Nama : Devlin Manuel
NIM : 232202035
Prodi : IBDA 2023

(1) Tentukan nilai α dan β sehingga $f_X(x)$ merupakan fungsi massa peluang dari variabel acak X.

a.)
$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^x, & x = 1,2,3,\dots \\ 0, & x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

↳ dengan prinsip $\sum_{x \in S_X} f_X(x) = 1$, jadi :

$$\sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow \text{deret geometri } \left(r = \frac{2}{3}\right)$$

[untuk $|r| < 1$] $= \frac{r}{1-r} = 1$

$$\alpha \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$$
$$2\alpha = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{2}$$

∴ nilai α adalah $\frac{1}{2}$

b)
$$f_X(x) = \begin{cases} \beta\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}, & x = 0,1,2 \\ 0, & x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

x	$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$
0	$\beta\binom{2}{0}\binom{3}{3-0} = \beta$
1	$\beta\binom{2}{1}\binom{3}{3-1} = 6\beta$
2	$\beta\binom{2}{2}\binom{3}{3-2} = 3\beta$

dengan prinsip $\sum_{x \in S_X} f_X(x) = 1$,

$$\sum_{x \in S_X} f_X(x) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2)$$
$$1 = \beta + 6\beta + 3\beta$$
$$1 = \beta(1+6+3)$$
$$1 = 10\beta$$
$$\beta = \frac{1}{10}$$

∴ nilai β adalah $\frac{1}{10}$

(2) 100 hari berbeda → amati banyak telur yang menetas dari 17:00 - 17:05

Banyak telur	0	1	2	3	4	5
Banyak hari	36	28	15	10	7	4

a.) Definisikan variabel acak X yang tepat untuk mendeskripsikan kasus

→ X menyatakan banyak telur yang menetas dalam 5 menit $S_X = \{0,1,2,3,4,5\}$

b.) Tentukan fungsi massa peluang $f_X(x)$ yg sesuai dengan data yg diberikan.

• $f_X(0) = \frac{36}{100}$ • $f_X(1) = \frac{28}{100}$ • $f_X(2) = \frac{15}{100}$

• $f_X(3) = \frac{10}{100}$ • $f_X(4) = \frac{7}{100}$ • $f_X(2) = \frac{4}{100}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{36}{100}, & x=0 \\ \frac{28}{100}, & x=1 \\ \frac{15}{100}, & x=2 \\ \frac{10}{100}, & x=3 \\ \frac{7}{100}, & x=4 \\ \frac{4}{100}, & x=5 \end{cases}$$

atau

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}36, & x=0 \\ 0{,}28, & x=1 \\ 0{,}15, & x=2 \\ 0{,}10, & x=3 \\ 0{,}07, & x=4 \\ 0{,}04, & x=5 \end{cases}$$

c.) Gunakan hasil (b) untuk menghitung nilai $\mathbb{P}(3 \le X \le 4)$ dan $\mathbb{P}(X > 1)$

• $\mathbb{P}(3 \le X \le 4) = \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4)$
$= f_X(3) + f_X(4) = \frac{10}{100} + \frac{7}{100}$
$= \frac{17}{100} = 0{,}17$

• $\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5)$
$= f_X(2) + f_X(3) + f_X(4) + f_X(5)$
$= \cancel{0{,}15 + 0{,}10}\ \frac{15}{100} + \frac{10}{100} + \frac{7}{100} + \frac{4}{100}$
$= \frac{36}{100} = 0{,}36$

(3) Suatu peubah acak X memiliki distribusi peluang sebagai berikut, tentukan.

X	-0,1	1,9	20γ	3	4
$f_X(X) = \mathbb{P}(X = x)$	0,1	γ	0,3	γ	4γ

a) nilai γ,

→ total peluang sama dengan 1 :

$$\sum_{x \in S_X} f_X(x) = f_X(-0{,}1) + f_X(1{,}9) + f_X(20\gamma) + f_X(3) + f_X(4)$$
$$1 = 0{,}1 + \gamma + 0{,}3 + \gamma + 4\gamma$$
$$1 = 6\gamma + 0{,}4$$
$$0{,}6 = 6\gamma$$
$$\gamma = 0{,}1$$

b.) Sketsa $f_X(x)$

→ $f_X(-0{,}1) = \mathbb{P}(X = -0{,}1) = 0{,}1$

→ $f_X(1{,}9) = \mathbb{P}(X = 1{,}9) = \gamma = 0{,}1$

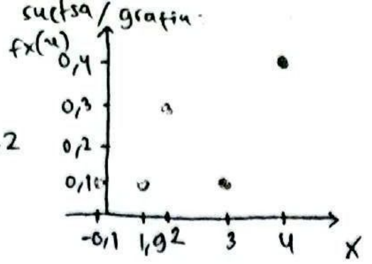
→ $f_X(20\gamma) = \mathbb{P}(X = 20\gamma) = 0{,}3$

→ $f_X(3) = \mathbb{P}(X=3) = \gamma = 0{,}1$

→ $f_X(4) = \mathbb{P}(X=4) = 4\gamma = 0{,}4$

$$f_x(x) = \begin{cases} 0{,}1 & , x = -0{,}1 \\ 0{,}1 & , x = 1{,}9 \\ 0{,}3 & , x = 2 \\ 0{,}1 & , x = 3 \\ 0{,}4 & , x = 4 \end{cases}$$

sketsa / grafik:



c.) fungsi $F_x(x)$

$\rightarrow F_x(-0{,}1) = \mathbb{P}(X=-0{,}1) = 0{,}1$ //

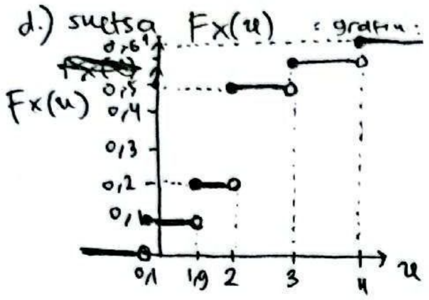
$\rightarrow F_x(1{,}9) = f_x(-0{,}1) + f_x(1{,}9)$
$= \mathbb{P}(X=-0{,}1) + \mathbb{P}(X=1{,}9)$
$= 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$ //

$\rightarrow F_x(2) = f_x(-0{,}1) + f_x(1{,}9) + f_x(2)$
$= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}5$ //

$\rightarrow F_x(3) = f_x(-0{,}1) + f_x(1{,}9) + f_x(2) + f_x(3)$
$= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}6$ //

$\rightarrow F_x(4) = f_x(-0{,}1) + f_x(1{,}9) + f_x(2) + f_x(3) + f_x(4)$
$= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}4 = 1$ //

d.) sketsa $F_x(x)$: grafik :



$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & , x < -0{,}1 \\ 0{,}1 & , -0{,}1 \le x < 1{,}9 \\ 0{,}2 & , 1{,}9 \le x < 2 \\ 0{,}5 & , 2 \le x < 3 \\ 0{,}6 & , 3 \le x < 4 \\ 1 & , x \ge 4 \end{cases}$$

e.) nilai harapan X (ekspektasi): $S_x = \{-0{,}1, 1{,}9, 2, 3, 4\}$

$\rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in S_x} x \cdot f_x(x)$

$= -0{,}1 \cdot (0{,}1) + 1{,}9(0{,}1) + 2(0{,}3) + 3(0{,}1) + 4(0{,}4)$

$= 2{,}68$ //

f.) nilai variansi X

$\rightarrow Var[X] = \sum_{x \in S_x} (x - \mu_x)^2 \cdot f_x(x)$

$= (-0{,}1 - 2{,}68)^2 \cdot 0{,}1 + (1{,}9 - 2{,}68)^2 \cdot 0{,}1 + (2 - 2{,}68)^2 \cdot 0{,}3 + (3 - 2{,}68)^2 \cdot 0{,}1 + (4 - 2{,}68)^2 \cdot 0{,}4$

$= 1{,}6796$ //

4. → rata-rata tanker yang tiba tiap hari $(\lambda) = 10$
→ menerima maksimal 15 tanker setiap hari → $X_1 \sim Poi(10)$

a.) berapa peluang menerima tepat hanya 7 tanker minyak perhari.

$\rightarrow \mathbb{P}(X_1 = 7) = f_{X_1}(7) = e^{-10} \cdot \frac{10^7}{7!} \approx 0{,}0900792$ //

b.) berapa peluang menerima lebih dari 10 tanker minyak per hari:

$\rightarrow \mathbb{P}(X_2 > 10) = \mathbb{P}(X_2 = 11) + \mathbb{P}(X_2 = 12) + \mathbb{P}(X_2 = 13) + \mathbb{P}(X_2 = 14) + \mathbb{P}(X_2 = 15)$

$= e^{-10} \cdot \frac{10^{11}}{11!} + e^{-10} \cdot \frac{10^{12}}{12!} + e^{-10} \cdot \frac{10^{13}}{13!} + e^{-10} \cdot \frac{10^{14}}{14!} + e^{-10} \frac{10^{15}}{15!} = \frac{1}{e^{10}} \left[\frac{10^{11}}{11!} + \frac{10^{12}}{12!} + \frac{10^{13}}{13!} + \frac{10^{14}}{14!} + \frac{10^{15}}{15!} \right]$

$= \frac{1}{e^{10}} \cdot 8.110{,}581854$

$\approx 0{,}36822$ //

c.) berapa peluang terpaksa menolak tanker karena sudah penuh. (~~x lebih dari 15~~) → ketika $X = 15$

$\rightarrow \mathbb{P}(X_3 = 15) = e^{-10} \cdot \frac{10^{15}}{15!} = 0{,}034718$ //

5. Misalkan X : banyak klaim yang terjadi dalam satu tahun hingga ditemukan klaim pertama yang bernilai di atas 50 juta rupiah. ⇒ DISTRIBUSI GEOMETRI !

→ peluang terjadinya klaim diatas 50 juta rupiah dalam 1 tahun $(p) = 0{,}2$

→ Berapa peluang pada klaim ketiga ditahun tersebut muncul pertama kali klaim yang bernilai diatas 50 juta rupiah $(f_x(3))$?

$\rightarrow PMF = f_x(3) = p \cdot (1-p)^{x-1} = 0{,}2(1 - 0{,}2)^{3-1} = 0{,}2 \cdot (0{,}8)^2 = 0{,}128$ //

6. → Hasil penelitian WHO : 20 org pasien flu burung yang dapat sembuh kembali ⟹ 1 org.
→ Bila di Bandung ada 15 orang pasien flu burung, berapa peluang ⟹ DISTRIBUSI BINOMIAL!

(a) Paling banyak 10 orang akan sembuh. → misal X = variabel acak yang menyatakan banyak pasien flu burung yang dapat sembuh kembali.

$$\to P(X \le 10) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=10)$$

$$= \binom{15}{0}\left(\frac{1}{20}\right)^0\left(\frac{19}{20}\right)^{15} + \binom{15}{1}\left(\frac{1}{20}\right)^1\left(\frac{19}{20}\right)^{14} + \binom{15}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{13} + \dots + \binom{15}{10}\left(\frac{1}{20}\right)^{10}\left(\frac{19}{20}\right)^{5}$$

$$X \sim \text{binom}\left(\underbrace{20}_{N}, \underbrace{\tfrac{1}{20}}_{P}\right)$$

modal:
$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

$$= 1 = 100\%$$

(b.) tepat 5 orang yang sembuh:

$$\to P(X=5) = \binom{15}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^5\left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 0{,}00056187$$

(c) antara 3 sampai 8 orang yang sembuh:

$$\to P(3 \le X \le 8) = \sum_{x=3}^{8}\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x} = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + \dots + P(X=8)$$

$$= \binom{15}{3}\left(\frac{1}{20}\right)^3\left(\frac{19}{20}\right)^{12} + \binom{15}{4}\left(\frac{1}{20}\right)^4\left(\frac{19}{20}\right)^{11} + \binom{15}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^5\left(\frac{19}{20}\right)^{10} + \dots + \binom{15}{8}\left(\frac{1}{20}\right)^8\left(\frac{19}{20}\right)^{7}$$

$$\approx 0{,}0362$$