

Distribusi Peluang Kontinu

Distribusi Uniform, Normal, dan Eksponensial



2.1 Distribusi Uniform, Normal, dan Eksponensial

| | Uniform 6 | Normal | Eksponensial |
|-----------------------------|--|---|---|
| Karakteristik distribusi | Setiap nilai dalam interval memiliki kemungkinan yang sama untuk muncul. | Distribusi peluang yang ideal dan simetris, dengan rata- rata, median, dan modus yang bernilai sama. | Biasanya digunakan untuk menggambarkan waktu tunggu hingga kejadian Poisson terjadi dan memiliki sifat memoryless. |
| Notasi | $X \sim U(a,b), a,b \in \mathbb{R}$ | $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ | $X \sim Exp(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^+$ (real |
| Support | $a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ | $(-\infty,\infty):=\mathbb{R}$ | $X \sim Exp(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^+$ (real position) $[0,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ |
| PDF: $f_X(x)$ | (bancha.) | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\lambda e^{-\lambda x}$ |
| CDF: $F_X(x)$ | $\frac{x-a}{b-a}$ batas batas | $\int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt$ | $1 - e^{-\lambda x}$ |
| | | | |



median, modes

| | Uniform | Normal | | Eksponens | ial |
|---------------------|---|--------------|---|---------------------|--------------------|
| Sketsa PDF | 2 Cx(x) | CHA devissi) | f _x (x) L (rata ² _x) | 9 | f _x (x) |
| / Ekspektasi | $\frac{a+b}{2}$ | μ | ✓ | $\frac{1}{\lambda}$ | |
| √ Variansi | $\frac{b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3}{12(b-a)}$ | σ^2 | / | $\frac{1}{\lambda}$ | V |



$$f_{x}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & 3 \le x \le b \\ 0, & x \mid a \mid a \mid n \mid y \end{cases}$$

$$f_{x}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & 3 \le x \le b \\ 0, & x \mid a \mid a \mid n \mid y \end{cases}$$

$$f_{x}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \frac{1}{b-a} \le \frac{1}$$



Suatu ruang pertemuan disyaratkan dapat digunakan untuk rapat dengan <mark>durasi paling lama dua jam.</mark> Lamanya durasi suatu rapat diasumsikan <mark>berdistribusi uniform.</mark> Tuliskan PDF-nya untuk menentukan berapakah peluang sebuah rapat berlangsung tidak lebih dari 45 menit?

Misalkan X menyatakan durasi rapat.
$$\rightarrow S_x = [0, 120]$$
.

 $X \sim U(0, 120) \rightarrow f_{x(x)} = \frac{1}{120-0} = \frac{1}{120}$, $x \in [0, 120]$.

bala balas balas o , x lainnya.

Ditanya: $P(rapat+4k | lebih dan | 4r menit) = P(x \leq 45)$
 $P(x \leq 45) = F_x(45) (cof)$
 $= \int_{0}^{45} \frac{1}{120} dx f_{x(x)}$

$$=\frac{45-0}{120-6}=\frac{45}{120}$$

$$= \int_{0}^{10} \frac{1}{120} dx \frac{1}{120} dx \frac{1}{120} dx$$

$$= \left[\frac{1}{120} \right]_{0}^{45} = \frac{45}{120}$$



2.2 Eksplorasi Distribusi Normal

Apa yang membedakan distribusi uniform dengan distribusi normal?

• Dist. Uniform: _____ random.

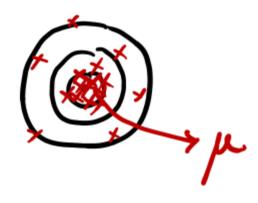




random.



N(p,0) - N(0,1)



Definisi. Distribusi normal baku adalah distribusi normal dengan $\mu = \underline{\hspace{0.5cm}}$ dan $\sigma = \underline{\hspace{0.5cm}}$. Kita notasikan Z berdistribusi normal baku sebagai $Z \in \mathcal{N}(0,1)$. Dengan demikian, kita peroleh fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatifnya adalah

$$\text{PDF}: \quad \varphi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \text{CDF}: \quad \Phi(z) := \mathbb{P}(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$$



Teorema. Misalkan $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ dengan transformasi $Z = \sum_{\mathbf{f}} maka Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sehingga

 $oxed{0}$ Misalkan peubah acak $X \sim \mathcal{N}(15,9)$, hitung nilai dari $\mathbb{P}(X < 20)$.

