0,$$

jest martyngałem. Jest on postaci

$$M(t) = \psi(t)\phi(W(t)),$$

dla pewnych (jakich?) funkcji ψ i ϕ. Znajdź wszystkie rozwiązania równania ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

postaci $u(t,x) = \psi(t)\phi(x)$ by znaleźć wszystkie martyngały postaci

$$M(t) = \psi(t)\phi(W(t)).$$

Rozwijając w szereg pokaż, że

$$\exp\left\{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma^n h_n(t, W(t)),$$

gdzie (h_n) jest ciągiem wielomianów. Znaleźć postać h_0, h_1, h_2 i h_3.

4.5 Zasada odbicia

W tym rozdziale odpowiadaliśmy na następujące pytanie: mając obszar $\mathcal{O}$ oraz podzbiór $D \subset \partial\mathcal{O}$ brzegu obszaru $\mathcal{O}$ oraz proces X^x startujący z $x \in \mathcal{O}$, szukamy prawdopodobieństwa wyjścia procesu X^x z $\mathcal{O}$ poprzez D;

$$\mathbb{P}\left\{X^x(\tau^x) \in D\right\}$$

gdzie

$$\tau^x = \inf\left\{t \geq 0\colon X^x(t) \in \partial\mathcal{O}\right\}.$$

Idea policzenia prawdopodobieństwa $\mathbb{P}\left\{X^x(\tau^x) \in D\right\}$ jest następująca. Jeżeli $h\colon \overline{\mathcal{O}} \mapsto \mathbb{R}$ spełnia warunek brzegowy

$$h(x) = 1, \qquad x \in D, \qquad h(x) = 0, \qquad x \in \partial\mathcal{O} \setminus D, \tag{4.3}$$

to

$$\mathbb{P}\{X^x(\tau^x) \in D\} = \mathbb{E}\, h(X^x(\tau^x)).$$

Jeżeli funkcja h jest ciągła w $\mathcal{O}$, to

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X^x(\tau^x) \in D\} &= \mathbb{E}\, h(X^x(\tau^x)) \\ &= \mathbb{E} \liminf_{S\uparrow+\infty} h(X^x(\tau^x \wedge S)).\end{aligned}$$

Jeżeli $h(X^x(t))$, $t \geq 0$, jest martyngałem, (wtedy h możemy nazwać *funkcją harmoniczną dla* X), to, z warunku martyngałowości,

$$\mathbb{E}\, h(X^x(\tau^x \wedge S)) = \mathbb{E}\, h(X^x(\tau^x \wedge 0)) = h(x).$$

Jeżeli więc potrafimy wykazać, że

$$\mathbb{E} \liminf_{S\uparrow+\infty} h(X^x(\tau^x \wedge S)) = \liminf_{S\uparrow+\infty} \mathbb{E}\; h(X^x(\tau^x \wedge S))$$

to ostateczne otrzymamy

$$\mathbb{P}\{X^x(\tau^x) \in D\} = h(x).$$

Użyjemy powyższej medody do dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.5 ***(Zasada odbicia)*** *Dla dowolnych* $T \in (0, +\infty)$ *oraz* $a \geq 0$ *zachodzi równość*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T} W(t) \geq a\right\} = 2\mathbb{P}\{W(T) \geq a\}.$$

Dowód. Jako proces X bierzemy

$$X^x(t) = (s + t, y + W(t),), \qquad x = (s, y) \in \mathcal{O},$$

gdzie

$$\mathcal{O} = (-\infty, T) \times (-\infty, a).$$

Wtedy

$$\partial\mathcal{O} = \{T\} \times (-\infty, a] \cup (-\infty, T] \times \{a\}.$$

Jako D kładziemy

$$D := (-\infty, T] \times \{a\}.$$

Wtedy dla dowolnych $y < a$ oraz $s < T$, $x = (s, y)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T-s} (z + W(t)) \geq a\right\} &= \mathbb{P}\{\exists\, t\colon y + W(t) \geq a \quad \text{oraz} \quad s + t \leq T\} \\ &= \mathbb{P}\{X^x(\tau^x) \in D\}.\end{aligned}$$

W szczególności

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T} W(t)\ge a\right\} = \mathbb{P}\left\{X^{(0,0)}(\tau^{(0,0)})\in D\right\}.$$

Szukamy więc funkcji

$$h\colon (-\infty, T]\times(-\infty, a]\mapsto \mathbb{R},$$

takiej, że

$$h(T,y)=0,\qquad y<a,\qquad h(s,a)=1,\qquad s\le T,$$

oraz takiej, że

$$h(X^x(t)) = h(s+t, y+W(t)),\qquad t\le T, y\le a,$$

jest martyngałem. Ze wzoru Itô, $h(X^x(t))$, $t\ge 0$, jest lokalnym martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s,y)+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(s,y)=0,\qquad s<T,\ y<a.$$

Ponieważ mamy pokazać równość

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T} W(t)\ge a\right\} = 2\mathbb{P}\left\{W(T)\ge a\right\},$$

która jest równoważna równości

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T-s} (y+W(t))\ge\right\} = 2\mathbb{P}\left\{W(T-s)\ge a-y\right\},$$

więc wystarczy pokazać, że

$$h(s,y)=2\mathbb{P}\left\{W(T-s)\ge a-y\right\},\qquad s\le T,\ y\le a,$$

ma żądane własności. Ponieważ $W(T-s)$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,T-s)$ więc

$$h(s,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}}\int_{a-y}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{z^2}{2(T-s)}\right\}\mathrm{d}z.$$

Ponieważ

$$h(T,z)=2\mathbb{P}\left\{0\ge a-y\right\}=\begin{cases}1 & \text{gdy } y\ge a,\\ 0 & \text{gdy } y<a,\end{cases}$$

oraz

$$h(s,a)=1,$$

więc spelnione są warunki brzegowe. Oczywiście h jest ciągła na $\mathcal{O}$. Ponieważ $0 \leq h \leq 1$, więc możemy przechodzić z granicą pod znakiem całki. Pozostaje do wykazania, że

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(s,y) = 0 \qquad \text{gdy } (s,y) \in \mathcal{O}.$$

Sprawdzenie tego pozostawiamy czytelnikowi. $\square$

Zadanie 4.13 Pokazać, że dla każdego $a > 0$ oraz $y \geq 0$ mamy

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T} W(t) \geq a, W(T) \leq a - y\right\} = \mathbb{P}\left\{W(T) > a + y\right\}.$$

Zadanie 4.14 Dla $a > 0$ definiujemy moment stopu

$$\tau_a := \inf\{t \colon W(T) = a\}.$$

Podać wzór na gęstość τ_a oraz policzyć

$$\mathbb{P}\left\{\tau_a \leq t\right\}, \qquad t \geq 0.$$

Zadanie 4.15 Pokazać, że dla każdego $\lambda > 0$ zachodzi równość

$$\mathbb{E}\, \mathrm{e}^{-\lambda \tau_a} = \mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}a}.$$

Zadanie 4.16 Pokazać, ż

$$\limsup_{t\to+\infty} |W(t)| = +\infty$$

oraz, że $\tau_a < +\infty$.

Zadanie 4.17 Obliczyć

$$\mathbb{E}\, \tau_a.$$

Porównać ze wzorem Walda (Twierdzenie 1.12).

Zadanie 4.18 Dla $a > 0$, pokazać, że proces $\{\tilde{W}(t)\}_{t\geq 0}$ zadany przez

$$\tilde{W}(t) = \begin{cases} W(t) & t \leq \tau_a, \\ 2a - W(t) & t > \tau_a, \end{cases}$$

jest standardowym procesem Wienera.

5

Twierdzenie o reprezentacji

Zakładamy, że W jest procesem Wienera określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Niech $(\mathfrak{F}_t)$ będzie filtracją generowaną przez W. To znaczy niech

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^W = \sigma\left(W(s)\colon s \le t\right), \qquad t \ge 0.$$

W tym rozdziale naszym celem jest dowód następującego twierdzenia. Rozdział ten oparty jest na książce Oksendala [18].

Twierdzenie 5.1 ***(Itô o reprezentacji)*** *Niech $0 \le T < +\infty$ i niech $F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$. Wówczas istnieje dokładnie jeden proces $f \in \mathcal{L}_T^2$ taki, że*

$$F = \mathbb{E}\, F + \int_0^T f(s)\mathrm{d}W(s), \qquad \mathbb{P}\text{-}p.n.$$

Lemat 5.1 *Dla dowolnego $T \in (0, +\infty)$ zbiór zmiennych losowych postaci*

$$\psi(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n))$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, T]$ i $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, jest gęsty w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$.

Dowód. Niech $\{t_n\}$ będzie gęstym przeliczalnym podzbiorem $[0, T]$. Niech

$$\mathcal{H}_n := \sigma(W(t_1), \dots, W(t_n)), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mamy $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1}$ oraz

$$\mathfrak{F}_T = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right).$$

Ostatnia równość wynika z ciągłości trajektorii procesu Wienera, a wiec w konsekwencji z faktu, że dla dowolnego $t \in [0, T]$ istnieje podciąg $\{t_{n_j}\}$ ciągu $\{t_n\}$ taki, że

$$W(t) = \lim_{j\to+\infty} W(t_{n_j}).$$

Niech $F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$. Wówczas

$$F = \mathbb{E}\left(F|\mathfrak{F}_T^W\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(F|\mathcal{H}_n\right).$$

Ostatnia równość wynika z twierdzenia o zbieżności martyngałów w L^p (patrz Twierdzenie 4.12 w notatkach do wykładu z procesów stochastycznych [20]). Mianowicie jeśli (M_n) jest martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)$ określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ oraz $p > 1$ to następujące warunki są równoważne:

(i) ciąg $\mathbb{E}|M_n|^p$, $n \in \mathbb{N}$, jest ograniczony,

(ii) ciąg $|M_n|^p$, $n \in \mathbb{N}$, jest jednakowo całkowalny,

(iii) istnieje zmienna losowa $Z \in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ taka, że

$$M_n = \mathbb{E}\left(Z|\mathfrak{F}_n\right).$$

Ponadto jeśli zachodzi któryś z powyższych warunków, to M_n zbiega $\mathbb{P}$-p.n. i w $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ do zmiennej M_∞ oraz

$$M_n = \mathbb{E}\left(M_\infty|\mathfrak{F}_n\right).$$

W naszym przypadku $p = 2$ a

$$M_n = \mathbb{E}\left(F|\mathcal{H}_n\right), \qquad \mathbb{E}\, M_n^2 \le \mathbb{E}\, F^2 < +\infty.$$

Mamy więc $M_n \to M_\infty$, ale M_∞ jest

$$\mathfrak{F}_T = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right)$$

mierzalne. Stąd $M_\infty = F$. Mamy więc, zbieżność $\mathbb{E}\left(F|\mathcal{H}_n\right)$ do F. $\mathbb{P}$-p.n. oraz w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$.

Kontynuując dowód lematu, ponieważ każda $F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$ może być aproksymowana w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$ zmiennymi klasy $L^2(\Omega, \mathcal{H}_n, \mathbb{P})$, wystarczy pokazać, że dla dowolnego n funkcje postaci

$$\psi(W(t_1), \ldots, W(t_n))$$

gdzie $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ są gęste w $L^2(\Omega, \mathcal{H}_n, \mathbb{P})$. W tym celu zauważmy, że z Twierdzenia Dooba–Dynkina (Twierdzenie 1.19 ze wstępu do teorii procesów stochastycznych [20]), dla dowolnego $F \in L^2(\Omega, \mathcal{H}_n, \mathbb{P})$ istnieje mierzalne $\phi\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ takie, że

$$F = \phi\left(W(t_1), \ldots, W(t_n)\right).$$

Ponadto (patrz Lemat 1.7 ze wstępu do teorii procesów stochastycznych [20]) dla dowolnego $p \in [1, +\infty)$, funkcje ciągłe i ograniczone $C_b(\mathbb{R}^n)$ są gęste w $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$, gdzie μ jest rozkładem wektora losowego $(W(t_1), \ldots, W(t_n))$. Tak więc wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\phi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ istnieje ciąg $(\phi_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$\phi_k\left(W(t_1),\ldots,W(t_n)\right)\to\phi\left(W(t_1),\ldots,W(t_n)\right)$$

w $L^2(\Omega,\mathcal{H}_n,\mathbb{P})$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wystarczy pokazać, że dla dowolnej $\phi\in C_b(\mathbb{R}^n)$ istnieje ciąg $(\phi_k)\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$\phi_k(x)\to\phi(x),\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}^n,$$

oraz

$$|\phi_k(x)|\le\sup_{y\in\mathbb{R}^n}|\phi(y)|,\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

W tym celu weźmy nieujemną funkcje $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ taką, że

$$\rho(x)=0\quad\text{dla } x\colon |x|\ge 1,\qquad\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\mathrm{d}x=1.$$

Wtedy ciąg dany wzorem

$$\phi_k(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{x-y}{k}\right)k^{-n}\phi(y)\mathrm{d}y$$

ma pożądane własności. $\square$

Lemat 5.2 *Niech $\{t_k\}$ będzie gęstym przeliczalnym pozdbiorem $[0,T]$. Przestrzeń liniowa generowana przez zmienne losowe postaci*

$$M(n,y):=\exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{k=1}^n y_kW(t_k)\right\}\tag{5.1}$$

gdzie $n\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{R}^n$ jest gęsta w $L^2(\Omega,\mathfrak{F}_T^W,\mathbb{P})$.

Dowód. Gdyby rodzina nie byłaby gęsta, to istniałaby wtedy niezerowa zmienna $F\in L^2(\Omega,\mathfrak{F}_T^W,\mathbb{P})$ taka, że

$$\mathbb{E}\,FM(n,y)=0,\qquad\forall\, n\in\mathbb{N},y\in\mathbb{R}^n.$$

Mamy następujące własności transformaty Fouriera: dla $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zachodzą

$$\widehat{\psi}(x)=(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,y\rangle}\mathrm{d}y$$

oraz

$$\psi(x)=(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\psi}(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,y\rangle}\mathrm{d}y.$$

Stąd

$$\psi(W(t_1),\ldots,W(t_n))=(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\psi}(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{k=1}^n W(t_k)y_k}\mathrm{d}y,$$

a więc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\psi(W(t_1),\ldots,W(t_n))F &= \mathbb{E}\,(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\psi}(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{k=1}^n W(t_k)y_k}\mathrm{d}yF\\
&= (2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\psi}(y)\left[\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{k=1}^n W(t_k)y_k}F\right]\mathrm{d}y\\
&= (2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\psi}(y)\left[\mathbb{E}\,M(n,y)F\right]\mathrm{d}y\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ponieważ równość ta zachodzi dla wszystkich n oraz $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, wiec z poprzedniego lematu $F = 0$. $\square$

Ze wzoru Itô otrzymujemy następujący lemat.

Lemat 5.3 *Dla* $h \in L^2(0,T;\mathcal{B}([0,T]),\mathrm{d}t)$ *niech*

$$
\begin{aligned}
X_h(t) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\mathrm{d}s}\cos\int_0^t h(s)\mathrm{d}W(s),\\
Y_h(t) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\mathrm{d}s}\sin\int_0^t h(s)\mathrm{d}W(s).
\end{aligned}
$$

Wówczas

$$
\mathrm{d}X_h(t) = -Y_h(t)h(t)\mathrm{d}W(t), \qquad \mathrm{d}Y_h(t) = X_h(t)h(t)\mathrm{d}W(t).
$$

Wniosek 5.1 *Niech* $h \in L^2(0,T,\mathcal{B}(0,T),\mathrm{d}t)$ *oraz niech*

$$
M_h(t) := \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^t h(s)\mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\mathrm{d}s\right\} = X_h(t) + \mathrm{i}Y_h(t).
$$

Wówczas

$$
\mathrm{d}M_h(t) = \left(-Y_h(t) + \mathrm{i}X(t)\right)h(t)\mathrm{d}W(t).
$$

Ostatni przygotowawczy lemat jest całkowicie elementarny więc zostawiamy go czytelnikowi.

Lemat 5.4 *Dla dowolnych* $y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$ *istnieje funkcja prosta*

$$
h \in L^2(0,T;\mathcal{B}(0,T),\mathrm{d}t)
$$

taka, że

$$
\sum_{k=1}^n y_k W(t_k) = \int_0^T h(s)\mathrm{d}W(s).
$$

W szczególności, mamy

$$
M(n,y) = M_h(T)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^T h(s)\mathrm{d}s},
$$

gdzie zmienna losowa $M(n,y)$ *dana jest wzorem* (5.1).

5.1 Dowód twierdzenia o reprezentacji

Wystarczy pokazać, że istnieje gęsty podzbiór $\mathcal{X} \subset L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$ taki, że dla każdego $F \in \mathcal{X}$ istnieje $f \in \mathcal{L}_T^2$, dla której zachodzi

$$F = \mathbb{E}\, F + \int_0^T f(s) \mathrm{d}W(s).$$

Istotnie niech $F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$. Z gęstości istnieje ciąg $\{F_n\} \subset \mathcal{X}$ taki, że

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\, |F - F_n|^2 = 0.$$

Niech $f_n \in \mathcal{L}_T^2$ będzie takie, że

$$F_n = \mathbb{E}\, F_n + \int_0^T f_n(s) \mathrm{d}W(s). \tag{5.2}$$

Oczywiście $\mathbb{E}\, F_n \to \mathbb{E}\, F$. Ponieważ $\{F_n\}$ zbiega w L^2 jest też ciągiem Cauchy'ego w L^2, a więc korzystając z izomterii Itô,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n,m \to +\infty} \mathbb{E}\, |F_m - F_n|^2 \\
&= \lim_{n,m \to +\infty} \left[|\mathbb{E}F_m - \mathbb{E}F_n|^2 + \mathbb{E} \left| \int_0^T f_m(s) \mathrm{d}W(s) - \int_0^T f_n(s) \mathrm{d}W(s) \right|^2 \right] \\
&= \lim_{n,m \to +\infty} \int_0^T \mathbb{E}\, |f_m(s) - \ f_n(s)|^2 \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Przechodząc w (5.2) z n do $+\infty$, otrzymujemy (z izometrii Itô), żądaną reprezentacje

$$F = \mathbb{E}\, F + \int_0^T f(s) \mathrm{d}W(s).$$

Jej jedyność wynika, z izometrii Itô. Istotnie jeżeli dla $f, \tilde{f} \in \mathcal{L}_T^2$,

$$F = \mathbb{E}\, F + \int_0^T f(s) \mathrm{d}W(s) = F = \mathbb{E}\, F + \int_0^T \tilde{f}(s) \mathrm{d}W(s),$$

to

$$0 = \mathbb{E} \left| \int_0^T f(s) \mathrm{d}W(s) - \int_0^T \tilde{f}(s) \mathrm{d}W(s) \right|^2 = \int_0^T \mathbb{E} \left| f(s) - \tilde{f}(s) \right|^2 \mathrm{d}s.$$

Czyli $f = \tilde{f}$ w $\mathcal{L}_T^2$.

Istnienie gęstego $\mathcal{X}$, którego elementy mają reprezentacje wynika z Lematów 5.2 i 5.4. Istotnie jako $\mathcal{X}$ można wziąść kombinacje liniowe zmiennych losowych $M(n, y)$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^n$. $\square$

5.2 Twierdzenie o reprezentacji martyngałów

Twierdzenie 5.2 *Niech M będzie martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_t^W)$ generowanej przez proces Wienera. Jeżeli M jest całkowalny z kwadratem, to znaczy jeżeli*

$$\mathbb{E}M^2(t) < +\infty, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

to istnieje $f \in \mathcal{L}^2$ taka, że

$$M(t) = \mathbb{E}\, M(0) + \int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

W szczególności, wszystkie całkowalne z kwadratem martyngały względem filtracji procesu Wienera mają ciągłe trajektorie!

Dowód. Z twierdzenia o reprezentacji (Twierdzenie 5.1) dla dowolnego $T \in (0, +\infty)$ istnieje $f_T \in \mathcal{L}_T^2$ takie, że

$$M(T) = \mathbb{E}\, M(T) + \int_0^T f_T(s)\mathrm{d}W(s) = \mathbb{E}\, M(0) + \int_0^T f_T(s)\mathrm{d}W(s).$$

Ponieważ M jest martyngałem więc

$$\mathbb{E}\left(M(T)|\mathfrak{F}_S^W\right) = \mathbb{E}\, M(0) + \int_0^S f_T(s)\mathrm{d}W(s).$$

dla prawie wszystkich s i ω,

$$f_T(s) = f_S(s), \qquad 0 \leq s \leq S \leq T.$$

Tak więc

$$f(s) = f_T(s), \qquad 0 \leq s \leq T$$

ma żądane własności i jest dobrze zdefiniowana! $\square$

Wniosek 5.2 *Niech M będzie lokalnym martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_t^W)$ generowanej przez proces Wienera. Istnieje $f \in \mathcal{P}^2$ taka, że*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

W szczególności, wszystkie lokalne martyngały względem filtracji procesu Wienera mają ciągłe trajektorie!

5.3 Zadania

W poniższych zadaniach należy znaleźć reprezentację $F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P})$ w postaci

$$F = \mathbb{E}\, F + \int_0^T \xi(s)\mathrm{d}W(s).$$

Zadanie 5.1 Niech $F = W(T)$.

Zadanie 5.2 Niech

$$F = \int_0^T W(t)\mathrm{d}t.$$

Zadanie 5.3 Niech

$$F = W^2(T).$$

Zadanie 5.4 Niech

$$F = \mathrm{e}^{W(T)}.$$

Zadanie 5.5 Niech

$$F = W^3(T).$$

Zadanie 5.6 Niech

$$F = \sin W(T).$$

5.4 Wielomiany Hermite'a

Niech

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

będzie *wielomianem Hermite'a rzędu n*. W szczególności

$$H_0(x) \equiv 1, \qquad H_1(x) = x, \qquad H_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right).$$

Zauważmy, że wielomian Hermite'a rzędu n jest wielomianem rzędu n ze współczynnikiem $\frac{1}{n!}$ przy x^n.

Wielomiany Hermite'a mają związek z Gaussowskimi zmiennymi losowymi.

Lemat 5.5 *Niech (X, Y) będzie wektorem Gaussowskim w $\mathbb{R}^2$ takim, że*

$$\mathbb{E}\, X = 0 = \mathbb{E}\, Y,$$

oraz

$$\mathbb{E}\, X^2 = 1 = \mathbb{E}\, Y^2.$$

Wówczas dla $n, m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{E}\, H_n(X) H_m(Y) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } n \neq m, \\ \frac{1}{n!} \left(\mathbb{E}\, XY\right)^n & \text{jeżeli } n = m. \end{cases}$$

Dowód. Dla $s, t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\mathbb{E} \exp\left\{sX - \frac{s^2}{2}\right\} \exp\left\{tY - \frac{t^2}{2}\right\} = \exp\left\{st\, \mathbb{E}\, XY\right\}.$$

Biorąc dla $t = s = 0$ pochodne

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m}$$

obu stron równości otrzymujemy

$$\mathbb{E}\, n!m! H_n(X) H_m(Y) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } n \neq m, \\ n!\, (\mathbb{E}\, XY)^n & \text{jeżeli } n = m. \end{cases} \qquad \square$$

Lemat 5.6 *Wielomiany Hermite'a jednoznacznie wyznaczone są przez tożsamość*

$$\exp\left\{tx - \frac{t^2}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(x).$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} \exp\left\{tx - \frac{t^2}{2}\right\} &= \exp\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x-t)^2\right\} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\right) |_{t=0} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{(-1)^n}{n!} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(x). \qquad \square \end{aligned}$$

Lemat 5.7 *Dla* $n \geq 1$

$$H_n'(x) = H_{n-1}(x), \qquad (n+1) H_{n+1}(x) = x H_n(x) - H_{n-1}(x)$$

oraz

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \qquad n \geq 1.$$

Dowód. Z Lematu 5.6 mamy

$$\exp\left\{tx - \frac{t^2}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(x).$$

Ponieważ dla funkcji

$$F(t,x) = \exp\left\{tx - \frac{t^2}{2}\right\}$$

mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = tF(t,x).$$

Więc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1} H_n(x) = tF(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n H_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1} H_{n+1}'(x).$$

Stąd

$$H_{n+1}'(x) = H_n(x), \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Ponieważ

$$F(t,-x) = F(-t,x),$$

więc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n H_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n (-1)^n H_n(x).$$

Tak więc

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Ponieważ

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = (x-t)F(t,x)$$

więc przyjmując, że $H_{-1} \equiv 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} t^n (n+1) H_{n+1}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} H_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n x H_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1} H_n(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \left[x H_n(x) - H_{n-1}(x)\right].
\end{aligned}$$

Więc

$$(n+1) H_{n+1}(x) = x H_n(x) - H_{n-1}(x). \qquad \square$$

Twierdzenie 5.3 *Dla $n \geq 1$ zachodzi następująca równość*

$$t^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right) = \int\!\!\int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_n \leq t} \mathrm{d}W(t_1)\mathrm{d}W(t_2)\ldots\mathrm{d}W(t_n).$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ mamy

$$t^{\frac{1}{2}} H_1\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right) = t^{\frac{1}{2}} \frac{W(t)}{\sqrt{t}} = W(t) = \int_0^t \mathrm{d}W(s).$$

Załóżmy, że wzór zachodzi dla $n - 1 \geq 1$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
&\int_{0\le t_1\le t_2\le t_n\le t}\int \mathrm{d}W(t_1)\mathrm{d}W(t_2)\ldots\mathrm{d}W(t_n)\\
&=\int_0^t\left[\int_{0\le t_1\le t_2\le t_{n-1}\le t_{n-1}}\int \mathrm{d}W(t_1)\mathrm{d}W(t_2)\ldots\mathrm{d}W(t_{n-1})\right]\mathrm{d}W(t_n)\\
&=\int_0^t s^{\frac{n-1}{2}}H_{n-1}\left(\frac{W(s)}{\sqrt{s}}\right)\mathrm{d}W(s)
\end{aligned}
$$

Mamy więc pokazać, że

$$\int_0^t s^{\frac{n-1}{2}}H_{n-1}\left(\frac{W(s)}{\sqrt{s}}\right)\mathrm{d}W(s)=t^{\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right).$$

Inaczej, że

$$\mathrm{d}\left[t^{\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right)\right]=t^{\frac{n-1}{2}}H_{n-1}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}W(t).$$

W tym celu przyjmijmy oznaczenie

$$f(t,x)=t^{\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Używając tożsamości z Lematu 5.7 otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)=0.$$

Tak więc ze wzoru Itô mamy

$$\mathrm{d}\left[t^{\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right)\right]=t^{\frac{n}{2}}H_n'\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right)t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}W(t)=t^{\frac{n-1}{2}}H_{n-1}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}W(t).$$

Twierdzenie 5.4 *Dla $\sigma\in\mathbb{R}$ mamy*

$$\exp\left\{\sigma W(t)-\frac{\sigma^2 t}{2}\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sigma^n\int_{0\le t_1\le t_2\le t_n\le t}\int \mathrm{d}W(t_1)\mathrm{d}W(t_2)\ldots\mathrm{d}W(t_n).$$

Dowód. Ponieważ

$$\exp\left\{\sigma x-\frac{\sigma^2 t}{2}\right\}=\exp\left\{(\sigma\sqrt{t})\frac{x}{\sqrt{t}}-\frac{(\sigma\sqrt{t})^2}{2}\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sigma^n t^{\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

więc teza wynika z Twierdzenie 5.3. □

Uwaga 5.1 Można pokazać, używając Twierdzenia 5.4 oraz Lematu 5.2, że dla dowolnej zmiennej losowej $F\in L^2(\Omega,\mathfrak{F}_T^W,\mathbb{P})$, istnieje ciąg funkcji $\{f_n\}$ takich, że

$$f_n \in L^2([0,T]^n, \mathcal{B}([0,T]^n), \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n)$$

oraz

$$F = \mathbb{E} + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{0 \le t_1 \le t_2 \le t_n \le T} \int f(t_1, \dots, t_n) \mathrm{d}W(t_1) \mathrm{d}W(t_2) \dots \mathrm{d}W(t_n).$$

Rozkład ten nazywany jest rozkładem w *chaos Wienera* lub *chaos Itô–Wienera*
.

6

Wariancja kwadratowa i semimartyngały

Mamy następujące sformułowanie klasycznego *twierdzenia Dooba–Meyera o rozkładzie.* Jego dowód można znaleźć w [2], str. 157.

