UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

EXPOSICIÓN MATEMATICAS ESPECIALES: OSILACIONES FORZADAS

Juan Jurado, Devin Alzate, Sofia Castro

Profesor: Isaias Marin

Clase Grupo 020-83 — 9 de noviembre del 2025

CONTENIDO DE LA EXPOSICIÓN

Objetivo de la exposición:
Presentar y analizar con fundamentos teóricos y prácticos el tema de oscilaciones forzadas en sistemas lineales, enfatizando el análisis mediante números complejos.

¿QUÉ ES UNA OSCILACIÓN FORZADA?

Una **oscilación forzada** es un movimiento periódico de un sistema dinámico lineal sometido a una fuerza impulsora externa que es función del tiempo. A diferencia de las oscilaciones libres, donde el sistema evoluciona bajo sus condiciones iniciales, las oscilaciones forzadas son impulsadas por una fuerza externa que varía periódicamente.

La ecuación diferencial general que describe este fenómeno es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_f t)$$

donde γ es el coeficiente de amortiguamiento, ω_0 es la frecuencia natural del sistema, F_0 es la amplitud de la fuerza externa y ω_f es su frecuencia angular.

Frecuencia natural ω_0: La frecuencia característica de oscilación del sistema en ausencia de fuerzas externas e idealmente sin amortiguamiento.

Frecuencia forzada ω_f: La frecuencia angular de la fuerza externa aplicada.

Amortiguamiento γ: Coeficiente que representa la disipación de energía en el sistema.

El comportamiento del sistema dependerá crucialmente de la relación entre ω_f y ω_0, especialmente cuando estas frecuencias se aproximan entre sí, generando el fenómeno de **resonancia**.

Una **serie de Laurent** es una generalización de la serie de Taylor que permite representar funciones complejas en regiones que incluyen singularidades.

Para una función $f(z)$ analítica en un anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

donde se distinguen dos partes:

- **Parte Principal**: $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ (singularidades)
- **Parte Analítica**: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (comportamiento regular)

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL OSCILADOR

Para el oscilador forzado amortiguado, la función de transferencia compleja es:

$$\boxed{H(\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}}$$

donde:

- $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ = frecuencia natural
- $\lambda = b/(2m)$ = constante de amortiguamiento
- ω = frecuencia de excitación
- $i = \sqrt{-1}$ = unidad imaginaria

Observación clave: El denominador es un polinomio cuyas raíces (polos complejos) determinan completamente el comportamiento resonante.

POLOS EN EL PLANO COMPLEJO

Los polos se encuentran resolviendo:

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega = 0$$

Reorganizando como ecuación cuadrática:

$$\omega^2 - 2i\lambda\omega - \omega_0^2 = 0$$

Las raíces son:

$$\boxed{\omega_{1,2} = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Según el valor de λ relativo a ω_0:

- **Subamortiguado** ($\lambda < \omega_0$): polos complejos conjugados
- **Crítico** ($\lambda = \omega_0$): polos reales iguales
- **Sobreamortiguado** ($\lambda > \omega_0$): polos reales distintos

EXPANSIÓN DE LAURENT CERCA DE RESONANCIA

Alrededor de un polo ω_p (frecuencia de resonancia), desarrollamos $H(\omega)$ en serie de Laurent:

$$\boxed{H(\omega) = \frac{R}{\omega - \omega_p} + \text{términos regulares}}$$

El **residuo** R se define como:

$$\boxed{R = \lim_{\omega \to \omega_p} (\omega - \omega_p) H(\omega)}$$

El residuo es un **número complejo** que caracteriza:

- Su **magnitud** $|R|$: intensidad de la resonancia
- Su **argumento**: información de fase

$\Rightarrow$ Mayor $|R|$ implica resonancia más pronunciada

Para $H(\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$, el residuo en polo simple ω_p es:

$$R = \frac{F_0/m}{\frac{d}{d\omega}(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)\Big|_{\omega=\omega_p}}$$

Calculando la derivada del denominador:

$$\frac{d}{d\omega}(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega) = -2\omega + 2i\lambda$$

Por lo tanto, en el polo ω_p:

$$\boxed{R = \frac{F_0/m}{-2\omega_p + 2i\lambda}}$$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL RESIDUO

El residuo caracteriza la **intensidad de resonancia** en una frecuencia específica:

Sistema con Poco Amortiguamiento ($\lambda \ll \omega_0$):

- Polos muy cercanos al eje imaginario
- Residuos de magnitud muy grande
- Resonancia muy pronunciada y potencialmente destructiva
- Peligroso en aplicaciones

Sistema con Mucho Amortiguamiento ($\lambda \gg \omega_0$):

- Polos alejados del eje imaginario
- Residuos de magnitud moderada
- Resonancia suave y controlable
- Seguro en aplicaciones

EJEMPLO 1: ECUACIÓN DIFERENCIAL

Consideremos un oscilador armónico forzado:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

Con parámetros:

- $m = 1$ kg (masa)
- $b = 2$ N $\cdot$ s/m (coeficiente de amortiguamiento)
- $k = 100$ N/m (constante de resorte)
- $F_0 = 100$ N (amplitud de fuerza)

De estos parámetros:

- $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10$ rad/s
- $\lambda = b/(2m) = 1$ rad/s

EJEMPLO 1: FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN DOMINIO COMPLEJO

Aplicando transformada de Fourier a la ecuación diferencial:

$$\mathcal{F}\{\ddot{x}\} = -(i\omega)^2 X(\omega) = -\omega^2 X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{\dot{x}\} = i\omega X(\omega)$$

La ecuación en dominio de frecuencia es:

$$(-m\omega^2 + ib\omega + k)X(\omega) = F_0\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

La función de transferencia compleja es:

$$\boxed{H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F_0} = \frac{1}{k - m\omega^2 + ib\omega}}$$

Reescribiendo con ω_0^2 y λ:

$$\boxed{H(\omega) = \frac{1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}}$$

EJEMPLO 1: ENCONTRAR LOS POLOS

Los polos de $H(\omega)$ se encuentran resolviendo:

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega = 0$$

Reorganizando como ecuación cuadrática:

$$\omega^2 - 2i\lambda\omega - \omega_0^2 = 0$$

Sustituyendo $\omega_0 = 10$ y $\lambda = 1$:

$$\omega^2 - 2i\omega - 100 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática:

$$\omega_{1,2} = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = i \pm \sqrt{100 - 1}$$

$$\boxed{\omega_1 = i + 9.9499, \quad \omega_2 = i - 9.9499}$$

Estos son **polos complejos conjugados** (sistema subamortiguado).

EJEMPLO 1: SERIE DE LAURENT ALREDEDOR DEL POLO

Alrededor del polo $\omega_p = \omega_1 = 9.9499 + i$, desarrollamos $H(\omega)$ en serie de Laurent:

$$H(\omega) = \frac{1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$$

La expansión de Laurent es:

$$\boxed{H(\omega) = \frac{R}{\omega - (9.9499 + i)} + \text{términos analíticos}}$$

donde el **residuo** R es el coeficiente de la singularidad principal.

EJEMPLO 1: CÁLCULO DEL RESIDUO

Para un polo simple, el residuo se calcula como:

$$R = \lim_{\omega \to \omega_p} (\omega - \omega_p) H(\omega) = \lim_{\omega \to \omega_p} \frac{\omega - \omega_p}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$$

Usando la regla de L'Hôpital o la fórmula directa:

$$R = \frac{1/m}{\frac{d}{d\omega}(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)\Big|_{\omega=\omega_p}}$$

$$\frac{d}{d\omega}(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega) = -2\omega + 2i\lambda$$

En el polo $\omega_p = 9.9499 + i$:

$$R = \frac{1}{-2(9.9499 + i) + 2i(1)} = \frac{1}{-19.8998 - 2i + 2i} = \frac{1}{-19.8998}$$

$$\boxed{R = -0.050251}$$

EJEMPLO 1: RESPUESTA EN ESTADO ESTACIONARIO VÍA RESIDUOS

La solución en estado estacionario se obtiene mediante la integral de contorno:

$$x_{\mathsf{ss}}(t) = \mathsf{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint H(\omega)F_0 e^{i\omega t}d\omega\right\}$$

Cerrando el contorno en el semiplano superior (donde $t > 0$), solo contribuyen los polos con $\mathsf{Im}(\omega) > 0$:

$$\boxed{\oint H(\omega)F_0 e^{i\omega t}d\omega = 2\pi i \times R \times F_0 e^{i\omega_1 t}}$$