Transformasikan:
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-15}{9} \longrightarrow (X = 02+15)$$

$$\mathbb{P}(X < 20) = \mathbb{P}(92 + 15 < 20) = \mathbb{P}(2 < \frac{20 - 15}{9}) = \mathbb{P}(2 < \frac{5}{9}) = \Phi(\frac{5}{9})$$

 $oldsymbol{2}$ Misalkan peubah acak $X \sim \mathcal{N}(-17,20)$, hitung nilai dari $\mathbb{P}(-16 < X < 1)$.

escid lamon — normal biasa

Transformankan:
$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x+17}{20} \rightarrow x = 202-17$$

$$P(-16 < \times < 1) = P(-16 < 202 - 17 < 1) = P(-16 + 17 < 2 < \frac{1 + 17}{20}) = P(\frac{1}{20} < \frac{7}{20})$$



Normal umum:
$$f_{\chi}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{array}{c} \text{Normal umum: } f_{\chi}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ \text{Normal baku: } f_{\chi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ \text{Z} \sim N(0,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Normal baku: } f_{\chi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ \text{Norma$$



(a) Normal baku (b)
$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

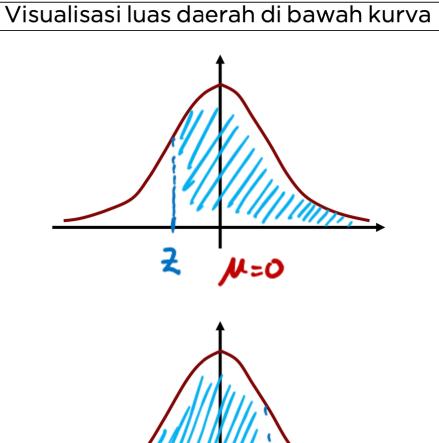
$$= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

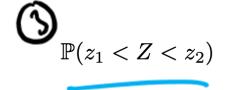
$$= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$
(b)
$$= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

| | Jenis kejadian | Perhitungan dengan $\Phi(z)$ | Visualisasi luas daerah di bawah kurva |
|---|---------------------|---|--|
| 0 | $\mathbb{P}(Z < z)$ | $\frac{1}{2}(2) = \int_{-\infty}^{2} f_{x}(x) dx$ what what label | A=0 |



| - | Jenis kejadian | Perhitungan dengar $\Phi(z)$ |
|---------|-------------------|------------------------------|
| <u></u> | $\mathbb{P}(Z>z)$ | - P(z < 2) = 1- D(2) |
| | | uhat tabel |







(a) Tinggi badan mahasiswa CIT didata dan ditemukan bahwa datanya berdistribusi normal dengan rata-rata $165~\rm cm$ dan standar deviasi $18~\rm cm$. Seorang mahasiswa baru akan diukur tinggi badannya. Berapa peluang tinggi badannya berada dalam rentang $168-170~\rm cm$.

menyalakan tinggi badan Mahasiswa CIT -> 10-tonya: IP (168<×<170)=? $P(168 < x < 170) = IP(\frac{168 - 165}{18} < Z < \frac{170 - 165}{18})$ = IP (0,166... < \Z < 0,277...) = \$\Phi(0,28) - \Phi(0,17) \rightarrow tabel \geq \nabel \geq \nabel \quad \nabel \geq \nabel \quad \nabel \quad \quad \nabel \quad \quad \nabel \quad \quad \nabel \quad \qquad \quad \qua = 0,6103-0,5675=0,0428/

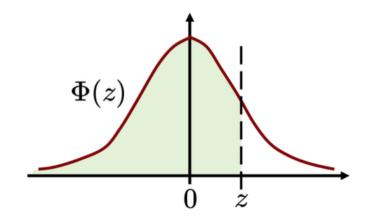


___ desimal kedua



pertamal l

$$P(Z \le z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 8.0 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |



(a) Tinggi badan mahasiswa CIT didata dan ditemukan bahwa datanya berdistribusi normal dengan rata-rata $165~\rm cm$ dan standar deviasi $18~\rm cm$. Seorang mahasiswa baru akan diukur tinggi badannya. Berapa peluang tinggi badannya berada dalam rentang $168-170~\rm cm$.