Twierdzenie 6.1 *Niech $M = (M(t))$ będzie lokalnym martyngałem o ciągłych trajektoriach takim, że $M(0) = 0$. Istnieje wówczas jedyny proces $\langle M\rangle = (\langle M\rangle(t))$ o ciągłych i rosnących trajektoriach taki, że*

(i) $\langle M\rangle(0) = 0$,

(ii) proces $M^2(t) - \langle M\rangle(t)$, $t \geq 0$, *jest lokalnym martyngałem.*

Ponadto dla dowolnego $t \geq 0$ i dla dowolnego ciągu podziałów (t_k^n), $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{l_n}^n = t$ przedziału $[0,T]$, jeżeli

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{k=0,\ldots l_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n) = 0,$$

to zachodzi

$$\langle M\rangle(t) = (\mathbb{P}) - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{l_n-1} \left(M(t_{k+1}^n) - M(t_k^n)\right)^2.$$

Proces $\langle M\rangle$ nazywamy *wariancją kwadratową (quadratic variation, angle bracket)* procesu M. Jeżeli $f = (f(t))$ jest procesem progresywnie mierzalnym, takim, że

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t f^2(s)\mathrm{d}\langle M\rangle(s) < +\infty\right) = 1, \qquad \forall\, t \in [0,+\infty),$$

to można zdefiniować *całkę stochastyczną*

$$I(t) := \int_0^t f(s)\mathrm{d}M(s), \qquad t \geq 0.$$

$I = I(t)$ jest lokalnym martyngałem o ciągłych trajektoriach i wariancji kwadratowej

$$\langle I\rangle(t) = \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}\langle M\rangle(s), \qquad t \geq 0.$$

Definicja 6.1 Adaptowany proces $X = (X(t))$ nazywamy *ciągłym semimartyngałem* gdy istnieją: lokalny martyngał o ciągłych trajektorach M oraz proces o skończonym wahaniu A takie, że $M(0) = A(0) = 0$ oraz

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t), \qquad t \geq 0.$$

Uwaga 6.1 Rozkład

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t), \qquad t \geq 0,$$

semimartyngału na lokalny martyngał i proces o ograniczonym wahaniu jest jedyny! Mamy $\langle X\rangle = \langle M\rangle$. Kombinacja liniowa semimartyngałów jest semimartyngałem. Dla semimartyngałów

$$X^i(t) = X^i(0) + M^i(t) + A^i(t), \qquad t \geq 0,\ i = 1, 2$$

Definiujemy wariancje kwadratową $\langle X^1, X^2\rangle$ przez polaryzację

$$\langle X^1, X^2\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle X^1 + X^2\rangle - \langle X^1 - X^2\rangle\right).$$

Zadanie 6.1 Niech

$$X(t) = X(0) + \int_0^t g(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s),$$

gdzie g i f są procesami mierzalnymi adaptowanymi takimi, że

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \left(f^2(s) + |g(s)|\right)\mathrm{d}s < +\infty\right\} = 1, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty).$$

Pokazać, że

$$\langle X\rangle(t) = \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

Ile wynosi wahanie procesu

$$\int_0^t g(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

Twierdzenie 6.2 ***(Wzór Itô dla semimartyngałów)*** *Niech $X = (X(t))$ będzie ciągłym semimartyngałem oraz niech $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ niech będzie funkcją klasy C^2. Wówczas $f(X) = (f(X(t))$ jest ciągłym semimartyngałem oraz*

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))\mathrm{d}X(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\mathrm{d}\langle M\rangle(s).$$

Twierdzenie 6.3 ***(Wielowymiarowy wzór Itô dla semimartyngałów)*** *Niech $X^i = (X^i(t))$, $i = 1, \ldots, n$ będą ciągłymi semimartyngałami oraz niech $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ niech będzie funkcją klasy C^2. Wówczas*

$$f(X) = (f(X^1(t), \ldots, X^n(t)))$$

jest ciągłym semimartyngałem oraz

$$\begin{aligned} f(X(t)) = f(X(0)) &+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(s)) \mathrm{d}X^i(s) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X(s)) \mathrm{d}\langle M^i, M^j\rangle(s). \end{aligned}$$

Zadanie 6.2 Wyprowadzić z powyższego wzoru wzór Itô dla procesów Itô, patrz Twierdzenie 2.3.

Twierdzenie 6.4 ***(Produkt semimartyngałów)*** *Niech $X^i = (X^i(t))$, $i = 1, 2$, będą ciągłymi semimartyngałami. Wówczas*

$$X^1(t)X^2(t) = X^1(0)X^2(0) + \int_0^t X^1(s)\mathrm{d}X^2(s) + \int_0^t X^2(s)\mathrm{d}X^1(s) + \langle X^1, X^2\rangle(t).$$

jest ciągłym semimartyngałem oraz

$$\begin{aligned} f(X(t)) = f(X(0)) &+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(s)) \mathrm{d}X^i(s) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X(s)) \mathrm{d}\langle M^i, M^j\rangle(s). \end{aligned}$$

6.1 Twierdzenie Lévy'ego

W tym rozdziale udowodnimy Twierdzenie Lévy'ego (patrz Twierdzenie 1.8) korzystając z ogólnego wzoru Itô (patrz Twierdzenie 6.2). Kompletny dowód twierdzenia Lévy'ego (nie odwołujący się do wzoru Itô) można znaleźć w książce Lipcera i Sziriajewa [15].

Niech M będzie ciągłym lokalnym martyngałem takim, że $M(0) = 0$, oraz $\langle M\rangle(t) = t$. Dla $\lambda \in \mathbb{R}$ niech

$$N_\lambda(t) = \exp\left\{ \mathrm{i}\lambda M(t) + \frac{1}{2}\lambda^2 t \right\}, \qquad t \geq 0.$$

Ze wzoru Itô

$$N(t) = N(0) + \mathrm{i}\lambda \int_0^t N(s)\mathrm{d}M(s).$$

Jest więc lokalnym martyngałem o lokalnie ograniczonych trajektoriach a więc martyngałem (udowodnić, patrz Zadanie 2.1). A więc

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(M(t)-M(s))}|\mathfrak{F}_s\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}}.$$

$\Box$.

Zadanie 6.3 Niech W będzie procesem Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$. Pokazać, że dla $0 \le s \le t$, $W(t) - W(s)$ nie zależy od $\mathfrak{F}_s$.

Zadanie 6.4 Niech W_1 i W_2 będą niezależnymi procesami Wienera na filtrowanej przestrzeni probabilistycznej $\mathfrak{A} = (\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$. Pokazać, że dla dowolnego $\rho \in (0,1)$, proces

$$W(t) = \rho\, W_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}\, W_2(t), \qquad t \ge 0,$$

jest procesem Wienera na $\mathfrak{A}$.

Zadanie 6.5 Niech $W = (W^1, \ldots, W^d)$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera. Dla $x \neq 0$ niech

$$X(t) = \|x + W(t)\|.$$

Pokazać, że

$$X(t) - \|x\| - \int_0^t \frac{d-1}{2X(s)}\mathrm{d}s$$

jest procesem Wienera.

Zadanie 6.6 Niech W_1 i W_2 będą niezależnymi procesami Wienera zdefiniowanymi na przestrzeni z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$. Niech α będzie mierzalnym i $(\mathfrak{F}_t)$-adaptowanym procesem. Pokazać, że

$$B(t) = \int_0^t \cos\alpha(s)\mathrm{d}W_1(s) + \int_0^t \sin\alpha(s)\mathrm{d}W_2(s), \qquad t \ge 0,$$

jest procesem Wienera na $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$.

Zadanie 6.7 Niech $(C(t))$ będzie rosnącym, prawostronnie ciągłym, procesem takim, że dla każdego $t \ge 0$, $C(t)$ jest momentem stopu i niech M będzie martyngałem takim, że M jest stały na odcinku $[C(t-), C(t)]$. Pokazać, że $(M_{C(t)})$ jest lokalnym martyngałem i

$$\langle M(C)\rangle = \langle M\rangle(C).$$

Zadanie 6.8 Niech W będzie procesem Wienera. Czy proces $|W(t)|$, $t \ge 0$, jest seminartyngałem? Jeśli tak to ile wynosi angle bracket $\langle |W|\rangle(t)$?

Zadanie 6.9 Pokazać wprost, że

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(\left|W(t_{k+1}^n)\right| - |W(t_k^n)|\right)^2 = t$$

gdzie granica jest według prawdopodobieństwa, a (t_k^n) jest ciągiem podziałów przedziału $[0,t]$ o średnicach malejących do 0.

Twierdzenie 6.5 ***(Dambis, Dubins–Schwarz)*** *Niech M będzie ciągłym martyngałem takim, że $M(0)=0$, $\langle M\rangle(+\infty)=+\infty$. Istnieje wówczas proces Wienera W taki, że*

$$M(t) = W(\langle M\rangle(t)), \qquad \forall\, t\geq 0.$$

Dowód. Niech

$$C(t) = \inf\{s>0\colon \langle M\rangle(s) > t\}, \qquad t\geq 0.$$

Oczywiście C jest procesem rosnącym, prawostronnie ciągłym, takim, że dla każdego $t\geq 0$, $C(t)$ jest momentem stopu i M jest stały na odcinku $[C(t-), C(t)]$. Stąd $M(C)$ jest lokalnym martyngałem i

$$\langle M(C)\rangle = \langle M\rangle(C).$$

A więc

$$\langle M(C)\rangle(t) = \langle M\rangle(C(t)) = t. \qquad \square$$

Zadanie 6.10 Niech

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2t^3}{3}\right).$$

oraz niech W będzie procesem Wienera na przestrzeni z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$. Pokażać, że istnieje proces Wienera $\tilde{W}$ na $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ taki, że

$$\int_0^{\alpha(t)} \mathrm{e}^s \mathrm{d}W(s) = \int_0^t s\mathrm{d}\tilde{W}(s).$$

7

Twierdzenie Girsanowa

7.1 Martyngały wykładnicze

Niech $f \in \mathcal{P}^2$. Definiujemy

$$M_f(t) = \exp\left\{ \int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s \right\}, \qquad t \geq 0.$$

Mamy

$$\mathrm{d}M_f(t) = M_f(t)f(t)\mathrm{d}W(t), \qquad M_f(0) = 1.$$

Proces M_f jest martyngałem (zawsze jest lokalnym martyngałem) gdy $fM_f \in \mathcal{L}^2$. Warunkiem wystarczającym na to jest *warunek Kazamaki*

$$\mathbb{E}\exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^T f(s)\mathrm{d}W(s) \right\} < +\infty, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty).$$

Słabszym warunkiem (ale łatwiejszym do sprawdzenia) jest *warunek Novikowa*

$$\mathbb{E}\exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s \right\} < +\infty, \qquad \forall\, T \in (0, +\infty). \tag{7.1}$$

7.2 Zasadnicze wyniki

Niech μ i ν będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{X})$. Przypomnijmy, że ν jest *absolutnie ciągła względem miary* μ (piszemy $\nu \ll \mu$) wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall\, \Gamma \in \mathcal{X}, \qquad \mu(\Gamma) = 0 \Longrightarrow \nu(\Gamma) = 0.$$

Miary μ i ν są *równoważne*, gdy $\mu \ll \nu$ i $\nu \ll \mu$. Tak więc μ i ν są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall\, \Gamma \in \mathcal{X}, \qquad \mu(\Gamma) = 0 \Longleftrightarrow \nu(\Gamma) = 0.$$

Przypomnijmy, że μ jest *σ-skończona*, gdy

$$\exists\, \{A_n\} \subset \mathcal{X} \colon \mu(A_n) < +\infty,\ \forall\, n \quad \text{oraz} \quad X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Ponadto jeżeli $\nu \ll \mu$ i μ jest σ-skończona, to istnieje $\rho \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$ takie, że

$$\forall\, A \in \mathcal{X}, \qquad \nu(A) = \int_A \rho \mathrm{d}\mu.$$

Funkcję ρ nazywamy *gęstością miary ν względem miary ν* lub *pochodną Radona–Nikodyma miary ν względem μ* i oznaczamy ją następująco

$$\rho = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}.$$

Niech $W = (W(t))$ będzie procesem Wienera określonym na zupełnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Niech $(\mathfrak{F}_t)$ będzie filtracją generowaną przez proces Wienera (być może uzupełnioną zbiorami miary 0 z $\mathfrak{F}$). Niech

$$\mathfrak{F}_{+\infty} = \sigma\left(\mathfrak{F}_s \colon s \geq 0\right) = \sigma\left(\bigcup_{s>0} \mathfrak{F}_s\right).$$

Przypomnijmy, że gdy $T < +\infty$, to proces $\theta \colon [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{P}^2_T$ gdy jest mierzalny, adaptowany oraz

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \theta^2(s)\mathrm{d}s < +\infty\right\} = 1.$$

Proces $\theta \colon [0, +\infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{P}^2_{+\infty} = \mathcal{P}^2$ gdy jest mierzalny, adaptowany oraz

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^t \theta^2(s)\mathrm{d}s < +\infty\right\} = 1, \qquad \forall\, t < +\infty.$$

Niech $T \in [0, +\infty]$ oraz niech $\mathbb{Q}$ będzie miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$. Zakładamy, że miary $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{P}$ rozważane na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$ są równoważne.

Twierdzenie 7.1 *Istnieje proces $\theta \in \mathcal{P}^2_T$ taki, że*

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} | \mathfrak{F}_t\right) = \exp\left\{\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)\mathrm{d}s\right\}, \qquad t \in [0, T],\ t < +\infty.$$

Ponadto proces

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0, T],\ t < +\infty,$$

jest procesem Wienera względem miary $\mathbb{Q}$.

Dowód. Niech
$$\rho = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}.$$
Wówczas
$$\mathbb{E}\left(\rho|\mathfrak{F}_t\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}|_{\mathfrak{F}_t}}{\mathrm{d}\mathbb{P}|_{\mathfrak{F}_t}}, \qquad t \in [0,T],\ t < +\infty.$$
Stąd
$$\rho(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}|_{\mathfrak{F}_t}}{\mathrm{d}\mathbb{P}|_{\mathfrak{F}_t}}, \qquad t \in [0,T),$$
jest martyngałem względem $(\mathfrak{F}_t)$. Z twierdzenia o reprezentacji lokalnych martyngałów (patrz Wniosek 5.2) istnieje $u \in \mathcal{P}^2_T$, taki, że
$$\rho(t) = \mathbb{E}\,\rho(t) + \int_0^t u(s)\mathrm{d}W(s) = 1 + \int_0^t u(s)\mathrm{d}W(s).$$
Ponieważ $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{P}$ są równoważne, więc
$$\mathbb{P}\left\{\rho(t) = 0\right\} = 0.$$
Istotnie na zbiorze
$$\varGamma =: \{\omega \in \varOmega\colon \rho(t;\omega) = 0\}$$
mamy, bo $\varGamma \in \mathfrak{F}_t$,
$$\mathbb{Q}(\varGamma) = \mathbb{Q}|_{\mathfrak{F}_t}(\varGamma) = \int_\varGamma \rho(t)\mathrm{d}\mathbb{P}|_{\mathfrak{F}_t} = \int_\varGamma \rho(t)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\varGamma 0\mathrm{d}\mathbb{P} = 0,$$
a więc ponieważ $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ zachodzi $\mathbb{P}(\varGamma) = 0$.

Niech
$$\theta(t) = \frac{u(t)}{\rho(t)}.$$
Proces θ jest dobrze określony ponieważ $\rho(t) > 0$, $\mathbb{P}$-p.n. Ponieważ (jako całka stochastyczna) ρ ma ciągłe trajektorie więc $\theta \in \mathcal{P}^2_T$.

Mamy więc
$$\rho(t) = 1 + \int_0^t \theta(s)\rho(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \in [0,T),\ t < +\infty.$$
Niech
$$L(t) := \exp\left\{-\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)\mathrm{d}s\right\}, \qquad t \in [0,T],\ T < +\infty.$$
Mamy
$$\mathrm{d}L(t) = L(t)\left(-\theta(t)\mathrm{d}W(t) + \theta^2(t)\mathrm{d}t\right),$$
a więc ze wzoru Itô dla iloczynu procesów Itô,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\rho L)(t) \\
&= -\rho(t)L(t)\theta(t)\mathrm{d}W(t) + \rho(t)L(t)\theta^2(t)\mathrm{d}t \\
&\quad + L(t)\theta(t)\rho(t)\mathrm{d}W(t) - \rho(t)L(t)\theta^2(t)\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Stąd

$$\rho(t)L(r) = \rho(0)L(0),$$

a więc

$$\rho(t) = \frac{1}{L(t)} = \exp\left\{\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)\mathrm{d}s\right\}, \qquad t \in [0,T],\, t < +\infty,$$

co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Do dowodu drugiej, zauważmy, że z twierdzenia Lévy'ego, wystarczy pokazać, że proces $(W^*(t))$ jest lokalnym martyngałem względem $\mathbb{Q}$ takim, że

$$\mathrm{d}\langle W^*\rangle(t) = \mathrm{d}t.$$

Tak naprawdę wystarczy pokazać, że W jest semimartyngałem względem miary $\mathbb{Q}$. Mamy (względem miary $\mathbb{P}$),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(W^*(t)\rho(t)\right) &= W^*(t)\mathrm{d}\rho(t) + \rho(t)\mathrm{d}W^*(t) + \theta(t)\rho(t)\mathrm{d}t \\
&= W^*(t)\theta(t)\rho(t)\mathrm{d}W(t) + \rho(t)\mathrm{d}W(t).
\end{aligned}
$$

Stąd $(W^*(t)\rho(t))$ jest lokalnym martyngałem względem miary $\mathbb{P}$. Niech $\{\tau_n\}$ będzie ciągiem momentów stopu takich, że:

$$\tau_n \uparrow +\infty, \qquad \mathbb{P} - \text{p.n.}$$

oraz dla każdego n, proces $W^*(t \wedge \tau_n)\rho(t \wedge \tau_n)$, $t \in [0,T]$, jest martyngałem.

Oczywiście dla dowolnych n i t zmienna losowa $W^*(t \wedge \tau_n)$ jest $\mathfrak{F}_{t\wedge\tau_n}$ - mierzalna. Ze wzoru Bayesa

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(W^*(t)|\mathfrak{F}_s\right) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(W^*(t)\rho(t)|\mathfrak{F}_s\right)}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\rho(t)|\mathfrak{F}_s\right)} = \frac{W^*(s)\rho(s)}{\rho(s)} = W^*(s).$$

Ponieważ $\theta\rho = u \in \mathcal{L}^2_T$, więc $W^*\rho$ jest martyngałem.

Pokażemy teraz, że proces

$$\left[(W^*(t))^2 - t\right]\rho(t), \qquad t \in [0,T],$$

jest lokalnym martyngałem. Mamy

$$\mathrm{d}\left[(W^*(t))^2 - t\right]\rho(t) = \left[(W^*(t))^2 - t\right]\mathrm{d}\rho(t) - \rho(t)\mathrm{d}t + \rho(t)\mathrm{d}\left(W^*(t)\right)^2 +$$

$\square$

Twierdzenie 7.2 *Niech $T \in (0, +\infty)$ oraz niech $\theta \in \mathcal{P}^2_T$ będzie taki, że*

$$\mathbb{E}\exp\left\{\int_0^T \theta(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \theta(s)\mathrm{d}s\right\} = 1.$$

Wówczas miara $\mathbb{Q}$ dana wzorem

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \exp\left\{\int_0^T \theta(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \theta(s)\mathrm{d}s\right\}$$

jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$, oraz proces

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0, T],$$

jest procesem Wienera względem miary $\mathbb{Q}$.

Dowód. Stosujemy poprzednie twierdzenia dla miary $\mathbb{Q}$. Wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|\mathfrak{F}_t\right\} = \exp\left\{\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

Niech

$$\rho(t) = \exp\left\{\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

Ze wzoru Itô mamy

$$\rho(t) = 1 + \int_0^t \theta(s)\rho(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \in [0, T].$$

Stąd ρ jest lokalnym martyngałem. Mamy pokazać, że

$$\rho(t) = \mathbb{E}\left(\rho(T)|\mathfrak{F}_t\right), \qquad t \in [0, T],$$

czyli, że ρ jest martyngałem. Z definicji $\rho(t) \geq 0$ i $\rho(t) \to \rho(T)$, $\mathbb{P}$-p.n. Z lematu Fatou

$$\mathbb{E}\left(\rho(t)|\mathfrak{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\liminf_{n\to+\infty} \rho(t\wedge\tau_n)|\mathfrak{F}_s\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\rho(t\wedge\tau_n)|\mathfrak{F}_s\right) = \rho(s).$$

W szczególności

$$1 = \mathbb{E}\,\rho(T) = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\left(\rho(T)|\mathfrak{F}_s\right) \leq \mathbb{E}\rho(s).$$

Ponieważ

$$\mathbb{E}\,\rho(s) = 1 + \mathbb{E}\liminf_{n\to+\infty}\int_0^{s\wedge\tau_n} \rho(s)\theta(s)\mathrm{d}W(s) = 1,$$

więc

$$\mathbb{E}\,\rho(s) = 1, \qquad \forall\, s \in [0, T].$$

Ponieważ ρ jest nadmartyngałem o stałej wartości oczekiwanej jest więc martyngałem. $\square$

7.3 Estymatory

Załóżmy, że obserwujemy proces (*model Mertona* patrz Rozdział 10.7)

$$X(t) = \alpha t + \sigma t$$

ale nie znamy wartości parametrów α i σ. Jak je wyznaczyć? Parametr σ^2 wyliczamy ze wzoru na wariancje. Wiemy, że według prawdopodobieństwa

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \left[X(t_{k+1}^n) - x(t_k^n)\right]^2 = t\sigma^2.$$

Stąd by wyznaczyć walatylność wystarczy znać wartości procesu na dowolnym skończonym przedziale czasowym. Z twierdzenia Girsanowa wynika, że do wyznaczenia dryfu α potrzebujemy nieskończonego przedziału czasowego. Wtedy, ponieważ

$$Y(n) := X(n+1) - X(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

są niezależne o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$, więc z mocnego prawa wielkich liczb, mamy $\mathbb{P}$-p.n.

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y(k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[X(k+1) - X(k)\right].$$

7.4 Przykład

Podamy przykład procesu adaptowanego i mierzalnego $(\beta(t), t \geq 0)$ takiego, że

$$\mathbb{P}\left(\int_0^1 \beta^2(t)\mathrm{d}t < +\infty\right) = 1,$$

oraz całka stochastyczna $\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}W(t)$ ma skończony niezerowy moment. Dokładniej taki, że

$$0 < \mathbb{E}\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}W(t) < 1.$$

Równoczeście podamy przykład procesu adaptowanego i mierzalnego ξ, którego wykładnik Girsanowa ma moment ściśle mniejszy od 1, to znaczy takiego, że

$$\mathbb{E}\exp\left\{-\int_0^1 \xi(t)\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 \xi(t)^2\mathrm{d}t\right\} < 1.$$

Niech $\xi = (\xi(t);\ t \geq 0)$ będzie progresywnie mierzalnym procesem spełniającym

$$\mathbb{P}\left(\int_0^1 \xi^2(t)\mathrm{d}t < +\infty\right) = 1. \tag{7.2}$$

Niech

$$\mathit{\Gamma}_t(\xi) := \exp\left\{-\int_0^t \xi(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \xi^2(s)\mathrm{d}s\right\}, \qquad t \in [0,1]. \tag{7.3}$$

Przypomnijmy, patrz str. 206 z książki Lipcer–Sziriajew ([15]), że jeżeli spełniony jest warunek Novikowa (patrz (7.1))

$$\mathbb{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \xi^2(s)\mathrm{d}s\right\} < +\infty,$$

to

$$\mathbb{E}\,\mathit{\Gamma}_t(\xi) = 1$$

Ze wzoru Itô

$$\mathrm{d}\mathit{\Gamma}_t(\xi) = -\xi(t)\mathit{\Gamma}_t(\xi)\mathrm{d}W(t), \qquad \mathit{\Gamma}_0(\xi) = 1. \tag{7.4}$$

Niech (τ_n) będzie ciągiem momentów Markowa zdefiniowanych następująco

$$\tau_n = \inf\left\{t \le 1\colon \int_0^t \xi^2(s)\mathrm{d}s = n\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście, dla dowolnego n,

$$\mathbb{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\tau_n} \xi^2(s)\mathrm{d}s\right\} \le \mathrm{e}^{n/2} < +\infty.$$

Stąd $\mathbb{E}\,\mathit{\Gamma}_{t\wedge\tau_n}(\xi) = 1$ i dalej z lematu Fatou

$$\mathbb{E}\,\mathit{\Gamma}_1(\xi) = \mathbb{E}\lim_{n\to+\infty} \mathit{\Gamma}_{\tau_n\wedge n}(\xi) \le \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,\mathit{\Gamma}_{1\wedge\tau_n}(\xi) = 1.$$

Tak więc zawsze $\mathbb{E}\,\mathit{\Gamma}_1(\xi) \le 1$. Oczywiście, z (7.3), $\mathit{\Gamma}_1(\xi) \ge 0$. Stąd

$$0 \le \mathbb{E}\,\mathit{\Gamma}_1(\xi) \le 1. \tag{7.5}$$

Ponieważ, z (7.4),

$$\mathit{\Gamma}_1(\xi) = 1 - \int_0^1 \xi(t)\mathit{\Gamma}_t(\xi)\mathrm{d}W_t,$$

więc

$$\mathbb{E}\int_0^1 \xi(t)\mathit{\Gamma}_t(\xi)\mathrm{d}W_t = 1 - \mathbb{E}\mathit{\Gamma}_1(\xi). \tag{7.6}$$

Wystarczy więc podać przykład procesu ξ, dla którego $\mathbb{E}\,\mathit{\Gamma}_1(\xi) < 1$. Przykład ten podany jest na stronie 213 w książce Lipcer–Sziriajew. Mianowicie, niech

$$\tau := \inf\{t\colon W(t) = 1 - t\}$$

oraz niech

$$\xi(t) = \frac{2W(t)}{(1-t)^2}\chi_{\{t\le\tau\}}, \qquad t \ge 0.$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{P}\left(\tau < 1\right) = 1. \tag{7.7}$$

Istotnie, $\mathbb{P}(\tau \le 1) = 1$ oraz $\mathbb{P}(\tau = 1) = \mathbb{P}(W_1 = 0) = 0$.

Z (7.7) wynikało, że

$$\mathbb{P}\left(\int_0^1 \xi^2(t)\mathrm{d}t < +\infty\right) = \mathbb{P}\left(4\int_0^\tau \frac{W^2(t)}{(1-t)^4}\mathrm{d}t < +\infty\right) = 1.$$

Następnie, ze wzoru Itô,

$$\mathrm{d}\frac{W^2(t)}{(1-t)^2} = \left(\frac{2W^2(t)}{(1-t)^3} + \frac{1}{(1-t)^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{2W(t)}{(1-t)^2}\mathrm{d}W(t).$$

Tak więc

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 &\frac{2W(t)}{(1-t)^2}\chi_{\{t\le\tau\}}\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{4W^2(t)}{(1-t)^4}\chi_{\{t\le\tau\}}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{W^2(\tau)}{(1-\tau)^2} + \int_0^\tau \left[\frac{2W^2(t)}{(1-t)^3} - \frac{2W^2(t)}{(1-t)^4} + \frac{1}{(1-t)^2}\right]\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{1-\tau} + \int_0^\tau \left\{2W^2(t)\left[\frac{1}{(1-t)^3} - \frac{1}{(1-t)^4}\right] + \frac{1}{(1-t)^2}\right\}\mathrm{d}t \\
&\le -\frac{1}{1-\tau} + \int_0^\tau \frac{1}{(1-\tau)^2}\mathrm{d}t = -1.
\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$0 \le \mathit{\Gamma}_1(\xi) \le \mathrm{e}^{-1} < 1.$$

Ponieważ, z (7.4),

$$\int_0^1 \xi(s)\mathit{\Gamma}_s(\xi)\mathrm{d}W(s) = 1 - \mathit{\Gamma}_1(\xi),$$

więc

$$0 < 1 - \mathrm{e}^{-1} \le \int_0^1 \xi(s)\mathit{\Gamma}_s(\xi)\mathrm{d}W(s) \le 1.$$

Czyli całka jest ograniczona ma wszystkie momenty ale jej wartość oczekiwana nie jest równa zeru! Ważne jest to, że wszystko dzieje się na przedziale skończonym, bo

$$\int_0^{+\infty} \chi_{\{t\le\tau\}}\mathrm{d}W(t) = W(\tau).$$

Stąd dla $\tau = \inf\{t\colon W(t) = 1\}$ otrzymamy

$$\int_0^{+\infty} \chi_{\{t\leq\tau\}} \mathrm{d}W(t) = 1,$$

ale dla każdego $T < +\infty$, $\mathbb{P}(\tau > T) > 0$.

Oczywiście z reprezentacji zmiennych losowych całkowalnych z kwadratem mamy

$$\int_0^1 \xi(s)\Gamma_s(\xi)\mathrm{d}W(s) = \mathbb{E}\int_0^1 \xi(s)\Gamma_s(\xi)\mathrm{d}W(s) + \int_0^1 \gamma(s)\mathrm{d}W(s),$$

gdzie

$$\mathbb{E}\int_0^1 \gamma^2(s)\mathrm{d}s < +\infty.$$

Dalej

$$0 \neq \mathbb{E}\int_0^1 \xi(s)\Gamma_s(\xi)\mathrm{d}W(s) = \int_0^1 \left(\xi(s)\Gamma_s(\xi) - \gamma(s)\right)\mathrm{d}W(s) < +\infty.$$

Czyli mamy przykład procesu, którego całka na przedziale $[0,1]$ jest stałą różną od zera!

7.5 Zadania

W poniższych zadaniach W jest procesem, Wienera na przestrzeni z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P}^*)$.

Zadanie 7.1 Udowodnić dwoma sposobami: korzystając z twierdzenia Girsanowa oraz wprost z definicji, że proces

$$W^*(t) = W(t) + t, \qquad t \in [0, +\infty),$$

jest procesem Wienera na $(\Omega, \mathfrak{F}_T, (\mathfrak{F}_t; t \in [0,T]), \mathbb{P}^*)$ gdzie $T \in (0, +\infty)$, a

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^* = \exp\left\{-\frac{T}{2} - W(T)\right\}\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Zadanie 7.2 Czy

$$W^*(t) = W(t) + t, \qquad t \in [0, +\infty),$$

jest procesem Wienera na $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t; t \in [0, +\infty)), \mathbb{P}^*)$ gdzie $\mathbb{P}^*$ jest jakimś prawdopodobieństwem równoważnym $\mathbb{P}$.

Zadanie 7.3 Względem jakiej miary probabilistycznej procesem Wienera jest proces

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t W(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1].$$

Zadanie 7.4 Względem jakiej miary probabilistycznej procesem Wienera jest proces

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t s\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1].$$

Zadanie 7.5 Uzasadnij, że proces

$$W^*(t) = W(t) + 1, \qquad t \in [0,1],$$

nie może być procesem Wienera względem jakiejś miary probabilistycznej.

Zadanie 7.6 Uzasadnij, że proces

$$W^*(t) = 2W(t), \qquad t \in [0,1],$$

nie może być procesem Wienera względem jakiejś miary probabilistycznej równoważnej wyjsciowej.

Zadanie 7.7 Czy może istnieć prawdopodobieństwo, niekonieczne równoważne wyjściowemu, względem którego

$$W^*(t) = 2W(t), \qquad t \in [0,1],$$

jest procesem Wienera?

Następujące zadania pochodzą z książki Steele'a [25].