Sustituyendo $R = -0.050251$ y $\omega_1 = 9.9499 + i$:

$$x_{\mathsf{ss}}(t) = \mathsf{Re}\left\{2\pi i \times (-0.050251) \times 100 \times e^{i(9.9499+i)t}\right\}$$

$$x_{\mathsf{ss}}(t) = \mathsf{Re}\left\{-10.05\pi i \times e^{i(9.9499)t} \times e^{-t}\right\}$$

EJEMPLO 1: SIMPLIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Usando $ie^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi/2)}$:

$$-10.05\pi i \times e^{i(9.9499)t} \times e^{-t} = 10.05\pi e^{-t} e^{i(9.9499t+\pi/2)}$$

Tomando la parte real:

$$\boxed{x_{\mathsf{ss}}(t) = 10.05\pi e^{-t}\cos(9.9499t + \pi/2)}$$

O equivalentemente:

$$\boxed{x_{\mathsf{ss}}(t) = -10.05\pi e^{-t}\sin(9.9499t)}$$

Interpretación:

- La magnitud oscila con frecuencia $\omega \approx 10$ rad/s
- La amplitud decae exponencialmente con factor e^{-t} (amortiguamiento)

¿QUÉ ES LA SERIE DE FOURIER?

Una **serie de Fourier** es una herramienta que nos permite representar una función periódica en términos de una sumatoria infinita de funciones sinusoidales (de seno y coseno), cuyas frecuencias son múltiplos de la función original, la formula general es la siguiente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(\frac{2n\pi x}{T}) + b_n sen(\frac{2n\pi x}{T})$$

donde T es el periodo en el que la funciíon está definida tambien se define como 2L.

La serie de Fourier utiliza los coeficientes a y b, los cuales se hallan mediante la siguientes formulas:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)cos(\frac{2n\pi x}{T})dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)sen(\frac{2n\pi x}{T})dx$$

Dentro de la formula de oscilaciones forzadas, se pueden representar las funciones de fuerza como

$$F_n(t) = a_n cos(nt) + b_n sin(nt)$$

y cada una de estas fuerzas produce una respuesta particular al sistema, de la forma:

$$x_n(t) = a_n cos(nwt - \phi_n)$$

y con un desfase dado por:

$$\phi_n = tan^{-1}(\frac{cnw}{k - m(nw)^2})$$

DESCOMPOSICION DE LA FUERZA

tomando a "c" como el coeficiente de amortiguamiento, "m" como la masa, "k" como constante de rigidez y w como frecuencia fundamental del sistema.
teniendo en cuenta que el resultado de la ecuación tiene parte homogenea y particula, se toma de esta manera la formula:

$$x(t) = x_h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n t$$

y utilizando la formula de series de fourier, nos da la siguiente formula:

$$F(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n cos(w_0 nt) + d_n sen(w_0 nt)$$

Enunciado:

Oscilaciones forzadas bajo fuerza periódica no senoidal
En (1), con $m = 1$ (g), $c = 0.02$ (g/s) y $k = 25$ (g/s²), se obtiene:

$$y'' + 0.02y' + 25y = r(t)$$

donde $r(t)$ es una fuerza periódica no senoidal dada por la Figura 244.

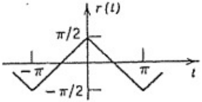

Figura 244. Fuerza en el ejemplo 1.

Figure: figura 244

La fuerza $r(t)$ se mide en cm/s^2 y está definida por:

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & \text{si } -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}$$

con período $r(t + 2\pi) = r(t)$.

Encontrar la solución de estado estacionario $y(t)$.

PASO 1: EXPANSIÓN DE FOURIER DE LA FUERZA

Se representa $r(t)$ por una serie de Fourier encontrándose:

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right)$$

Características de esta serie:

- Solo contiene términos coseno (la función es par)
- Los coeficientes decaen rápidamente: $1/9, 1/25, \ldots$
- Cada término es un armónico de la fuerza original

PASO 2: APLICAR FOURIER A LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Sustituimos la serie de Fourier en la ecuación:

$$y'' + 0.02y' + 25y = \frac{4}{\pi}\cos nt, \quad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Por la linealidad del sistema, resolvemos para cada armónico por separado y sumamos las soluciones.