https://colab.research.google.com/drive/1-FM1_nMWDqYezW4Z8fQw5ytkP4M0-5e6?usp=sharing.

```
# X ~ N(mu, sigma)
# mu adalah rata-rata (mean) dan sigma adalah simpangan baku (standard deviation).

mu, sigma = 165, 18

(tanpa mersalami bransformasi normal baku)

# Menghitung probabilitas kumulatif P(X <= x), yaitu probabilitas X <= x.

print("P(168<X<170) = ", norm.cdf(170, mu, sigma)-norm.cdf(168, mu, sigma))

P(168<X<170) = 0.043224691955521366
```



```
# X ~ N(mu, sigma)
# mu adalah rata-rata (mean) dan sigma adalah simpangan baku (standard deviation).

mu, sigma = 0, 1

(Mengalami bransformasi normal baku)

# Menghitung probabilitas kumulatif P(X <= x), yaitu probabilitas X <= x.

print("P(168<X<170) = ", norm.cdf((170-165)/18, mu, sigma)-norm.cdf((168-165)/18, mu, sigma))
```

 \rightarrow P(168<X<170) = 0.043224691955521366



 \rightarrow

(b) Sebuah meja kuliah akan didesain agar nyaman digunakan oleh semua orang dengan tinggi badan minimal H cm. Berapakah nilai H seharusnya ditentukan agar kita dapat dengan tingkat kepercayaan 72,5% sehingga meja tersebut nyaman digunakan mahasiswa CIT?

Misalkan
$$\times$$
 Anggi mahasiswa CIT , $\times \sim N(165, 18)$
Ditanya: $P(X \ge H) = 0.725 \sim 1 - P(X < H) = 0.725$

P(X \le H) = 0.275

Dengan python, kits peroleh H ~ 154,24 cm/ [hnggi badan minimal]

Sho meja tob nyaman]



tingkat kepercayaan

Invers CDF

Definisi. Misalkan $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ dan $\alpha \in [0,1]$ dengan $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Fungsi _____ atau percent point function merupakan nilai x terkecil sehingga $\mathbb{P}(X \leq x) = \alpha$ (tingkat kepercayaan).

```
from scipy.stats import norm

# X ~ N(mu, sigma)
# mu adalah rata-rata (mean) dan sigma adalah simpangan baku (standard deviation).
mu, sigma = 165, 18

# Menentukan nilai x sedemikian rupa sehingga P(X <= x) = alpha.
# Fungsi ppf (percent point function) digunakan untuk menghitung nilai tersebut.
alpha = 0.275
print("ppf_X(", alpha, ") = ", norm.ppf(alpha, mu, sigma))
```

 \rightarrow ppf_X(0.275) = 154.2403177312354

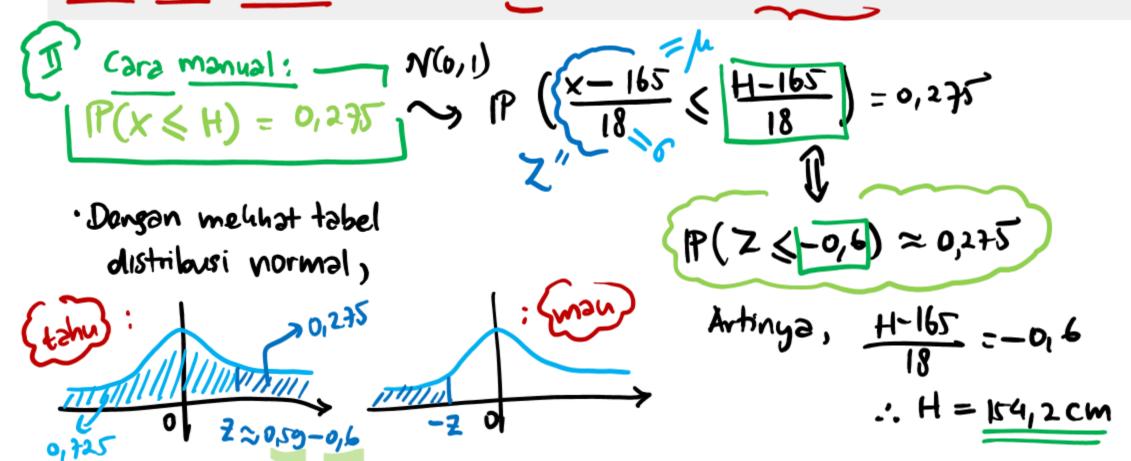
Misalkan X berdistribusi normal, yakni $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Maka, kita peroleh 'normal rules of thumb':



tingkat kepercayaan

Invers CDF

Definisi. Misalkan $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ dan $\alpha \in [0,1]$ dengan $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Fungsi _____ atau percent point function merupakan nilai x terkecil sehingga $\mathbb{P}(X \leq x) = \alpha$ (tingkat kepercayaan).



