CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
God's People for God's Glory

Konsep Variabel Acak Diskrit

Variabel Acak Diskrit, Support, Fungsi Massa Peluang, dan Fungsi Distribusi Kumulatif

1.1 Variabel Acak

Pelemparan koin tiga kali berturut-turut. $\to |\Omega| = 8$

- Ruang sampel $\Omega := \{EEE, EEM, EME, MEE, EMM, MEM, MME, MMM\}$
- Misalkan A : kejadian 3 pelemparan, 2 kali ekor (E):

  $A := \{EEM, EME, MEE\} \longrightarrow \mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$ //

- Pendekatan di atas merupakan hal yang kurang kuantitatif.

Definisi. Suatu Variabel acak merupakan suatu fungsi yang memetakan titik sampel menjadi bilangan real. Kita dapat notasikan variabel ini sebagai $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Misalkan X adalah variabel acak yang menunjukkan banyak sisi ekor yang muncul dari tiga kali pelemparan koin. Lengkapilah nilai variabel acak tersebut terhadap tabel titik sampel berikut.

Titik Sampel	EEE	EEM	EME	MEE	EMM	MEM	MME	MMM
Nilai X	3	2	2	2	1	1	1	0

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Berdasarkan jenis ruang sampel, variabel acak dapat dibagi menjadi dua jenis:

i. Variabel acak diskrit. Sebuah koin dilempar secara terus menerus sehingga diperoleh sisi ekor untuk pertama kalinya. Berapa kali pelemparan koin yang dibutuhkan? Kita akan mengamati ketidakpastian dari hasil pelemparan koin secara terus menerus hingga muncul sisi ekor.

Ruang sampel $\Omega := \{E, ME, MME, MMME, \ldots\}$

Variabel acak : $Y = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad$ dst... $\quad \mathbb{R}$

Misalkan Y adalah variabel acak yang menyatakan banyak pelemparan yg dibutuhkan shg dapat ekor pertama kali.

→ variabel acak diskrit jika ruang sampel berupa himpunan terhitung (*countable set*).

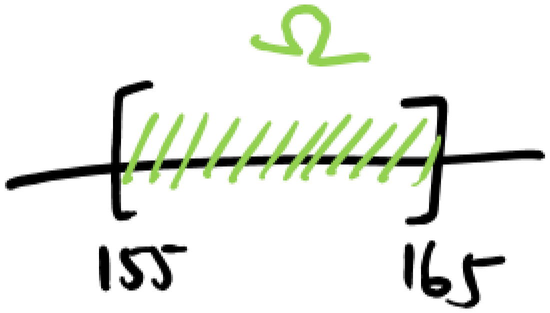
Berdasarkan jenis ruang sampel, variabel acak dapat dibagi menjadi dua jenis:

ii. Variabel acak kontinu. Kita akan mengamati ketidakpastian dari tinggi badan calon mahasiswa.

$$\Omega := (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

(ga realistik)

atau selang lain $[155, 165]$.



Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan tinggi badan calon mahasiswa.

variabel acak kontinu jika ruang sampel berupa interval atau gabungan interval.

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Sebuah kejadian acak dapat dideskripsikan secara presisi dengan menggunakan variabel acak. Tuliskan notasi peluang dari fenomena ketidakpastian dan kejadian berikut.

Fenomena Ketidakpastian dan Kejadian	Ekspresi Peluang
Mengambil sepuluh resistor secara acak dari 100 resistor yang terdiri dari 80 normal dan 20 rusak. Dari sepuluh resistor yang terambil, hanya ada satu resistor yang rusak.	$\mathbb{P}(X=1)$ diskrit

Misalkan X variabel acak yg menyatakan # resistor yang rusak dari sepuluh resistor yang terambil.

Fenomena Ketidakpastian dan Kejadian	Ekspresi Peluang
Melakukan tes IQ pada seorang mahasiswa baru. Mahasiswa baru ini sangat cerdas dan diketahui memiliki IQ di atas 140.	$\mathbb{P}(Y>140)$ kontinu