Zadanie 7.8 Pokazać, że

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\mu W(T)} \sup_{0\le t\le T} W(t)\right] \approx \frac{1}{2\mu}\mathrm{e}^{\mu^2 T/2}$$

oraz

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mu W(T)} \sup_{0\le t\le T} W(t)\right] \approx \frac{1}{2\mu}\mathrm{e}^{\mu^2 T/2}.$$

Zadanie 7.9 Pokazać, że

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T} |W(t)| \ge \delta\right\} > 0, \qquad \forall\, T \in (0,+\infty),\ \forall\, \delta > 0.$$

8

Stochastyczne równania różniczkowe

Rozważmy równanie stochastyczne

$$\mathrm{d}X(t) = b(t, X(t))\mathrm{d}t + \sigma(t, X(t))\mathrm{d}W(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{8.1}$$

gdzie W jest (standardowym) n-wymiarowym procesem Wienera a $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ i $\sigma\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \mapsto M(d \times n)$ są odwzorowaniami mierzalnymi.

8.1 Silne rozwiązania stochastycznych równań różniczkowych

Definicja 8.1 Niech W będzie standardowym procesem Wienera o wartościach w $\mathbb{R}^n$ określonym na filtrowanej przestrzeni probabilistycznej $\mathfrak{A} = (\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$. Niech X_0 będzie $\mathfrak{F}_0$-mierzalnym wektorem losowym w $\mathbb{R}^d$. Proces $X = (X(t))$ o ciągłych trajektoriach w $\mathbb{R}^d$ jest *(silnym) rozwiązaniem* na odcinku $[0,T]$ stochastycznego równania (8.1) z warunkiem początkowym X_0 gdy

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))\mathrm{d}s + \sigma(s, X(s))\mathrm{d}W(s), \qquad \mathbb{P} - p.n. \text{ dla } t \in [0,T].$$

Następujące twierdzenie o istnieniu i jedyności rozwiązania mocnego stochastycznego równania różniczkowego można udowodnić korzystając z twierdzenia Banacha o punkcie stałym w przestrzeni $\mathcal{X}$ wszystkich procesów mierzalnych, adaptowanych Y o ciągłych trajektoriach w $\mathbb{R}^d$ spełniających

$$\|Y\|_{\mathcal{X}} := \left(\mathbb{E} \sup_{0 \le t \le T} |Y(t)|^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

Twierdzenie 8.1 *Ustalmy skończony przedział czasowy* $[0,T]$. *Załóżmy, że* σ *i* b *są odwzorowaniami mierzalnymi ze względu na zmienne* t *i* x *oraz, że* *spełniają jednostajny warunek Lipschitza po zmiennej x i warunek wzrostu liniowego: istnieje stała K taka, że*

$$|b(t,x)-b(t,y)|+\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|\le K\,|x-y|, \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^d,\ t\in[0,T],$$
$$|b(t,x)|+\|\sigma(t,x)\|\le K\,(1+|x|)\,, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^d,\ t\in[0,T],$$

Wówczas dla dowolnego całkowalnego z kwadratem $\mathfrak{F}_0$-mierzalnego wektora losowego X_0 istnieje dokładnie jedno rozwiązanie X (8.1) *spełniające*

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}|X(t)|^2<+\infty.$$

z warunkiem początkowym X_0.

8.2 Słabe rozwiązania

Definicja 8.2 Niech μ będzie rozkładem (miarą probabilistyczną) na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Szóstka $\mathfrak{A}=(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in[0,T]},\mathbb{P},X,W)$ złożona z filtrowanej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$, procesu Wienera W względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$ oraz mierzalnego i $(\mathfrak{F}_t)$-adaptowanego procesu X o ciągłych trajektoriach nazywamy *słabym rozwiązaniem równania* (8.1) z rozkładem początkowym μ gdy: X_0 ma rozkład μ oraz

$$X(t)=X_0+\int_0^t b(s,X(s))\mathrm{d}s+\sigma(s,X(s))\mathrm{d}W(s), \qquad \mathbb{P}-p.n.\ \text{dla } t\in[0,T].$$

Twierdzenie 8.2 *Załóżmy, że σ jest stałe. Jeżeli b ma wzrost liniowy, to znaczy istnieje stała K taka, że*

$$|b(t,x)|\le K\,(1+|x|)\,, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^d,\ t\in[0,T],$$

to dla dowolnego rozkładu początkowego μ na $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ istnieje słabe rozwiązanie równania (8.1) *z warunkiem początkowym μ.*

Dowód. Niech W będzie procesem Wienera na filtrowanej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t),\mathbb{P})$ oraz niech X_0 będzie zmienną losową $\mathfrak{F}_0$-mierzalna o rozkładzie μ. Oczywiście żądane obiekty istnieją! Zdefiniujmy proces $W^*=(W^*(t))_{t\in[0,T]}$ w następujący sposób:

$$\sigma W^*(t):=-\int_0^t b(s,X_0+\sigma W(s))\mathrm{d}s+\sigma W(t), \qquad t\in[0,T].$$

Niech

$$X(t)=X_0+\sigma W(t), \qquad t\in[0,T].$$

Wówczas

$$-\int_0^t b(s,X(s))\mathrm{d}s + X(t) - X_0 = \sigma W^*(t), \qquad t \in [0,T].$$

Przenosząc stronami otrzymujemy

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s,X(s))\mathrm{d}s + \sigma W^*(t), \qquad t \in [0,T].$$

Wystarczy więc pokazać, że przy innej mierze probabilistycznej $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega,\mathfrak{F})$ równoważnej $\mathbb{P}$ proces W^* jest procesem Wienera. Wynika to z twierdzenia Girsanowa. Istotnie

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^* = \exp\left\{\int_0^T b(t,X(t))\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2}\int_0^T b^2(t,X(t))\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\mathbb{P},$$

ma żądane własności. □

8.3 Kontrprzykład

Następujący przykład pochodzący od Tanaki pokazuje, że równanie stochastyczne może posiadać słabe rozwiązanie, rozkład słabego rozwiązania może być jedyny, ale równanie nie posiada rozwiązania mocnego.

Zdefiniujmy troche nietypowo funkcje sgn kładąc

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \geq 0, \\ -1 & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Rozważmy równanie

$$\mathrm{d}X(t) = \operatorname{sgn} X(t)\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = X_0 = 0.$$

Zauważmy, że jeżeli X jest rozwiązaniem równania to X jest procesem Wienera. Istotnie, X jest ciągłym martyngałem całkowalnym z kwadratem o wariancji kwadratowej t. Stąd rozkład rozwiązania jest jedyny. Pokażemy, że równanie ma słabe rozwiązanie. W tym celu niech B będzie procesem Wienera określonym ma jakiejś przestrzeni z filtracją. Połóżmy $X = B$ i

$$W(t) = \int_0^t \operatorname{sgn} X(s)\mathrm{d}X(s), \qquad t \geq 0.$$

Wówczas W jest procesem Wienera. Ponadto

$$\mathrm{d}W(t) = \operatorname{sgn} X(t)\mathrm{d}X(t), \tag{8.2}$$

a więc

$$\mathrm{d}X(t) = \frac{1}{\operatorname{sgn} X(t)}\mathrm{d}W(t) = \operatorname{sgn} X(t)\mathrm{d}W(t).$$

Czyli X jest rozwiązaniem równania. Załóżmy, że $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P}, W, X)$ jest słabym rozwiązaniem równania. Niech $\mathbb{F}^W = (\mathfrak{F}^W_t)$ i $\mathbb{F}^X = (\mathfrak{F}^X_t)$ będą filtracjami generowanymi odpowiednio przez W i X, Zauważmy, że zachodzi (8.2). Stąd $\mathbb{F}^W \subset \mathbb{F}^X$. Pokażemy, że $\mathbb{F}^W \neq \mathbb{F}^X$. Stąd wynika, że X nie jest silnym rozwiązaniem na przestrzeni $(\Omega, \mathfrak{F}^W_\infty, (\mathfrak{F}^W_t), \mathbb{P}, W)$.

Przypomnijmy, że X jest procesem Wienera. Mamy pokazać, że dla $t > 0$,

$$\mathfrak{F}^X_t := \sigma(X(s)\colon s \le t) \neq \mathfrak{F}^W_t := \sigma(W(s)\colon s \le t) = \sigma(\int_0^s X(r)\mathrm{d}X(r)\colon s \le t).$$

Ponieważ X jest procesem Wienera

$$\frac{1}{2}X^2(s) = \int_0^s X(r)\mathrm{d}X(r) + s,$$

a więc

$$\sigma(\int_0^s X(r)\mathrm{d}X(r)\colon s \le t) = \sigma(X^2(s)\colon s \le t).$$

Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnego procesu Wienera X i dowolnego czasu $t > 0$ mamy

$$\sigma(X^2(s)\colon s \le t) = \sigma(|X(s)|\colon s \le t) \neq \sigma(X(s)\colon s \le t).$$

Oczywiście zdarzenie

$$A := \{X(t/3) \ge 1 \text{ i } X(2t/3) \le -1\}$$

należy do $\sigma(X(s)\colon s \le t)$ ale nie należy do $\sigma(|X(s)|\colon s \le t)$. $\square$

8.4 Zadania

Następujące zadania pochodzą z książki Oksendala [18].

Zadanie 8.1 Pokaż, że

$$X(t) = \mathrm{e}^{W(t)}, \quad t \ge 0,$$

spełnia równanie

$$\mathrm{d}X(t) = \frac{1}{2}X(t)\mathrm{d}t + X(t)\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = 1.$$

Zadanie 8.2 Pokaż, że

$$X(t) = \frac{W(t)}{1+t}, \qquad t \ge 0,$$

spełnia równanie

$$\mathrm{d}X(t) = -\frac{X(t)}{1+t}\mathrm{d}t + \frac{1}{1+t}\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = 0.$$

Zadanie 8.3 Pokaż, że

$$X(t) = \sin(\psi + W(t)), \qquad X(0) = \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

spełnia równanie

$$\mathrm{d}X(t) = -\frac{1}{2}X(t)\mathrm{d}t + \sqrt{1 - X^2(t)}\mathrm{d}W(t), \qquad t < \tau = \inf\left\{s \colon W(s) \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Zadanie 8.4 Pokaż, że

$$X(t) = \begin{bmatrix} t, \\ \mathrm{e}^t W(t) \end{bmatrix}$$

spełnia

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1(t)} \end{bmatrix} \mathrm{d}W(t).$$

Zadanie 8.5 Pokaż, że

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cosh W(t) \\ \sinh W(t) \end{bmatrix}$$

spełnia

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} X_2(t) \\ X_1(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}W(t).$$

Zadanie 8.6 Kandydatem na tak zwany *ruch Browna na elipsie*

$$\left\{(x, y) \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\},$$

jest proces

$$X(t) = \begin{bmatrix} a\cos W(t) \\ b\sin W(t) \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że

$$\mathrm{d}X(t) = -\frac{1}{2}X(t)\mathrm{d}t + MX(t)\mathrm{d}W(t),$$

gdzie

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8.7 Rozwiąż równanie

$$\mathrm{d}X(t) = -X(t)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}W(t).$$

Zadanie 8.8 Rozwiąż równanie

$$\mathrm{d}X(t) = rX(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_k X(t)\mathrm{d}W_k(t),$$

gdzie $W_1, \ldots, W_m$ są niezależnymi procesami Wienera.

Zadanie 8.9 Rozwiąż równanie

$$\mathrm{d}X(t) = r\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}W(t).$$

Podp. Pomnóż równanie przez

$$Y(t) = \exp\left\{-\sigma W(t) + \frac{\sigma^2 t}{2}\right\}.$$

Zadanie 8.10 Rozwiąż układ równań

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8.11 Rozwiąż układ równań (oscylatora z losowym wymuszeniem)

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8.12 Rozwiąż równanie (Ornsteina–Uhlenbecka)

$$\mathrm{d}X(t) = (m - X(t))\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t).$$

Policz

$$\mathbb{E}\,X(t), \qquad \mathrm{Var}\,X(t) := \mathbb{E}\,(X(t) - \mathbb{E}\,X(t))^2\,.$$

Zadanie 8.13 Dla ustalonych $a, b \in \mathbb{R}$ rozważmy równanie

$$\mathrm{d}X(t) = \frac{b - X(t)}{1 - t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), \qquad 0 \le t < 1$$

z warunkiem początkowym $X(0) = a$. Pokaż, że

$$X(t) = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}W(s)}{1-s}$$

spełnia równanie oraz, że

$$\lim_{t \uparrow 1} X(t) = b.$$

Proces X nazywamy *mostem Browna od a do b*.

Zadanie 8.14 Pokazać, że most Browna X od a do b z Zadania 8.13 jest procesem Gaussowskim, o ciągłych trajektoriach na odcinku $[0, 1]$. Ponadto dla $0 \le s \le t \le 1$,

$$\mathbb{E}\,X(t) = a(1-t) + bt,$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\,(X(t), X(s)) &:= \mathbb{E}\,[X(t) - \mathbb{E}\,X(t)]\,[X(s) - \mathbb{E}\,X(s)] \\ &= (1-t)(1-s)\int_0^s \frac{\mathrm{d}r}{(1-r)^2} \\ &= (1-t)s. \end{aligned}$$

Zadanie 8.15 Rozważyć (inny?) most Browna (od 0 do 1)

$$Z(t) = W_t - tW_1, \qquad t \in [0,1].$$

Czy jest to proces Gaussowski? Czy ma ciągłe trajektorie? Jakie ma parametry $\mathbb{E}\,Z(t)$ i $\mathrm{Cov}\,(Z(t), Z(s))$? Czy różni się od procesu X rozważanego w Zadaniach 8.13 i 8.14? dla $a = 0$ i $b = 1$?

Zadanie 8.16 Niech $f\colon \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ będzie funkcją analityczną. Pokazać, że

$$Z(t) = f(\mathbf{W}(t)),$$

gdzie

$$\mathbf{W}(t) = W_1(t) + \mathrm{i}W_2(t),$$

a W_1 i W_2 są niezależnymi procesami Wienera, spełnia równanie

$$\mathrm{d}Z(t) = f'(\mathbf{W}(t))\mathrm{d}\mathbf{W}(t).$$

Zadanie 8.17 Niech

$$\mathbf{W}(t) = W_1(t) + \mathrm{i}W_2(t),$$

gdzie W_1 i W_2 są niezależnymi procesami Wienera. Dla $z \in \mathbb{C}$ rozwiąż równanie zespolone (równanie w $\mathbb{C}$);

$$\mathrm{d}Z(t) = zZ(t)\mathrm{d}\mathbf{W}(t).$$

Zadanie 8.18 Pokazać, że

$$X(t) = W^2(t), \qquad t \geq 0,$$

spełnia (w słabym sensie!) równanie

$$\mathrm{d}X(t) = \mathrm{d}t + 2\sqrt{|X(t)|}\mathrm{d}W(t).$$

8.5 Równania Kołmogorowa wstecz i wzory Feynmana–Kaca

W tym rozdziale podajemy bez dowodów i bez wszystkich założeń kilka ważnych twierdzeń o stochastycznej reprezentacji równań cząstkowych. Dowody i dokładniejsze sformułowania twierdzeń można znaleźć np. w książkach Bassa [3], [4], Friedmana [7], czy Oksendala [18].

Niech $X^x(t)$ będzie wartością w chwili t rozwiązania równania stochastycznego

$$\mathrm{d}X(t) = b(X(t))\mathrm{d}t + \sigma(X(t))\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = x, \tag{8.3}$$

gdzie W jest m wymiarowym procesem Wienera oraz

$$b\colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d, \qquad \sigma\colon \mathbb{R}^d \mapsto M(d\times m).$$

Będziemy zakładali, że b i σ są Lipschitzowski, to znaczy, że istnieje stała K taka, że

$$\|b(x)-b(y)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\sigma(x)-\sigma(y)\|_{M(d\times m)} \le K\|x-y\|_{\mathbb{R}^d}, \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^d.$$

Rozważmy operator L (zwany *generatorem dyfuzji* (8.3))

$$L\psi(x) = \langle b(x), \nabla\psi(x)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} [\sigma(x)\sigma^*(x)]_{i,j}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}(x).$$

Mamy następujące trzy twierdzenia o stochastycznej reprezentacji rozwiązań równań z pochodnymi cząstkowymi.

Twierdzenie 8.3 ***(Równania Kołmogorowa wstecz)*** *Niech $f\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ oraz niech*

$$u(t,x) = \mathbb{E}\, f(X^x(t)), \qquad t\ge 0,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= Lu(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ u(0,x) &= f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Ponadto jeżeli $w\in C^{1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ jest ograniczoną funkcją spełniającą

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= Lw(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ w(0,x) &= f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

to $u=w$.

Twierdzenie 8.4 ***(Formula Fejnmana–Kaca)*** *Niech $f\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$, $q\in C(\mathbb{R}^d)$. Załóżmy, że q jest ograniczony z dolu. Niech*

$$u(t,x) = \mathbb{E}\, f(X^x(t))\exp\left\{-\int_0^t q(X^x(s))\mathrm{d}s\right\}, \qquad t\ge 0,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= Lu(t,x) - q(x)u(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ u(0,x) &= f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ponadto jeżeli $w\in C^{1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ jest ograniczoną funkcją spełniającą

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= Lw(t,x) - q(x)w(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ w(0,x) &= f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

to $u=w$.

Nasz ostatni problem dotyczy reprezentacji stochastycznych równań eliptycznych.

Twierdzenie 8.5 *Niech $\mathcal{O}$ będzie ograniczonym podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^d$. Zakładamy regularmość brzegu obszaru $\mathcal{O}$ np. brzeg wykresem funkcji gladkiej. Ponadto zakładamy, że operator L jest jednostajnie elliptyczny na $\mathcal{O}$. Rozważmy problem Poissona*

$$Lu(x) = f(x), \qquad x \in \mathcal{O}, \qquad u(x) = g(x), \quad x \in \partial\mathcal{O}$$

Niech

$$\tau^x = \inf\left\{t \geq 0\colon X^x(t) \in \partial\mathcal{O}\right\}, \qquad x \in \mathcal{O}.$$

Załóżmy, że

$$\mathbb{E}\int_0^{\tau^x} |f(X^x(s))|\,\mathrm{d}s < +\infty, \qquad \forall\, x \in \mathcal{O}$$

oraz

$$\mathbb{E}\,|g(X^x(\tau^x))| < +\infty, \qquad \forall\, x \in \mathcal{O}.$$

Wówczas

$$u(x) = \mathbb{E}\left[g(X^x(\tau^x)) - \int_0^{\tau^x} f(X^x(s))\mathrm{d}s\right], \qquad x \in \mathcal{O}.$$

9

Model Blacka–Scholesa

Rozdział ten oparty jest na książce [25].

9.1 Wprowadzenie

Przypomnijmy, że *kontrakt forward* to umowa jednej strony do kupna (a drugiej do sprzedaży) towaru (ang. commodity) w ustalonej chwili T po ustalonej cenie K. Jeżeli złożona stopa (na pożyczki i depozyty) jest stała w czasie i wynosi r, momentem zawarcia kontraktu jest t, a cenna w chwili t towaru wynosi $S(t)$ to arbitrażową ceną kontraktu forward w chwili jest

$$F = S(t) - \mathrm{e}^{-(T-t)}K.$$

Istotnie wystawca kontraktu w chwili t może pożyczyć z banku $e^{-(T-t)r}$ i za

$$F + \mathrm{e}^{-(T-t)}K$$

kupic towar za cenę $S(t)$. W chwili T wystawca oddaje towar otrzymując kwotę K potrzebną na zwrot pożyczki bankowej. Cena towaru w chwili T nie ma znaczenia. Istotne jest to, że sprzedający kontrakt może dokładnie replikować wypłatę w chwili T! Oczywiście gdyby cena kontraktu była wyższa niż F to nastąpiłby arbitraż.

Definicja 9.1 *Europejską opcją kupna (opcja call)* nazywamy prawo ale nie obowiązek kupna w ustalonej w chwili T ustalony towar po cenie K. *Europejską opcją sprzedaży (opcja put)* nazywamy prawo ale nie obowiązek sprzedaży w ustalonej w chwili T ustalony towar po cenie K.

Moment T nazywamy *momentem zapadalności opcji* a cena K *ceną realizacji* (ang. *strike price)*.

Twierdzenie 9.1 *Jeżeli r jest stałą w czasie złożoną stopą (na pożyczki i depozyty), to zachodzi tak zwany* partytet kupna sprzedaży (ang. put-call parity)

$$C - P = S - \mathrm{e}^{-r(T-t)}K,$$

gdzie C i P to ceny w chwili t opcji call i put, S jest ceną w chwili t towaru a T i K są momentami zapadalności opcji i ceną realizacji.

Dowód. Istotnie
$$F = S - \mathrm{e}^{-r(T-t)}K,$$
jest ceną kontraktu forward kupna w chwili T towaru za cenę K. Wypłata z z kontraktu wynosi
$$S(T) - K$$
gdzie $S(T)$ jest ceną towaru w chwili T. Jest to dokładnie wypłata z rożnicy opcji; jesli $C(T)$ i $P(T)$ to wypłaty z opcji w chwili T to

$$C(T) = (S(T) - K)^{+}, \qquad P(T) = (K - S(T))^{+} = (S(T) - K)^{-}.$$

Stąd
$$S(T) - K = C(T) - P(T). \qquad \square$$

9.2 Sformułowanie modelu Blacka–Scholesa

W modelu Blacka–Scholesa zakładamy, że dynamika ceny $S(t)$ w chwili t towaru (akcji) dana jest wzorem

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t) = S(t)\left(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t)\right),$$

gdzie W jest procesem Wienera o wartościach w $\mathbb{R}$ zdefiniowanym na przestrzeni probabilistycznej z filtracja $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$. Zakładamy, że złożona stopa (na depozyty i pożyczki) jest stała w czasie i wynosi r. Stąd dynamika *rachunku bankowego* $B(t)$, $t \geq 0$, dana jest wzorem

$$B(t) = \mathrm{e}^{rt}.$$

Inaczej
$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t, \qquad B(0) = 1.$$

Rachunek bankowy interpretujemy jako majątek w banku w chwili t przy założeniu, że w chwili 0 ulokowaliśmy 1. Interpretujemy też $B(t)$ jako *cenę jednostki bezryzykownej (ang. bonds) w chwili t.*

Niech $a(t)$ i $b(t)$ oznaczają odpowiednio *liczba jednostek akcji i liczbę jednostek bezryzykownych posiadanych przez inwestora w chwili t.* Wówczas majątek inwestora w chwili t wynosi

$$V(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t) = a(t)S(t) + b(t)\mathrm{e}^{rt}. \tag{9.1}$$

Definicja 9.2 Parę procesów mierzalnych i adaptowanych $(a(t), b(t))$ nazywamy *strategią*. Mówimy, że *strategia jest samofinansująca* gdy spełniony jest warunek

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V(t) &= a(t)\mathrm{d}S(t) + b(t)\mathrm{d}B(t) \\ &= a(t)S(t)\sigma\mathrm{d}W(t) + \left[a(t)S(t)\mu + b(t)r\mathrm{e}^{rt}\right]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Zakładamy oczywiście, że dla ustalonego horyzontu czasowego T w którym inwestor działa zachodzi

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \left[a^2(t) + |a(t)\mu + b(t)r|\right]\mathrm{d}t < +\infty\right\} = 1.$$

Ustalmy moment zapadalności $T \in (0, +\infty)$. Niech $H(S(T))$ będzie *wypłatą losową w chwili* T (ang. *contingent claim at time* T). Na przykład dla opcji call

$$H(x) = (x - K)^+$$

a dla opcji put

$$H(x) = (K - x)^+.$$

Definicja 9.3 Mówimy, że startegia (a, b) *replikuje* wypłatę losową H gdy

$$V(T) = H(S(T)).$$

Zadanie 9.1 Zinterpretować warunek (9.2).

9.3 Replikacja, równanie Blacka–Scholesa

Zakładamy, że dla strategii samofinansującej (a, b) majątek inwestora $V = (V(t))$ jest postaci

$$V(t) = F(t, S(t)), \tag{9.3}$$

gdzie F jest zadaną funkcją klasy $C^{1,2}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$. Ze wzoru Itô mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V(t) &= \mathrm{d}F(t, S(t)) \\ &= \left\{\frac{\partial F}{\partial t}(t, S(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, S(t))\mu S(t) + \frac{\sigma^2}{2}S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S(t))\right\}\mathrm{d}t \\ &\quad + \sigma S(t)\frac{\partial F}{\partial x}(t, S(t))\mathrm{d}W(t). \end{aligned}$$

Z drugiej strony biorąc pod uwagę warunek samofinansowania (9.2) i porównując współczynniki przy $\mathrm{d}t$ i $\mathrm{d}W(t)$ otrzymujemy

$$\sigma S(t)\frac{\partial F}{\partial x}(t, S(t)) = a(t)S(t)\sigma$$

oraz

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial t}(t,S(t))+\frac{\partial F}{\partial x}(t,S(t))\mu S(t)+\frac{\sigma^2}{2}S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S(t))\right\}$$
$$=a(t)S(t)\mu+b(t)r\mathrm{e}^{rt}.$$

Z pierwszej równości otrzymujemy

$$a(t)=\frac{\partial F}{\partial x}(t,S(t)). \tag{9.4}$$

Stąd, wstawiając to drugiej tożsamości otrzymujemy

$$b(t)=\frac{1}{r\mathrm{e}^{rt}}\left\{\frac{\partial F}{\partial t}(t,S(t))+\frac{\sigma^2}{2}S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S(t))\right\}. \tag{9.5}$$

Ponieważ z założenia $V(t)=F(t,S(t))$ a z definicji mamy (9.1) więc

$$F(t,S(t))=a(t)S(t)+b(t)\mathrm{e}^{rt}.$$

Stąd biorąc pod uwagę (9.4) i (9.5) mamy

$$F(t,S(t))=\frac{\partial F}{\partial x}(t,S(t))S(t)+\frac{\mathrm{e}^{rt}}{r\mathrm{e}^{rt}}\left\{\frac{\partial F}{\partial t}(t,S(t))+\frac{\sigma^2}{2}S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S(t))\right\}.$$

Równość zachodzi gdy F spełnia słynne *równanie Blacka–Scholesa* z warunkiem końcowym zadanym przez rodzaj wypłaty końcowej $H(S(T))$,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)=-\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)-rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)+rF(t,x),\\ &F(T,x)=H(x).\end{aligned} \tag{9.6}$$

Mając rozwiązanie F znajdujemy również strategię (a,b) replikującą wypłatę $H(S(T))$. Dana ona jest wzorami (9.4) i (9.5). Oczywiście ceną wypłaty w chwili t jest

$$V(t)=F(t,S(t)).$$

Zauważmy, że w równaniu na F nie występuje współczynnik dryfu!

9.4 Wzór Blacka–Scholesa

W latach 70-siątych ubiegłego stulecia Black i Scholes wyprowadzili wzór na cenę opcji kupna (call). Inaczej wzór na rozwiązanie równania Blacka–Scholesa (9.6) dla

$$H(x)=(x-K)^+.$$

Mianowicie pokazali, że

$$F(t,x) = x\Phi\left(\frac{\log(x/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ - K\mathrm{e}^{-r\tau}\Phi\left(\frac{\log(x/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \tag{9.7}$$

gdzie $\tau = T - t$ jest czasem do zapadnięcia opcji, a

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,$$

jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

Ponieważ strategia replikująca dana jest wzorami (patrz (9.4) i (9.5))

$$a(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S(t))$$

oraz

$$b(t) = \frac{1}{r\mathrm{e}^{rt}}\left\{\frac{\partial F}{\partial t}(t, S(t)) + \frac{\sigma^2}{2}S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S(t))\right\},$$

więc uwzględniajaąc wzór Blacka–Scholesa (9.7) otrzymujemy wzory dla strategii replikującej opcję kupna

$$a(t) = \Phi\left(\frac{\log(S(t)/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

oraz

$$b(t)\mathrm{e}^{rt} = -Ke^{-r\tau}\Phi\left(\frac{\log(S(t)/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Zauważmy, że $0 < a(t) < 1$. Stąd by replikować jedną opcje kupna musimy mieć w portfelu jakiś ściśle dodatni ułamek (< 1) akcji (pozycja długa w akcjach). Z drugiej strony $b(t) < 0$. Stąd należy zawsze mieć ujemny bilans w aktywach bezryzykownych (krótka pozycja na rachunku bankowym).

Zadanie 9.2 Rozważmy model cen i rachunek bankowy

$$\mathrm{d}S(t) = \mu(t, S(t))\mathrm{d}t + \sigma(t, S(t))\mathrm{d}W(t), \qquad \mathrm{d}B(t) = r(t, S(t))B(t)\mathrm{d}t.$$

Pokazać, że cena europejskiej opcji z czasem zapadalności T i wypłatą $H(S(T))$ dana jest wzorem $F(t, S(t))$ gdzie F jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -\frac{\sigma^2(t,x)}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - r(t,x)x\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + r(t,x)F(t,x), \\ F(T,x) = H(x).$$

Znaleźć strategię replikującą.

Zadanie 9.3 Znaleźć wszystkie rozwiązania równania Blacka–Scholesa
$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -\frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + rF(t,x),$$
postaci
$$F(t,x) = \psi(x)$$
lub
$$F(t,x) = \phi(t).$$
Biorąc liniowe kombinacje powyższych rozwiązań jakie opcje potrafisz wycenić?

Teraz znajdź wszystkie rozwiązania postaci
$$F(t,x) = \psi(x)\phi(t).$$
Jakie teraz opcje potrafisz wycenić?

Zadanie 9.4 Znaleźć wszystkie rozwiązania równania Blacka–Scholesa
$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -\frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + rF(t,x),$$
z warunkiem $F(T,x) = H(x)$, gdzie
$$H(x) = (x-K)^+ - (K-x)^+.$$
Wyprowadzić wzór na parytet opcji put i call.

Zadanie 9.5 Załóżmy, że można pożyczać na procent r^* a lokaty są oprocentowane na r_*. Pokazać, że cena kontraktu forward spełnia
$$S - \mathrm{e}^{-r_*(T-t)}K \le F \le S - \mathrm{e}^{-r^*(T-t)}K.$$

Zadanie 9.6 Rozważyć model jednookresowy złożony z akcji i obligacji. Akcja ma w chwili 0 cenę 2 a w chwili 1 albo 1 albo 4. Obligacja w chwilach 0 i 1 ma cenę 1. Wycenić kontrakt, który wypłaca w chwili 1 kwotę 3 gdy akcja warta jest 4 oraz 0 gdy akcja warta jest 1.