Misalkan X berdistribusi normal, yakni $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Maka, kita peroleh 'normal rules of thumb':



| Aturan | Deskripsi kejadian | Luas di bawah kurva | Nilai peluang |
|-------------------|---|---------------------|---------------|
| $\mu \pm \sigma$ | P(4-0 <x<4+0)< td=""><td>M-6 H+6</td><td>68%</td></x<4+0)<> | M-6 H+6 | 68% |
| $\mu\pm2\sigma$ | • •• | M-26 M+26 | 95% |
| $\mu \pm 3\sigma$ | | M-36 M+36 | 99,7% |

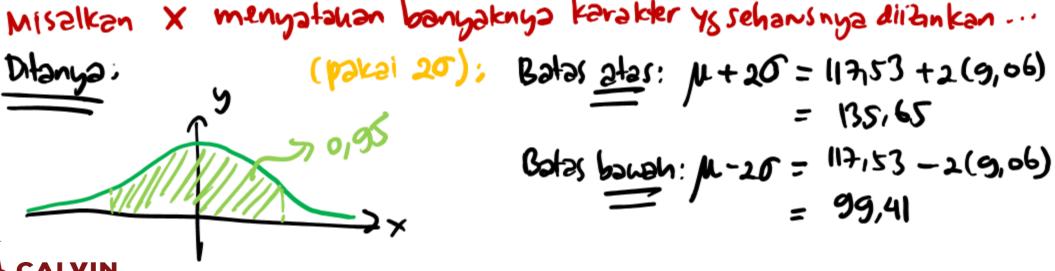


Untuk menyiapkan dataset yang baik untuk proyek Machine Learning dalam bidang Analisis Sentimen status Twitter, data mentah dari status user Twitter perlu dilakukan prapemrosesan.

 Banyaknya karakter dalam sebuah status Twitter diasumsikan mengikuti distribusi normal dengan rata-rata sebesar 117,53 karakter dan standar deviasi 9,06 karakter.

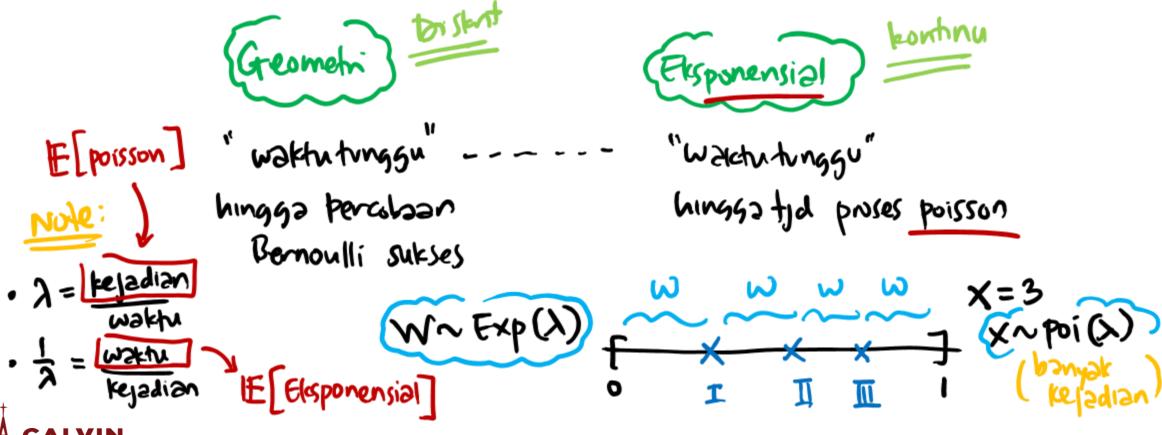
 Dalam algoritma prapemrosesan, suatu penyaring akan dipakai untuk menolak status Twitter yang terlalu pendek atau terlalu panjang, dengan target hanya membuang sekitar 5% dari dataset.

Gunakan 'normal rules of thumb' untuk menentukan berapakah batas atas dan batas bawah banyak karakter yang seharusnya diijinkan oleh algoritma agar lolos prapemrosesan?



cumo 2 -3"sukses" > pelvongsukses somo.

Distribusi geometri sering merepresentasikan waktu tunggu hingga percobaan Bernoulli sukses, sedangkan distribusi eksponensial menggambarkan waktu tunggu hingga kejadian dalam proses Poisson. Jika x adalah banyaknya kecelakaan pesawat dalam setahun dan $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, maka waktu tunggu antar kecelakaan w mengikuti $W \sim \text{Exp}(\lambda)$, dengan λ sebagai laju kejadian per tahun.



The relationship between the exponential distribution (often called the negative exponential) and the Poisson process is quite simple. In Chapter 5, the Poisson distribution was developed as a single-parameter distribution with parameter λ , where λ may be interpreted as the mean number of events per unit "time." Consider now the random variable described by the time required for the first event to occur. Using the Poisson distribution, we find that the probability of no events occurring in the span up to time t is given by

$$p(0; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}.$$

We can now make use of the above and let X be the time to the first Poisson event. The probability that the length of time until the first event will exceed x is the same as the probability that no Poisson events will occur in x. The latter, of course, is given by $e^{-\lambda x}$. As a result,

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}.$$

Thus, the cumulative distribution function for X is given by

$$P(0 \le X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Now, in order that we may recognize the presence of the exponential distribution, we differentiate the cumulative distribution function above to obtain the density function

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

which is the density function of the exponential distribution with $\lambda = 1/\beta$.

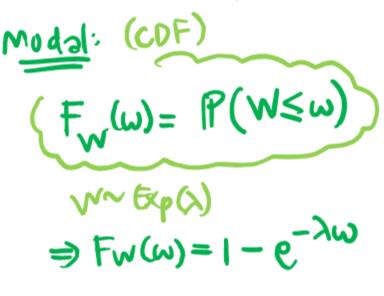


iPhone X diketahui memiliki massa hidup rata-rata 6 tahun, mengikuti distribusi eksponensial. Berapa peluang sebuah iPhone milik Dr. Calvin dapat bertahan hingga delapan tahun?

- . Misalkan W menyatakan waktu hidup 'iPhone (W~ Exp(1/6))

 Clifetime)
- · Ontanya: P (bisa bertahan hingga 8 tahun)

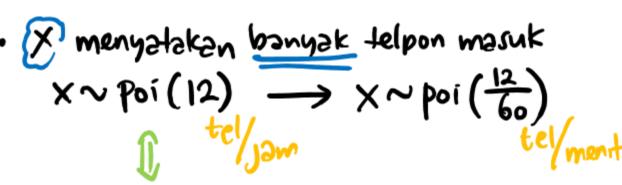
=
$$P(W > 8)$$
= $I - P(W \le 8)$
= $I - P(W \le 8)$
= $I - (I - e^{-\frac{1}{6} \cdot 8})$
= $e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.263 \text{ //}$



pikirkan Kalau mau pakai PDF saja?



Dalam suatu kantor Relasi Pelanggan, diketahui bahwa banyaknya telepon masuk mengenai keluhan pelanggan berdistribusi Poisson dengan laju 12 telepon per jam. Misalkan diketahui pada pk. 13.00 terdapat sebuah telepon keluhan pelanggan. Berapakah peluang telepon berikutnya masuk dalam rentang waktu antara pk. 13.03 hingga pk. 13.07?



W menyatakan waktu tunggu telp benikutnya masuk setelah 1300.

=
$$F_{W}(7) - F_{W}(3) = (1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 7}) - (1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 3}) = e^{0.6} - e^{1.4} \approx 0.3022$$





2.3 Distribusi Peluang Kontinu Lainnya

| Dalam statistik Bayesian, | merepresentasikan keyakinan awal tentang paramete |
|-----------------------------------|---|
| sebelum data diamati, sedangkan _ | menghitung keyakinan yang diperbarui setelal |
| mempertimbangkan data dengan ' | Teorema Bayes. Hal ini dibahas lebih jauh dalam statistik lanjut. |

| Distribusi | Parameter | Notasi | Support | Karakteristik | Contoh | PDF: $f_X(x)$ |
|--------------|-----------|--------|---------|---------------|--------|---------------|
| Eksponensial | | | | | | |
| Gamma | | | | | | |
| Chi-Square | | | | | | |
| t-student | | | | | | |
| Beta | | | | | | |
| | | | | | | |

Gambarkan sketsa fungsi kepadatan peluang $f_X(x)$ untuk setiap distribusi pada tabel di atas!

