Devoir sur l'étude du rayonnement d'un corps noir

Philippe Daouadi et Leuly Quentin

16 mars 2011

Etudes préliminaires

1. La conduction correspond au transfert de chaleur par contact. La convection est le nom que l'on donne au transfert de chaleur par déplacement de matière. Enfin, le rayonnement correspond à la lumière produite par un corps chauffé, cette lumière peut aussi chauffer un corps.
2. Un corps noir est un corps qui absorbe toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit, dont la lumière. Cette énergie n'est donc ni réfléchie ni transmise et la seule énergie que l'on verra sortir de l'objet correspond donc à son rayonnement.
   Un exemple de corps noir est l'intérieur d'un four, les parois émettent et absorbent du rayonnement. Un corps qui n'est pas du tout un corps noir serait un miroir qui n'absorberait pas du tout la lumière qu'il reçoit et la réfléchirait en totalité.
3.
   (a)
   $$\begin{aligned}\left[u_{(v,T)}\right] &= [E]\,[T]\,[L]^{-3}\\ &= \left(ML^2T^{-2}\right)(T)\,(L)^{-3}\\ &= ML^{-1}T^{-1}\end{aligned}$$

   (b) On fait une analyse dimensionnelle :
   $$\begin{aligned}[u_{classique}] &= [v]^x\,[\omega]^y\left([E]\,[\theta]^{-1}\,[\theta]\right)^z\\ &= \left(LT^{-1}\right)^x\left(T^{-1}\right)^y\left(ML^2T^{-2}\right)^z\\ &= L^xT^{-x}T^{-y}M^zL^{2z}T^{-2z}\\ &= M^zL^{(x+2z)}T^{(-x-y-2z)}\end{aligned}$$

   On identifie :
   $$z = 1$$

$$x + 2z = -1 \Rightarrow x = -3$$

$$-x - y - 2z = -1 \Rightarrow y = 2$$

On a donc :

$$u_{classique} = A\frac{\nu^2 kT}{c^3}$$

(c) Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\xi_{classique}(T) &= \int_0^{+\infty} u_{classique} d\nu \\
&= \int_0^{+\infty} A\frac{v^2 kT}{c^3} d\nu \\
&= A\frac{kT}{c^3}\int_0^{+\infty} v^2 d\nu \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

L'intégrale diverge en hautes fréquences. On a donné « catastrophe ultraviolette » comme nom à ce phénomène car les ultraviolets étaient le rayonnement aux plus hautes fréquences connues à cette époque.

4. Pour que f résolve le problème qui se pose ici, il faut avoir :

$$\begin{aligned}
\lim_{v \to 0} f\left(\frac{h\nu}{kT}\right) &= 1 \\
\lim_{v \to +\infty} f\left(\frac{h\nu}{kT}\right) &= 0
\end{aligned}$$

La loi de Planck

1. On a :

$$\begin{aligned}
u_{(\nu,T)} d\nu &= -w_{(\lambda,T)} d\lambda \\
w_{(\lambda,T)} &= -u_{(\nu,T)}\frac{d\nu}{d\lambda} \\
&= -u_{(\nu,T)}\frac{d\frac{c}{\lambda}}{\lambda} \\
&= u_{(\nu,T)}\frac{c}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