9.5 Fundamentalne prawo wyceny

Przyjmijmy następujące matatwierdzenie.

Twierdzenie 9.2 ***Fundamentalne prawo wyceny FPW*** *W modelu rynku na przetrzeni z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ nie ma arbitrażu wtedy i tyko wtedy gdy istnieje miara probabilistyczna $\mathbb{P}^*$ równoważna prawdopodobieństwu wyjściowemu $\mathbb{P}$ względem, której wszystkie zdyskontowane procesy cen są lokalnymi martyngałami.*

Dyskontujemy dzieląc przez rachunek bankowy.

Definicja 9.4 Miarę $\mathbb{P}^*$ nazywamy *miarą martyngałową spot* (lub krótko miarą martyngałową lub miarą bez ryzyka (ang. martingale measure, risk free measure).

9.6 FPW i model Blacka–Scholesa

W tym rozdziale W jest procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ a $(\mathfrak{F}_t)$ jest filtracją generowaną przez W, czyli

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^W = \sigma(W(s) \colon s \leq t), \qquad t \geq 0.$$

Niech $B = B(t)$ oznacza rachunek bankowy. Jeżeli $F = (F(t))$ jest procesem ceny to lokalnym martyngałem powiniem być proces

$$\frac{F(t)}{B(t)}$$

Przypomnijmy, że w modelu Blacka–Scholesa stopa krótka r jest stała w czasie. Stąd rachunek bankowy dany jest wzorem

$$B(t) = \mathrm{e}^{rt}, \qquad t \geq 0.$$

Czyli

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t, \qquad B(0) = 1.$$

Oczywiście

$$\frac{1}{B(t)} = \mathrm{e}^{-rt},$$

stąd

$$\mathrm{d}\frac{1}{B(t)} = -r\frac{1}{B(t)}\mathrm{d}t.$$

Mamy cenę akcji

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t).$$

Cena dana jest wzorem

$$S(t) = \exp\left\{\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}S(0).$$

Zdyskontowana cena wynosi

$$\tilde{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)}.$$

Policzymy różniczkę stochastyczną $\tilde{S}$ ze wzoru Itô na iloczyn dwóch procesów Itô;

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{S}(t) &= \mathrm{d}\left[S(t)\frac{1}{B(t)}\right] = S(t)\mathrm{d}\frac{1}{B(t)} + \frac{1}{B(t)}\mathrm{d}S(t) \\
&= -r\frac{S(t)}{B(t)}\mathrm{d}t + \frac{1}{B(t)}S(t)\mu\mathrm{d}t + \frac{1}{B(t)}\sigma S(t)\mathrm{d}W(t) \\
&= [-r + \mu]\,\tilde{S}(t)\mathrm{d}t + \sigma\tilde{S}(t)\mathrm{d}W(t).
\end{aligned}$$

Ustalmy skończony horyzont czasowy $T \in (0, +\infty)$. Będziemy zakładali, że wszystkie ceny określone są do czasu T. Rozważmy dla zadanego $\lambda \in \mathbb{R}$ proces

$$W^\lambda(t) = W(t) + \lambda t, \qquad t \in [0, T].$$

Z twierdzenia Girsanowa (Twierdzenie 7.2 oraz warunku Novikowa z Rozdziału 7.1) proces W^λ jest procesem Wienera względem miary

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^\lambda = \exp\left\{-\lambda W(T) - \frac{\lambda^2 T}{2}\right\} \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Mamy

$$\mathrm{d}W(t) = \mathrm{d}W^\lambda(t) - \lambda \mathrm{d}t.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{S}(t) &= [-r + \mu]\, \tilde{S}(t)\mathrm{d}t + \sigma \tilde{S}(t)\mathrm{d}W(t) \\ &= [-r + \mu - \lambda]\, \tilde{S}(t)\mathrm{d}t + \sigma \tilde{S}(t)\mathrm{d}W^\lambda(t). \end{aligned}$$

Dobieramy tak λ by $\tilde{S}$ był całką stochastyczną po $\mathrm{d}W^\lambda$ a więc lokalnym martyngałem względem miary $\mathbb{P}^\lambda$ na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$ z filtracją wyjściową $(\mathfrak{F}_t,\, t \in [0, T])$. Czyli

$$-r + \mu - \lambda\sigma = 0$$

a więc

$$\lambda = \frac{r - \mu}{\sigma}.$$

Problemem jest tylko to czy nie ma innej miary $\mathbb{P}^*$ równoważnej $\mathbb{P}$, względem której proces $\tilde{S}$ jest lokalnym martyngałem. Ale z twierdzenia Girsanowa, patrz Twierdzenie 7.1, każda miara $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathfrak{F}_T^W)$ równoważna $\mathbb{P}$ jest postaci

$$\mathrm{d}\mathbb{Q} = \exp\left\{\int_0^T \theta(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)\mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}\mathbb{P}$$

dla pewnego $\theta \in \mathcal{P}_T^2$. Ponadto, patrz Twierdzenie 7.1, proces

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0, T],$$

jest procesem Wienera względem $\mathbb{Q}$. Stąd (rozumując jak dla procesu W^λ) otrzymujemy

$$\mathrm{d}\tilde{S}(t) = [-r + \mu + \sigma\theta(t)]\, \tilde{S}(t)\mathrm{d}t + \sigma \tilde{S}(t)\mathrm{d}W^*(t).$$

Z Twierdzenia 3.1, $\tilde{S}$ jest lokalnym martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy

$$-r + \mu + \sigma\theta(t) = 0, \qquad \forall t \in [0, T],$$

czyli wtedy i tylko wtedy gdy

$$\theta \equiv \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Mamy więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.3 *W modelu Blacka–Scholesa miara martyngałowa spot dana jest wzorem*

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^* = \exp\left\{ \frac{\mu - r}{\sigma} W(T) - \frac{(\mu - r)^2 T}{2\sigma^2} \right\} \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Dynamika procesu cen S dana jest wzorem

$$\mathrm{d}S(t) = rS(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W^*(t), \qquad t \in [0, T],$$

gdzie

$$W^*(t) = W(t) + \frac{r - \mu}{\sigma} t, \qquad t \in [0, T],$$

jest procesem Wienera względem $\mathbb{P}^*$. Zdyskontowany proces cen

$$\tilde{S}(t) = \mathrm{e}^{-rt} S(t), \qquad t \in [0, T],$$

spełnia równanie

$$\tilde{S}(t) = \sigma \tilde{S}(t) \mathrm{d}W^*(t).$$

Zadanie 9.7 Pokazać z definicji, że dla $\lambda \in \mathbb{R}$ i $T \in (0, +\infty)$ proces

$$W^\lambda(t) = W(t) + \lambda t, \qquad t \in [0, T].$$

jest procesem Wienera na $(\Omega, \mathfrak{F}_T, (\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]), \mathbb{P}^\lambda)$ gdzie

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^\lambda = \exp\left\{ -\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 T}{2} \right\} \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

9.7 Wycena opcji

W tym rozdziale W jest procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ a $(\mathfrak{F}_t)$ jest filtracją generowaną przez W, czyli

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^W = \sigma(W(s) \colon s \leq t), \qquad t \geq 0.$$

Niech $H(S(T))$ będzie wypłatą losową w chwili T. Na przykład

$$H(x) = (x - K)^+$$

dla opcji kupna (call), a

$$H(x) = (K - x)^+$$

dla opcji sprzedaży (put). Niech $V(t)$ będzie arbitrażową ceną wypłaty $H(S(T))$ w chwili t.

Z FTW martyngałem lokalnym jest proces

$$\tilde{V}(t) = \frac{V(t)}{B(t)} = V(t)\mathrm{e}^{-rt}.$$

Gdyby był martyngałem to

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left(H(S(T))\mathrm{e}^{-rT}|\mathfrak{F}_t\right) = V(t)\mathrm{e}^{-rt}.$$

Czyli

$$V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left(H(S(T))\mathrm{e}^{-r(T-t)}|\mathfrak{F}_t\right).$$

Twierdzenie 9.4 *Niech*

$$V(t) = F(t, S(t)), \qquad t \in [0, T],$$

gdzie F jest rozwiązaniem równania Blacka–Scholesa (równanie (9.6)*)*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) &= -\frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + rF(t,x), \\ F(T,x) &= H(x). \end{aligned}$$

Wówczas zdyskontowany proces

$$\mathrm{e}^{-rt}V(t), \qquad t \in [0, T],$$

jest lokalnym martyngałem. Ponadto wypłata jest replikowalna a $V(t)$ jest wartością portfela w chwili t replikującego wypłatę $H(S(T))$, patrz Rozdział 9.3.

Dowód. Mamy pokazać, że

$$\mathrm{e}^{-rt}F(t, S(t)), \qquad t \in [0, T],$$

jest lokalnym martyngałem względem miary martyngałowej spot $\mathbb{P}^*$. W tym celu wystarczy pokazać, że

$$\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-rt}F(t, S(t))\right] = 0\,\mathrm{d}t + \ldots \mathrm{d}W^*(t),$$

gdzie

$$W^*(t) = W(t) + \frac{r-\mu}{\sigma}t,$$

jest procesem Wienera względem $\mathbb{P}^*$.

Oczywiście różniczkę liczymy ze wzoru Itô.

$$\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-rt}F(t, S(t))\right] = A(t)\mathrm{d}t + \varSigma(t)\mathrm{d}W^*(t), \tag{9.8}$$

gdzie

$$\Sigma(t) = \sigma S(t)\mathrm{e}^{-rt}\frac{\partial F}{\partial x}(t, S(t))$$

a

$$\begin{aligned}
&e^{rt}A(t) \\
&= -rF(t, S(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, S(t)) + rS(t)\frac{\partial F}{\partial x}(t, S(t)) + \frac{\sigma^2 S^2(t)}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S(t)) \\
&= 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

9.8 Model Blacka–Scholesa replikacja i miara martyngałowa spot

W tym rozdziale W jest procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ a $(\mathfrak{F}_t)$ jest filtracją generowaną przez W, czyli

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^W = \sigma(W(s) \colon s \le t), \qquad t \ge 0.$$

Niech $H(S(T))$ będzie wypłatą losową w chwili T. Niech $\mathbb{P}^*$ będzie miarą martyngałową spot dla modelu rynku na odcinku czasowym $[0, T]$. Wówczas, patrz Twierdzenie 9.3,

$$\mathrm{d}S(t) = rS(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W^*(t), \qquad t \in [0, T], \tag{9.9}$$

gdzie W^* jest procesem Wienera względem miary spot $\mathbb{P}^*$. Przypomnijmy, że dynamika cen aktywa bezryzykownego (rachunek bankowy) dany jest wzorem

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t. \tag{9.10}$$

Rozważmy teraz wypłatę losową $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T^W, \mathbb{P}^*)$. Wypłata może być postaci

$$X = H(S(T))$$

dla pewnej funkcji H ale na przykład (jak w wycenie opcji barierowych) może być postaci

$$X = \begin{cases} 1 & \text{gdy } S^*(T) \ge K, \\ 0 & \text{gdy } S^*(T) < K, \end{cases}$$

gdzie $K > 0$ jest ustaloną barierą, a

$$S^*(T) = \sup_{0 \le t \le T} S(t).$$

Niech

$$V(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*\left(X | \mathfrak{F}_t\right),$$

gdzie $\mathbb{E}^*$ oznacza operator warunkowej wartości oczekiwanej względem miary spot $\mathbb{P}^*$. Z twierdzenia o reprezentacji martyngałów (Twierdzenie 5.2) istnieje proces $f \in \mathcal{L}^2_T$, taki że

$$\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right) = \mathbb{E}\, X + \int_0^t f(s)\mathrm{d}W^*(s), \qquad t \in [0,T]. \tag{9.11}$$

Inaczej

$$\mathrm{d}\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right) = f(t)\mathrm{d}W^*(t).$$

Stosując wzór Itô dla iloczynu dwóch procesów otrzymujemy

$$\begin{aligned} dV(t) &= \mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right)\right] \\ &= r\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{d}\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right) \\ &= \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right)\mathrm{d}B(t) + \mathrm{e}^{-rT}B(t)f(t)\mathrm{d}W^*(t). \end{aligned}$$

Z (9.9) i (9.10) wyliczamy (trochę nieformalnie) $\mathrm{d}W^*$;

$$\mathrm{d}W^*(s) = \frac{\mathrm{d}S(t)}{\sigma S(t)} - \frac{r}{\sigma}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}S(t)}{\sigma S(t)} - \frac{1}{\sigma B(t)}\mathrm{d}B(t).$$

Wstawiając otrzymujemy

$$\mathrm{d}V(t) = \mathrm{e}^{-rT}\frac{B(t)f(t)}{\sigma S(t)}\mathrm{d}S(t) + \mathrm{e}^{-rT}\left[\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right) - \frac{f(t)}{\sigma}\right]\mathrm{d}B(t).$$

Stąd, patrz Definicja 9.2, strategią replikującą wyplatę X jest

$$\begin{aligned} a(t) &:= \mathrm{e}^{-rT}\frac{B(t)f(t)}{\sigma S(t)}, && t \in [0,T], \\ b(t) &:= \mathrm{e}^{-rT}\left[\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right) - \frac{f(t)}{\sigma}\right], && t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.5 *Niech: $T \in (0,+\infty)$, $\mathbb{P}^*$ będzie miarą martyngałową spot dla modelu BS na odcinku $[0,T]$ oraz niech $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{P}^*)$ będzie wypłatą losową w chwili T. Wówczas proces cen wypłaty X dany wzorem*

$$V(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*\left(X|\mathfrak{F}_t\right)$$

jest replikowalny i strategia replikująca dana jest wzorem (9.12). *Ponadto zdyskontowany proces cen*

$$\tilde{V}(t) := e^{-rt}V(t), \qquad t \in [0,T],$$

jest martyngałem względem miary $\mathbb{P}^*$.

Zadanie 9.8 Rozważmy opcje sprzedaży i kupna. Niech C i P będą cenami opcji wyznaczonymi z równania Blacka–Scholesa (patrz Rozdział 9.4). Czy zdyskontowane procesy cen $C(t)\mathrm{e}^{-rt}$, $t \in [0,T]$, oraz $P(t)\mathrm{e}^{-rt}$, $t \in [0,T]$, są martyngałami czy tylko martyngałami lokalnymi?

10

Stochastyczne stopy procentowe

10.1 Obligacje zerokuponowe

Definicja 10.1 *Obligacją zerokuponową (bez ryzyka kredytowego) o czasie wykupu (lub zapadalności)* T nazywamy kontrakt, który gwarantuje jego posiadaczowi wypłatę 1 w chwili T.

Ponieważ nie dopuszczamy możliwości niewywiązania się eminenta obligacji z warunków umowy, zatem posiadacz obligacji ma pewność, że otrzyma należną kwotę w chwili T. Rozważane obligacje są więc odpowiednikami obligacji skarbowych (z ang. *treasury bonds*) w odróżnieniu od narażonych na ryzyko kredytowe obligacji emitowanych przez firmy (z ang. *corporate bonds*).

Słownik

zero-cupon bond – *obligacja zerokuponowa*
maturity date T – *czas (data) wykupu* T, *czas (data) zapadalności*
face value F – *wypłata końcowa* F, (w naszym przypadku $F = 1$)
T*-bond* – T*-obligacja*, inaczej *obligacja o czasie wykupu* T

Podstawowym obiektem naszych zainteresowań będą ceny obligacji (zwykle zerokuponowych o różnych czasach wykupu).

$\boxed{B(t,T) \text{ oznacza cenę w chwili } t,\ T\text{- obligacji zerokuponowej}}$

Definicja 10.2 Zależność $B(t,T)$ od T, czyli ceny od czasu wykupu, nazywa się *strukturą terminową* w chwili t, (z ang. *term structure of bond prices* lub *bond price curve*.

Z definicji $B(T,T) = 1$. Oczywiście powinno zachodzić $0 < B(t,T) \leq 1$. Ponadto $B(t,T)$ powinno być funkcją malejącą T, gdyż oczywiście lepiej wcześniej otrzymać złotówkę niż później. W pewnych modelach własności te z dodatnimi prawdopodobieństwami nie zachodzą bo stopy procentowe mogą być ujemne.

Twierdzenie 10.1 *Niech $t < S < T$. Załóżmy, że w chwili t znamy przyszłą cenę $B(S,T)$. Wówczas brak arbitrażu implikuje następującą równość*

$$B(t,T) = B(t,S)B(S,T).$$

Dowód. Załóżmy, że

$$B(t,T) < B(t,S)B(S,T).$$

Stosujemy następującą strategię: w chwili t wystawiamy (sprzedajemy) $B(S,T)$ obligacji o czasie wykupu S, każda warta $B(t,S)$. Inaczej, zobowiązujemy się zapłacić $B(S,T)$ w chwili S. Za otrzymaną sumę $B(S,T)B(t,S)$ kupujemy jedną T-obligację płacąc

$$B(t,T) < B(S,T)B(t,S).$$

W chwili S płacimy należną sumę $B(S,T)$ pozbywając się T-obligacji. Zysk wynosi

$$B(S,T)B(t,S) - B(t,T) > 0.$$

Mamy więc abritraż, czyli zysk bez ryzyka. Gdy

$$B(S,T)B(t,S) < B(t,T),$$

to w chwili t wystawiamy jedną T-obligację (zobowiązując się zapłacić 1 w chwili T). Kupujemy $B(S,T)$ obligacji o czasie wykupu S, otrzymując w chwili S, kwotę $B(S,T)$, którą przeznaczamy na wykup T-obligacji. Nasz zysk wynosi

$$B(t,T) - B(S,T)B(t,S) > 0. \qquad \square$$

Wniosek 10.1 *Gdy ceny obligacji są deterministyczne to dla pewnej stałej r zachodzi $B(t,T) = \mathrm{e}^{r(T-t)}$.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych r, t, S, T zachodzi

$$\mathrm{e}^{r(T-t)} = \mathrm{e}^{r(S-t)}\mathrm{e}^{r(T-S)}.$$

Tak więc funkcja $B(t,T) = \mathrm{e}^{r(T-t)}$ jest rozwiązaniem równania funkcyjnego

$$B(t,T) = B(t,S)B(S,T), \qquad t \leq S \leq T.$$

Można pokazać, że przy minimalnych naturalnych założeniach o regularności B, wszystkie rozwiązania powyższego równania są postaci $B(t,T) = \mathrm{e}^{r(T-t)}$ dla pewnego r. $\square$

Wybiegając nieco naprzód możemy przeformułować powyższy wniosek następująco.

Wniosek 10.2 *Gdy ceny są deterministyczne i mierzalne, to stopa krótka jest stała.*

10.2 Stopy procentowe

Definicja 10.3 *Stopa forward* z czasem wykupu T (z ang. *with maturity* T) liczona w czasie t zdefiniowana jest następująco

$$\begin{aligned} f(t,T) &= \lim_{\Delta T \to 0} R(t,T,T+\Delta T) = \lim_{\Delta T \to 0} -\frac{\log B(t,T+\Delta T) - \log B(t,T)}{T+\Delta T - T} \\ &= -\frac{\partial \log B(t,T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Oczywiście istnienie stopy forward wymaga różniczkowalności po T funkcji $B(t,T)$.

Twierdzenie 10.2 *Dla $t \le T$ mamy*

$$B(t,T) = B(t,S)\mathrm{e}^{-\int_S^T f(t,u)\mathrm{d}u}, \qquad t \le S \le T.$$

W szczególności, ponieważ $B(t,t) = 1$,

$$B(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,u)\mathrm{d}u}, \qquad t \ge 0.$$

Definicja 10.4 *Stopa krótka* w czasie t zdefiniowana jest równością $r(t) = f(t,t)$.

Definicja 10.5 *Rachunek pieniężny (bankowy)* zdefiniowny jest następująco

$$B(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(u)\mathrm{d}u},$$

to znaczy

$$\mathrm{d}B(t) = r(t)B(t)\mathrm{d}t, \qquad B(0) = 1.$$

Wartość $B(t)$ rachunku pieniężnego w chwili t jest równa kwocie otrzymanej w chwili t przez zainwestowanie w chwili 0 kapitału 1 w obligacje o najkrótszych czasach wykupu (z ang. *overnight*). Tak więc:

Stopa krótka $r(t)$ to stopa procentowa oferowana w chwili t przez bank.

Stopy forward f i krótka r związane są relacją

$$\boxed{r(t) = f(t,t).}$$

10.2.1 Interpretacja

Stopa forward $f(t,T)$ może być interpretowana jako złożona stopa zakontraktowana w chwili t na nieskończenie mały przedział czasowy $[T, T+\Delta T]$. Podobnie, stopa krótka $r(t)$ to złożona stopa zakontraktowana w chwili t na nieskończenie mały przedział od t do $t+\Delta t$.

Istotnie, w chwili t wystawiamy 1 obligacje o czasie wykupu T kupując za to $B(t,T)/B(t,T+\Delta T)$-obligacji o czasie wykupu $T+\Delta T$. Tak więc w chwili T inwestujemy (płacimy) 1 otrzymując w chwili $T+\Delta T$ kwotę $B(t,T)/B(t,T+\Delta T)$. Stąd złożona stopa zwrotu wynosi

$$\frac{1}{\Delta T}\log\frac{B(t,T)}{B(t,T+\Delta T)} = \frac{1}{\Delta T}\int_T^{T+\Delta T} f(t,u)\mathrm{d}u.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\lim_{\Delta T\downarrow 0}\frac{1}{\Delta T}\log\frac{B(t,T)}{B(t,T+\Delta T)} = f(t,T).$$

Podobnie dla r. Wystawiamy w chwili t jedną obligację o czasie wykupu t, czyli inwestujemy 1 w chwili t, kupując $B(t,t+\Delta t)$ obligacji o czasie wykupu $t+\Delta t$. Złożona stopa zwrotu na odcinku $[t,t+\Delta t]$ wynosi

$$\frac{1}{\Delta t}\log\frac{1}{B(t,t+\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f(t,u)\mathrm{d}u.$$

W granicy otrzymujemy

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{1}{\Delta t}\log\frac{1}{B(t,t+\Delta t)} = f(t,t) = r(t).$$

Można też interpretować stopy forward i krótką następująco: inwestycja w czasie t kwoty 1 na obligacje o czasie wykupu T daje $1/B(t,T)$ w chwili T. Stąd stopa zwrotu $\xi(u)$ z tej inwestycji spełnia związek

$$\frac{1}{B(t,T)} = \mathrm{e}^{\int_t^T \xi(u)\mathrm{d}u}.$$

Czyli $B(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T \xi(u)\mathrm{d}u}$, a więc $\xi(u) = f(t,u)$.

Podobnie na rachunku bankowym. Stopa $r(t)$ oferowana w chwili t przez bank powinna być równa granicy stopy zwrotu z inwestycji w obligacje o czasie wykupu $t+u$ unormowanej przez podzielenie przez u, gdy $u\downarrow 0$. Czyli

$$\frac{1}{B(t,t+u)} = \mathrm{e}^{\int_t^{t+u} f(t,s)\mathrm{d}s}.$$

A więc

$$r(t) = \lim_{u\downarrow 0}\frac{1}{u}\log\frac{1}{B(t,t+u)} = \lim_{u\downarrow 0}\frac{1}{u}\int_y^{t+u} f(t,s)\mathrm{d}s = f(t,t).$$

10.3 Miara martyngałowa spot

Załóżmy, że model cen zadany jest na filtrowanej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$. Będziemy zakładali, że wszystkie procesy cen są mierzalne i adaptowane do filtracji $(\mathfrak{F}_t)$. Przez r oznaczamy stópę krótką, patrz Rozdział 10.2 a przez

$$B(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}, \qquad t \geq 0,$$

rachunek bankowy.

Przypomnijmy, patrz Rozdział 9.5, że miara martyngałowa (inaczej miara martyngałowa spot) to prawdopodobieństwo $\mathbb{P}^*$ równoważne wyjściowemu $\mathbb{P}$, takie że wszystkie zdyskontowane procesy są lokalnymi martyngałami względem $\mathbb{P}^*$. Przypomnijmy, że w przypadku miary martyngałowej spot dyskontujemy dzieląc proces cen przez rachunek bankowy. Sposób dyskontowania (wybór tak zwanego *numéraire*) może być różny, patrz miara martyngałowa forward i Rozdział 10.4.

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że wszystkie rozważane przez nas zdyskontowane procesy cen na rynku obligacji są nie tylko lokalnymi martyngałami ale też martyngałami.

Oznaczmy przez $\mathbb{E}^*$ operator wartości oczekiwanej względem miary martyngałowej (miary martyngałowej spot) $\mathbb{P}^*$. Następujące twierdzenie daje reprezentację *Feynmana–Kaca* procesu cen. Wzór ten jest podstawą numerycznych metod Monte Carlo liczenia cen obligacji.

Twierdzenie 10.3 *Zachodzą następujące wzory (Feynmana–Kaca)*

$$B(t,T) = \mathbb{E}^* \left(\exp\left\{ -\int_t^T r(u)\mathrm{d}u \right\} |\mathfrak{F}_t \right), \qquad 0 \leq t \leq T \leq \widehat{T},$$

$$B(0,T) = \mathbb{E}^* \exp\left\{ -\int_0^T r(u)\mathrm{d}u \right\}, \qquad 0 \leq T \leq \widehat{T}.$$

Dowód. Oczywiście drugi wzór jest szczególnym przypadkiem pierwszego. Warunek martyngałowości oznacza, że

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{B(T,T)}{B(T)} |\mathfrak{F}_t \right) = \frac{B(t,T)}{B(t)}.$$

Ponieważ $B(T,T) = 1$ oraz

$$B(t) = \exp\left\{ \int_0^t r(s)\mathrm{d}s \right\}$$

jest $\mathfrak{F}_t$ mierzalny, mamy

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \exp\left\{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right\}\mathbb{E}^*\left(\exp\left\{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\right\}|\mathfrak{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}^*\left(\exp\left\{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\}|\mathfrak{F}_t\right). \qquad \square
\end{aligned}
$$

10.4 Miara martyngałowa forward

Miara martyngałowa spot to miara, przy której zdyskontowany przez rachunek bankowy proces cen jest martyngałem. Można dyskontować cenami $B(t,\widehat{T})$, traktując ten instrument jako tak zwany *numéraire*.

Definicja 10.6 *Miara martyngałowa forward* do daty $\widehat{T}$, to prawdopodobieństwo $\mathbb{P}^*_{\widehat{T}}$ równoważne prawdopodobieństwu wyjściowemu $\mathbb{P}$, przy którym dla każdego $T \le \widehat{T}$, proces

$$
F(t,T,\widehat{T}) := \frac{B(t,T)}{B(t,\widehat{T})}, \qquad 0 \le t \le T,
$$

jest martyngałem.

10.4.1 Absolutna ciągłość miar spot i forward

Niech $\mathbb{P}^*$ będzie miarą martyngałową spot do momentu zapadalności $\widehat{T}$. Przypomnijmy, że przez $\mathbb{E}^*$ oznaczamy operator wartości oczekiwanej względem $\mathbb{P}^*$. Mamy następujący wynik.

Twierdzenie 10.4 *Niech $0 \le T \le \widehat{T}$. Wówczas miara $\mathbb{P}^*_T$ zdefiniowana wzorem*

$$
\mathrm{d}\mathbb{P}^*_T = \frac{1}{B(T)B(0,T)}\mathrm{d}\mathbb{P}^*
$$

jest miarą martyngałową forward do daty zapadalności T.

Dowód. Pokażemy po pierwsze, że $\mathbb{E}^*\frac{1}{B(T)B(0,T)} = 1$, czyli, że $\mathbb{P}^*_T$ jest prawdopodobieństwem. Mamy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\frac{1}{B(T)B(0,T)} &= \mathbb{E}^*\mathbb{E}^*\left(\frac{1}{B(T)B(0,T)}|\mathfrak{F}_0\right)\\
&= \mathbb{E}^*\frac{1}{B(0,T)}\mathbb{E}^*\left(\frac{1}{B(T)}|\mathfrak{F}_0\right)\\
&= \mathbb{E}^*\frac{B(T,T)}{B(0,T)}\mathbb{E}^*\left(\frac{B(0,T)}{B(0)}|\mathfrak{F}_0\right)\\
&= \mathbb{E}^*\frac{1}{B(0,T)}\frac{B(0,T)}{1} = 1.
\end{aligned}
$$

Następnie, ze wzoru Bayesa, dla $0 \le s \le t \le U \le T$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*_T}\left(\frac{B(t,S)}{B(t,T)}|\mathfrak{F}_s\right) &= \frac{\mathbb{E}^*\left(\frac{B(t,S)}{B(t,T)}\frac{1}{B(T)B(0,T)}|\mathfrak{F}_s\right)}{\mathbb{E}^*\left(\frac{1}{B(T)B(0,T)}|\mathfrak{F}_s\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}^*\left(\frac{B(t,S)}{B(t,T)}\mathbb{E}^*\left(\frac{B(T,T)}{B(T)}|\mathfrak{F}_t\right)|\mathfrak{F}_s\right)}{\mathbb{E}^*\left(\mathbb{E}^*\left(\frac{B(T,T)}{B(T)}|\mathfrak{F}_t\right)|\mathfrak{F}_s\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}^*\left(\frac{B(t,S)}{B(t,T)}\frac{B(t,T)}{B(t)}|\mathfrak{F}_s\right)}{\mathbb{E}^*\left(\frac{B(t,T)}{B(t)}|\mathfrak{F}_s\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}^*\left(\frac{B(t,S)}{B(t)}|\mathfrak{F}_s\right)}{\mathbb{E}^*\left(\frac{B(t,T)}{B(t)}|\mathfrak{F}_s\right)} \\
&= \frac{\frac{B(s,S)}{B(s)}}{\frac{B(s,T)}{B(s)}} \\
&= \frac{B(s,S)}{B(s,T)}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

10.5 Wycena opcji

Miara spot $\mathbb{P}^*$ umożliwia nam policzenie ceny (arbitrażowej) $C_t(X)$ w chwili t dowolnej wypłaty X o terminie realizacji T. Mianowicie, z ogólnej teorii, $C_t(X)$, $t \in [0,T]$, zdyskontowany przez rachunek bankowy jest martyngałem względem $\mathbb{P}^*$. Stąd

$$
C_t(X) = B(t)\mathbb{E}^*\left(\frac{X}{B(T)}|\mathfrak{F}_t\right), \qquad t \in [0,T].
$$

Kontrakt forward to zobowiązanie podjęte w chwili t jednej strony do sprzedaży w chwili T waloru X po ustalonej w chwili t cenie $F_X(t,T)$ a drugiej strony do odkupienia X po cenie $F_X(t,T)$. Za kontrakt forward nie ma opłaty do chwili T. Tak więc można go traktować jako wypłatę losową $X - F_X(t,T)$ o cenie 0! Oczywiście problem polega na ustaleniu ceny $F_X(t,T)$!

