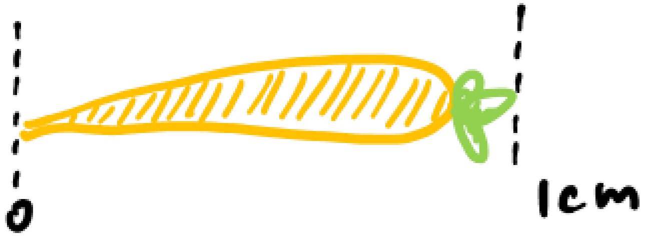
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
God's People for God's Glory

Konsep Variabel Acak Kontinu

Variabel Acak Kontinu, Support, Fungsi Kepadatan Peluang, dan Fungsi Distribusi Kumulatif

1.1 Fungsi Kepadatan Peluang dan Fungsi Distribusinya

Sebuah wortel memiliki panjang 1 cm. Seorang ilmuan komputer ingin memotong wortel tersebut secara acak dengan memiliki suatu titik di antara wortel, lalu memotongnya pada titik tersebut. Berapakah ekspektasi panjang potongan wortel terbesar yang dihasilkan oleh mekanisme ini?



$S_X := [0,1]$. $\rightsquigarrow$ kontinu

Definisi. Misalkan X variabel acak diskrit, maka fungsi massa peluang (PMF) dari variabel acak X adalah suatu fungsi $f_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ yang memenuhi sifat-sifat di bawah ini.

1. Untuk setiap $x \in S_X$ berlaku $0 \leq f_X(x) \leq 1$. ✓
2. $\displaystyle\sum_{x \in S_X} f_X(x) = 1$. ✓
3. $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$. ✓

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Definisi. Misalkan X variabel acak kontinu, maka fungsi kepadatan peluang (PDF) dari variabel acak X adalah suatu fungsi $f_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ yang memenuhi sifat-sifat di bawah ini.

1. Untuk setiap $x \in S_X$ berlaku $f_X(x) \geq 0$. ✓
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1.$ ✓
3. $\displaystyle\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\, dx.$

kalkulus I !

$\Sigma \longrightarrow \int$

(diskrit) (kontinu)

Definisi. Misalkan X variabel acak kontinu, maka fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari variabel acak X adalah $F_x : \mathbb{R} \to [0, 1]$ yang didefinisikan sebagai

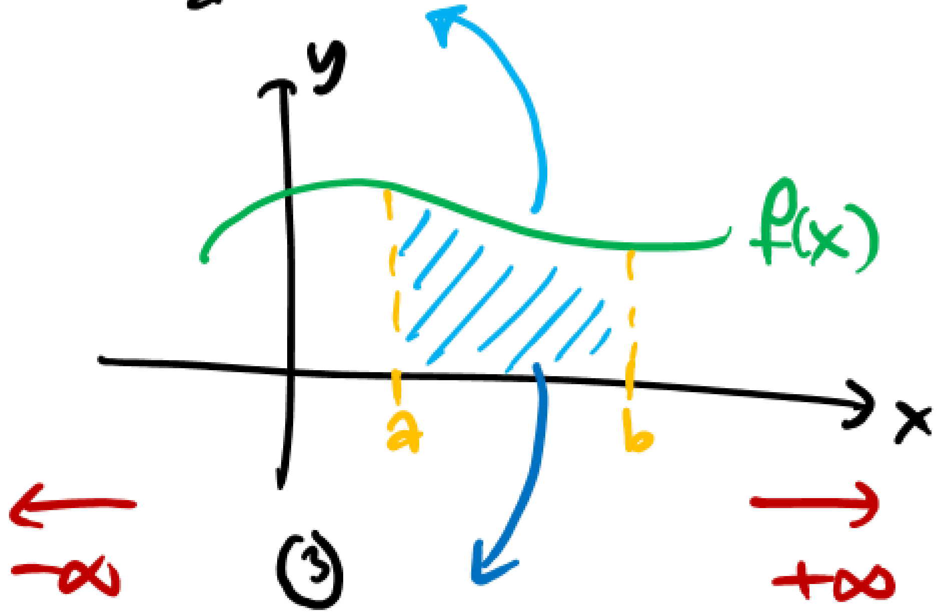
$$\underbrace{F_x(x) = \mathbb{P}(X \leq x)}_{\text{mengamati sampai } x.} = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx}.$$

x

$\leftarrow$ $-\infty$

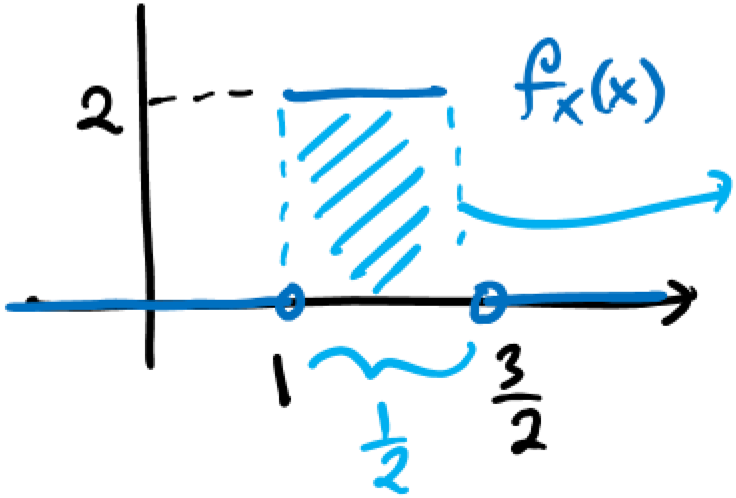
$\int_a^b f(x)\,dx$ ~ luas dibawah kurva

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$



$\mathbb{P}(a<X<b)$

(1)



$\int_a^b f(x)\,dx = 1$

Misalkan X variabel acak yang menyatakan besarnya kesalahan dari pengukuran suhu dengan termometer tembak dengan $S_X \in [-1, 2]$. Diketahui fungsi kepadatan peluangnya adalah

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & x \in [-1, 2] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 2] \end{cases}$$

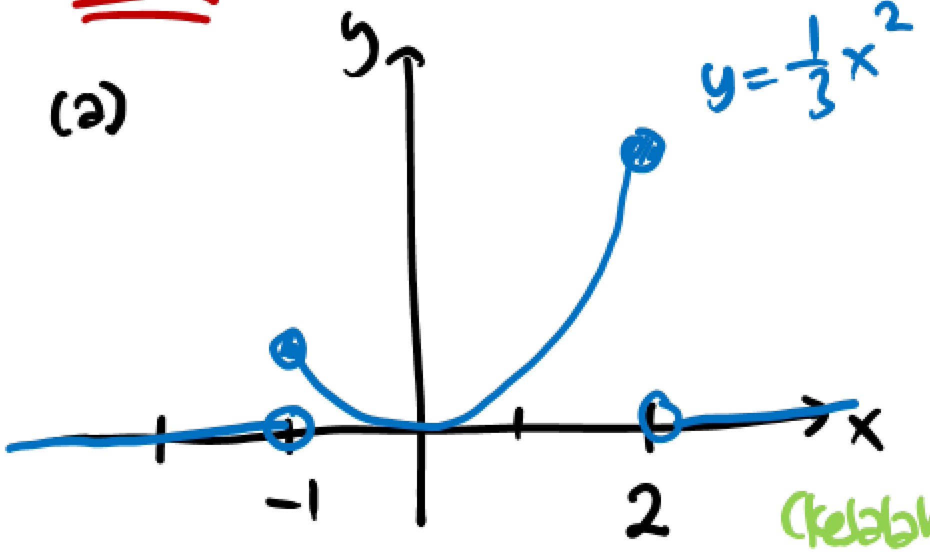
dibuang Interval $[-1,2]$

(a) Gambarkan fungsi kepadatan peluang dari X, lalu berikan intepretasi!

(b) Dalam suatu pengukuran, berapa peluang kesalahan berada di antara -0.5 sampai 0.5?

Jawab :

(a)

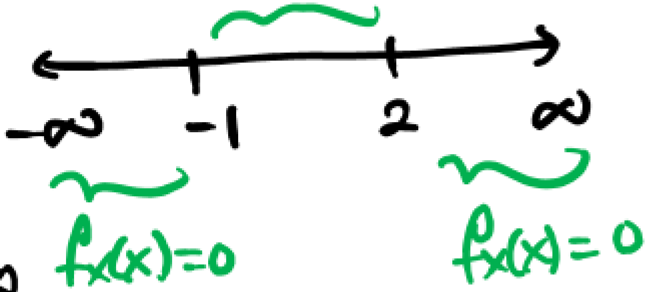


(kesalahan)

Buktikan $f_X(x)$ fungsi peluang?

$f_X(x) = \frac{1}{3}x^2$

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx \overset{?}{=} 1$



$$= \int_{-\infty}^{-1} \cancel{0}\,dx + \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^2\,dx + \int_{2}^{\infty} \cancel{0}\,dx = \ldots = 1 \,//$$

0 0

!!

Intepretasi : $\mathbb{P}$(kesalahan kecil) = $\boxed{\text{kecil}}$ jarang terjadi

X

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(b) $\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}x^2\,dx$

3

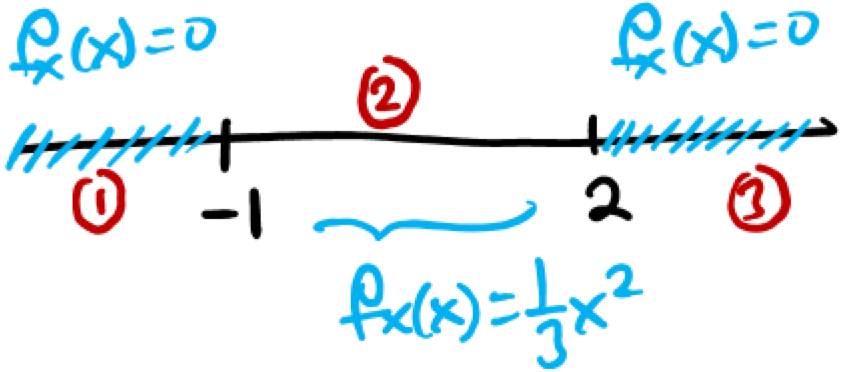
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)\right] = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{36} \approx 0{,}027$$

(c) Tentukan dan gambarkan fungsi distribusi kumulatif dari X.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & x \in [-1, 2] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 2] \end{cases}$$

CDF : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$



① : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, $x \in (-\infty, -1)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{x} 0\,dt} = 0 \;//$$

② : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, $x \in [-1, 2]$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt} + \int_{-1}^{x} \frac{1}{3} t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{9}(x^3 + 1) \;//$$

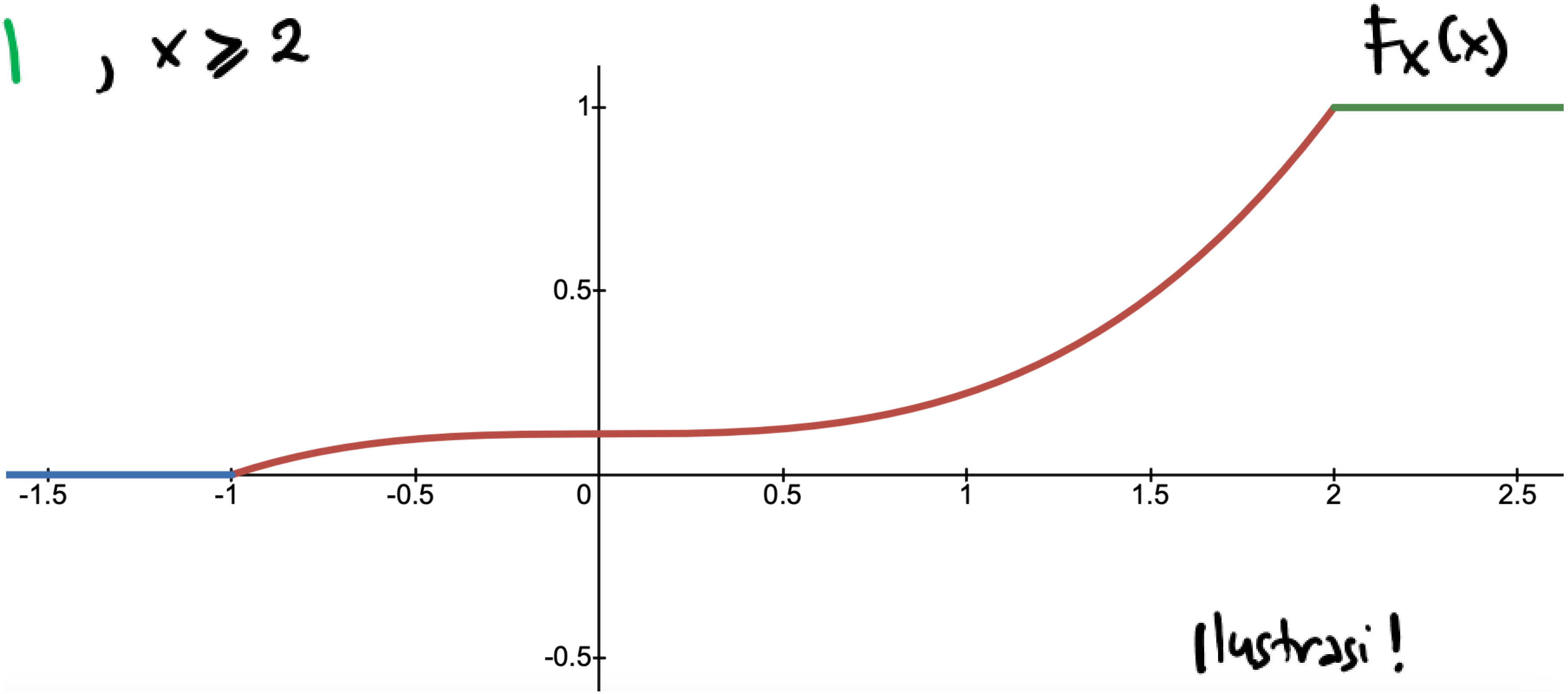
③ : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, $x \in (2, \infty)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt} + \int_{-1}^{2} \frac{1}{3} t^2\,dt + \cancelto{0}{\int_{2}^{x} 0\,dt}$$

$$= 1 \;//$$

Gamberkan!!!

$$\therefore F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{9}(x^3+1), & -1 \le x \le 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$



Ilustrasi!

Dalam variabel acak kontinu, kita memiliki beberapa catatan.

1. Peluang dari suatu ____titik____ adalah nol, kita tuliskan sebagai $\mathbb{P}(X = k) = 0$.

   → kemungkinan utk persis terjadinya suatu kejadian di satu titik sangat kecil!

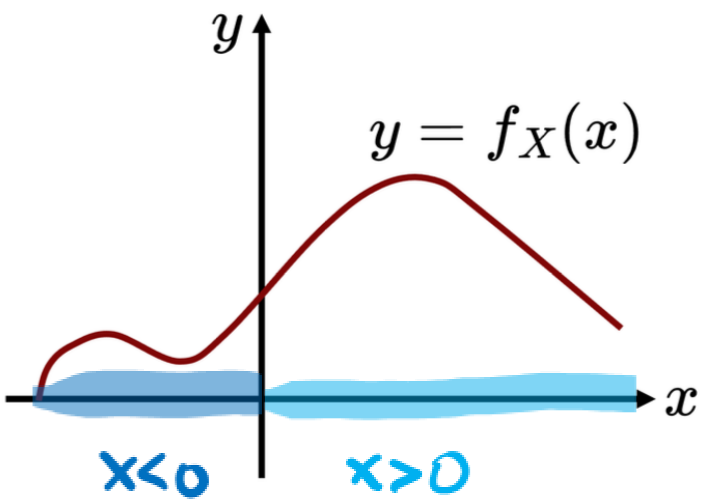
   " $f_X(k)$ diskrit!

2. Misalkan $f_X(x)$ dan $F_X(x)$ berturut-turut adalah PDF dan CDF dari X. Maka,

   - CDF adalah ____Integral____ dari PDF, yakni $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$.
   - PDF adalah ____"turunan"____ dari CDF, yakni $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$.

   TDK I

(a) Perhatikan grafik fungsi kepadatan peluang dari suatu peubah acak berikut!



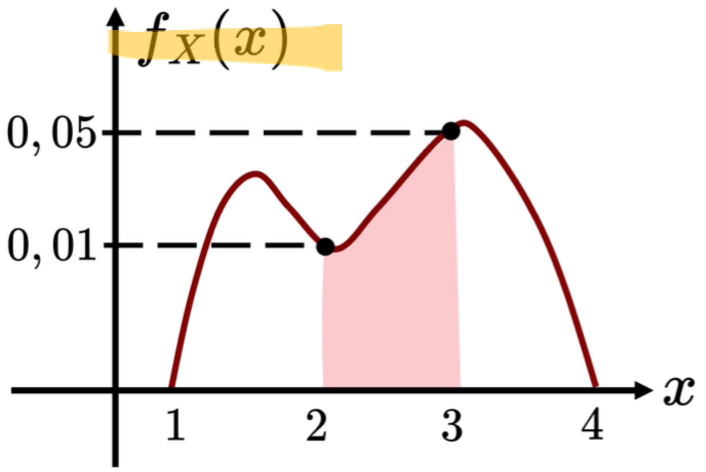
Manakah deskripsi yang paling tepat untuk deksripsikan grafik tersebut?

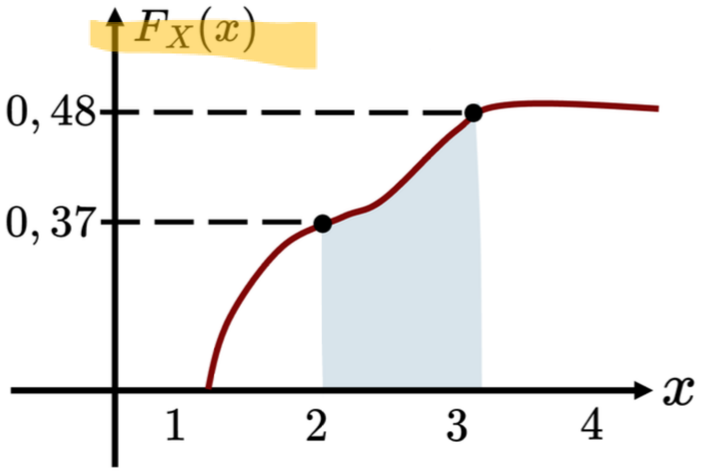
A. Nilai X tidak mungkin negatif. ✗
B. Nilai X lebih mungkin negatif daripada positif. ✗
C. Nilai X tidak mungkin positif. ✗
D. Nilai X lebih mungkin positif daripada negatif.
E. Nilai X sama-sama mungkin positif atau negatif.

$L(x>0) > L(x<0)$ ~ nilai peluang ...

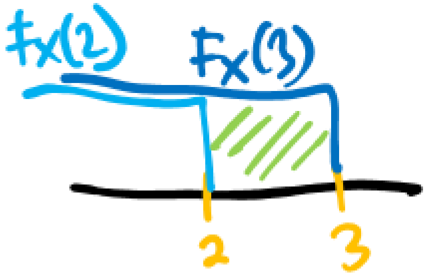
lebih mungkin x positif

(b) Diberikan grafik PDF dan CDF suatu peubah acak.





$\int_2^3 f_X(x)\,dx =$



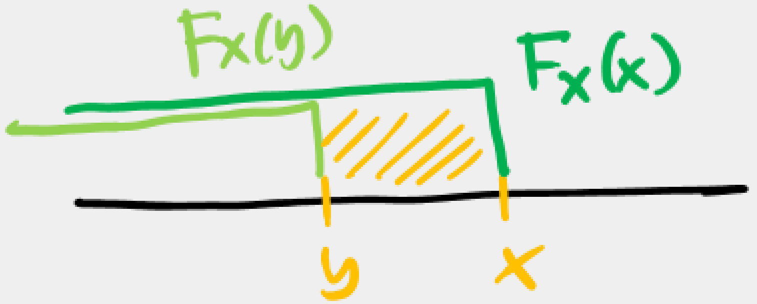
Pernyataan	Benar/Salah
$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$ adalah luas daerah yang diarsir merah.	B
$\mathbb{P}(X = 2) = \cancel{0,01}$. 0	S
$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3) = 0.48 - 0,37$. $\rightarrow F_X(3)$ $\rightarrow F_X(2)$	B
Luas yang diarsir ~~biru~~ adalah nilai $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$.	S

$\int_2^3 F_X(x)\,dx$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Lema. Misalkan X variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluangnya adalah $f_X(x)$ dan fungsi distribusi kumulatifnya adalah $F_X(x)$. Maka, untuk sembarang x dan y di S_X berlaku

1. $\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$. ✓ definisi
2. $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F_X(x)$. ✓ (komplemen)
3. $\mathbb{P}(y < X < x) = \mathbb{P}(y \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(y)$.



Misalkan diketahui data berikut:

$\mathbb{P}(X=2) = \cancel{0{,}100} = 0$

x	$f_X(x)$	$F_X(x)$
1	0,050	0,25
2	0,100	0,56
3	0,075	0,85
4	0,001	0,93

$f_X(2) = 0{,}1 \neq \mathbb{P}(X=2)$

Berapakah nilai dari peluang

(a) $\mathbb{P}(X < 2) = F_X(2) = 0{,}56$ //

(b) $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - F_X(3)$
$= 1 - 0{,}85 = 0{,}15$ //

(c) $\mathbb{P}(2 \leq X < 4) = F_X(4) - F_X(2)$
$= 0{,}93 - 0{,}56 = 0{,}37$ //

Misalkan X merupakan variabel acak yang menyatakan panjang potongan wortel terbesar hasil potongan acak. Diberikan informasi bahwa fungsi distribusi kumulatif dari X adalah

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

(a) $\xrightarrow{d/dx}$ $f_X(x) = \begin{cases} 2, & \boxed{\frac{1}{2} < x \leq 1} \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$

$f_X(x)$

(a) Hitunglah fungsi kepadatan peluang dari variabel acak tersebut!

(b) Berapa peluang potongan wortel terbesar berukuran $0,6$ sampai dengan $0,8$?

(c) Berapa peluang potongan wortel berukuran lebih besar dari $0,98$?

Jawab:

(b) $P(0,6 < X < 0,8) \overset{1}{=} \int_{0,6}^{0,8} f_X(t)\,dt = \int_{0,6}^{0,8} 2\,dt = [2t]_{0,6}^{0,8} = 0,4$ //

2 $= F_X(0,8) - F_X(0,6) = [2(0,8)-1] - [2(0,6)-1] = 0,4$ //

(c) $P(X > 0,98) \overset{2}{=} 1 - P(X \leq 0,98) = 1 - F_X(0,98)$

$= 1 - [2(0,98)-1] = 0,04$ //

1 $\int_{0,98}^{1} 2\,dx$ //

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

God's People for God's Glory

Ekspektasi dan Variansi Kontinu

Definisi dan Sifat-sifatnya

1.2 Definisi dan Sifat Ekspektasi

Definisi. Misalkan X merupakan suatu variabel acak kontinu dengan *support* S_X dan fungsi kepadatan peluangnya adalah $f_X(x)$. Ekspektasi dari X dapat didefinisikan sebagai

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx.$$

✓

Lebih jauh, Variansi dari X dapat didefinisikan sebagai

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\, dx.$$

✓

Teorema. Misalkan X variabel acak kontinu dan S_X tidak memuat bilangan negatif, maka

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_0^{\infty} 1 - F_X(x)\, dx.$$

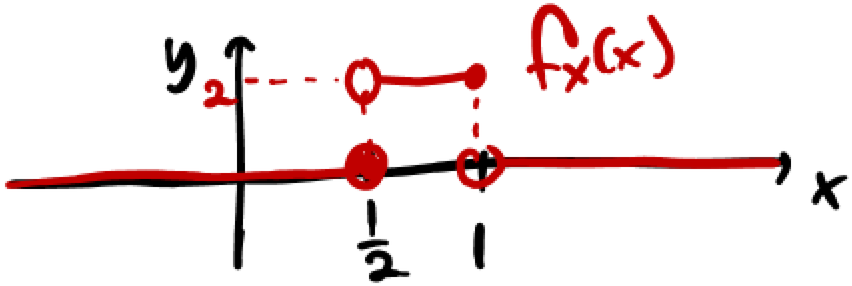
Fungsi $1 - F_X(x)$ bisa dituliskan sebagai $S_X(x)$, yakni fungsi kesintasan (*survival function*).

Misalkan X merupakan peubah acak yang menyatakan panjang potongan wortel terbesar hasil potongan acak dengan fungsi kepadatan peluang dari X adalah

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

semua kemungkinan nilai x dimana $f(x) > 0$!

$S_X := (\frac{1}{2}, 1]$



(a) Tentukan *support* dari X dan sketsa fungsi kepadatan peluang di atas!

(b) Berapakah harapan ukuran potongan wortel terbesar?

Ekspektasi

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \overbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \dots}}^{0} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \cdot \overbrace{2}^{f_X(x)}\,dx + \overbrace{\cancel{\int_{1}^{\infty} \dots}}^{0} = \int_{1/2}^{1} 2x\,dx = [x^2]_{1/2}^{1} = \frac{3}{4}$$

(c) Berapakah variansi ukuran potongan wortel terbesar?

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \underbrace{\tfrac{3}{4}}_{\text{rata}^2\text{nya}})^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x - \tfrac{3}{4})^2 \cdot \underbrace{2}_{f_X(x),\, x \in (\frac{1}{2}, 1]}\,dx = \dots = \frac{1}{48} \approx 0{,}02\dots$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_0^\infty 1 - F_X(x)\, dx.$$

$S_X(x)$: kesintasan

Misalkan X merupakan peubah acak yang menyatakan panjang potongan wortel terbesar hasil potongan acak dengan fungsi kepadatan peluang dari X adalah

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$S_X = (\frac{1}{2}, 1]$

tak memuat bil. negatif

bisa pakai ? cqc!!!

$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty 1 - F_X(x)\, dx$

Berapakah harapan ukuran potongan wortel terbesar?

Teorema. Misalkan X variabel acak kontinu, maka $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$. ✓

Apakah teorema di atas dapat diterapkan untuk variabel acak diskrit? Bagaimana membuktikannya?

Ya!!

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X-\mu_X)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2]$$

konstan ekspektasi $\mathbb{E}[X]$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mu_X X] + \mathbb{E}[\mu_X^2]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu_X \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\mu_X} + \mu_X^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu_X^2 + \mu_X^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$$

$$\underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2}_{g(x)} f_X(x)\,dx$$

Latihan!!