Misalkan Y variabel acak yg menyatakan hasil tes IQ mahasiswa

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

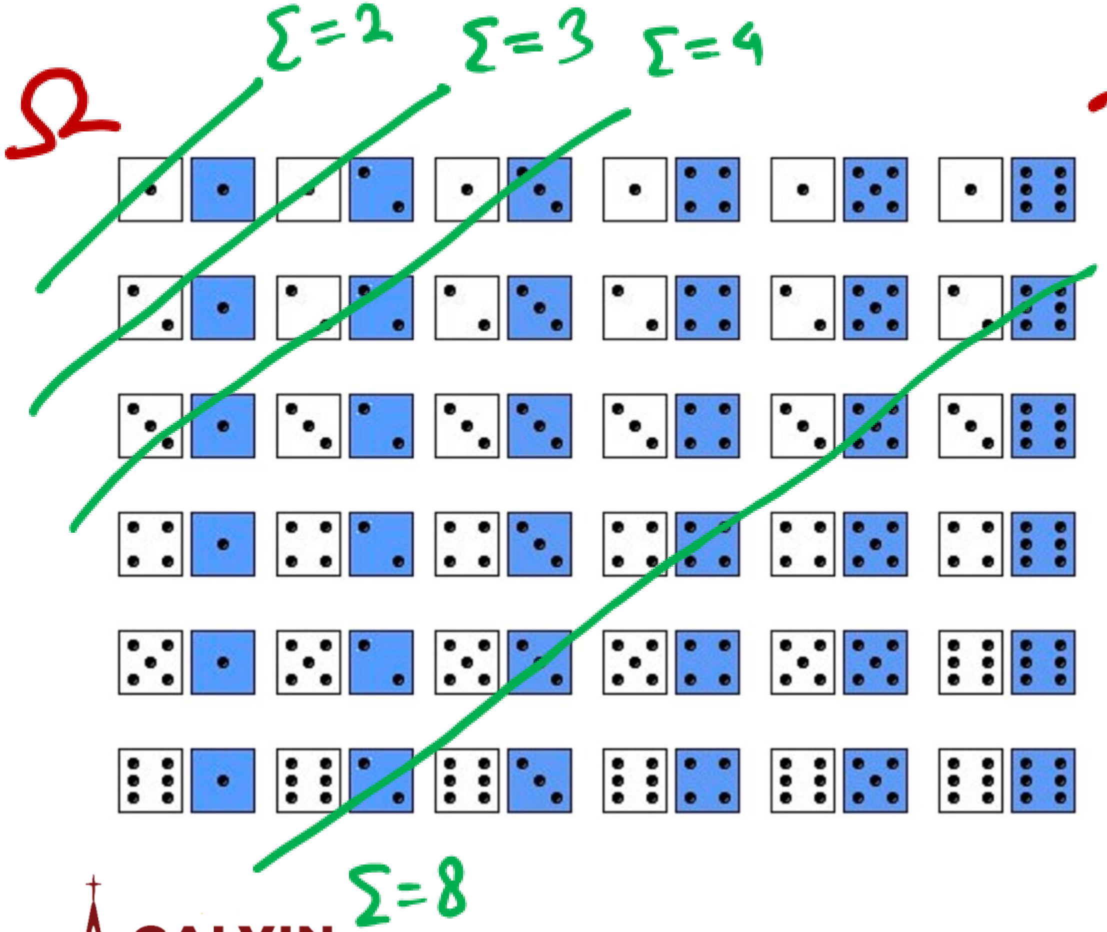
Dua buah dadu dilempar dan dicatat jumlah nilai mata dadunya.

(a) Berapa peluang jumlah mata dadunya 2?

(b) Berapa peluang jumlah mata dadunya 3?