Twierdzenie 10.5 *Kontrakt forward zawarty w chwili $t \ge 0$ o terminie realizacji T i wypłacie X jest równoważny opcji o wypłacie $X - F_X(t,T)$ gdzie $F_X(t,T)$ jest $\mathfrak{F}_t$ mierzalną zmienną losową zwaną* ceną forward *wypłaty X, taką, że*

$$
C_t(X - F_X(t,T)) = 0.
$$

Cenę $F_X(t,T)$ wyliczamy więc z warunku

$$0 = C_t(X - F_X(t,T)) = B(t)\mathbb{E}^* \left(\frac{X - F_X(t,T)}{B(T)} | \mathfrak{F}_t \right).$$

Stąd

$$C_t(X) = F_X(t,T)\mathbb{E}^* \left(\frac{B(t)}{B(T)} | \mathfrak{F}_t \right) = F_X(t,T)B(t,T).$$

Tak więc cena forward wypłaty X wynosi

$$F_X(t,T) = \frac{C_t(X)}{B(t,T)}. \tag{10.1}$$

Uwaga 10.1 Zauważmy, że jeśli X oznacza dostarczenie w chwili T obligacji zerokuponowej o czasie zapadalności $S > T$ w cenie $B(t,S)$, to

$$F_X(t,T) = \frac{B(t,S)}{B(t,T)}.$$

Istotnie wypłata losowa X wynosi dokładnie $B(S,T)$. Stąd

$$C_t(X) = C_t(B(S,T)) = \mathbb{E}^* \left(\frac{B(S,T)}{B(S)} | \mathfrak{F}_t \right) B(t) = \frac{B(t,T)}{B(t)} B(t) = B(t,T).$$

Okazuje się, że ceny kontraktów forward mają proste przedstawienie za pomocą miary forward. Dokładnie mamy następujący wynik.

Twierdzenie 10.6 *Cena kontraktu forward o dacie wygaśnięcia T wypłaty losowej X ma postać*

$$F_X(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T^*} \left(X | \mathfrak{F}_t \right).$$

W szczególności proces cen kontraktu forward jest martyngałem przy mierze forward.

Dowód. Z (10.1) a następnie ze wzoru Bayesa mamy

$$F_X(t,T) = \frac{C_t(X)}{B(t,T)} = \frac{\mathbb{E}^* \left(\frac{X}{B(T)} | \mathfrak{F}_t \right) B(t)}{\mathbb{E}^* \left(\frac{B(T,T)}{B(T)} | \mathfrak{F}_t \right) B(t)} = \frac{\mathbb{E}^* \left(\frac{X}{B(T)B(0,T)} | \mathfrak{F}_t \right)}{\mathbb{E}^* \left(\frac{1}{B(T)B(0,T)} | \mathfrak{F}_t \right)}$$
$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T^*} \left(X | \mathfrak{F}_t \right). \qquad \square$$

Cena arbitrażowa wypłaty losowej X podana za pomocą miary spot ma postać

$$C_t(X) = B(t)\mathbb{E}^* \left(\frac{X}{B(T)} | \mathfrak{F}_t \right).$$

Wymaga więc ona znajomości rozkładu łącznego X i $B(T)$. W terminach miary forward otrzymujemy następującą reprezentację ceny $C_t(X)$.

Lemat 10.1 *Cena arbitrażowa wypłaty X, o dacie zapadalności T wynosi*

$$C_t(X) = B(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T^*} \left(X | \mathfrak{F}_t \right).$$

Dowód. Stosując znowu wzór Bayesa otrzymujemy

$$\begin{aligned}
C_t(X) &= B(t)\mathbb{E}^*\left(\frac{X}{B(T)}|\mathfrak{F}_t\right) = B(t)B(0,T)\mathbb{E}^*\left(\frac{X}{B(T)B(0,T)}|\mathfrak{F}_t\right) \\
&= B(t)B(0,T)\frac{\mathbb{E}^*\left(\frac{X}{B(T)B(0,T)}|\mathfrak{F}_t\right)}{\mathbb{E}^*\left(\frac{1}{B(T)B(0,T)}|\mathfrak{F}_t\right)}\mathbb{E}^*\left(\frac{1}{B(T)B(0,T)}|\mathfrak{F}_t\right) \\
&= B(t)\mathbb{E}^{P_T^*}\left(X|\mathfrak{F}_t\right)\mathbb{E}^*\left(\frac{1}{B(T)}|\mathfrak{F}_t\right) \\
&= B(t)\mathbb{E}^{P_T^*}\left(X|\mathfrak{F}_t\right)\mathbb{E}^*\left(\frac{B(T,T)}{B(T)}|\mathfrak{F}_t\right) \\
&= B(t)\mathbb{E}^{P_T^*}\left(X|\mathfrak{F}_t\right)\frac{B(t,T)}{B(t)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

10.6 Modele stopy krótkiej-wprowadzenie

Niech $\mathbb{P}^*$ oznacza miarę martyngałową spot. Przypomnijmy, patrz Twierdzenie 10.3, że zachodzą wzory Feynmana–Kaca

$$B(t,T) = \mathbb{E}^*\left(\exp\left\{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u\right\}|\mathfrak{F}_t\right), \qquad 0 \le t \le T \le \widehat{T}, \tag{10.2}$$

$$B(0,T) = \mathbb{E}^*\exp\left\{-\int_0^T r(u)\mathrm{d}u\right\}, \qquad 0 \le T \le \widehat{T}. \tag{10.3}$$

W oparciu o wzory (10.2) i (10.3) zaproponowano liczne modele. Podają one dynamikę stopy short w mierze martyngałowej $\mathbb{P}^*$. Innymi słowy modele te zakładają postać procesów $\mu(t) - \sigma(t)\lambda(t)$ i $\sigma(t)$. Noszą one nazwę *modeli stopy krótkiej*. W następującej tabeli podajemy listę najważniejszych modeli stopy krótkiej.

Model	$\mu(t) - \sigma(t)\lambda(t)$	$\sigma(t)$
Merton	a	σ
Vasiček	$a - br(t)$	σ
Black-Karasinski	$a(t) - b\log r(t)$	σ
Longstaff	$a(b - \sqrt{r(t)})$	$\sigma\sqrt{r(t)}$
Cox-Ingersoll-Ross	$a - br(t)$	$\sigma\sqrt{r(t)}$
Dothan	$ar(t)$	$\sigma r(t)$
Black-Derman-Toy	$\Theta(t)r(t)$	$\sigma(t)r(t)$
Ho-Lee	$\Theta(t)$	σ
Hull-White (rozszeżony Vasiček)	$\Theta(t) - a(t)r(t)$	$\sigma(t)$
Hull-White (rozszeżony Cox-Ingersoll-Ross)	$\Theta(t) - a(t)r(t)$	$\sigma(t)\sqrt{r(t)}$
Hull-White	$\Theta(t) - a(t)r(t)$	$\sigma(t)r(t)^\beta$

10.6.1 Pomocniczy lemat

Aby korzystać ze wzorów Feynmana–Kaca (10.2) i (10.3) powinniśmy co najmniej umieć liczyć warunkowe wartości oczekiwane

$$\mathbb{E}^* \left(\exp\left\{ \int_t^T f(u)W^*(u)\mathrm{d}u \right\} |\mathfrak{F}_t \right)$$

dla deterministycznych funkcji f. W tym celu potrzebny będzie nam następujący lemat.

Lemat 10.2 *Jeżeli f jest całkowalną funkcją deterministyczną to*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* &\left(\exp\left\{ \int_t^T f(u)W^*(u)\mathrm{d}u \right\} |\mathfrak{F}_t \right) \\ &= \exp\left\{ \frac{1}{2}\left(H^2(T)(T-t) + \int_t^T H^2(u)\mathrm{d}u - 2H(T)\int_t^T H(u)\mathrm{d}u \right) \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \times \exp\left\{ W^*(t)\left(H(T)-H(t)\right)\right\}.\end{aligned}$$

Dowód. Niech H oznacza funkcję pierwotną f. Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_t^T f(u)W^*(u)\mathrm{d}u &= \int_t^T H'(u)W^*(u)\mathrm{d}u \\ &= H(T)W^*(T) - H(t)W^*(t) - \int_t^T H(u)\mathrm{d}W^*(u) \\ &= H(T)\left(W^*(T) - W^*(t)\right) - \int_t^T H(u)\mathrm{d}W^*(u) \\ &\quad + W^*(t)\left(H(T)-H(t)\right).\end{aligned}$$

Zauważmy, że zmienna losowa

$$X := H(T)\left(W^*(T) - W^*(t)\right) - \int_t^T H(u)\mathrm{d}W^*(u)$$

nie zależy od $\mathfrak{F}_t$ a $W^*(t)\left(H(T)-H(t)\right)$ jest $\mathfrak{F}_t$-mierzalna. Stąd

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* &\left(\exp\left\{ \int_t^T f(u)W^*(u)\mathrm{d}u \right\} |\mathfrak{F}_t \right) \\ &\qquad\qquad = \exp\left\{ W(t)\left(H(T)-H(t)\right)\right\} \mathbb{E}^* \exp\left\{X\right\}.\end{aligned}$$

Następnie X ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &:= \mathbb{E}^* X^2 = \mathbb{E}^* \left(H(T)\left(W^*(T) - W^*(t)\right) - \int_t^T H(u)\mathrm{d}W^*(u) \right)^2 \\
&= H^2(T)(T-t) + \int_t^T H^2(u)\mathrm{d}u - 2\mathbb{E}^* \int_t^T H(u)\mathrm{d}W^*(u) \int_t^T H(T)\mathrm{d}W^*(u) \\
&= H^2(T)(T-t) + \int_t^T H^2(u)\mathrm{d}u - 2H(T)\int_t^T H(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Ponieważ

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^* \exp\{X\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ x - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right\} \mathrm{d}x \\
&= \exp\left\{ \frac{\sigma^2}{2} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right\} \mathrm{d}x = \exp\left\{ \frac{\sigma^2}{2} \right\},
\end{aligned}
$$

więc otrzymujemy żądany wzór. □

10.7 Model Mertona

W 1973 r. Merton zaproponował następujący model stopy krótkiej

$$
\mathrm{d}r(t) = a\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W^*(t). \tag{10.4}
$$

Występują w nim dwa parametry $a, \sigma > 0$.

Następujący rezultat wywnioskujemy ze wzorów Feynmana–Kaca (10.3) i (10.4) oraz Lematu 10.2.

Twierdzenie 10.7 *Ceny obligacji w modelu Mertona dane są wzorami*

$$
B(t,T) = \mathrm{e}^{-(T-t)r(t) - \frac{1}{2}a(T-t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3}, \qquad 0 \le t \le T.
$$

W szczególności

$$
B(0,T) = \mathrm{e}^{-Tr(0) - \frac{1}{2}aT^2 + \frac{1}{6}\sigma^2 T^3}, \qquad T \ge 0.
$$

Dowód. Z (10.2) oraz z postaci dynamiki r otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \mathbb{E}^* \left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} | \mathfrak{F}_t \right) \\
&= \mathbb{E}^* \left(\mathrm{e}^{-\int_t^T (r(0) + as + \sigma W^*(s))\mathrm{d}s} | \mathfrak{F}_t \right) \\
&= \mathbb{E}^* \left(\mathrm{e}^{-(T-r)r(0) - \frac{T^2 - t^2}{2}a - \int_t^T \sigma W^*(s)\mathrm{d}s} | \mathfrak{F}_t \right) \\
&= \mathrm{e}^{-(T-t)r(0) - \frac{T^2-t^2}{2}a} \mathbb{E}^* \left(\mathrm{e}^{-\int_t^T \sigma W^*(s)\mathrm{d}s} | \mathfrak{F}_t \right).
\end{aligned}
$$

Stosując Lemat 10.2 do funkcji stałej $f \equiv \sigma$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}^*\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T \sigma W^*(s)\mathrm{d}s}|\mathfrak{F}_t\right) = \mathrm{e}^{-\sigma W^*(t)(T-t)}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}\left(T^2(T-t)+\frac{1}{3}(T^3-t^3)-T(T^2-t^2)\right)}.$$

Ponieważ

$$-(T-t)r(0) - \frac{T^2-t^2}{2}a - \sigma W^*(t)(T-t) = -(T-t)r(t) - \frac{(T-t)^2}{2}a$$

oraz

$$T^2(T-t) + \frac{1}{3}(T^3-t^3) - T(T^2-t^2) = T^2 t + \frac{1}{3}(T^3-t^3) + Tt^2 = \frac{1}{3}(T-t)^3,$$

otrzymujemy żądane wzory. $\square$

Wniosek 10.3 *W modelu Mertona, $B(t,T) = F^T(t, r(t))$, gdzie*

$$F(t,r) = \mathrm{e}^{-(T-t)r-\frac{1}{2}a(T-t)^2+\frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3}.$$

Zadanie 10.1 Policzyć rozkład $r(2)$ w modelu Mertona z parametrami $a = 0$ i $\sigma = 0.01$, gdy $r(0) = 0.09$.

Zadanie 10.2 W modelu Mertona wyrazić stopy forward jako funkcje stopy krótkiej.

Zadanie 10.3 W modelu Mertona wycenić trzyletnią obligację kuponową o kuponach po 10 i wypłacie końcowej 100. Przyjąć $a = 0.01$, $\sigma = 0.01$ i $r(0) = 0.01$.

10.8 Model Vasička

Model Mertona jest prosty ale nierealistyczny bo pociąga za sobą nieograniczony wzrost stopy krótkiej r. Model

$$\mathrm{d}r(t) = (a - br(t))\mathrm{d}t - \sigma \mathrm{d}W^*(t),$$

zaproponowany przez Vasička w 1977 ma cechę *powrotu do średniej* (z ang. *mean reversion*). Występują w nim trzy parametry $a, b, \sigma > 0$. Czynnik $-br$ powoduje, że r jest ściągane do wartości "średniej" $\frac{a}{b}$, tym silniej im r jest od nich oddalone. Formuła Feynmana–Kaca prowadzi do następującego rezultatu.

Twierdzenie 10.8 *W modelu Vasička*

$$B(t,T) = \exp\left\{-r(t)\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b} - a\int_t^T \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b}\mathrm{d}u \right.$$
$$\left. +\frac{\sigma^2}{2}\int_t^T \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b}\right)^2 \mathrm{d}u\right\}.$$

W szczególności

$$B(0,T) = \exp\left\{-r(0)\frac{1-\mathrm{e}^{-bT}}{b} - a\int_0^T \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b}\mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^T \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b}\right)^2 \mathrm{d}t\right\}.$$

Dowód. Po pierwsze musimy podać wzór na r. Ze wzoru na uzmiennianie stałych otrzymujemy

$$r(t) = \mathrm{e}^{-bt}r(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}a\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}\sigma\mathrm{d}W^*(s).$$

Stosując (10.2) otrzymujemy

$$B(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T \left(\mathrm{e}^{-bs}r(0) + \int_0^s \mathrm{e}^{-b(s-u)}a\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right\}Y,$$

gdzie

$$Y := \mathbb{E}^*\left(\exp\left\{\int_t^T\int_0^s \mathrm{e}^{-b(s-u)}\sigma\mathrm{d}W^*(u)\mathrm{d}s\right\}|\mathfrak{F}_t\right).$$

Następnie z twierdzenia Fubiniego

$$\int_t^T\int_0^s \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}W^*(u)\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^t\int_t^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s\mathrm{d}W^*(u) + \int_t^T\int_u^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s\mathrm{d}W^*(u).$$

Stąd

$$Y = \exp\left\{\sigma\int_0^t\int_t^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s\mathrm{d}W^*(u)\right\}\mathbb{E}^*\exp\left\{\sigma\int_t^T\int_u^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s\mathrm{d}W^*(u)\right\}$$
$$= \exp\left\{\sigma\int_0^t\int_t^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s\mathrm{d}W^*(u)\right\}\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}\int_t^T\left(\int_u^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}u\right\}.$$

Tak więc $B(t,T) = e^A$, gdzie

$$A := \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T\left(\int_u^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}u - \int_t^T\left(\mathrm{e}^{-bs}r(0) + \int_0^s \mathrm{e}^{-b(s-u)}a\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$
$$\sigma\int_0^t\int_t^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s\mathrm{d}W^*(u).$$

Oczywiście

$$\int_u^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s = \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b} \quad \text{oraz} \quad \int_t^T \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}s = \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b}\mathrm{e}^{-b(t-u)}.$$

Pozostało więc do wykazania, że

$$\begin{aligned}
-\left(e^{-bt}r(0) + \int_0^t a\mathrm{e}^{-b(t-s)}\mathrm{d}s\right)\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b} - a\int_t^T \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b}\mathrm{d}u \\
= -\int_t^T \left(\mathrm{e}^{-bs}r(0) + \int_0^s \mathrm{e}^{-b(s-u)}a\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\int_t^T e^{bs}r(0)\mathrm{d}s = e^{-bt}r(0)\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b}$$

więc wystarczy zauważyć, że

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}\mathrm{d}s\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b} + \int_t^T \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b}\mathrm{d}u = \int_t^T \int_0^s \mathrm{e}^{-b(s-u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}s. \qquad \square$$

Wniosek 10.4 *W modelu Vasička*

$$\begin{aligned}
&F^T(t,r) \\
&= \exp\left\{-r\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b} - a\int_t^T \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b}\mathrm{d}u + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b}\right)^2 \mathrm{d}u\right\}.
\end{aligned}$$

Zadanie 10.4 Policzyć rozkład $r(2)$ w modelu Vasička z parametrami $a = b = 1$ i $\sigma = 0.1$. Przyjąć $r(0) = 0.01$.

Zadanie 10.5 W modelu Vasička wyrazić stopy forward jako funkcje stopy krótkiej.

Zadanie 10.6 W modelu Vasička wycenić roczną obligację zerokuponową. Przyjąć $a = 0$, $r(0) = 0.01$, $\sigma = 0.1$ i $b = 1$.

10.8.1 Modele afiniczne

W modelach Mertona i Vasička ceny obligacji zapisujemy w postaci

$$B(t,T) = \mathrm{e}^{m(t,T)-n(t,T)r(t)},$$

gdzie $m(t,T)$ i $n(t,T)$ są deterministycznymi (znanymi) funkcjami. Mianowicie, dla modelu Mertona

$$
\begin{aligned}
n(t,T) &= T - t, \\
m(t,T) &= -a\int_t^T n(u,T)\mathrm{d}u + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T n(u,T)^2\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}a(T-t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3.
\end{aligned}
$$

Dla modelu Vasička

$$
\begin{aligned}
n(t,T) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b}, \\
m(t,T) &= -a\int_t^T n(u,T)\mathrm{d}u + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T n(u,T)^2\mathrm{d}u \\
&= -a\int_t^T \frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b}\mathrm{d}u + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-u)}}{b}\right)^2 \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Ogólnie modele, w których dla deterministycznych funkcji $m(t,T)$ i $n(t,T)$ zachodzi

$$
B(t,T) = \mathrm{e}^{m(t,T)-n(t,T)r(t)}
$$

noszą nazwę *afinicznych modeli struktury terminowej*. Ich zaletą jest względna prostota.

Z wymienionych w tabeli modeli również CIR jest afiniczny! Można pokazać, że dla modelu CIR

$$
m(t,T) = \frac{2a}{\sigma}\log\left(\frac{\mathrm{e}^{b\tau/2}}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{1}{2}b\sinh\gamma\tau}\right)
$$

oraz

$$
n(t,T) = \frac{\sinh\gamma\tau}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{1}{2}b\sinh\gamma\tau}.
$$

gdzie $\tau = T - t$ i $2\gamma = (b^2 + 2\sigma^2)^{1/2}$.

10.9 Model HJM w czasie ciągłym

W modelu HJM (Heath–Jarrow–Morton) podaje się dynamikę stopy forward dla wszystkich czasów zapadalności T zamiast tylko dynamiki stopy krótkiej. To podejście jest bardziej elastyczne ale też bardziej skomplikowane.

Przy prawdopodobieństwie rzeczywistym $\mathbb{P}$ dynamika stóp forward dana jest wzorem

$$
\mathrm{d}f(t,T) = \mu(t,T)\mathrm{d}t + \sigma(t,T)\mathrm{d}W(t),
$$

gdzie $W(t)$ jest procesem Wienera względem $\mathbb{P}$. W równaniu tym T traktowane jest jako parametr. Zapiszmy to równanie w postaci całkowej

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,T)\mathrm{d}W(s), \qquad 0 \le t \le T.$$

Zasadniczą kwestią jest podanie warunków na brak arbitrażu w modelu. W tym celu przyjmijmy oznaczenia

$$\tilde{\mu}(t,T) := \int_t^T \mu(t,u)\mathrm{d}u, \qquad 0 \le t \le T,$$
$$\tilde{\sigma}(t,T) := \int_t^T \sigma(t,u)\mathrm{d}u, \qquad 0 \le t \le T.$$

Twierdzenie 10.9 *Niech $\widehat{T} \in (0,+\infty)$ będzie maksymalnym momentem zapadalności. W modelu nie ma arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje mierzalny i adaptowany proces λ taki, że*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^{\widehat{T}} \lambda^2(t)\mathrm{d}t < +\infty\right) = 1,$$

$$\mathbb{E}\exp\left\{-\int_0^{\widehat{T}} \lambda(t)\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2}\int_0^{\widehat{T}} \lambda^2(t)\mathrm{d}t\right\} = 1 \tag{10.5}$$

oraz dla każdego $T \le \widehat{T}$,

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T)\left(\tilde{\sigma}(t,T) + \lambda(t)\right), \qquad \mathbb{P}\times\mathrm{d}t\text{-p.n. na } \Omega\times[0,T]. \tag{10.6}$$

Ponadto miara martyngałowa $\mathbb{P}^*$ dana jest wzorem

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^* = \exp\left\{-\int_0^{\widehat{T}} \lambda(t)\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2}\int_0^{\widehat{T}} \lambda^2(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\mathbb{P}. \tag{10.7}$$

Dowód. Przypomnijmy, patrz Twierdzenie 10.1, że ceny obligacji są powiązane ze stopami forward równaniem

$$B(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,u)\mathrm{d}u}, \qquad 0 \le t \le T \le T^*,$$

a rachunek bankowy (patrz Definicje 10.4 i 10.5) dany jest wzorem

$$B(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\int_0^t f(s,s)\mathrm{d}s}, \qquad 0 \le t.$$

Oczywiście stopa krótka $r(t) = f(t,t)$ dana jest wzorem

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \mu(s,t)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,t)\mathrm{d}W(s).$$

Zauważmy, że stopa krótka (zwykle) nie jest procesem Itô!

Dla ustalonego T niech $I_t^T := \log B(t,T)$. Zamieniając trochę niefrasobliwie kolejności całkowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I_t^T &= -\int_t^T f(t,u)\mathrm{d}u = -\int_t^T \left(f(0,u) + \int_0^t \mu(s,u)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,u)\mathrm{d}W(s) \right) \mathrm{d}u \\
&= -\int_t^T f(0,u)\mathrm{d}u - \int_0^t \int_t^T \mu(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u - \int_0^t \int_t^T \sigma(s,u)\mathrm{d}W(s)\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^T f(0,u)\mathrm{d}u + \int_0^t f(0,u)\mathrm{d}u - \int_0^t \int_s^T \mu(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \int_0^t \int_s^t \mu(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^t \int_s^T \sigma(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}W(s) + \int_0^t \int_s^t \sigma(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}W(s) \\
&= I_0^T - \int_0^t \tilde{\mu}(s,T)\mathrm{d}s - \int_0^t \tilde{\sigma}(s,T)\mathrm{d}W(s) \\
&\quad + \int_0^t f(0,u)\mathrm{d}u + \int_0^t \int_s^t \mu(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \int_0^t \int_s^t \sigma(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}W(s) \\
&= I_0^T - \int_0^t \tilde{\mu}(s,T)\mathrm{d}s - \int_0^t \tilde{\sigma}(s,T)\mathrm{d}W(s) + \int_0^t r(s)\mathrm{d}s \\
&= I_0^T + \int_0^t \left(-\tilde{\mu}(s,T) + r(s)\right)\mathrm{d}s - \int_0^t \tilde{\sigma}(s,T)\mathrm{d}W(s),
\end{aligned}$$

bo

$$\begin{aligned}
\int_0^t r(u)\mathrm{d}u &= \int_0^t f(0,u)\mathrm{d}u + \int_0^t \int_0^u \mu(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u + \int_0^t \int_0^u \sigma(s,u)\mathrm{d}W(s)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^t f(0,u)\mathrm{d}u + \int_0^t \int_s^t \mu(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \int_0^t \int_s^t \sigma(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}W(s).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\frac{B(t,T)}{B(t)} &= \mathrm{d}e^{I_t^T - \int_0^t r(s)\mathrm{d}s} = \mathrm{d}e^{I_0^T - \int_0^t \tilde{\mu}(s,T)\mathrm{d}s - \int_0^t \tilde{\sigma}(s,T)\mathrm{d}W(s)} \\
&= \frac{B(t,T)}{B(t)} \left[\left(-\tilde{\mu}(t,T) + \frac{1}{2}|\tilde{\sigma}(t,T)|^2 \right) \mathrm{d}t - \tilde{\sigma}(t,T)\mathrm{d}W(t) \right].
\end{aligned}$$

Czyli warunkiem na brak arbitrażu jest istnienie procesu adaptowanego, mierzalnego λ takiego, że zachodzi (10.5) oraz dla $T \le \widehat{T}$, $\mathbb{P} \times dt$-p.n. na $\Omega \times [0,T]$ zachodzi

$$-\tilde{\mu}(t,T) + \frac{1}{2}|\tilde{\sigma}(t,T)|^2 + \tilde{\sigma}(t,T)\lambda(t) = 0.$$

Istotnie, dla nowego procesu Wienera

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \lambda(t)\mathrm{d}t$$

mamy $\mathrm{d}W = \mathrm{d}W^* - \mathrm{d}\lambda$ i przy nowym szumie W^* dryf jest równy zero. Różniczkując po T otrzymujemy warunek (10.6). $\square$

Definicja 10.7 Warunek (10.6) występujący w twierdzeniu nazywamy *warunkiem HJM*. Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}^*$ dane wzorem (10.7) nazywamy *miarą martyngałową spot*.

Często miarę martyngałową spot oznaczamy przez $\mathbb{P}^*_s$ w odróżnieniu od miary martyngałowej forward $\mathbb{P}^*_{\widehat{T}}$, którą wprowadzimy nieco później.

Łatwo policzyć dynamiki: cen obligacji, stopy forward i stopy krótkiej w mierze martyngałowej spot. Dokładniej, mając dynamikę stopy forward w mierze rzeczywistej względem procesu Wienera W. Warunek braku arbitrażu implikuje istnienie procesu λ spełniającego (10.5) i (10.6). Definiujemy proces Wienera

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0, \widehat{T}],$$

względem miary spot $\mathbb{P}^*$ danej wzorem (10.7). Wówczas zachodzi następujący rezultat. Oczywiście wzory będą trochę krótsze gdy zastosujemy notacje

$$\tilde{\sigma}(t, T) = \int_t^T \sigma(t, s)\mathrm{d}s.$$

Twierdzenie 10.10 *Dla dowolnego* $0 \leq T \leq \widehat{T}$*, dynamiki: cen, stopy forward i stopy krótkiej dane są równaniami*

$$B(t, T) = B(0, T) + \int_0^t B(u, T)r(u)\mathrm{d}u - \int_0^t B(u, T) \int_u^T \sigma(u, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}W^*(u),$$

$$\mathrm{d}f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma(u, T) \int_u^T \sigma(u, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(u, T)\mathrm{d}W^*(u),$$

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma(u, t) \int_u^T \sigma(u, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(u, t)\mathrm{d}W^*(u).$$

Mając miarę martyngałową spot i stopę krótką możemy wyznaczyć ceny obligacji w modelu. Mianowicie

$$B(t, T) = B(t)\mathbb{E}^*\left(\frac{B(T, T)}{B(T)}|\mathfrak{F}_t\right).$$

Stąd

$$B(t, T) = \mathbb{E}^*\left(\frac{B(t)}{B(T)}|\mathfrak{F}_t\right) = \mathbb{E}^*\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}|\mathfrak{F}_t\right).$$

10.9.1 Miara martyngałowa forward-model HJM

Miara martyngałowa spot to miara, przy której zdyskontowany przez rachunek bankowy proces cen jest martyngałem. Przypomnijmy, patrz Rozdział 10.4, że można dyskontować cenami $B(t,\widehat{T})$, gdzie $\widehat{T}$ jest zadanym czasem zapadalności, traktując ten instrument jako tak zwany *numéraire*. Wówczas *Miara martyngałowa forward* do daty $\widehat{T}$, to prawdopodobieństwo $\mathbb{P}^*_{\widehat{T}}$ równoważne prawdopodobieństwu wyjściowemu $\mathbb{P}$, przy którym dla każdego $T \le \widehat{T}$, proces

$$F(t,T,\widehat{T}) := \frac{B(t,T)}{B(t,\widehat{T})}, \qquad 0 \le t \le T,$$

jest martyngałem.