PASO 3: SOLUCIÓN PARTICULAR PARA CADA ARMÓNICO

Para cada término $\frac{4}{\pi n^2}\cos nt$, la solución particular es:

$$y_n(t) = A_n \cos nt + B_n nt$$

Al sustituir en la ecuación diferencial se encuentra que:

$$A_n = \frac{4(25-n^2)}{n^2 D}, \quad B_n = \frac{0.08}{nD}$$

donde $D = (25-n^2)^2 + (0.02n)^2$.

PASO 4: AMPLITUD DE CADA ARMÓNICO

Como la ecuación diferencial (2) es lineal, la solución de estado estacionario es:

$$y(t) = y_1(t) + y_3(t) + y_5(t) + \cdots$$

Por (6), se encuentra que la amplitud de (5) es:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{n^2\pi\sqrt{D}}$$

donde cada $y_n(t) = A_n \cos nt + B_n nt$ (de (5) y (6)).

Valores numéricos para los primeros armónicos:

n	Frecuencia	C_n
1	Fundamental	0.0530
3	$3.a$ armónica	0.0088
5	$5.a$ armónica	0.0011
7	$7.a$ armónica	0.0003

PROBLEMA 3: FUERZA SINUSOIDAL SIMPLE

Enunciado:
Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + \omega^2 y = \ sent$$

para los valores: $\omega = 0.5$, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10.0.

La función forzante es $r(t) = \ sent$, que es un término individual de la expansión de Fourier. Esto es el caso más simple de la teoría: una sola componente armónica.

Por la teoría de series de Fourier, cualquier fuerza periódica es suma de armónicos:

$$r(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \; sennt)$$

En este caso, toda la fuerza es un único armónico: $r(t) = \; sent$.

Principio de superposición: La solución particular tiene la misma forma armónica que el forzante:

$$y_p(t) = A(\omega) \; sent$$

Sustituimos $y_p(t) = A(\omega)\ sent$ en la ecuación:

Primera derivada:

$$y_p'(t) = A(\omega)\cos t$$

Segunda derivada:

$$y_p''(t) = -A(\omega)\ sent$$

Sustituimos en $y'' + \omega^2 y =\ sent$:

$$-A(\omega)\ sent + \omega^2 A(\omega)t =\ sent$$

Agrupamos el coeficiente de $sent$:

$$A(\omega)(\omega^2 - 1)\ sent = \ sent$$

Igualamos coeficientes de $sent$:

$$A(\omega)(\omega^2 - 1) = 1$$

Despejamos la amplitud:

$$\boxed{A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 1}}$$

Esta es la **función de respuesta de amplitud** del sistema para una fuerza sinusoidal unitaria.

SOLUCIÓN GENERAL

La solución general incluye la respuesta homogénea (transitorios) y particular (forzada):

$$\boxed{y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \ sen\omega t + \frac{1}{\omega^2 - 1} \ sent}$$

donde C_1 y C_2 dependen de condiciones iniciales.

Interpretación:

- **Transitorios:** $C_1 \cos \omega t + C_2 \ sen\omega t$ (respuesta natural del sistema)
- **Estado estacionario:** $\frac{1}{\omega^2-1} \ sent$ (respuesta permanente forzada)

CÁLCULO DE AMPLITUDES PARA ω

Sustituimos cada valor en $A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 1}$:

ω	Cálculo	$A(\omega)$
0.5	$\frac{1}{0.25-1} = \frac{1}{-0.75}$	-1.33
0.7	$\frac{1}{0.49-1} = \frac{1}{-0.51}$	-1.96
0.9	$\frac{1}{0.81-1} = \frac{1}{-0.19}$	-5.3
1.1	$\frac{1}{1.21-1} = \frac{1}{0.21}$	4.8
1.5	$\frac{1}{2.25-1} = \frac{1}{1.25}$	0.8
2.0	$\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$	0.33
10.0	$\frac{1}{100-1} = \frac{1}{99}$	0.01

Observaciones clave:

- **Cuando $\omega \to 1$:** El denominador $(\omega^2 - 1) \to 0$, la amplitud $\to \infty \Rightarrow$ **RESONANCIA**
- **Cuando $\omega < 1$:** La amplitud es negativa, indicando desfase de 180° (la respuesta es opuesta a la fuerza)
- **Cuando $\omega \gg 1$:** La amplitud es pequeña, el sistema apenas responde a fuerzas rápidas

Este es el comportamiento típico de un **oscilador forzado sin amortiguamiento**.