$\{(1,1)\} \rightarrow \mathbb{P}(\Sigma = 2) = \frac{1}{36}$

$\{(1,2),(2,1)\} \rightarrow \mathbb{P}(\Sigma = 3) = \frac{2}{36}$



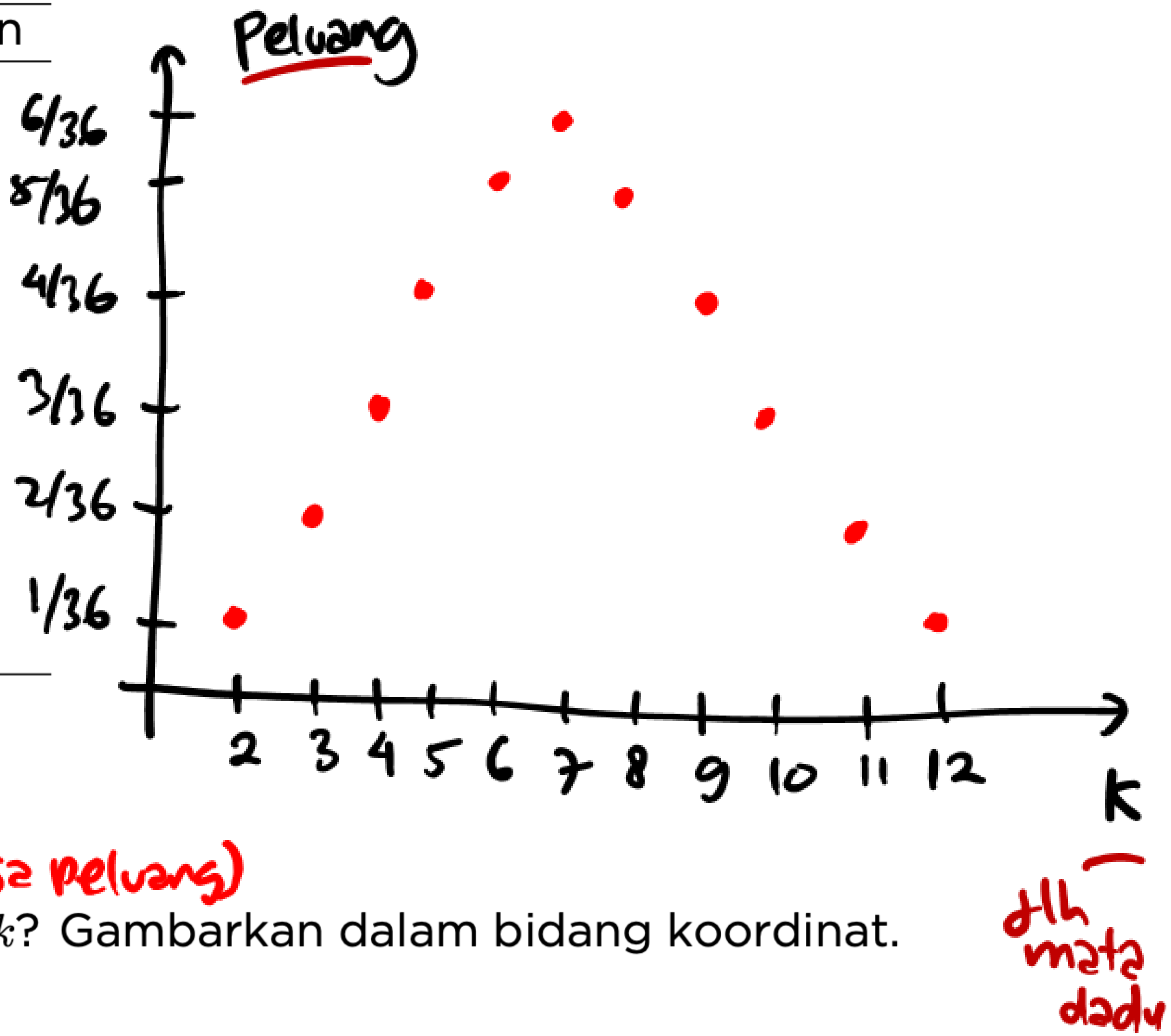
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(c) Isikan tabel berikut ini untuk setiap jumlah mata dadu:

Jumlah Mata Dadu	Peluang Kejadian
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

k (Support)

fungsi peluang (fs. massa peluang)



(d) Berapa peluang jumlah mata dadunya adalah k? Gambarkan dalam bidang koordinat.

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Definisi. Misalkan X variabel acak diskrit, maka Support dari X adalah

$$S_X := \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X = x) > 0\}.$$

Secara teknis, kita dapat katakan S_X sebagai semua kemungkinan nilai X.

Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan jumlah sisi kedua dadu.

(a) Tentukan *support* dari X. $S_X := \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 12\}$

Definisi. Misalkan X variabel acak diskrit, maka fs. massa pelvang (mass) (PMF) dari variabel acak X adalah suatu fungsi $f_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ yang memenuhi sifat-sifat di bawah ini.

Karena nilai pelvang selalu antara $[0,1]$.

1. Untuk setiap $x \in S_X$ berlaku $0 \leq f_X(x) \leq 1$.
2. $\displaystyle\sum_{x \in S_X} f_X(x) = 1$. (total pelvang = 1)
3. $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

'realisasi'

Var. acak

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Diberikan variabel acak X dan Y sebagai berikut. $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

- X menyatakan banyak kemunculan sisi muka dalam tiga kali pelemparan koin.
- Y menyatakan angka sisi hasil pelemparan sebuah dadu. $S_X = \{1, 2, \ldots, 6\}$

Pasangkan peubah acak di atas dengan fungsi massa peluang:

$$\underbrace{f_1(x) = \tfrac{1}{6}, \quad x \in \{1, 2, \ldots, 6\}}_{Y} \qquad\qquad \underbrace{f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \\ \frac{3}{8}, & x = 1 \\ \frac{3}{8}, & x = 2 \\ \frac{1}{8}, & x = 3 \end{cases}}_{X}$$

* Contoh
– Intepretasi

- * $f_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}$: Peluang saat muncul satu muka ketika 3 kali pelemparan
- * $f_Y(4) = \mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{6}$: Peluang saat muncul angka 4.