Twierdzenie 10.11 *Niech $\widehat{T} \in (0,+\infty)$ będzie maksymalnym momentem zapadalności. Istnieje miara martyngałowa forward $\mathbb{P}^*_{\widehat{T}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje mierzalny i adaptowany proces h taki, że*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^{\widehat{T}} h^2(t)\mathrm{d}t < +\infty\right) = 1,$$

$$\mathbb{E}\exp\left\{-\int_0^{\widehat{T}} h(t)\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2}\int_0^{\widehat{T}} h^2(t)\mathrm{d}t\right\} = 1 \tag{10.8}$$

oraz dla każdego $T \le \widehat{T}$, $\mathbb{P}\times \mathrm{d}t$-p.n. na $\Omega \times [0,T]$ zachodzi

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T)\left(h(t) - \int_T^{\widehat{T}} \sigma(t,u)\mathrm{d}u\right). \tag{10.9}$$

Ponadto miara martyngałowa forward $\mathbb{P}^*_{\widehat{T}}$ dana jest wzorem

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^*_{\widehat{T}} = \exp\left\{-\int_0^{\widehat{T}} h(t)\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2}\int_0^{\widehat{T}} h^2(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\mathbb{P}. \tag{10.10}$$

Dowód. Niech $T \le \widehat{T}$. Jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia należy policzyć różniczkę stochastyczną procesu $F(t,T,\widehat{T})$, $t \in [0,T]$. Przypomnijmy (patrz dowód Twierdzenia 10.9), że dla dowolnego $I^T_t := \log B(t,T)$, ma następującą różniczkę stochastyczną

$$\mathrm{d}I^T_t = (-\tilde{\mu}(t,T) + r(t))\mathrm{d}t - \tilde{\sigma}(t,T)\mathrm{d}W(t).$$

Stąd

$$\log F(t,T,\widehat{T}) = \log B(t,T) - \log B(t,\widehat{T}) = I^T_t - I^{\widehat{T}}_t.$$

Tak więc ze wzoru Itô

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F(t,T,\widehat{T}) &= \mathrm{d}e^{I_t^T - I_t^{\widehat{T}}} \\
&= F(t,T,\widehat{T})\left(\mathrm{d}(I_t^T - I_t^{\widehat{T}}) + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}(t,T) - \tilde{\sigma}(t,\widehat{T}))\mathrm{d}t\right) \\
&= F(t,T,\widehat{T})\left(A(t,T,\widehat{T})\mathrm{d}t + \Sigma(t,T,\widehat{T})\mathrm{d}W(t)\right),
\end{aligned}$$

gdzie

$$\Sigma(t,T,\widehat{T}) := -\tilde{\sigma}(t,T) + \tilde{\sigma}(t,\widehat{T})$$

oraz

$$A(t,T) := -\tilde{\mu}(t,T) + \tilde{\mu}(t,\widehat{T}) + \frac{1}{2}\Sigma(t,T)^2.$$

Stąd, wprowadzając nowy proces Wienera

$$\mathrm{d}W^* = \mathrm{d}W + h\mathrm{d}t$$

lub równoważnie

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W^* - h\mathrm{d}t,$$

wnioskujemy, że musi istnieć proces h (niezależny od T) spełniający (10.8) oraz taki, że

$$A(t,T) - \Sigma(t,T)h(t) = 0.$$

Inaczej

$$\int_T^{\widehat{T}} \mu(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_T^{\widehat{T}} \sigma(t,u)\mathrm{d}u\right)^2 = \int_T^{\widehat{T}} \sigma(t,u)\mathrm{d}u h(t).$$

Różniczkując po T otrzymujemy

$$-\mu(t,T) - \int_T^{\widehat{T}} \sigma(t,u)\mathrm{d}u\sigma(t,T) = -\sigma(t,T)h(t),$$

czyli (10.9). $\square$

Uwaga 10.2 Warunki na brak arbitrażu (czyli istnienie miary martyngałowej spot) i na istnienie miary martyngałowej forward są "prawie" równoważne. Dokładnie, ze wzorów (10.6) i (10.9) dostajemy następujący związek między procesami λ i h:

$$\sigma(t,T)\left(-\int_T^{\widehat{T}} \sigma(t,u)\mathrm{d}u + h(t)\right) = \sigma(t,T)\left(\int_t^T \sigma(t,u)\mathrm{d}u + \lambda(t)\right).$$

Stąd wystarcza by

$$h(t) = \lambda(t) + \int_t^T \sigma(t,u)\mathrm{d}u + \int_T^{\widehat{T}} \sigma(t,u)\mathrm{d}u = \lambda(t) + \int_t^{\widehat{T}} \sigma(t,u)\mathrm{d}u.$$

Musimy jednak sprawdzić czy jeżeli λ spełnia (10.5), to h zdefiniowane powyżej spełnia (10.9) i odwrotnie! Z drugiej strony wiemy, patrz Twierdzenie 10.4, że miary spot i forward są równoważne.

10.9.2 HJM w praktyce

Stosowanie modelu HJM w praktyce wygląda następująco:

- Wyznaczyć $\sigma(t,T)$.
- Współczynnik dryfu przy mierze martyngałowej spot dany jest wzorem

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\tilde{\sigma}(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\mathrm{d}u.$$

- Zaobserwować wartości rynkowe (m od market) stóp forward $f^{\mathrm{m}}(0,T)$.
- Wyliczyć wartości $f(t,T)$ dla $0 \le t \le T$ z formuły

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f^{\mathrm{m}}(0,T) + \int_0^t \alpha(u,T)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(u,T)\mathrm{d}W^*(u) \\ &= f^{\mathrm{m}}(0,T) + \int_0^t \sigma(u,T)\tilde{\sigma}(u,T)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(u,T)\mathrm{d}W^*(u). \end{aligned}$$

- Wyliczyć wartości cen używając $B(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,u)\mathrm{d}u}$.
- Skalibrować wolatylność.

Zadanie 10.7 ***(Model Ho–Lee w czasie ciągłym)*** Przyjmijmy, że $\sigma(t,T)$ są stałe, to znaczy, że istnieje takie $\sigma > 0$, że

$$\sigma(t,T) = \sigma \qquad \text{dla } 0 \le t \le T.$$

Jakie są dynamiki stóp forward i cen obligacji?

Zadanie 10.8 W poprzednim zadaniu przyjąć $\sigma = 0.1$, $f(0,1) = 0.0804$ i $f(0,2) = 0.0809$. Jakie byłyby stopy forward $f(1,1)$ i $f(1,2)$ gdyby $W^*(1) = 0.5$?

10.10 Transakcje typu cap i floor

Bardzo popularnymi instrumentami finansowymi są transakcje *cap* i *floor*. Zakłada się, że dana jest rodzina dat $0 < T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ (z ang. *tenors*). Niech $\delta_j := T_j - T_{j-1}$ oznacza długość j-tego okresu rozliczeniowego. Zwykle $\delta = 1$ oznacza jeden rok. Stąd miesięczny okres rozliczeniowy odpowiada $\delta = 1/12$. Będziemy oznaczali przez $\mathbb{P}^*_s$ miarę martyngałową spot a przez $\mathbb{P}^*_{T_j}$ miarę martyngałową forward dla daty T_j.

Definicja 10.8 *Terminowa stopa LIBOR dla okresu rozliczeniowego* $[T_{j-1}, T_j]$ dana jest wzorem

$$L(t,T_{j-1}) = \frac{B(t,T_{j-1}) - B(t,T_j)}{\delta_j B(t,T_j)}, \qquad t \in [0,T_{j-1}].$$

Zauważmy, że stopa LIBOR w chwili t dla okresu rozliczeniowego $[T_{j-1}, T_j]$ to nic innego jak prosta stopa forward $L_p(t, T_{j-1}, T_j)$ na odcinku od T_{j-1} do T_j zakontraktowana w chwili t. Dokładniej jest to prosta stopa nominalna z transakcji na odcinku od T_{j-1} do T_j. Inwestor w chwili t wystawiaT_{j-1}-obligację i za $B(t, T_{j-1})$ kupuje

$$\frac{B(t, T_{j-1})}{B(t, T_j)}$$

T_j-obligacji. Zauważmy, że zachodzi wzór

$$1 + \delta_j L(t, T_{j-1}) = \frac{B(t, T_{j-1})}{B(t, T_j)}, \qquad t \in [0, T_{j-1}].$$

Niech $L(t_{j-1}) := L(t_{j-1}, t_{j-1})$. W kontrakcie *cap* na stopę procentową (z ang. *ceiling rate agreement*) dana jest *wartość nominalna* N_p (z ang. *nominal principal*) oraz *poziom wykonania* K (z ang. *strike level*). Wystawca opcji zobowiązuje się dokonywać na rzecz nabywcy płatności

$$C_j := (L(T_{j-1}) - K)^+ \delta_j N_p$$

w każdej chwili T_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. W kontrakcie *floor*, wypłata w chwili T_j wynosi

$$F_j := (K - L(T_{j-1}))^+ \delta_j N_p.$$

Składniki opcji cap lub floor nazywamy *capletami* lub *flooretami*. Oczywiscie j-ty caplet (flooret) jest równoważny opcji sprzedaży (kupna) obligacji zerokuponowej o wartości nominalnej $1 + K\delta_j$ i terminie wykupu T_j. Opcja ta ma datę wygaśnięcia T_{j-1} i cenę wykonania N_p.

Ceny FC_t i FF_t opcji cap i floor w chwili t dane są więc wzorami

$$FC_t = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}^* \left(\frac{B_t}{B_{T_j}} (L(T_{j-1}) - K)^+ \delta_j | \mathfrak{F}_t \right) N_p,$$

oraz

$$FF_t = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}^* \left(\frac{B_t}{B_{T_j}} (K - L(T_{j-1}))^+ \delta_j | \mathfrak{F}_t \right) N_p.$$

Mamy następujący parytet cap-floor

$$FC_t - FF_t = \sum_{j=1}^{n} \left(B(t, T_{j-1}) - (1 + K\delta_j) B(t, T_j) \right).$$

10.11 Modele rynkowe (lognormalne) stopy LIBOR

W lognormalnym modelu stóp terminowych LIBOR zakłada się, że w mierze martyngałowej forward $\mathbb{P}^*_{T_j}$, dynamika procesu L dana jest wzorem

$$\mathrm{d}L(t, T_{j-1}) = L(t, T_{j-1})\lambda(t, T_{j-1})\mathrm{d}W^{T_j}(t),$$

gdzie W^{T_j} jest procesem Wienera w mierze $\mathbb{P}^*_{T_j}$, a $\lambda(\cdot, T_{j-1})\colon [0, T_{j-1}] \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją. W modelu tym opcje cap i floor stają się opcjami kupna i sprzedaży w modelu Blacka–Scholesa. Stąd można stosować techniki wypracowane dla modelu BS. W szczególności mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.12 *W modelu lognormalnym stopy LIBOR*

$$FC_t = \sum_{j=1}^{n} \delta_j B(t, T_j) \left(L(t, T_{j-1})\Phi(e_1^j(t)) - K\Phi(e_2^j(t)) \right),$$

gdzie Φ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego,

$$e_{1,2}^j(t) = \frac{\log\left(L(t, T_{j-1})/K\right) \pm \frac{1}{2}v_j^2(t)}{v_j(t)},$$

$$v_j^2(t) = \int_t^{T_{j-1}} |\lambda(u, T_{j-1})|^2 \mathrm{d}u.$$

11

Modele na drzewach binarnych

W tym rozdziale rozważamy analogon modelu Coxa–Rossa–Rubinsteina (w skrócie CRR) dla cen obligacji. Przedstawimy modele cen obligacji w czasie dyskretnym na drzewach binarnych. Omówione zostaną warunki braku arbitrażu, modele Ho–Lee i HJM (Heath–Jarrow–Morton).

11.1 Drzewa binarne

Kroki w drzewie oznaczamy przez $t = 0, 1, 2, ..., T$ a długość przedziału czasowego przez τ. Dla danego węzła $\omega_t = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_t$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}$ oznaczamy przez $B(t, T; \omega_t)$ wartość w węźle ω_t ceny w chwili t obligacji o zapadalności w chwili $T \geq t$, przyjmując $\omega_0 = \emptyset$.

W przeciwieństwie do modelu CRR, mamy w każdym węźle (inną) liczbę aktywów

$$B(0, 1; \omega_0),\ B(0, 2; \omega_0),\ B(0, 3; \omega_0),\ ....\ B(0, T; \omega_0),$$

potem

$$B(1, 2; \omega_1),\ B(1, 3; \omega_1),\ ......\ B(1, T; \omega_1),$$

w przedostatnim $B(T-1, T; \omega_{T-1})$, a w ostatnim węźle mamy warunek końcowy $B(T, T; \omega_T) = 1$.

Jeśli $t < S$ to cena $B(t, S, \omega_t)$ może “wzrosnąć” do $B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u})$ lub “zmaleć” do $B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d})$. Zwykle ale nie zawsze! (patrz model HJM)

$$B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u}) > B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}).$$

Nie ma jednak powodów by $B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u}) > B(t, S; \omega_t)$.

Zauważmy, że zbiór zdarzeń elementarnych to $\Omega = \{\mathrm{d}, \mathrm{u}\}^T$. Ponadto ω_t to obcięcie $\omega \in \Omega$ do pierwszych t-wyrazów.

11.1.1 Przykładowe drzewo binarne

Przykładowe drzewo binarne dla $T = 3$ wygląda następująco:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \begin{array}{l} B(2,2;\mathrm{uu}) = 1 \\ B(2,3;\mathrm{uu}) \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} B(1,1;\mathrm{u}) = 1 \\ B(1,2;\mathrm{u}) \\ B(1,3;\mathrm{u}) \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} & \\
 & \nearrow & & & \begin{array}{l} B(2,2;\mathrm{ud}) = 1 \\ B(2,3;\mathrm{ud}) \end{array} \\
\begin{array}{l} B(0,0) = 1 \\ B(0,1) \\ B(0,2) \\ B(0,3) \end{array} & & & & \\
 & & & & \begin{array}{l} B(2,2;\mathrm{du}) = 1 \\ B(2,3;\mathrm{du}) \end{array} \\
 & \searrow & \begin{array}{l} B(1,1;\mathrm{d}) = 1 \\ B(1,2;\mathrm{d}) \\ B(1,3;\mathrm{d}) \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} & \\
 & & & & \begin{array}{l} B(2,2;\mathrm{dd}) = 1 \\ B(2,3;\mathrm{dd}). \end{array}
\end{array}
$$

11.1.2 Miary martyngałowe i brak arbitrażu

Pojęcie barku arbitrażu definiuje się w tak samo jak dla rynku akcji. Czyli arbitraż to istnienie strategii samofinansującej się, która z zerowego kapitału początkowego prowadzi w jakiejś chwili do zysku Z: $\mathbb{P}(Z \geq 0) = 1$ i $\mathbb{P}(Z > 0) > 0$.

Przypomnijmy, że $B(t)$ oznacza rachunek bankowy a $r(t)$ stopę krótką w chwili t.

Zadanie 11.1 Pokazać, że

$$r(t) = -\frac{\log B(t, t+1)}{\tau}, \qquad B(t) = \exp\left\{ \tau \sum_{u=0}^{t-1} r(u) \right\}. \tag{11.1}$$

Zdefiniujmy rodzinę liczb $p(t, S; \omega_t)$, $0 \leq t < t+1 < S$, w następujący sposób[1]

$$
\begin{aligned}
p(t, S; \omega_t) &:= \frac{B(t, S; \omega_t) - B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}) \mathrm{e}^{-\tau r(t;\omega_t)}}{B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u}) \mathrm{e}^{-\tau r(t;\omega_t)} - B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}) \mathrm{e}^{-\tau r(t;\omega_t)}} \\
&:= \frac{B(t, S; \omega_t) - B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}) B(t, t+1; \omega_t)}{B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u}) B(t, t+1; \omega_t) - B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}) B(t, t+1; \omega_t)}.
\end{aligned}
\tag{11.2}
$$

Twierdzenie 11.1 *Niech T będzie maksymalnym czasem wykupu obligacji w modelu. Niech $p(t, S; \omega_t)$ będą zdefiniowane wzorami* (11.2). *Wówczas w modelu nie ma arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy dla wszystkich t i $w_t \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}^t$ zachodzą warunki:*

$$p(t, t+2; \omega_t) = p(t, t+3; \omega_t) = \cdots = p(t, T-1; \omega_t). \tag{11.3}$$

---

[1] Symbolowi nieoznaczonemu $0/0$ przyporządkujemy dowolną wartość.

$$p(t,S;\omega_t) \in (0,1) \qquad \textit{dla każdego } S = t+2,\ldots,T-1. \tag{11.4}$$

Ponadto, jeżeli zachodzą powyższe warunki, to

$$p(t;\omega_t) := p(t,t+2;\omega_t) = \ldots = p(t,T-1;\omega_t) \tag{11.5}$$

jest warunkowym prawdopodobieństwem martyngałowym, że dla dowolnego $t+1 < S < T$*, cena* S*-obligacji w chwili* $t+1$ *będzie równa* $B(t+1,S;\omega_t\mathrm{u})$ *pod warunkiem, że w chwili* t *wynosiła ona* $B(t,S;\omega_t)$*.*

Dowód. Warunek na brak arbitrażu wyprowadza się tak samo jak dla rynku akcji, tutaj T-tym walorem jest po prostu obligacja o czasie zapadalności T. Fundamentalne prawo wyceny mówi, że brak arbitrażu jest równoważny istnieniu *miary martyngałowej* (z ang. *risk neutral probability*), to jest miary na $\Omega = \{\mathrm{u},\mathrm{d}\}^T$, przy której zdyskontowane ceny (wszystkich aktywów na rynku) są martyngałami. Dyskontowanie polega na dzieleniu procesu cen przez rachunek bankowy $B(t)$.

Niech $\mathbb{E}^*$ oznacza operator wartości oczekiwanej względem miary martyngałowej. Warunek braku arbitrażu ma postać

$$\mathbb{E}^*\left(\frac{B(t+1,S)}{B(t+1)}|\mathfrak{F}_t\right) = \frac{B(t,S)}{B(t)} \qquad \text{dla wszystkich } t+1 < S, \tag{11.6}$$

gdzie $\mathcal{F}_t$ jest σ-ciałem zbiorów, które zaszły do momentu t. Ze wzoru (11.1), $B(t+1)$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalne (stan naszego konta w chwili $t+1$ jest znany w chwili t). Stąd (11.6) ma postać

$$\mathbb{E}^*\left(B(t+1,S)|\mathcal{F}_t\right) = B(t,S)\frac{B(t+1)}{B(t)} = \mathrm{e}^{\tau r(t)}B(t,S) \qquad \text{dla } t+1 < S,$$

Niech dla zadanej ω_t, $p(t;\omega_t)$ oznacza warunkowe prawdopodobieństwo martyngałowe, że dla dowolnego $t+1 < S < T$, cena S-obligacji w chwili $t+1$ będzie równa $B(t+1,S;\omega_t\mathrm{u})$ pod warunkiem, że w chwili t wynosiła ona $B(t,S;\omega_t)$. Mamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^*\left(B(t+1,S)|\mathfrak{F}_t\right)(\omega_t)\\
&= p(t;\omega_t)B(t+1,S;\omega_t\mathrm{u}) + (1-p(t;\omega_t))\,B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d})\\
&= p(t;\omega_t)\left(B(t+1,S;\omega_t\mathrm{u}) - B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d})\right) + B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d}).
\end{aligned}$$

Tak więc (11.6) możemy zapisać w postaci

$$p(t;\omega_t) = \frac{B(t,S;\omega_t) - B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d})\mathrm{e}^{-\tau r(t;\omega_t)}}{B(t+1,S;\omega_t\mathrm{u})\mathrm{e}^{-\tau r(t;\omega_t)} - B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d})\mathrm{e}^{-\tau r(t;\omega_t)}}$$

dla wszystkich $t+1 < S$. $\square$

11.1.3 Przykład

$$
\begin{array}{llllll}
 & & & p(1;\mathrm{u}) & B(2,2;\mathrm{uu})=1 & \\
 & & B(1,1;\mathrm{u})=1 & \nearrow & B(2,3;\mathrm{uu}) & \to B(3,3;\mathrm{uu})=1 \\
 & p(0) & B(1,2;\mathrm{u}) & r(1;\mathrm{u}) & & \\
 & \nearrow & B(1,3;\mathrm{u}) & \searrow & B(2,2;\mathrm{ud})=1 & \\
 & & & 1-p(1;\mathrm{u}) & B(2,3;\mathrm{ud}) & \to B(3,3;\mathrm{ud})=1 \\
B(0,0)=1 & & & & & \\
B(0,1) & r(0) & & & & \\
B(0,2) & & & & & \\
B(0,3) & & & p(1;\mathrm{d}) & B(2,2;\mathrm{du})=1 & \\
 & \searrow & B(1,1;\mathrm{d})=1 & \nearrow & B(2,3;\mathrm{du}) & \to B(3,3;\mathrm{du})=1 \\
 & 1-p(0) & B(1,2;\mathrm{d}) & r(1;\mathrm{d}) & & \\
 & & B(1,3;\mathrm{d}) & \searrow & B(2,2;\mathrm{dd})=1 & \\
 & & & 1-p(1;\mathrm{d}) & B(2,3;\mathrm{dd}) & \to B(3,3;\mathrm{dd})=1.
\end{array}
$$

Zaobserwujmy, że ceny z najdłuższymi czasami wykupu wraz z stopami krótkimi (równoważnie z cenami z czasem do wykupu 1) jak poniżej

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & \nearrow & B(2,3;\mathrm{uu}) \to B(3,3;\mathrm{uu})=1 \\
 & & B(1,3;\mathrm{u}) & r(1;\mathrm{u}) & \\
 & \nearrow & & \searrow & B(2,3;\mathrm{ud}) \to B(3,3;\mathrm{ud})=1 \\
B(0,3) & r(0) & & & \\
 & \searrow & & \nearrow & B(2,3;\mathrm{du}) \to B(3,3;\mathrm{du})=1 \\
 & & B(1,3;\mathrm{d}) & r(1;\mathrm{d}) & \\
 & & & \searrow & B(2,3;\mathrm{dd}) \to B(3,3;\mathrm{dd})=1
\end{array}
$$

determinują wszystkie ceny $B(t,S)$ w dowolnych węzłach drzewa! Pozostałe ceny liczymy z warunku braku arbitrażu, przekształcając (11.2) do postaci

$$
\begin{aligned}
&B(t,S;\omega_t)\\
&=[p(t;\omega_t)B(t+1,S;\omega_t\mathrm{u})+(1-p(t;\omega_t))B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d})]\,\mathrm{e}^{-\tau r(t;\omega_t)}.
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

Zadanie 11.2 Uzupełnij drzewo cen, w którym $\tau=\frac{1}{12}$, $T=3$ oraz ceny dla obligacji z czasem wykupu 3 są następujące

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & \nearrow & B(2,3;\mathrm{uu})=0.989 \\
 & & B(1,3;\mathrm{u})=0.908 & r(1;\mathrm{u})=2\% & \\
 & \nearrow & & \searrow & B(2,3;\mathrm{ud})=0.89 \\
B(0,3)=0.87 & r(0)=4\% & & & \\
 & \searrow & & \nearrow & B(2,3;\mathrm{du})=0.985 \\
 & & B(1,3;\mathrm{d})=0.85 & r(1;\mathrm{d})=4\% & \\
 & & & \searrow & B(2,3;\mathrm{dd})=0.85.
\end{array}
$$

Odpowiedź Najpierw, używając (11.7), liczymy $p(t)$ i $q(t)=1-p(t)$. Mamy

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & p(1;\mathrm{u})=0.1971 & B(2,3;\mathrm{uu})=0.989 \\
 & & & \nearrow & \\
 & p(0)=0.3949 & B(1,3;\mathrm{u})=0.908 & r(1;\mathrm{u})=2\% & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & q(1;\mathrm{u})=0.8029 & B(2,3;\mathrm{ud})=0.89 \\
B(0,3)=0.87 & r(0)=4\% & & & \\
 & & & p(1;\mathrm{d})=0.0210 & B(2,3;\mathrm{du})=0.985 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & q(0)=0.6051 & B(1,3;\mathrm{d})=0.85 & r(1;\mathrm{d})=4\% & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & q(1;\mathrm{d})=0.9790 & B(2,3;\mathrm{dd})=0.85.
\end{array}
$$

Następnie, znowu z (11.7), liczymy ceny (dla $t = 2$) korzystając z faktu, że $B(2.2) = 1$ (liczymy wstecz!) otrzymując

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & p(1;\mathrm{u}) = 0.1971 & B(2,2;\mathrm{uu}) = 1 \\
 & & & \nearrow & B(2,3;\mathrm{uu}) = 0.989 \\
 & p(0) = 0.3949 & \begin{array}{l} B(1,2;\mathrm{u}) = 0.9983 \\ B(1,3;\mathrm{u}) = 0.908 \end{array} & r(1;\mathrm{u}) = 2\% & \\
 & \nearrow & & \searrow & B(2,2;\mathrm{ud}) = 1 \\
\begin{array}{l} B(0,2) = 0.994 \\ B(0,3) = 0.87 \end{array} & r(0) = 4\% & & q(1;\mathrm{u}) = 0.8029 & B(2,3;\mathrm{ud}) = 0.89 \\
 & & & p(1;\mathrm{d}) = 0.0210 & B(2,2;\mathrm{du}) = 1 \\
 & \searrow & & \nearrow & B(2,3;\mathrm{du}) = 0.985 \\
 & q(0) = 0.6050 & \begin{array}{l} B(1,2;\mathrm{d}) = 0.9967 \\ B(1,3;\mathrm{d}) = 0.85 \end{array} & r(1;\mathrm{d}) = 4\% & \\
 & & & \searrow & B(2,2;\mathrm{dd}) = 1 \\
 & & & q(1;\mathrm{d}) = 0.9790 & B(2,3;\mathrm{dd}) = 0.85.
\end{array}
$$

Pozostało nam uzupełnienienie pierwszej kolumny ($t = 1$). Znowu, korzystamy z (11.7) oraz z faktu, że $B(1,1) = 1$. Idąc w tył po drzewie otrzymujemy

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & p(1;\mathrm{u}) = 0.1971 & B(2,2;\mathrm{uu}) = 1 \\
 & & B(1,1;\mathrm{u}) = 1 & \nearrow & B(2,3;\mathrm{uu}) = 0.989 \\
 & p(0) = 0.3949 & B(1,2;\mathrm{u}) = 0.9983 & r(1;\mathrm{u}) = 2\% & \\
 & \nearrow & B(1,3;\mathrm{u}) = 0.908 & \searrow & B(2,2;\mathrm{ud}) = 1 \\
B(0,1) = 0.9967 & & & q(1;\mathrm{u}) = 0.8029 & B(2,3;\mathrm{ud}) = 0.89 \\
B(0,2) = 0.9940 & r(0) = 4\% & & & \\
B(0,3) = 0.87 & & & p(1;\mathrm{d}) = 0.0210 & B(2,2;\mathrm{du}) = 1 \\
 & \searrow & B(1,1;\mathrm{d}) = 1 & \nearrow & B(2,3;\mathrm{du}) = 0.985 \\
 & q(0) = 0.6051 & B(1,2;\mathrm{d}) = 0.9967 & r(1;\mathrm{d}) = 4\% & \\
 & & B(1,3;\mathrm{d}) = 0.85 & \searrow & B(2,2;\mathrm{dd}) = 1 \\
 & & & q(1;\mathrm{d}) = 0.9790 & B(2,3;\mathrm{dd}) = 0.85.
\end{array}
$$

■

11.1.4 Arbitraż i strategie arbitrażowe

Aby wykryć arbitraż musimy policzyć $p(t, S; \omega)$ dane wzorem (11.2), na każdej gałęzi używając różnych czasów wykupu $S = t + 2, \ldots, T - 1$.

Poniżej uwzględnimy parametr S w $p(t, S; \omega_t)$ by zaznaczyć, że prawdopodobieństwo było policzone dla czasu wykupu S. Wiemy, że brak arbitrażu oznacza, iż p nie zależy od S oraz $p \in (0, 1)$ czyli, że zachodzą warunki (11.3) i (11.4).

Jeśli (11.2) prowadzi do wartości $p(t, S; \omega_t)$, dla których nie zachodzą (11.3) lub (11.4) to oczywiscie w modelu występuje arbitraż!

Przeanalizujmy teraz możliwe scienariusze występowania arbitrażu.

Piewsza możliwość Załóżmy, że dla jakichś $0 \le t < t+2 \le S$ i ω_t, zachodzi $p := p(t, S; \omega_t) \ge 1$ lub $p(t, S; \omega_t) \le 0$. Wtedy (11.2) prowadzi do oszacowań

$$B(t, S; \omega_t)\mathrm{e}^{\tau r(t;\omega_t)} \ge B(t+1, S; \omega_t\mathrm{u}) > B(t+1, S; \omega_t\mathrm{d}),$$

gdy $p \ge 1$ i $B(t+1, S; \omega_t\mathrm{u}) > B(t+1, S; \omega_t\mathrm{u})$,

$$B(t, S; \omega_t)\mathrm{e}^{\tau r(t;\omega_t)} \le B(t+1, S; \omega_t\mathrm{u}) < B(t+1, S; \omega_t\mathrm{d}),$$

gdy $p \ge 1$ i $B(t+1, S; \omega_t\mathrm{u}) < B(t+1, S; \omega_t\mathrm{d})$,

$$B(t, S; \omega_t)\mathrm{e}^{\tau r(t;\omega_t)} \le B(t+1, S; \omega_t\mathrm{d}) < B(t+1, S; \omega_t\mathrm{d}),$$

gdy $p \leq 0$ i $B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}) < B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u})$,

$$B(t, S; \omega_t)\mathrm{e}^{\tau r(t;\omega_t)} \geq B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}) > B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u}),$$

gdy $p \leq 0$ i $B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}) > B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u})$.

Stąd albo

$$B(t, S; \omega_t)\mathrm{e}^{\tau r(t;\omega_t)} \leq \min \{B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}), B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u})\} \tag{11.8}$$

albo

$$B(t, S; \omega_t)\mathrm{e}^{\tau r(t;\omega_t)} \geq \max \{B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}), B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u})\}. \tag{11.9}$$

Zauważmy, że (11.8) oznacza, iż cena w chwili t, S-obligacji jest niedoszacowana i powinniśmy grać na wzrost ceny S-obligacji. Strategia arbitrażowa polega więc na wzięciu w chwili t pożyczki na jedną (a najlepiej na tyle ile się da) S-obligację. W chwili $t+1$ sprzedajemy naszą obligację. Niezależnie od tego czy nastąpił scenariusz d czy u kwota uzyskana ze sprzedaży pozwala na spłatę długu i daje zysk gdy w formule występuje ostra nierówność z prawdopodobieństwem 1, a gdy równość z niezerowym prawdopodobieństwem, o ile

$$B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u}) \neq B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}).$$

Natomiast gdy zachodzi (11.9), to znaczy, że cena w chwili t, S-obligacji jest przeszacowana i powinniśmy grać na spadek jej ceny. Strategia arbitrażowa polega więc na wystawieniu w chwili t jednej (a najlepiej tylu ile da się sprzedać) S-obligacji i ulokowaniu kwoty uzyskanej za jej sprzedaż na rachunku bankowym. Bilans jest następujący: w chwili t uzyskujemy ze sprzedaży $B(t, S; \omega_t)$. Lokujemy $B(t, S; \omega_t)$ w banku uzyskując w chwili $t+1$ kwotę

$$B(t, S; \omega_t)\mathrm{e}^{\tau r(t;\omega_t)}.$$

Kwota ta pozwala na spłatę długu i daje zysk gdy w formule występuje ostra nierówność z prawdopodobieństwem 1, a gdy równość z niezerowym prawdopodobieństwem.

Druga możliwość Istnieją t, ω_t oraz dwa czasy wykupu $S_1 < S_2$, takie, że

$$p(t, S_1; \omega_t) \neq p(t, S_2; \omega_t).$$

Aby skrócić zapis będziemy pomijali czynnik ω_t. Załóżmy, że $p(t, S_1) < p(t, S_2)$ oraz

$$B(t+1, S_1; \mathrm{u}) > B(t+1, S_1; \mathrm{d}) \quad \text{i} \quad B(t+1, S_2; \mathrm{u}) > B(t+1, S_2; \mathrm{d}).$$

Analiza pozostałych przypadków może być przeprowadzona w podobny sposób.

Znalezienie strategii arbitrażowej zaczniemy od utworzenia w chwili t i węźle ω_t portfela obligacji o czasach wykupu S_2 i $t+1$ replikującego w chwili $t+1$ ceny obligacji o czasie wykupu S_1. Szukamy więc x i y takich, że

$$xB(t+1,S_2;\mathrm{u}) + yB(t+1,t+1) = B(t+1,S_1;\mathrm{u}),$$
$$xB(t+1,S_2;\mathrm{d}) + yB(t+1,t+1) = B(t+1,S_1;\mathrm{d}).$$

Oczywiście $B(t+1,t+1) = 1$. Stąd

$$x = \frac{B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})}{B(t+1,S_2;\mathrm{u}) - B(t+1,S_2;\mathrm{u})}$$

oraz

$$y = B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - \frac{B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})}{B(t+1,S_2;\mathrm{u}) - B(t+1,S_2;\mathrm{u})} B(t+1,S_2;\mathrm{u}).$$

W chwili t wartość portfela wynosi

$$xB(t,S_2) + yB(t,t+1)$$

a w chwili $t+1$ jest równa $B(t+1,S_1)$. Oczywiście w przypadku braku arbitrażu powinno być

$$xB(t,S_2) + yB(t,t+1) = B(t,S_1).$$

Istotnie, gdyby

$$xB(t,S_2) + yB(t,t+1) < B(t,S_1),$$

to arbitraż uzyskamy sprzedając w chwili t jedną obligację o czasie wykupu S_1 i tworząc portfel x obligacji o czasie wykupu S_2 oraz y obligacji o czasie wykupu $t+1$. W chwili $t+1$ jesteśmy w stanie spłacić nasz dług uzyskując dochód

$$B(t,S_1) - xB(t,S_2) - yB(t,t+1).$$

Podobnie, gdyby

$$xB(t,S_2) + yB(t,t+1) > B(t,S_1),$$

to arbitraż uzyskamy sprzedając portfel x obligacji o czasie wykupu S_2 i y obligacji o czasie wykupu $t+1$, kupując jedną obligację o czasie wykupu S_1. Znowu w czasie $t+1$ sprzedaż posiadanej S_1-obligacji umożliwia nam spłatę długu i uzyskanie zysku

$$xB(t,S_2) + yB(t,t+1) - B(t,S_1).$$

Pozostaje więc do rozstrzygnięcia czy $p(t,S_1) \neq p(t,S_2)$ implikuje

$$xB(t,S_2) + yB(t,t+1) \neq B(t,S_1).$$

Czyli, czy z faktu, że

$$\frac{B(t,S_1) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})B(t,t+1)}{B(t+1,S_1;\mathrm{u})B(t,t+1) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})B(t,t+1)}$$
$$\neq \frac{B(t,S_2) - B(t+1,S_2;\mathrm{d})B(t,t+1)}{B(t+1,S_2;\mathrm{u})B(t,t+1) - B(t+1,S_2;\mathrm{d})B(t,t+1)}$$

wynika

$$\begin{aligned}&\frac{B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})}{B(t+1,S_2;\mathrm{u}) - B(t+1,S_2;\mathrm{u})}B(t,S_2)\\ &+\left(B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - \frac{B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})}{B(t+1,S_2;\mathrm{u}) - B(t+1,S_2;\mathrm{u})}B(t+1,S_2;\mathrm{u})\right)B(t,t{+}1)\\ &\neq B(t,S_1).\end{aligned}$$

Mnożąc obie strony pierwszej nierówności przez $B(t,t+1)$ otrzymujemy, że jest ona równoważna nierówności

$$\begin{aligned}&\frac{B(t,S_1) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})B(t,t+1)}{B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})}\\ &\neq \frac{B(t,S_2) - B(t+1,S_2\mathrm{d})B(t,t+1)}{B(t+1,S_2\mathrm{u}) - B(t+1,S_2\mathrm{d})},\end{aligned} \tag{11.10}$$

którą możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}&\frac{B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})}{B(t+1,S_2;\mathrm{u}) - B(t+1,S_2;\mathrm{u})}\left(B(t,S_2) - B(t+1,S_2;\mathrm{u})B(t,t+1)\right)\\ &\neq B(t,S_1) - B(t+1,S_1;\mathrm{u})B(t,t+1).\end{aligned}$$

Czyli, że

$$\begin{aligned}&\frac{B(t+1,S_1;\mathrm{u}) - B(t+1,S_1;\mathrm{d})}{B(t+1,S_2;\mathrm{u}) - B(t+1,S_2;\mathrm{u})}\\ &\neq \frac{B(t,S_1) - B(t+1,S_1;\mathrm{u})B(t,t+1)}{B(t,S_2) - B(t+1,S_2;\mathrm{u})B(t,t+1)}.\end{aligned} \tag{11.11}$$

Oczywiście (11.10) jest równoważne (11.11). W pewnym sensie powtórzyliśmy dowód fundamentalnego twierdzenia wyceny!

11.1.5 Zadania

Zadanie 11.3 Czy w następującym modelu występuje arbitraż?

$$\begin{array}{lllll}
 & & \begin{array}{l}B(1,2;\mathrm{u}) = 0.996\\ B(1,3;\mathrm{u}) = 0.987\end{array} & \begin{array}{l}\nearrow\\ \searrow\end{array} & \begin{array}{l}B(2,3;\mathrm{uu}) = 0.9997\\ B(2,3;\mathrm{ud}) = 0.967\end{array}\\
\begin{array}{l}B(0,1) = 0.991\\ B(0,2) = 0.987\\ B(0,3) = 0.945\end{array} & \begin{array}{l}\nearrow\\ \\ \searrow\end{array} & & & \\
 & & \begin{array}{l}B(1,2;\mathrm{d}) = 0.968\\ B(1,3;\mathrm{d}) = 0.95.\end{array} & \begin{array}{l}\nearrow\\ \searrow\end{array} & \begin{array}{l}B(2,3;\mathrm{du}) = 0.989\\ B(2,3;\mathrm{dd}) = 0.978.\end{array}
\end{array}$$

Jaka jest strategia arbitrażowa?

Odpowiedź Musimy policzyć prawdopodobieństwa $p(t, S)$. Dla $t = 0$ są dwie obligacje o czasach wykupu > 1. Wyliczamy $p(0, 2)$ i $p(0, 3)$ z (11.2). Dla $t = 1$ jest tylko jedna obligacja o czasie wykupu > 2. Do policzenia są $p(1, 3; \mathrm{u})$ i $p(1, 3; \mathrm{d})$. Przyjmujemy

$$q(t, S; \omega_t) = 1 - p(t, S; \omega_t),$$

$$\begin{array}{lllll}
 & p(0,2) = 0.9987 & & p(1,3;\mathrm{u}) = 0.7328 & B(2,3;\mathrm{uu}) = 0.9997 \\
 & p(0,3) = 0.0968 & B(1,2;\mathrm{u}) = 0.996 \nearrow & & \\
 & \nearrow & B(1,3;\mathrm{u}) = 0.987 \searrow & & \\
B(0,1) = 0.991 & & & q(1,3;\mathrm{u}) = 1 - 0.7328 & B(2,3;\mathrm{ud}) = 0.967 \\
B(0,2) = 0.987 & & & & \\
B(0,3) = 0.945 & & & p(1,3;\mathrm{d}) = 0.3095 & B(2,3;\mathrm{du}) = 0.989 \\
 & \searrow & B(1,2;\mathrm{d}) = 0.968 \nearrow & & \\
 & q(0,2) = 1 - 0.9987 & B(1,3;\mathrm{d}) = 0.95 \searrow & & \\
 & q(0,3) = 1 - 0.0968 & & q(1,3;\mathrm{d}) = 1 - 0.3095 & B(2,3;\mathrm{dd}) = 0.978.
\end{array}$$

Ponieważ $p(0, 2) \neq p(0, 3)$ w modelu występuje arbitraż.

Jaka jest strategia arbitrażowa? W naszej konkretnej sytuacji przeprowadzimy rozumowanie takie jak w analizie "Drugiej możliwości" z Rozdziału 11.1.4. Mianowicie, rozważmy portfel x obligacji o czasie wykupu 3 i y o czasie wykupu 1. Na x, y mamy układ równań

$$\begin{aligned} xB(1, 3; \mathrm{u}) + yB(1, 1) &= B(1, 2; \mathrm{u}), \\ xB(1, 3; \mathrm{d}) + yB(1, 1) &= B(1, 2; \mathrm{d}). \end{aligned}$$

Wartość portfela w chwili 0 jest

$$xB(0, 3) + yB(0, 1).$$

Wartość ta powinna wynosić $B(0, 2)$. Istotnie jeżeli

$$xB(0, 3) + yB(0, 1) < B(0, 2),$$

to arbitraż uzyskamy sprzedając w chwili 0 jedną obligację o czasie wykupu 2 i tworząc portfel x obligacji o czasie wykupu 3 oraz y obligacji o czasie wykupu 1. Nasz portfel umożliwia spłatę obligacji o czasie wykupu 2 w chwili 1. Nasz zysk wynosi

$$B(0, 2) - xB(0, 3) - yB(0, 1) > 0.$$

Gdy

$$xB(0, 3) + yB(0, 1) > B(0, 2),$$

to strategia arbitrażowa jest następująca: sprzedajemy portfel x obligacji o czasie wykupu 3 i y obligacji o czasie wykupu 1. Za otrzymane pieniądze kupujemy jedną obligację o czasie wykupu 2. W chwili 1 spłacamy nasz dług sprzedając obligację o czasie wykupu 2.

Dla naszych danych sytuacja jest następująca:

$$\begin{aligned} 0.987x + y &= 0.996, \\ 0.95x + y &= 0.968. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest

$$x = 0.7568, \quad y = 0.2491.$$

Wartość portfela w chwili 0 złożonego z $x = 0.7568$ obligacji o czasie wykupu 3 i $y = 0.3095$ obligacji o czasie wykupu 1 wynosi

$$0.945x + 0.991y = 0.945 \times 0.7568 + 0.991 \times 0.2491 = 0.962.$$

Wartość ta jest mniejsza niż $B(0, 2) = 0.987$. Tak więc strategia arbitrażowa jest następująca: w chwili 0:

- kupić 0.7568 obligacji o czasie wykupu 3,
- kupić 0.2491 obligacji o czasie wykupu 1,
- sprzedać 1 obligację o czasie wykupu 2.
- Bilans w chwili 0 jest następujący:

$$-0.7568 \times 0.945 - 0.2491 \times 0.991 + 1 \times 0.987 \approx 0.025.$$

- W chwili 1 zamknąć pozycję.

■

Zadanie 11.4 Czy w następującym modelu cen

$$\begin{array}{llllll}
 & & & p(1,3) = 0.799 & B(2,3) = 0.91650 \\
 & p(0,2) = 0.750 & & \nearrow & \\
 & p(0,3) = 0.750 & B(1,2) = 0.89760 & & \\
 & \nearrow & B(1,3) = 0.81960 & \searrow & \\
B(0,1) = 0.91090 & & & q(1,3) = 0.201 & B(2,3) = 0.89960 \\
B(0,2) = 0.82256 & & & & \\
B(0,3) = 0.75470 & & & & \\
 & \searrow & & p(1,3) = -0.411 & B(2,3) = 0.90540 \\
 & & B(1,2) = 0.91930 & \nearrow & \\
 & q(0,2) = 0.250 & B(1,3) = 0.85530 & \searrow & \\
 & q(0,3) = 0.250 & & q(1,3) = 1.411 & B(2,3) = 0.92310
\end{array}$$

występuje arbitraż? Jaka jest strategia arbitrażowa?

Odpowiedź W modelu występuje arbitraż bo $p(1, 3; \mathrm{d}) < 0$. Pokażemy, że $B(1, 2; \mathrm{d})$ jest niedowartościowane względem $B(1, 3; \mathrm{d})$. Strategia arbitrażowa jest następująca: w chwili 1, w węźle d kupić obligację o czasie wykupu 2 i sprzedać obligację o czasie wykupu 3. Na koniec zamknąć pozycję w chwili 2.

Dokładniej w chwili $t = 1$ w węźle d:

- kupujemy 1 obligację o czasie wykupu 2,
- sprzedajemy

$$\frac{B(1,2)}{B(1,3)} = \frac{0.91930}{0.85530} = 1.0748$$

  obligacji o zapadalności w chwili 3.
- Bilans w chwili $t = 1$ jest następujący:

$$-1 \times 0.91930 + 1.0748 \times 0.85530 = 0.$$

W chwili 2 w węźle du zamykamy pozycję:

- otrzymując wypłatę końcową 1 z obligacji o czasie wykupu 2,
- spłacając 1.0748 obligacji o czasie wykupu 3.
- Bilans jest następujący

$$1 \times 1 - 1.0748 \times 0.90540 = 0.027238.$$

W chwili 2 w węźle dd również zamykamy pozycję:

- otrzymując wypłatę końcową 1 z obligacji o czasie wykupu 2,
- spłacając 1.0748 obligacji o czasie wykupu 3.
- Bilans jest następujący

$$1 \times 1 - 1.0748 \times 0.92310 = 0.0078267.$$

■

11.2 Model Ho–Lee

Model ten jest odpowiednikiem modelu Coxa–Rossa–Rubinsteina cen akcji. Został zbudowany w 1986 i jest uznany jako pierwszy poważny model struktury terminowej.

11.2.1 Założenia modelu

Model Ho–Lee (HL) jest oparty na drzewie binarnym "*rekombinowanym*", to znaczy takim, w którym ceny obligacji nie zależą od całej ścieżki ale od liczby wzrostów i spadków.

Jeśli ceny są deterministyczne to, patrz Twierdzenie 10.1 i Wniosek 10.1, istnieje r takie, że

$$B(t, S) = \mathrm{e}^{-r(S-t)}$$

dla $t \leq S \leq T$. Stąd

$$B(t+1, S) = \mathrm{e}^{-r(S-t-1)} = \mathrm{e}^{-r(S-t)}\mathrm{e}^{r} = \frac{B(t, S)}{B(t, t+1)}.$$

Ho i Lee przyjęli, że

$$B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u}) = \frac{B(t, S; \omega_t)}{B(t, t+1; \omega_t)} h(S - (t+1); \mathrm{u}),$$
$$B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d}) = \frac{B(t, S; \omega_t)}{B(t, t+1; \omega_t)} h(S - (t+1); \mathrm{d}),$$

gdzie $h(\cdot; \mathrm{u})$ i $h(\cdot; \mathrm{d})$ są pewnymi mnożnikami (z ang. "*perturbation factors*") zależnymi od czasu do wykupu $S - (t+1)$. Będą one wyliczone później.

Wyrażenia

$$\frac{h(S-(t+1);\mathrm{u})}{B(t,t+1;\omega_t)}$$

i

$$\frac{h(S-(t+1);\mathrm{d})}{B(t,t+1;\omega_t)}$$

w modelu HL odpowiadają wyrażeniom $1+U$ i $1+R$ w modelu CRR. W przeciwieństwie do CRR zależą one od czasu t i czasu wykupu S.

11.2.2 Postać mnożników

Naszym celem jest wyznaczenie $h(\cdot;\mathrm{u})$ i $h(\cdot;\mathrm{d})$. Oczywiście $B(S,S)=1$ implikuje

$$h(0;\mathrm{u})=h(0;\mathrm{d})=1.$$

Istotnie niech $t+1=S$. Wstawiając do wzoru otrzymujemy

$$1=B(t+1,S;\omega_t\mathrm{u})=\frac{B(t,S;\omega_t)}{B(t,S;\omega_t)}h(0;\mathrm{u})=h(0;\mathrm{u}).$$

Podobnie

$$1=B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d})=\frac{B(t,S;\omega_t)}{B(t,S;\omega_t)}h(0;\mathrm{d})=h(0;\mathrm{d}).$$

Następne wyliczenia polegają na użyciu zasady braku arbitrażu. Z warunku braku arbitrażu wynika istnienie miary probabilistycznej, przy której wszystkie procesy zdyskontowanych cen są martyngałami. Przypomnijmy, patrz Twierdzenie 11.1, że warunkiem braku arbitrażu jest istnienie $p=p(t,w_t)\in(0,1)$ takiego, że dla każdego $S\geq t+2$,

$$B(t,S;\omega_t)=B(t,t+1;\omega_t)\left[pB(t+1,S;\omega_t\mathrm{u})+(1-p)B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d})\right],$$

co, po wstawieniu dynamiki cen daje warunek

$$1=ph(t+1,S;\mathrm{u})+(1-p)h(t+1,S;\mathrm{d})$$

dla $t<S$. Dodatkowo zakładamy, że p jest stałe (nie zależy od t, ω_t i S).

Następnie zakładamy, że drzewo jest rekombinowane, co znaczy, że cena po drodze ud jest taka sama jak po du. Czyli, że

$$B(t+2,S;\omega_t\mathrm{ud})=B(t+2,S;\omega_t\mathrm{du}).$$

Lewa (potem prawa) strona występujące w powyższej równości są równe

$$\begin{aligned}B(t+2,S;\omega_t\mathrm{ud})&=\frac{B(t+1,S;\omega_t\mathrm{u})h(S-(t+2);\mathrm{d})}{B(t+1,t+2;\omega_t\mathrm{u})}\\&=\frac{B(t,S;\omega_t)h(S-(t+1);\mathrm{u})h(S-(t+2);\mathrm{d})}{B(t,t+2;\omega_t)h(1;\mathrm{u})},\\B(t+2,S;\omega_t\mathrm{du})&=\frac{B(t+1,S;\omega_t\mathrm{d})h(S-(t+2);\mathrm{u})}{B(t+1,t+2;\omega_t\mathrm{d})}\\&=\frac{B(t,S;\omega_t)h(S-(t+1);\mathrm{d})h(S-(t+2);\mathrm{u})}{B(t,t+2;\omega_t)h(1;\mathrm{d})}.\end{aligned}$$

A więc dla $S \geq t+2$, mamy

$$\frac{h(S-(t+1);\mathrm{u})h(S-(t+2);\mathrm{d})}{h(1;\mathrm{u})} = \frac{h(S-(t+1);\mathrm{d})h(S-(t+2);\mathrm{u})}{h(1;\mathrm{d})}.$$

Reasumując

$$ph(n;\mathrm{u}) + (1-p)h(n;\mathrm{d}) = 1, \tag{11.12}$$

$$\frac{h(n+1;\mathrm{d})}{h(n+1;\mathrm{u})} = \frac{h(n;\mathrm{d})}{h(n;\mathrm{u})}\frac{h(1;\mathrm{d})}{h(1;\mathrm{u})} \tag{11.13}$$

dla dowolnych $n = 0, 1, 2, \ldots$. Kładąc $\delta = \frac{h(1;\mathrm{d})}{h(1;\mathrm{u})}$ wnioskujemy z (11.13), że

$$\frac{h(n;\mathrm{d})}{h(n;\mathrm{u})} = \delta^n,$$

a z (11.12) wnioskujemy

$$h(n;\mathrm{d}) = \frac{\delta^n}{(1-p)\delta^n + p}, \quad h(n;\mathrm{u}) = \frac{1}{(1-p)\delta^n + p}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

11.2.3 Ceny obligacji i stopa krótka

Model HL jest wyznaczony przez podanie (znanych w czasie 0) cen

$$B(0,1), \ldots, B(0,T)$$

oraz parametrów p i δ, które mogą być wyznaczone przy kalibracji modelu. Analiza dla konkretnych danych liczbowych (wraz z drzewem cen opcji) jest przedmiotem Zadania 11.7.

Dla zadanych $t \geq 0$, S, gdzie $t \leq S \leq T$, oraz $\omega_t = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{t-1}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{t-1} \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}$ mamy

$$\begin{aligned}
&B(t,S;\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t)\\
&\quad= \frac{B(t-1,S;\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{t-1})}{B(t-1,t;\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{t-1})}h(S-t;\alpha_t)\\
&\quad= \frac{\frac{B(t-2,S;\alpha_1\cdots\alpha_{t-2})}{B(t-2,t-1;\alpha_1\cdots\alpha_{t-2})}h(S-(t-1);\alpha_{t-1})}{\frac{B(t-2,t;\alpha_1\cdots\alpha_{t-2})}{B(t-2,t-1;\alpha_1\cdots\alpha_{t-2})}h(t-(t-1);\alpha_{t-1})}h(S-t;\alpha_t)\\
&\quad= \frac{B(t-2,S;\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{t-2})}{B(t-2,t;\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{t-2})}\frac{h(S-(t-1);\alpha_{t-1})}{h(1;\alpha_{t-1})}h(S-t;\alpha_t)\\
&\quad\;\vdots\\
&\quad= \frac{B(0,S)}{B(0,t)}\frac{h(S-1;\alpha_1)}{h(t-1;\alpha_1)}\frac{h(S-2;\alpha_2)}{h(t-2;\alpha_2)}\cdots\frac{h(S-(t-1);\alpha_{t-1})}{h(1;\alpha_{t-1})}h(S-t;\alpha_t).
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Dla dowolnego n mamy
$$h(n;\mathrm{d}) = \delta^n h(n;\mathrm{u}). \tag{11.15}$$
Ponieważ drzewo jest rekombinowane cena w węźle nie zależy od formy $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t$ ale od tego ile w niej jest znaków d a ile u. Jeśli mamy j znaków d, czyli $t-j$ znaków u to taką ścieżkę oznaczamy przez $\mathrm{d}^j\mathrm{u}^{t-j}$. Wtedy
$$\begin{aligned}
&B(t,S;\mathrm{d}^j\mathrm{u}^{t-j})\\
&\quad= \frac{B(0,S)}{B(0,t)}\delta^{j(S-t)}\frac{h(S-1;\mathrm{u})}{h(t-1;\mathrm{u})}\frac{h(S-2;\mathrm{u})}{h(t-2;\mathrm{u})}\cdots\frac{h(S-t;\mathrm{u})}{h(0;\mathrm{u})}\\
&\quad= \frac{B(0,S)}{B(0,t)}\delta^{j(S-t)}\left[\frac{(1-p)\delta^{t-1}+p}{(1-p)\delta^{S-1}+p}\right]\left[\frac{(1-p)\delta^{t-2}+p}{(1-p)\delta^{S-2}+p}\right]\\
&\quad\cdots\left[\frac{(1-p)\delta^{0}+p}{(1-p)\delta^{S-t}+p}\right].
\end{aligned}$$
Na uwagę w powyższym wzorze zasługuje współczynnik $\delta^{j(S-t)}$. Jest on związany z równością (11.15). Mianowicie, w zasadniczym wzorze (11.14) mamy wyrażenie
$$\frac{h(S-1;\alpha_1)}{h(t-1;\alpha_1)}\frac{h(S-2;\alpha_2)}{h(t-2;\alpha_2)}\cdots\frac{h(S-(t-1);\alpha_{t-1})}{h(1;\alpha_{t-1})}h(S-t;\alpha_t).$$
Biorąc pod uwagę (**??**) możemy go zapisać w postaci
$$\delta^l\times\frac{h(S-1;\mathrm{u})}{h(t-1;\mathrm{u})}\frac{h(S-2;\mathrm{u})}{h(t-2;\mathrm{u})}\cdots\frac{h(S-(t-1);\mathrm{u})}{h(1;\mathrm{u})}h(S-t;\mathrm{u}),$$
dla pewnego l. Pokażemy, że $l=j(S-t)$. Istotnie jeżeli $\alpha_k=d$, to
$$\frac{h(S-k;\alpha_k)}{h(t-k;\alpha_k)} = \frac{\delta^{S-k}}{\delta^{t-k}}\frac{h(S-k;\mathrm{u})}{h(t-k;\mathrm{u})} = \delta^{S-t}\frac{h(S-k;\mathrm{u})}{h(t-k;\mathrm{u})}.$$
Jeżeli $\alpha_t=\mathrm{d}$, to
$$h(S-t;\alpha_t) = \delta^{S-t}h(S-t;\mathrm{u}).$$
Stąd wyrażenie δ^{S-t} pojawi się tyle razy ile d w $\alpha_1\cdots\alpha_t$, a więc j-razy.

Możemy teraz policzyć stopy krótkie. Mamy
$$\begin{aligned}
&B(t,t+1;\mathrm{d}^j\mathrm{u}^{t-j})\\
&\quad= \frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}\delta^j\left[\frac{h(t;\mathrm{u})}{h(t-1;\mathrm{u})}\right]\left[\frac{h(t-1;\mathrm{u})}{h(t-2;\mathrm{u})}\right]\cdots\left[\frac{h(2;\mathrm{u})}{h(1;\mathrm{u})}\right]h(1;\mathrm{u})\\
&\quad= \frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}\delta^j h(t;\mathrm{u})\\
&\quad= \frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}\frac{\delta^j}{(1-p)\delta^t+p}.
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$
\begin{aligned}
r(t;\mathrm{d}^j\mathrm{u}^{t-j}) &= -\frac{1}{\tau}\log B(t,t+1;\mathrm{d}^j\mathrm{u}^{t-j}) \\
&= f(0,t) - \frac{j}{\tau}\log\delta + \frac{1}{\tau}\log((1-p)\delta^t + p),
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
f(0,t) := \frac{\log B(0,t) - \log B(0,t+1)}{\tau}.
$$

Policzymy teraz wartość oczekiwaną i wariancję $r(t)$ względem prawdopodobieństwa martyngałowego. Czy rzeczywiście $r(t)$ jest zmienną losową? Który ze składników jest losowy? Oczywiście liczba j wyrażeń d! Tak więc wartość oczekiwana dana jest wzorem

$$
\begin{aligned}
\mu_{r(t)} &= \mathbb{E}\, r(t) = f(0,t) - \frac{\mathbb{E}j}{\tau}\log\delta + \frac{1}{\tau}\log((1-p)\delta^t + p) \\
&= f(0,t) - \frac{1}{\tau}\ln\delta\sum_{j=0}^{t} j\frac{t!}{j!(t-j)!}(1-p)^j p^{t-j} + \frac{1}{\tau}\log((1-p)\delta^t + p) \\
&= f(0,t) - \frac{\log\delta}{\tau}t(1-p) + \frac{1}{\tau}\log((1-p)\delta^t + p),
\end{aligned}
$$

gdzie korzystamy z następującego wzoru na wartość oczekiwaną rozkładu dwumianowego:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\, j &= \sum_{j=0}^{t} j\frac{t!}{j!(t-j)!}(1-p)^j p^{t-j} \\
&= t(1-p)\sum_{j=1}^{t}\frac{(t-1)!}{(j-1)!(t-j)!}(1-p)^{j-1}p^{t-j} \\
&= t(1-p)\sum_{j=0}^{t-1}\frac{(t-1)!}{j!(t-j)!}(1-p)^j p^{t-j} = t(1-p)((1-p)+p)^{t-1} \\
&= t(1-p).
\end{aligned}
$$

Podobnie możemy policzyć wariancję

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{r(t)} &= \mathrm{Var}(r(t)) = \mathbb{E}\,(r(t) - \mathbb{E}\, r(t))^2 = \mathbb{E}\,\frac{(\log\sigma)^2}{\tau^2}(j - \mathbb{E}\, j)^2 \\
&= \frac{(\ln\delta)^2}{\tau^2}\left(\sum_{j=0}^{t} j^2\binom{t}{j}(1-p)^j p^{t-j} - (t(1-p))^2\right) \\
&= \frac{(\ln\delta)^2}{\tau^2}tp(1-p).
\end{aligned}
$$

Użyliśmy następującej formuły na wariancję zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{t} j^2 \frac{t!}{j!(t-j)!}(1-p)^j p^{t-j} - (t(1-p))^2 \\
&= \sum_{j=0}^{t} j(j-1)\frac{t!}{j!(t-j)!}(1-p)^j p^{t-j} + \sum_{j=0}^{t} j\frac{t!}{j!(t-j)!}(1-p)^j p^{t-j} - (t(1-p))^2 \\
&= t(t-1)(1-p)^2 \sum_{j=2}^{t} \frac{(t-2)!}{(j-2)!((t-2)-(j-2))!}(1-p)^{j-2} p^{(t-2)-(j-2)} \\
&\quad + t(1-p) - (t(1-p))^2 \\
&= t(t-1)(1-p)^2 \sum_{j=0}^{t-2} \frac{(t-2)!}{j!(t-2-j)!}(1-p)^j p^{(t-2)-j} + t(1-p) - (t(1-p))^2 \\
&= t(t-1)(1-p)^2 + t(1-p) - (t(1-p))^2 \\
&= tp(1-p).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\sigma^2_{r(t)}$ jest proporcjonalne do t, co znaczy, że wolatylność jest stała.

11.3 Model HJM (Heath–Jarrow–Morton) w czasie dyskretnym

Model HJM daje więcej elastyczności w porównaniu z modelem HL. Będziemy rozważali wersje modelu HJM na (nie rekombinowanym) drzewie binarnym. Wieloczynnikowe warianty mogą być również rozważane.

11.3.1 Modele stóp forward

Wiemy, że ceny obligacji $B(t,S)$ i stopy forward związane są następującą relacją

$$f(t,S) = -\frac{\log B(t,S+1) - \log B(t,S)}{\tau}$$

dla t i S takich, że $0 \le t \le S < T$. Ponadto

$$B(t,S) = \exp\left\{-\tau \sum_{i=t}^{S-1} f(t,i)\right\} \tag{11.16}$$

dla t i S takich, że $0 \le t \le S \le T$. Oczywiście zamiast rozważyć drzewa cen, można rozważyć drzewo stóp forward

$$
\begin{array}{lclcl}
 & & f(1,1;\mathrm{u}) & \nearrow & f(2,2;\mathrm{uu}) \\
f(0,0) & \nearrow & f(1,2;\mathrm{u}) & \searrow & f(2,2;\mathrm{ud}) \\
f(0,1) & & & & \\
f(0,2) & & f(1,1;\mathrm{d}) & \nearrow & f(2,2;\mathrm{du}) \\
 & \searrow & f(1,2;\mathrm{d}) & \searrow & f(2,2;\mathrm{dd}),
\end{array}
$$

gdzie dla prostoty przyjęliśmy, że $T = 3$.

W dyskretnym modelu HJM zakłada się, że stopy forward zdefiniowane są rekurencyjnie

$$
\begin{aligned}
f(t+1, S, \omega_t \mathrm{u}) &= f(t, S, \omega_t) + \mu(t, S, \omega_t)\tau + \sigma(t, S, \omega_t)\sqrt{\tau}, \\
f(t+1, S, \omega_t \mathrm{d}) &= f(t, S, \omega_t) + \mu(t, S, \omega_t)\tau - \sigma(t, S, \omega_t)\sqrt{\tau},
\end{aligned}
\tag{11.17}
$$

na każdym węźle ω_t dla $t < T - 2$, przy zadanych funkcjach $\mu(t, S, \omega_t)$ i $\sigma(t, S, \omega_t)$. Dodatkowo, zakłada się, że prawdopodobieństwo martyngałowe na każdej gałęzi wynosi $p(t, \omega_t) = \frac{1}{2}$. W rezultacie warunkowa wartość oczekiwana i wariancje stóp $f(t+1, S)$ w chwili t dane są wzorami

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f(t+1, S)|\mathcal{F}_t\right) &= f(t, S) + \mu(t, S)\tau, \\
\mathrm{Var}\left(f(t+1, S)|\mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{E}\Big(\left[f(t+1, S) - \mathbb{E}\left(f(t, S)|\mathcal{F}_t\right)\right]^2 |\mathfrak{F}_t\Big) \\
&= \left(\sigma(t, S)\right)^2 \tau.
\end{aligned}
$$

Oczywiście wartość oczekiwana brana jest po mierze martyngałowej, a $\mathfrak{F}_t$ to σ-ciało generowane przez $\omega_t = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_t$.

11.3.2 Warunek braku arbitrażu

Przypomnijmy, że w drzewie binarnym warunek braku arbitrażu oznacza, że poniższe prawdopodobieństwa nie zależą od czasów wykupu S, a dodatkowo w naszym przypadku wynoszą 1/2. Naszym celem będzie ich wyliczenie w zależności od μ i σ występujących w równaniach na stopy forward. Mamy

$$
\begin{aligned}
p(t, S; \omega_t) &= \frac{B(t, S) - B(t+1, S, \omega_t \mathrm{d}) B(t, t+1)}{B(t+1, S, \omega_t \mathrm{u}) B(t, t+1) - B(t+1, S, \omega_t \mathrm{d}) B(t, t+1)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t}^{S-1} f(t,i)} - \mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} f(t+1,i,\omega_t \mathrm{d})} \mathrm{e}^{-\tau f(t,t)}}{\mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} f(t+1,i,\omega_t \mathrm{u})} \mathrm{e}^{-\tau f(t,t)} - \mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} f(t+1,i,\omega_t \mathrm{d})} \mathrm{e}^{-\tau f(t,t)}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} f(t,i)} - \mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} f(t+1,i,\omega_t \mathrm{d})}}{\mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} f(t+1,i,\omega_t \mathrm{u})} - \mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} f(t+1,i,\omega_t \mathrm{d})}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} f(t,i)} - \mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} \left[f(t,i) + \mu(t,i)\tau - \sigma(t,i)\sqrt{\tau}\right]}}{\mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} \left[f(t,i) + \mu(t,i)\tau + \sigma(t,i)\sqrt{\tau}\right]} - \mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=t+1}^{S-1} \left[f(t,i) + \mu(t,i)\tau - \sigma(t,i)\sqrt{\tau}\right]}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\tau^2 \sum_{i=t+1}^{S-1} \mu(t,i)} - \mathrm{e}^{\tau^{3/2} \sum_{i=t+1}^{S-1} \sigma(t,i)}}{\mathrm{e}^{-\tau^{3/2} \sum_{i=t+1}^{S-1} \sigma(t,i)} - \mathrm{e}^{\tau^{3/2} \sum_{i=t+1}^{S-1} \sigma(t,i)}}.
\end{aligned}
$$

Przypomnijmy, że

$$\cosh x := \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}.$$

Ponieważ $p(t, S; \omega_t) = 1/2$, mamy

$$\mathrm{e}^{\tau^2 \sum_{i=t+1}^{S-1} \mu(t,i)} = \cosh \left\{ \tau^{3/2} \sum_{i=t+1}^{S-1} \sigma(t,i) \right\}.$$

Równość ta zachodzi dla wszystkich t i S takich, że $1 \leq t+1 < S \leq T$. W szczególności, implikuje to, że wszystkie współczynniki dryfu $\mu(t,i)$ są zdeterminowane przez wolatylności $\sigma(t,i)$. Istotnie, kładąc $S = t+2, \ldots, T$, otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\tau^2 \mu(t,t+1)} &= \cosh \tau^{3/2} \sigma(t,t+1), \\
\mathrm{e}^{\tau^2 [\mu(t,t+1)+\mu(t,t+2)]} &= \cosh \tau^{3/2} \left[\sigma(t,t+1) + \sigma(t,t+2) \right], \\
&\;\;\vdots \\
\mathrm{e}^{\tau^2 [\mu(t,t+1)+\ldots+\mu(t,T-1)]} &= \cosh \tau^{3/2} \left[\sigma(t,t+1) + \ldots + \sigma(t,T-1) \right],
\end{aligned} \tag{11.18}$$

z których wyliczamy

$$\mu(t,t+1), \mu(t,t+2), \ldots, \mu(t,T-1)$$

w zależności od

$$\sigma(t,t+1), \sigma(t,t+2), \ldots, \sigma(t,T-1).$$

11.3.3 Konstrukcja struktury terminowej na drzewie

Z powyższych rozważań wynika, że drzewo stóp forward $f(t,S)$ lub równoważnie cen obligacji $B(t,S)$, jest wyznaczone przez stopy początkowe

$$f(0,0), f(0,1), \ldots, f(0,T-1)$$

oraz wolatylności

$$\sigma(t,t+1), \sigma(t,t+2), \ldots, \sigma(t,T-1), \qquad t = 0, 1, \ldots, T-2.$$

Algorytm konstrukcji drzewa dla modelu HJM jest następujący:

- Niech $f(0,S)$, $S = 0, \ldots, T-1$ będą wartościami stopy forward w chwili $t = 0$. Wartości bieżące stóp forward (lub cen obligacji) są dostępne.
- Wyestymować wolatylności $\sigma(t,S)$, na przykład z danych historycznych z wybranych instrumentów pochodnych.

- Z σ wyliczyć dryf μ używając (11.18).
- Wyliczyć drzewo stóp forward $f(t,S)$ korzystając z wartości początkowych $f(0,S)$ oraz ze znanych μ i σ. W tym punkcie używamy (11.17).
- Wyliczyć ceny obligacji $B(t,S)$ ze stóp forward $f(t,S)$, korzystając z (11.16).

Mając drzewo cen można wyceniać instrumenty pochodne.

Zadanie 11.5 Skonstruuj drzewo stóp $f(t,S)$ i cen $B(t,S)$ dla modelu, w którym $T=3$, $\tau=1$ oraz

$$f(0,0)=2.646\%, \qquad f(0,1)=2.9438\%, \qquad f(0,2)=2.955\%,$$

$$\sigma(0,1)=\sigma(0,2)=\sigma(1,2,\mathrm{u})=\sigma(1,2,\mathrm{d})=0,015.$$

Odpowiedź W pierwszym kroku wyliczamy, z formuł (11.18), współczynniki μ, otrzymując:

$$\mu(0,1)=0.0001125, \quad \mu(0,2)=0.000337437, \quad \mu(1,2)=0.0001125$$

oraz $\mu(2,3)=0.0001125$.

Następnie, ze wzorów (11.17), wyznaczamy drzewo stóp forward:

$$
\begin{array}{lll}
 & & f(2,2;\mathrm{uu}) = 0.05999993 \\
 & & \nearrow \\
 & \begin{array}{l} f(1,1;\mathrm{u}) = 0.0444925 \\ f(1,2;\mathrm{u}) = 0.04488744 \end{array} & \searrow \\
 & \nearrow & f(2,2;\mathrm{ud}) = 0.02999993 \\
 \begin{array}{l} f(0,0) = 0.02646 \\ f(0,1) = 0.02938 \\ f(0,2) = 0.02955 \end{array} & & f(2,2;\mathrm{du}) = 0.2999993 \\
 & & \nearrow \\
 & \searrow \begin{array}{l} f(1,1;\mathrm{d}) = 0.0144925 \\ f(1,2;\mathrm{d}) = 0.01488744 \end{array} & \\
 & & \searrow \\
 & & f(2,2;\mathrm{dd}) \approx 0.
\end{array}
$$

Teraz, korzystając z (11.16), znajdujemy drzewo cen:

$$
\begin{array}{lll}
 & & B(2,3;\mathrm{uu}) = 0.94176 \\
 & & \nearrow \\
 & \begin{array}{l} B(1,2;\mathrm{u}) = 0.95648 \\ B(1,3;\mathrm{u}) = 0.914498 \end{array} & \searrow \\
 & \nearrow & B(2,3;\mathrm{ud}) = 0.9704456 \\
 \begin{array}{l} B(0,1) = 0.973887 \\ B(0,2) = 0.9457 \\ B(0,3) = 0.91815 \end{array} & & B(2,3;\mathrm{du}) = 0.9704456 \\
 & & \nearrow \\
 & \searrow \begin{array}{l} B(1,2;\mathrm{d}) = 0.9856 \\ B(1,3;\mathrm{d}) = 0.9861 \end{array} & \\
 & & \searrow \\
 & & B(2,3;\mathrm{dd}) \approx 1.
\end{array}
$$

■

11.4 Wycena opcji na drzewach

Załóżmy, że mamy zadaną strukturę terminową na drzewie binarnym, to znaczy dla $t, S = 0, 1, \cdots, T$, $t \le S$, zadane są ceny obligacji $B(t, S; \alpha_1 \cdots \alpha_t)$ w dowolnym węźle $\omega_t = \alpha_1 \cdots \alpha_t \in \{\mathrm{d}, \mathrm{u}\}^t$. Oczywiście zakładamy, że model jest wolny od arbitrażu (wyznaczanie cen arbitrażowych opcji w modelu z arbitrażem nie ma sensu). Możemy więc wyliczyć prawdopodobieństwa martyngałowe (z ang. *risk nutral probabilities*) $p(t, \omega_t)$. Model jest *zupełny*, czyli prawdopodobieństwa martyngałowe są jedyne. Przypomnijmy (patrz wzór (11.2)), że prawdopodobieństwa martyngałowe wyliczamy z następującego wzoru

$$p(t; \omega_t) = \frac{B(t, S; \omega_t)/B(t, t+1; \omega_t) - B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d})}{B(t+1, S; \omega_t \mathrm{u}) - B(t+1, S; \omega_t \mathrm{d})}, \qquad S \ge t+2.$$

Przypomnijmy, że cena $C(t)$ w chwili t, instrumentu Z o czasie zapadalności $S \le T$ dana jest przez warunkową wartość oczekiwaną

$$C(t) = \mathbb{E}\left(Z \exp\left\{ -\sum_{k=t}^{S-1} \tau r(k) \right\} \mid \mathfrak{F}_t \right).$$

Przypomnijmy, że czynnik dyskontujący

$$\exp\left\{ \sum_{k=t}^{S-1} \tau r(k) \right\}$$

jest zyskiem z rachunku bankowego na odcinku $[t, S]$.

Możemy ją podać na każdym węźle $\omega_t \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}$. Algorytm wyliczania C polega na posuwaniu się po drzewie od węzłów ω_S do pierwszego węzła. Oczywiście

$$C(S; \omega_S) = Z(\omega_S), \qquad \omega_S \in \{\mathrm{d}, \mathrm{u}\}^S.$$

Następnie

$$\begin{aligned} &C(S-1; \omega_{S-1}) \\ &\quad = [p(S-1; \omega_{S-1}) Z(\omega_{S-1}\mathrm{u}) + (1 - p(S-1; \omega_{S-1}))\, Z(\omega_{S-1}\mathrm{d})]\, \mathrm{e}^{-\tau r(S-1; \omega_{S-1})}. \end{aligned}$$

Ogólnie

$$C(t; \omega_t) = [p(t; \omega_t) C(t+1; \omega_t \mathrm{u}) + (1 - p(t; \omega_t))\, C(t+1; \omega_t \mathrm{d})]\, \mathrm{e}^{-\tau r(t; \omega_t)}.$$

Zadanie 11.6 W modelu na drzewie z Zadania 11.2, $T = 3$, $\tau = \frac{1}{12}$, wycenić opcję kupna (*call*) na obligację o czasie zapadalności $T = 3$ z ceną realizacji (z ang. *strike price*) 0.9 i z datą wygaśnięcia opcji (z ang. *expiration date*) 2.

Odpowiedź Mamy

$$\begin{array}{lllll}
 & & & \nearrow & B(2,3,uu)=0.989 \\
 & & B(1,3,u)=0.908 & r(1,u)=2\% & \\
 & \nearrow & & \searrow & B(2,3,ud)=0.89 \\
B(0,3)=0.87 & r(0)=4\% & & & \\
 & \searrow & & \nearrow & B(2,3,du)=0.985 \\
 & & B(1,3,d)=0.85 & r(1,d)=4\% & \\
 & & & \searrow & B(2,3,dd)=0.85.
\end{array}$$

Cena opcji $C(t)$ liczona jest tak jak w modelu CRR, zaczynając od wypłat w chwili 2 a potem idąc wstecz po drzewie:

$$\begin{array}{lllll}
 & & & & C(2,uu)=0.089 \\
 & & C(1,u)=0.01751421 & \nearrow & B(2,3,uu)=0.989 \\
 & & B(1,3,u)=0.908 & r(1,u)=2\% & \\
 & & & \searrow & C(2,ud)=0 \\
 & \nearrow & & & B(2,3,ud)=0.89 \\
C(0)=0.0079676 & r(0)=4\% & & & \\
B(0,3)=0.87 & \searrow & & & C(2,du)=0.085 \\
 & & C(1,d)=0.00178098 & \nearrow & B(2,3,du)=0.985 \\
 & & B(1,3,d)=0.85 & r(1,d)=4\% & \\
 & & & \searrow & C(2,dd)=0 \\
 & & & & B(2,3,dd)=0.85.
\end{array}$$

■

Zadanie 11.7 W modelu Ho–Lee zadane są: ceny początkowe

$$B(0,3)=0.945, \qquad B(0,2)=0.987, \qquad B(0,1)=0.991,$$

prawdopodobieństwo $p=0.41$ oraz parametr $\delta=1.0099$. Dla $T=3$, znaleźć drzewo cen wraz z drzewem cen opcji sprzedaży (put) 3-obligacji, o momencie zapadalności 2 i cenie realizacji $K=0.95575$. Zwrócić uwagę na nietypową interpretację symboli u i d.

Odpowiedź Mamy

$$\begin{array}{lllll}
 & & & & C(2;\mathrm{uu})=0.009413023 \\
 & & C(1;\mathrm{u})=0.003847313 & & B(2,3;\mathrm{uu})=0.94633677 \\
 & & B(1,2;\mathrm{u})=0.99018003 & \nearrow & \\
 & \nearrow & B(1,3;\mathrm{u})=0.94251725 & \searrow & C(2;\mathrm{ud})\approx 0 \\
C(0)=0.00157382 & & & & B(2,3;\mathrm{ud})=0.955705713 \\
B(0,1)=0.991 & & & & \\
B(0,2)=0.987 & & & & \\
B(0,3)=0.945 & & & & C(2;\mathrm{du})\approx 0 \\
 & & & & B(2,3;\mathrm{du})=0.955705713 \\
 & \searrow & C(1;\mathrm{d})\approx 0 & & \\
 & & B(1,2;\mathrm{d})=0.99998218 & \nearrow & \\
 & & B(1,3;\mathrm{d})=0.96127147 & \searrow & C(2;\mathrm{dd})=0 \\
 & & & & B(2,3;\mathrm{dd})=0.9651672.
\end{array}$$

■

Zadanie 11.8 Dla modelu HJM rozważnego w Zadaniu 11.5 wycenić opcję kupna 3-obligacji o momencie wykupu 2 i cenie realizacji $K=0.97$.

Odpowiedź Mamy

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & \nearrow & \begin{array}{l} B(2,3;\mathrm{uu}) = 0.94176 \\ C(2,\mathrm{uu}) = 0.0004456 \end{array} \\
 & \nearrow & \begin{array}{l} B(1,2;\mathrm{u}) = 0.95648 \\ B(1,3;\mathrm{u}) = 0.914449 \\ C(1,\mathrm{u}) = 0.0002131 \end{array} & \searrow & \begin{array}{l} B(2,3;\mathrm{ud}) = 0.9704456 \\ C(2,\mathrm{ud}) = 0.0004456 \end{array} \\
\begin{array}{l} B(0,1) = 0.973887 \\ B(0,2) = 0.9457 \\ B(0,3) = 0.91815 \\ C(0) = 0.0074098 \end{array} & & & & \begin{array}{l} B(2,3;\mathrm{du}) = 0.9704456 \\ C(2,\mathrm{du}) = 0.0004456 \end{array} \\
 & \searrow & \begin{array}{l} B(1,2;\mathrm{d}) = 0.9856 \\ B(1,3;\mathrm{d}) = 0.97147 \\ C(1,\mathrm{d}) = 0 \end{array} & \nearrow & \\
 & & & \searrow & \begin{array}{l} B(2,3;\mathrm{dd}) \approx 1 \\ C(2,\mathrm{dd}) = 0.03. \end{array}
\end{array}
$$

■

12

Zadania uzupełniające do rozdziałów ze stóp procentowych

Poniżej podane są typowe zadania dla całego kursu stóp procentowych.

Zadanie 12.1 Niech $\tau = 1/(12)$, $B(0, 12) = 0.8976$. Ile wynosi realna stopa zwrotu z inwestycji na obligację jednoroczną w okresie od 0 do 12-miesięcy?

Zadanie 12.2 Niech $\tau = 1/(12)$ oznacza okres jednego miesiąca. Kupiliśmy 1000 obligacji jednorocznych płacąc za każdą z nich po 0.9400. Ile wynosi złożona stopa krótka na odcinku od teraz do 1-ego roku?

Zadanie 12.3 ***(bootstraping)*** Na rynku są: jednoroczna obligacja zerokuponowa z wypłatą końcową 100 o cenie 90.90, dwuletnia obligacja kuponowa z wypłatą końcową 100 i rocznych kuponach 10, o cenie 103.02, trzyletnia obligacja kuponowa z wypłatą końcową 100 i rocznych kuponach 10, o cenie 105.10. Ile wynoszą ceny obligacji zerokuponowych $B(0, 1)$, $B(0, 2)$, $B(0, 3)$ o wypłacie końcowej 1?

Zadanie 12.4 Stopy forward wynoszą

$$f(0, 0) = 7.98\%, \quad f(0, 1) = 8.02\%, \quad f(0, 2) = 8.08\%.$$

Policzyć ceny obligacji zerokuponowych o momentach wykupów 1, 2, 3. Ile wynosi cena 3-letniej obligacji kuponowej o rocznych kuponach po 10 i wypłacie końcowej 100.

Zadanie 12.5 ***(drzewo binarne)*** Uzupełnić drzewo binarne, w którym $\tau = \frac{1}{12}$, $T = 3$, a stopy krótkie i ceny dla obligacji z zapadalnością w 3 są następujące

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \nearrow & B(2,3;\mathrm{uu}) = 0.9992 \\
 & & B(1,3;\mathrm{u}) = 0.9960 \; r(1;\mathrm{u}) = 2.40\% & & \\
 & \nearrow & & \searrow & B(2,3;\mathrm{ud}) = 0.9961 \\
B(0,3) = 0.9920 \; r(0) = 4.11\% & & & & \\
 & \searrow & & \nearrow & B(2,3;\mathrm{du}) = 0.9985 \\
 & & B(1,3;\mathrm{d}) = 0.9950 \; r(1;\mathrm{d}) = 3.00\% & & \\
 & & & \searrow & B(2,3;\mathrm{dd}) = 0.9968.
\end{array}$$

Zadanie 12.6 W modelu z Zadania 12.5 przyjąć $B(1,3;\mathrm{d}) = 0.9958$. Czy takie drzewo daje się uzupełnić?

Zadanie 12.7 Znaleźć drzewo stóp forward dla modelu cen obligacji z Zadania 12.5.

Zadanie 12.8 ***(arbitraż)*** Czy w następującym modelu występuje arbitraż?

$$\begin{array}{lclcl}
 & & B(1,2;\mathrm{u}) = 0.9913 & \nearrow & B(2,3;\mathrm{uu}) = 0.9951 \\
 & \nearrow & B(1,3;\mathrm{u}) = 0.9837 & \searrow & \\
B(0,1) = 0.9955 & & & & B(2,3;\mathrm{ud}) = 0.9914 \\
B(0,2) = 0.9861 & & & & \\
B(0,3) = 0.9787 & & & & B(2,3;\mathrm{du}) = 0.9920 \\
 & & B(1,2;\mathrm{d}) = 0.9900 & \nearrow & \\
 & \searrow & B(1,3;\mathrm{d}) = 0.9817 & \searrow & B(2,3;\mathrm{dd}) = 0.9900.
\end{array}$$

Jeśli tak to jaka jest strategia arbitrażowa?

Zadanie 12.9 ***(model HL)*** Na drzewie binarnym podać ceny obligacji w modelu HL dla różnych parametrów p i δ. Przyjąć $T = 3$. Zaobserwować anomalie. Jako punkt wyjścia przyjąć $p = 0.4$ i $\delta = 0.99$, $B(0,1) = 0.9955$, $B(0,2) = 0.9861$ i $B(0,3) = 0.97$. Policzyć drzewo cen opcji kupna na 3-letnią obligację z zadaną ceną realizacji $K = 0.98$ i momencie realizacji 2.

Zadanie 12.10 ***(model HMJ)*** Na drzewie binarnym podać ceny obligacji w modelu HMJ dla $T = 3$, $\tau = 1$, stałego $\sigma = 0.008$ i zadanych wartości początkowych stóp forward

$$f(0,0) = 0.03, \quad f(0,1) = 0.028, \quad f(0,2) = 0.031,$$

policzyć drzewo cen opcji sprzedaży na 3-letnią obligację z zadaną ceną realizacji $K = 0.97$ i momencie realizacji 2.

Zadanie 12.11 Na drzewie binarnych z poprzedniego zadania wyliczyć cenę forward kupna obligacji o czasie wykupu 3 w momencie 2.

Zadanie 12.12 Niech r będzie stopą krótką w modelu Mertona

$$\mathrm{d}r(t) = a\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t).$$

Jaki rozkład ma $r(t)$?

Zadanie 12.13 Niech r będzie stopą krótką w modelu Mertona

$$\mathrm{d}r(t) = 1\mathrm{d}t + 0.1\mathrm{d}W(t), \qquad r(0) = 0.01.$$

Jaki rozkład ma wektor losowy $(r(1), r(2))$?

Zadanie 12.14 Niech r będzie jak w poprzednim zadaniu. Jaka jest cena trzyletniej obligacji kuponowej o wypłacie końcowej 100 i kuponach rocznych po 10?

Zadanie 12.15 Niech r będzie jak w poprzednim zadaniu. Policzyć stopy forward $f(0,0)$, $f(0,1)$ i $f(0,2)$.

Zadanie 12.16 Udowodnij, że

$$r(t) = \mathrm{e}^{-bt}r(0) + \left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right)\frac{a}{b} - \sigma\int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}\mathrm{d}W(s),$$

jest jedynym rozwiązaniem równania Vasička

$$\mathrm{d}r(t) = (a - br(t))\mathrm{d}t - \sigma\mathrm{d}W(t).$$

Jaki rozkład ma $r(t)$?

Zadanie 12.17 Niech r będzie stopą krótką w modelu Vasička

$$\mathrm{d}r(t) = (1 - r(t))\mathrm{d}t + 0.1\mathrm{d}W(t), \qquad r(0) = 0.01.$$

Jaki rozkład ma wektor losowy $(r(1), r(2))$?

Zadanie 12.18 Niech r będzie jak w poprzednim zadaniu. Policzyć stopy forward $f(0,0)$, $f(0,1)$ i $f(0,2)$.

Zadanie 12.19 Niech r będzie jak w poprzednim zadaniu. Jaka jest cena trzyletniej obligacji kuponowej o wypłacie końcowej 100 i kuponach rocznych po 10?

Zadanie 12.20 Niech r będzie stopą krótką w modelu CIR

$$\mathrm{d}r(t) = (1 - r(t))\mathrm{d}t + 0.1\sqrt{r(t)}\mathrm{d}W(t).$$

Jeżeli $r(0) = 0.02$, to ile wynoszą ceny obligacji jednorocznych i dwuletnich?

Zadanie 12.21 Niech r będzie taka jak w poprzednim zadaniu. Jaka jest cena dwuletniej obligacji kuponowej o wypłacie końcowej 100 i kuponach rocznych po 10?

Zadanie 12.22 Niech r będzie jak w poprzednim zadaniu. Policzyć stopy forward $f(0,0)$ i $f(0,1)$.

Zadanie 12.23 W modelu HJM w czasie cągłym przyjąć $\sigma(t,T) = 0.01$. Niech stopy forward $f(0,1) = 0.04$ i $f(0,2) = 0.03$. Policzyć wartości stóp $f(1,1)$ i $f(1,2)$, przy założeniu, że proces Wienera przyjmuje wartość 0.5.

Zadanie 12.24 Dla wartości stóp forward z poprzedniego zadania policzyć wartości $B(1,S)$, $S = 1,2$, traktując czas jako dyskretny. Potem porównać z wartościami z ogólnej dynamiki cen obligacji w czasie ciągłym. W czasie ciągłym przyjąć, że

$$f(0,u) = \begin{cases} f(0,1) & \text{dla } u \in [1,2], \\ 0.04 & \text{dla } u \in [2,3]. \end{cases}$$

Literatura

1. D. Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus*, Cambridge Univ. Press 2009.
2. F. Baudoin, *Diffusion processes and stochastic calculus*, European Mathematical Society 2014.
3. R.F. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*, Springer 1992.
4. R.F. Bass, *Diffusions and elliptic operators*, Springer 1997.
5. A.N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brovnian motion facts and formulae*, Springer 2002.
6. M. Capinski, E. Kopp, *The Black–Scholes model*, Cambridge Univ. Press 2012.
7. A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications*, vol. I, Academic Press 1975.
8. G. Gan, C. Ma, H. Xie, *Measure, probability, and mathematical finance; a problem-orientated approach*, Wiley 2014.
9. N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North Holland 1980.
10. J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, *Matematyka finansowa, instrumenty pochodne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.
11. J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa 2000.
12. O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Springer, New York 2002.
13. I. Karatzas, S.E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer 1996.
14. H. Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Univ. Press 1990.
15. R.Sz. Lipcer, A.N. Sziriajew, *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1981.
16. S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1976.
17. M. Métivier, *Semimartingales, a course on stochastic processes*, de Gruyter 1982.
18. B. Oksendal, *Stochastic differential equations*, Springer 1995.
19. M. Ondreját and J. Seidler, *On existence of progressively measurable modifications*, Electron. Commun. Probab. 18 (2013), 1–6.
20. S. Peszat, *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, notatki do wykładów.
21. P. Protter, *Stochastic integration and differential equations.* Springer 2005.

22. L.C.G. Rogers, D. Wiliams, *Diffusions, Markov processes and martingales vol. I, vol. II*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.
23. Z. Schuss, *Teoria i zastosowania stochastycznych równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1989.
24. F. Spitzer, *Principles of random walk*, Springer-Verlag, Berlin 1976.
25. J.M. Steele, *Stochastic calculus and financial applications*, Springer 2001.
26. D. Stroock, *Probability theory, an anlytic view*, Cambridge Univ. Press, New York 2000.
27. D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer 1999.
28. A.D. Wentzell, *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1980.