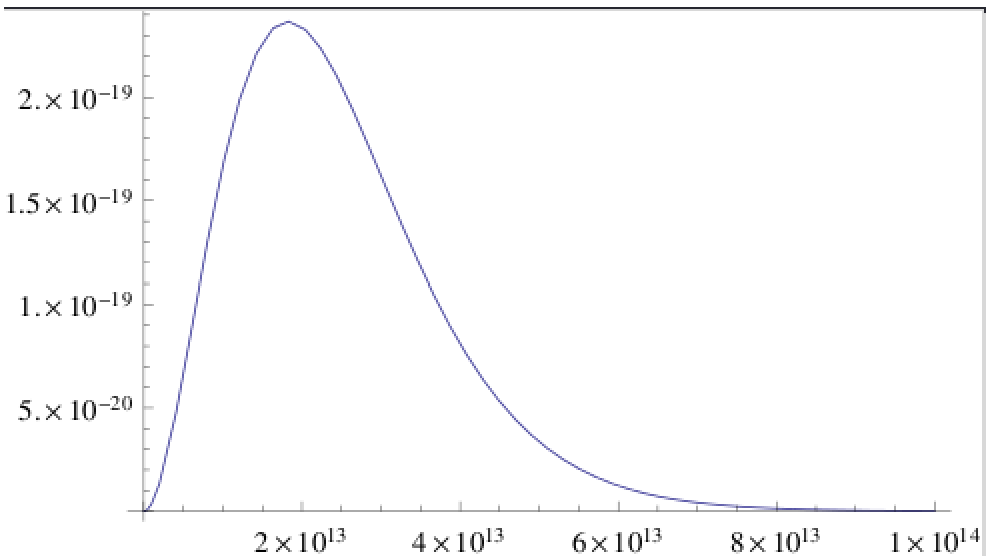

FIGURE 1 – Densité spectrale de rayonnement en fréquence d'un corps noir à T=310K

Faisons une analyse dimensionnelle :

$$\left[u_{(\nu,T)}\right] = [E]\,[T]\,[L]^{-3}$$

$$\begin{aligned}\left[w_{(\lambda,T)}\right] &= [E]\,[T]\,[L]^{-3}\,[L]\,[T]^{-1}\,[L]^{-2} \\ &= [E]\,[L]^{-4} \\ &= J\cdot m^{-4}\end{aligned}$$

u et w constituent bien des grandeurs différentes.

2.

3.

(a) Figure 1

(b) $\nu_{max} = 1.82247\times 10^{13} s^{-1}$
$\lambda'_{max} = 16450nm$
Nous somme bien dans l'ordre de l'infrarouge.

(c) Figure 2
$\lambda_{max} = 9348nm$
Les longueurs d'onde ne coincident pas, comme on s'y attendait.

4. On trouve $T = 4830K$ pour que la bande soit centrée en $\lambda = 600nm$. Il faut donc que le corps soit très chaud pour que l'on puisse commencer à appercevoir son rayonnement à l'œil nu.

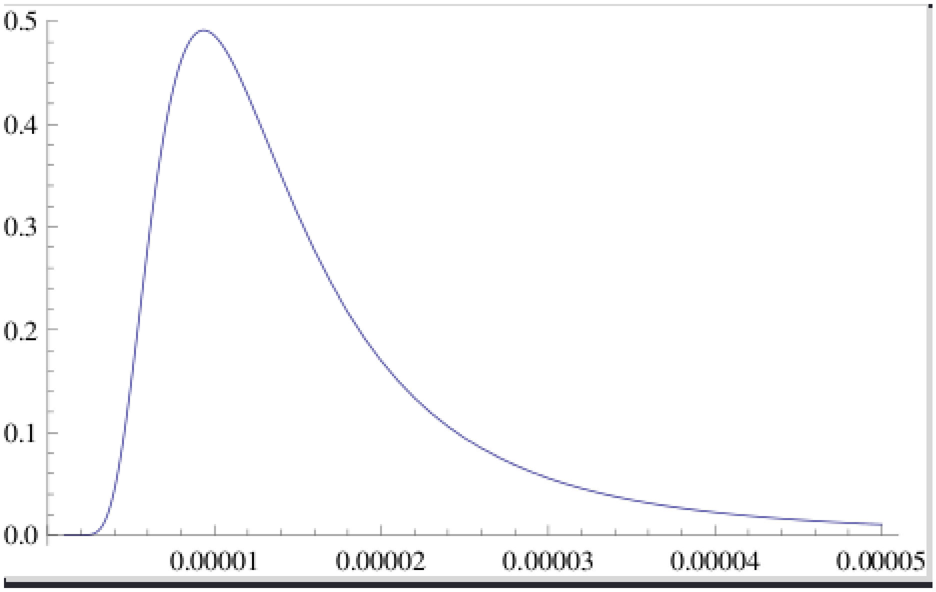

FIGURE 2 – Densité spectrale de rayonnement en longueur d'onde d'un corps noir à T=310K

La loi de Stefan-Boltzmann

1. Nous n'avons pas réussi à calculer l'intégrale en fréquence. Cependant, mathematica a calculé :

$$\int_0^\infty w_{(\lambda,T)} d\lambda = 7.56577 \times 10^{-16} T^4$$

Nous avons vu sur internet que la constante que nous trouvons ici n'est pas la constante de Stefan-Boltzmann mais correspond plutot à $\sigma \frac{4}{c}$ avec σ la constante de Stefan-Boltzmann.
σ s'exprime en $J.s^{-1}.m^{-2}.K^{-4}$ tandis que la constante que nous avons trouvé s'exprime en $J.m^{-3}.K^{-4}$.