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

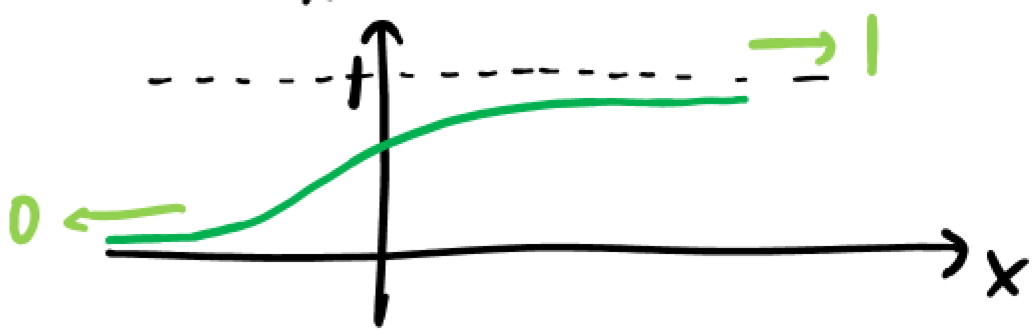
Definisi. Misalkan X variabel acak diskrit, maka fs. distribusi kumulatif (CDF) dari variabel acak X adalah $F_x : \mathbb{R} \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai

$$F_x(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \leq x} f_X(x).$$

Fungsi tersebut memenuhi tiga sifat:

1. F_X adalah fungsi monoton tak turun, (bisa konstan : tdk naik/turun)
2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, ✓
3. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$. ✓

Ilustrasi :



(b) Dengan definisi, lengkapi tabel fungsi massa peluang dan fungsi distribusi dari X.

x	$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$	$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
2	1/36	1/36 ✓ $\mathbb{P}(X\leq 2) = \mathbb{P}(X=2)$
3	2/36	3/36 ✓ $\mathbb{P}(X\leq 3) = \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)$
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36 ⋮ dst
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36 = 1 (total peluang)

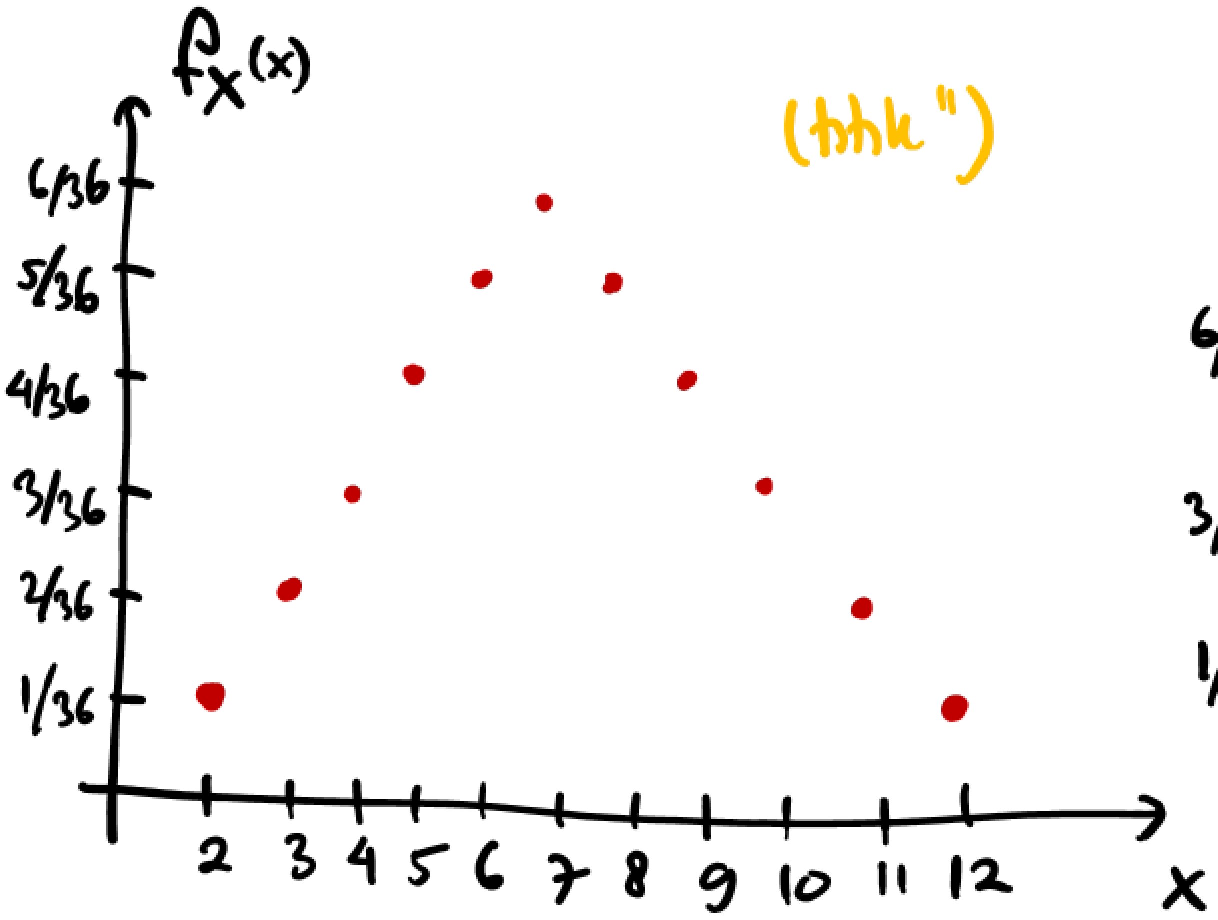
$$\to F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1/36, & 2 \leq x < 3 \\ 3/36, & 3 \leq x < 4 \\ \vdots & \\ 35/36, & 11 \leq x < 12 \\ 1, & x \geq 12 \end{cases}$$

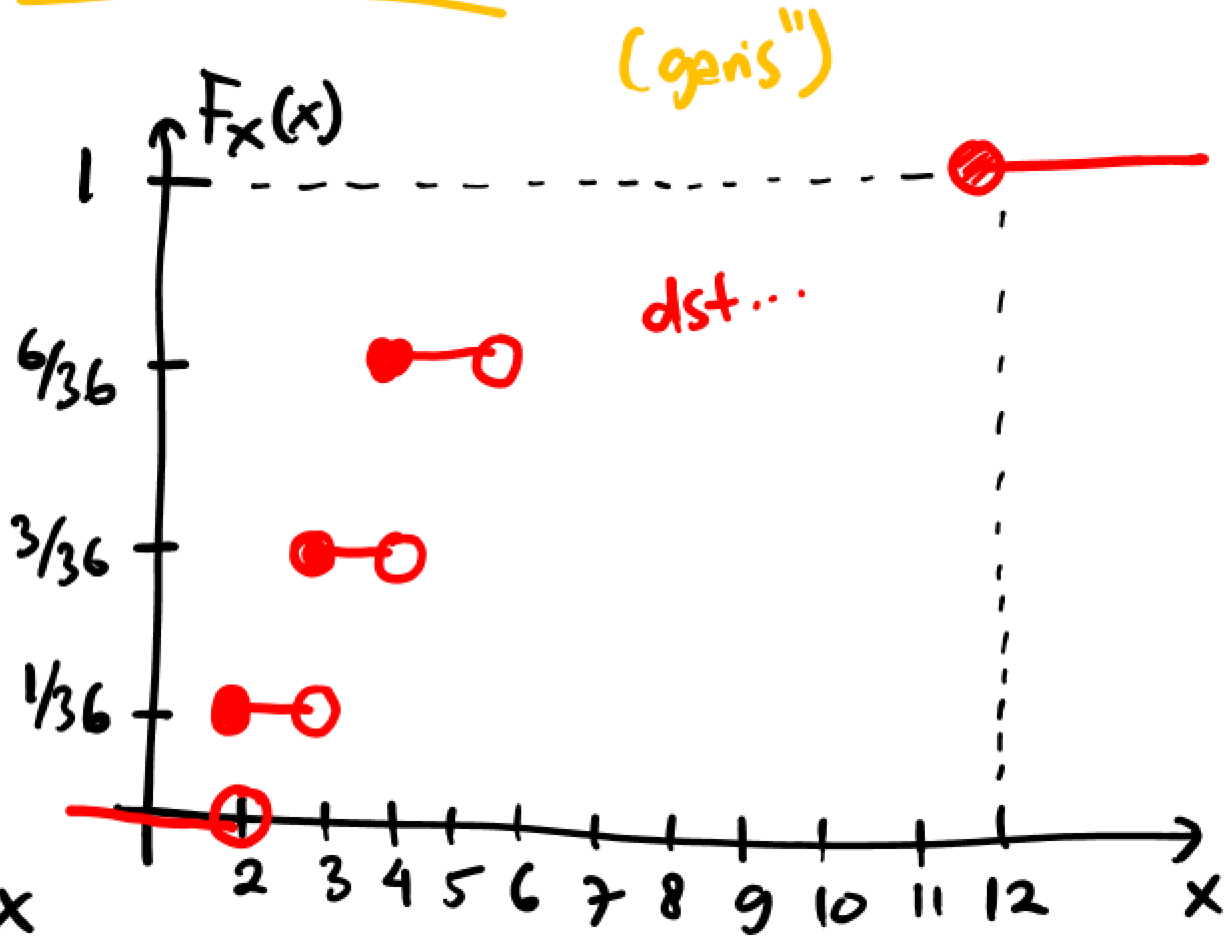
Catatan. Fungsi massa peluangnya dan fungsi distribusinya dapat ditulis sebagai

$$f_X(x) = \frac{6 - |7 - x|}{36}, \qquad F_X(x) = \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{6 - |7 - x|}{36}.$$

(bisa ditulis dlm fs.)

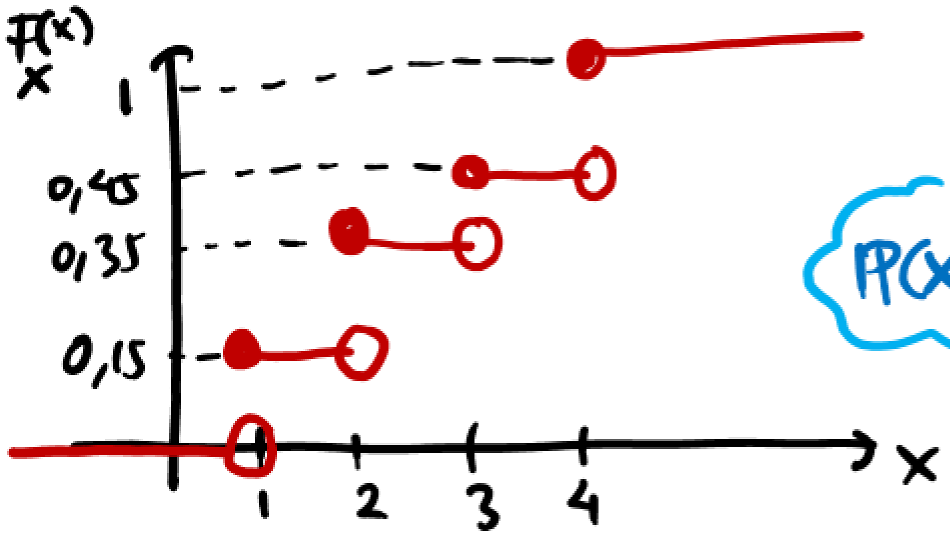
(c) Gambarkan fungsi massa peluang dan fungsi distribusi dari X.





Diberikan fungsi distribusi berikut:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 15\%, & 1 \le x < 2 \\ 35\%, & 2 \le x < 3 \\ 45\%, & 3 \le x < 4 \\ 100\%, & x \ge 4 \end{cases}$$



notes:

$\mathbb{P}(X \le x) = F_X(x)$

Gambarkan $F_X(x)$ pada bidang koordinat $\mathbb{P}(X \le x)$ terhadap x, lalu tentukan

(a) $\mathbb{P}(X \le 2)$, $= F_X(2)$

$= 0{,}35$

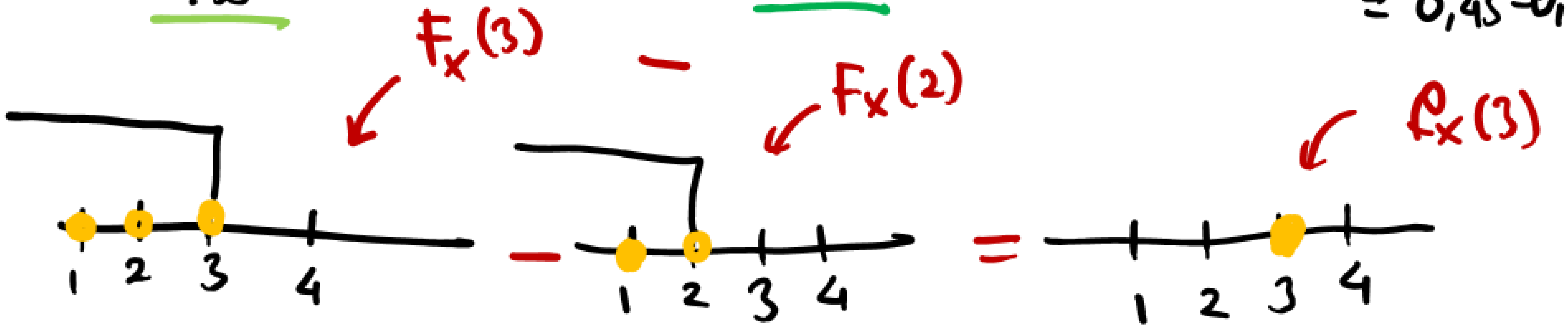
(b) $\mathbb{P}(X \le 3)$, $= F_X(3)$

$= 0{,}45$

(c) $\mathbb{P}(X = 3)$. $= f_X(3)$

$= F_X(3) - F_X(2)$

$= 0{,}45 - 0{,}35 = 0{,}1$ //



Lema. Misalkan X variabel acak diskrit dengan fungsi massa peluangnya adalah $f_X(x)$ dan fungsi distribusi kumulatifnya adalah $F_X(x)$. Maka, untuk sembarang x dan y di dalam S_X berlaku

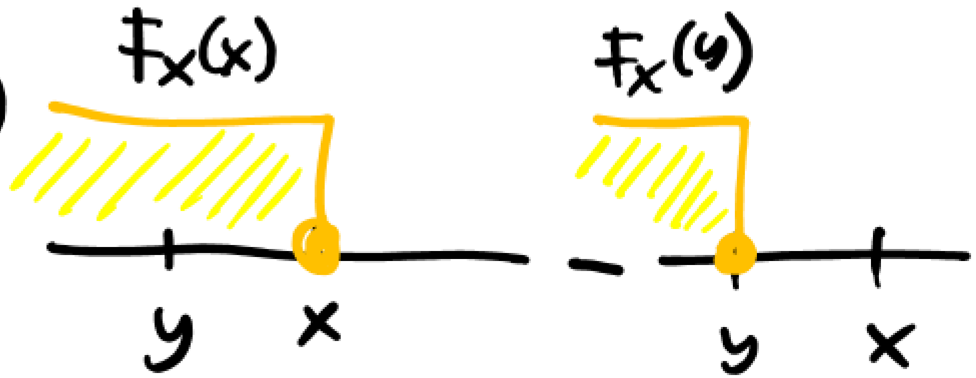
1. $\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$. → definisi dari CDF
2. ✓ $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$.
3. ✓ $\mathbb{P}(y < X \leq x) = F_X(x) - F_X(y)$.

Bukti.

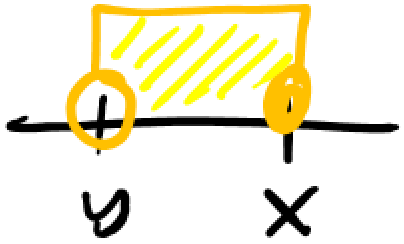
(2) $\underbrace{\mathbb{P}(X > x)}_{A} + \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x)}_{\bar{A}} = 1$

$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x)}_{F_X(x)}$

(3)



$=$



$\mathbb{P}(y < X \leq x)$

Dua buah dadu dilempar secara acak. Berapa peluang jumlahan kedua sisi dadu bernilai

(a) sama dengan 10,

(b) lebih kecil dari 5,

(c) setidaknya bernilai 8,

(d) di antara 4 sampai 9 (batas inklusif).

(Solusi : 27/36)

(a) $\mathbb{P}(X=10) = f_X(10) = \frac{3}{36}$

(b) $\mathbb{P}(X<5) = \mathbb{P}(X \le 4)$
$= F_X(4) = \frac{6}{36}$

(c) $\mathbb{P}(X \ge 8) = 1 - \mathbb{P}(X<8)$
$= 1 - \mathbb{P}(X \le 7)$
$= 1 - F_X(7)$
$= 1 - 21/36 = 15/36$ //

x	$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$	$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36 = 1

Ekspektasi dan Variansi Diskrit

Definisi dan Sifat-sifatnya

Dari sepuluh transistor, terdapat tiga di antaranya yang rusak. Sebuah prosedur *sampling* akan mengambil dua transistor sekaligus secara acak. Misalkan X variabel acak yang menyatakan banyaknya transistor rusak yang terambil dalam suatu prosedur *sampling*.

(a) Tentukan fungsi massa peluang dari variabel acak X.

(b) Secara 'biasanya', kira-kira berapa nilai X?

(c) Secara 'biasanya', kira-kira seberapa nilai X menyimpang dari rata-ratanya?

2.1 Definisi dan Sifat Ekspektasi

Definisi. Misalkan X merupakan suatu variabel acak diskrit dengan *support* S_X dan fungsi massa peluangnya $f_X(x)$. Ekspektasi dari X dapat didefinisikan sebagai

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in S_X} x \cdot \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in S_X} x \cdot f_X(x).$$

Misalkan $S_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

analogi dgn rata2

$$\mathbb{E}[X] = x_1 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X = x_1)}_{\text{bobot}} + x_2 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X = x_2)}_{\text{bobot}} + \ldots + x_n \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X = x_n)}_{\text{bobot}}$$

Lebih jauh, misalkan $g(x)$ adalah fungsi real, maka

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in S_X} g(x) \cdot f_X(x).$$

(perumuman)

Sebuah dadu dilempar.

(a) Berapakah ekspektasi nilai sisi mata dadu yang keluar?

Misalkan X adalah variabel acak yg menyatakan mata dadu

$S_X = \{1, 2, \dots, 6\}$, $f_X(x) = \frac{1}{6}$, $\forall x \in S_X$

Secara rata², X yang muncul

Ekspektasi

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + \dots + 6)$$

$$\therefore \mathbb{E}[X] = 3{,}5 \quad //$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

konstan!

Teorema. Misalkan X dan Y adalah variabel acak . Maka, untuk sembarang $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

kombinasi linear

(mirip konsep notasi sigma/integral)

Diketahui $\mathbb{E}[X] = 7$ dan $\mathbb{E}[Y] = 2$. Apakah kedua pernyataan di bawah ini benar?

(a) $\mathbb{E}[7X - Y] = 47$

$$\Downarrow$$

$$7\,\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 7 \cdot 7 - 2$$

(b) $\mathbb{E}[X^2 + Y^2] = 53$

$$\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]$$

$$\cancel{\mathbb{E}[X].\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].\mathbb{E}[Y]}$$

$$49 + 4 = 53$$

2.2 Definisi dan Sifat Variansi

Definisi. Misalkan X merupakan suatu variabel acak diskrit dengan *support* S_X dan fungsi massa peluangnya $f_X(x)$. Variansi __________ dari X dapat didefinisikan sebagai

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \sum_{x \in S_X} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x).$$

Simpangan kuadrat "variabel acak" X dgn "rata^2_x" μ_X

$$\mathbb{E}[\square] = \sum \square \cdot f_X(x)$$

Sebuah dadu dilempar.

(b) Berapakah variansi nilai sisi mata dadu yang keluar?

$S_X = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $f_X(x) = \frac{1}{6}, \forall x \in S_X$, $\mu_X = \mathbb{E}[X] = 3{,}5$ //

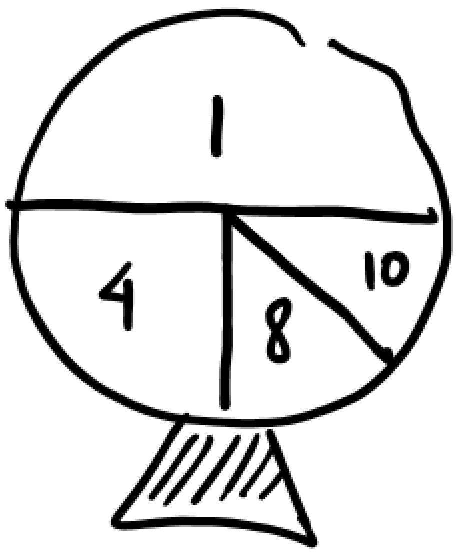
$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \sum (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) \\ &= (1-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + (6-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{35}{12} \;// \end{aligned}$$

(cek!!)

Diketahui permainan roda keberuntungan berbentuk lingkaran memiliki proporsi sebagai berikut:

- daerah juring angka 1 sebesar $180°$,
- daerah juring angka 4 sebesar $90°$,
- daerah juring angka 8 sebesar $45°$,
- daerah juring angka 10 sebesar $45°$.

Berapa rata-rata dan variansi perolehan skor dari permainan roda keberuntungan tersebut?



$$S_X = \{1, 4, 8, 10\}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 &, x = 1 \\ 1/4 &, x = 4 \\ 1/8 &, x = 8 \\ 1/8 &, x = 10 \end{cases}$$

Untuk bermain lempar dadu, pemain harus membayar 30 ribu rupiah dan berikut aturannya:

(a) Pemain akan mendapatkan hadiah sebesar kuadrat mata dadu dikali dengan 2 ribu rupiah. Hitung ekspektasi nilai yang diperoleh seorang pemain lempar dadu secara keseluruhan.

(b) Pemain akan mendapatkan hadiah sebesar 5 ribu rupiah ditambah mata dadu dikali 2 ribu rupiah. Hitung ekspektasi nilai yang diperoleh seorang pemain secara keseluruhan.

Misalkan X adalah mata dadu yg keluar, $S_X = \{1,2,3,4,5,6\}$

$f_X(x) = \frac{1}{6}, \forall x \in S_X$.

$$\text{Laba/rugi} = \underbrace{2x^2}_{\text{hadiah}} - \underbrace{30}_{\text{bayar}}$$

ekspektasi diperumum

$$\mathbb{E}[\text{laba/rugi}] = \mathbb{E}[2x^2-30] = \sum_{x\in S_X} (2x^2-30)\cdot f_X(x)$$

$$= \left[(2\cdot1^2-30)\cdot\frac{1}{6} + (2\cdot2^2-30)\cdot\frac{1}{6} + (2\cdot3^2-30)\cdot\frac{1}{6} + \dots + (2\cdot6^2-30)\cdot\frac{1}{6}\right]$$

$$= 1/3 \approx 0{,}33\ldots$$

~ 300 rupiah

$$\mathbb{E}[2x^2-30] \neq 2\mathbb{E}[x]^2-30$$

$$\mathbb{E}[x^2] \cancel{=} \mathbb{E}[x]^2$$

$$\sum x^2 f_X(x) \qquad \left[\sum x \cdot f(x)\right]^2$$

$$\mathbb{E}[2x^2-30] = \mathbb{E}[2x^2] - \mathbb{E}[30]$$

$$\cdot\ \mathbb{E}[2x^2] = \left[2\cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{6}\right] + \left[2\cdot 2^2\cdot\tfrac{1}{6}\right] + \dots + \left[2\cdot 6^2 \cdot \tfrac{1}{6}\right] = 30\tfrac{1}{3}$$

$$\cdot\ \mathbb{E}[30] = \sum_{x\in S_X} 30 \cdot f_X(x) = 30 \underbrace{\sum_{x \in S_X} f_X(x)}_{1} = 30.$$