PROBLEMA 5: FUERZA PERIÓDICA GENERAL (SERIE DE FOURIER)

Enunciado:
Encontrar la solución general de:

$$y'' + \omega^2 y = r(t)$$

donde $r(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt$ y $|\omega| \neq 1, 2, \ldots, N$.

Aquí la fuerza externa es una **expansión de Fourier completa** con múltiples armónicos.

PASO 1: RECONOCER LA ESTRUCTURA DE FOURIER

La fuerza externa está dada como suma de cosenos con diferentes frecuencias:

$$r(t) = a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + a_3 \cos 3t + \cdots + a_N \cos Nt$$

Esto es una **descomposición de Fourier incompleta** (solo contiene cosenos, no senos). Cada término representa un armónico diferente de la fuerza.

La condición $|\omega| \neq 1, 2, \ldots, N$ asegura que no hay resonancia exacta.

PASO 2: APLICAR EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Por linealidad, la solución particular es la suma de las respuestas a cada armónico:

$$y_p(t) = A_1(\omega)\cos t + A_2(\omega)\cos 2t + \cdots + A_N(\omega)\cos Nt$$

donde cada $A_n(\omega)$ es la amplitud de respuesta al armónico n.

Este es el núcleo del análisis de Fourier: resolver para cada frecuencia por separado y sumar.

PASO 3: RESOLVER CADA ARMÓNICO

Para cada término $a_n \cos nt$ en la fuerza, proponemos:

$$y_{p,n}(t) = A_n(\omega) \cos nt$$

Derivando dos veces:

$$y''_{p,n}(t) = -n^2 A_n(\omega) \cos nt$$

Sustituyendo en $y'' + \omega^2 y = a_n \cos nt$:

$$-n^2 A_n(\omega) \cos nt + \omega^2 A_n(\omega) \cos nt = a_n \cos nt$$

PASO 3 (CONTINUACIÓN): CÁLCULO DE AMPLITUDES

Agrupamos:

$$A_n(\omega)(\omega^2 - n^2)\cos nt = a_n \cos nt$$

Igualamos coeficientes:

$$A_n(\omega)(\omega^2 - n^2) = a_n$$

Despejamos cada amplitud:

$$\boxed{A_n(\omega) = \frac{a_n}{\omega^2 - n^2}}$$

Nótese que esto es exactamente como el caso anterior, pero generalizado para cada armónico.

SOLUCIÓN GENERAL

La solución completa es:

$$\boxed{y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \omega t + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt}$$

donde:

- **Términos homogéneos:** $C_1 \cos \omega t + C_2 \omega t$ (oscilación natural)
- **Suma de Fourier forzada:** $\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt$ (respuesta a cada armónico)

Puntos importantes:

- Si $\omega = n$ para algún n, el denominador es cero y hay **resonancia exacta** en ese armónico (por eso $|\omega| \neq 1, 2, \ldots, N$)
- Cada armónico contribuye con su propia amplitud $A_n(\omega)$
- La respuesta total es la **superposición de todas las respuestas armónicas**
- Si ω es grande, todas las amplitudes son pequeñas: el sistema no responde a múltiples armónicos rápidos

POR QUÉ ES IMPORTANTE EL ANÁLISIS DE FOURIER

La serie de Fourier convierte un problema complejo en varios problemas simples:

1. Descomponer $r(t)$ en armónicos (serie de Fourier)
2. Resolver la ecuación para cada armónico
3. Sumar todas las soluciones

Sin Fourier, resolver sistemas forzados con formas complicadas de $r(t)$ sería prácticamente imposible.

Conclusión: El análisis de Fourier es la herramienta fundamental para entender cómo sistemas lineales responden a fuerzas periódicas complejas.

Referencias de la exposición:

· Funcion de transferencia (polos)

$https://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/PoleZero.pdf$

· Series de Laurent:

$https://www.youtube.com/watch?v=jcIzGkZlpYg$

· Oscilaciones forzadas:

$https://www.youtube.com/watch?v=dZw9yYFpENs$

· Series de Fourier:

$https://www.youtube.com/watch?v=PNscWFvBRrc$

Juan Jurado, Devin Alzate, Sofia Castro
Universidad Distrital Francisco Jose De Caldas

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS