CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
God's People for God's Glory

(Review Materi SMA)

Konsep Dasar Peluang

Ruang Sampel, Kejadian, dan Aturan Pencacahan
(menghitung)

2.1 Mengukur Ketidakpastian

Definisi. Beberapa konsep yang berkaitan dengan fenomena ketidakpastian:

- Ω Ruang sampel dari suatu fenomena ketidakpastian adalah Himpunan dari semua keluaran yg mungkin. Setiap elemen dari ruang sampel disebut titik sampel.
- Kejadian (*random event*) adalah sebuah Subhimpunan dari ruang sampel. Dalam pengertian informal, himpunan semua keluaran yang terkait dengan fenomena tertentu yang 'menarik' untuk diukur peluangnya.

* Fenomena ketidakpastian: melempar 1 koin (Hasil keluaran lemparan)

$\Omega := \{A, G\}$

Ruang sampel

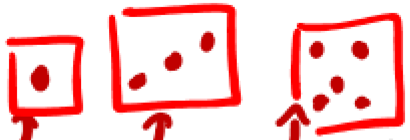
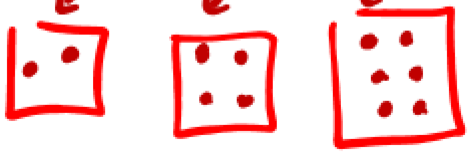
Angka Gambar

titik sampel

subhimpunan

* kejadian: cth: Hasil pelemparan 1 koin berupa Sisi gambar: $A = \{G\} \subseteq \Omega$

Lengkapi tabel berikut dengan mendaftarkan semua elemen ruang sampelnya!

Fenomena Ketidakpastian	Ruang Sampel Ω	Banyak Titik Sampel $\|\Omega\|$
(2 koin) 	$\Omega := \{\underset{\text{koin 1}}{A}\overset{\text{koin 2}}{A}, AG, GA, GG\}$	$\|\Omega\| = 4$
(3 koin) 	?	$\|\Omega\| = 8$
(1 dadu) 	 $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 	$\|\Omega\| = 6$

Definisi. Misalkan Ω adalah ruang sampel dan A adalah sebuah kejadian. Peluang dari kejadian A, dinotasikan sebagai $\mathbb{P}(A)$, merupakan suatu mekanisme penilaian yang mengukur seberapa mungkin kejadian A terjadi. Peluang ini memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, ✓
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ✓
3. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, ✓
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ dengan $A \cap B = \emptyset$.

pasti terjadi

mustahil terjadi

himpunan kosong { }

(aturan penjumlahan)

Teorema. Misalkan Ω suatu ruang sampel dan A suatu kejadian. Jika setiap titik sampel di Ω memiliki tingkat kemungkinan yang sama untuk terjadi (*equally likely*), maka $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$. &

($|A| :=$ byknya titik kejadian dan $|\Omega| :=$ byknya titik sampel.)

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Dengan pemahaman ruang sampel untuk objek-objek di atas, tentukan peluang dari

(a) terambilnya kartu yang bergambar orang, (bridge)

→ (b) terambilnya kartu dengan warna merah dan angka genap,

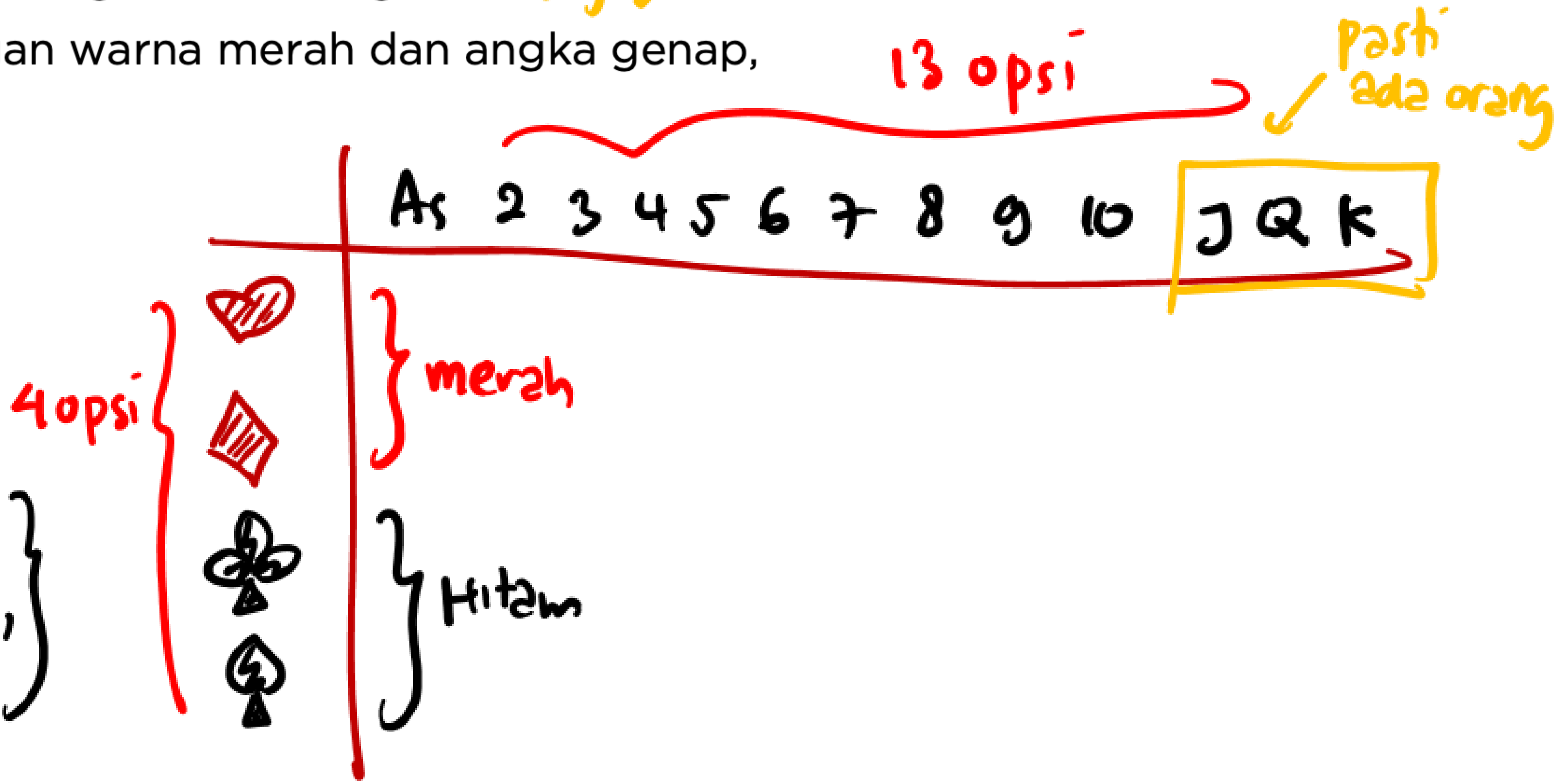
- $|\Omega| := 13 \times 4 = 52$ //

- A : kartu yang terambil bergambar orang.

$$A := \{J♥, J♦, J♣, J♠, Q\text{ -||-}, Q\text{ -||-}, Q\text{ -||-}, Q\text{ -||-}, K\text{ -||-}, K\text{ -||-}, K\text{ -||-}, K\text{ -||-}\}$$

$$|A| = 12$$

$$\therefore \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \text{ //}$$



Dengan pemahaman ruang sampel untuk objek-objek di atas, tentukan peluang dari

(c) munculnya sisi yang sama pada delapan koin,

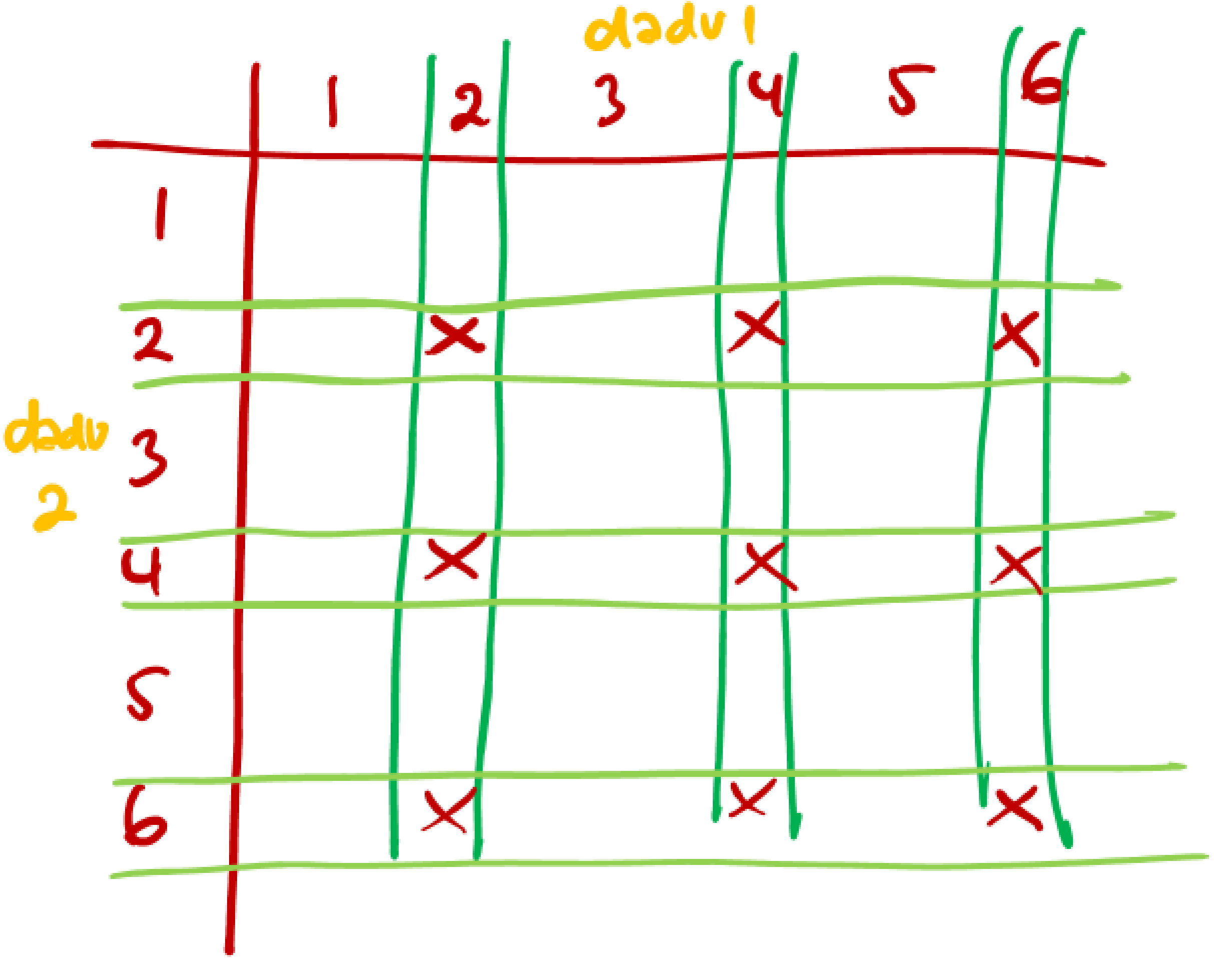
(d) munculnya kedua mata dadu genap pada kasus pelemparan dua dadu.

- $|\Omega| := 6 \times 6 = 36$
- A: kejadian kedua mata dadu genap

$$A := \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$|A| := 9$$

- $$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$ //



dadu 1

dadu 2

	1	2	3	4	5	6
1						
2		×		×		×
3						
4		×		×		×
5						
6		×		×		×

Sebuah domino diambil secara acak dari set domino.

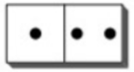
(a) Berapa peluang terambil domino dengan mata angka kembar?

$|\Omega| := 28$ (lihat slide berikutnya)

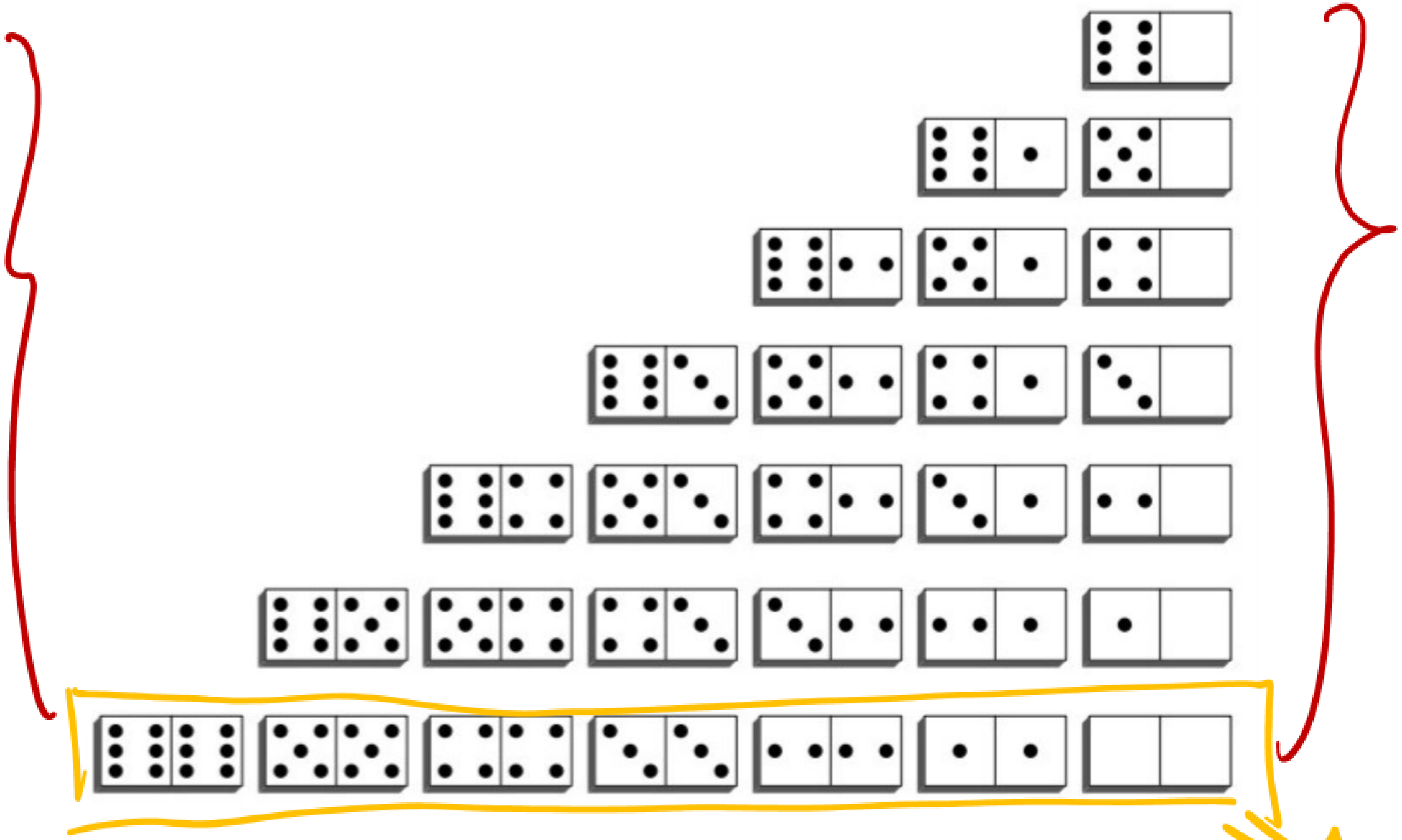
$|A| := 7$

$$A := \{\overbrace{(-,-)}^{\text{1 keping domino}}, (1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(A) := \frac{7}{28} = \frac{1}{4}\ //$$

→ (b) Misalkan dalam permainan domino, pertama kita ambil sebuah domino dengan isi . Lalu, kita mengambil sebuah domino lagi secara acak. Kondisi seperti apa agar permainan berlanjut? Berapa peluang dengan domino tersebut, kita dapat melanjutkan permainan?

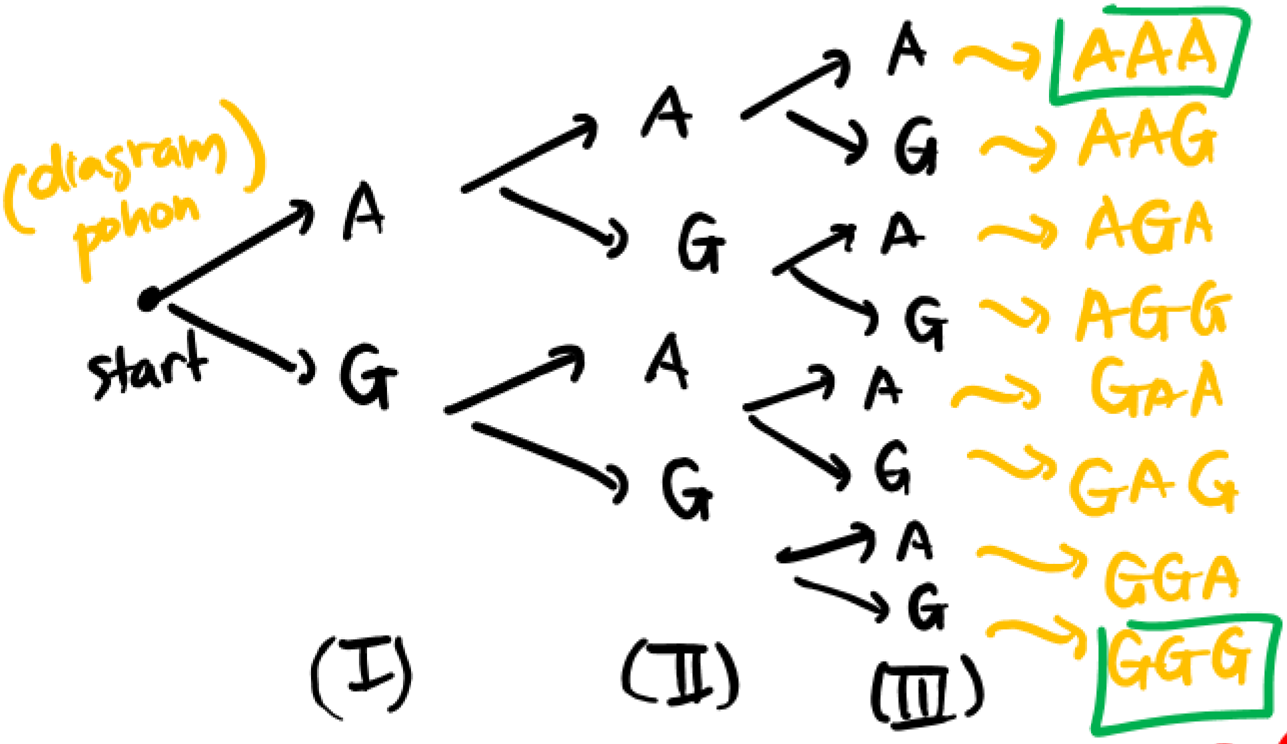
$\Omega :=$



$= A$

Budi akan melakukan tiga kali pelemparan koin.

(a) Berapa peluang memperoleh sisi koin yang selalu sama dalam tiga kali pelemparan?



- $|\Omega| = 8 = 2^3$
- $A := \{AAA, GGG\}$

$|A| = 2$

- $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ //

Komplemen : $\bar{A}$ atau A^c

(b) Berapa peluang memperoleh sisi koin yang tidak selalu sama dalam tiga kali pelemparan?

$$|\bar{A}| = \underbrace{|\Omega|}_{\text{semua kemungkinan}} - |A|$$

kejadian "positif"

$$\longrightarrow |\bar{A}| = 8 - 2 = 6 \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$ //

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(aturan perkalian)

Di lemari pakaian Laura, ada empat baju warna merah dan tiga baju warna biru. Juga, terdapat dua bawahan hitam dan empat bawahan putih. Selain itu, Laura memiliki empat sepatu coklat dan dua sepatu hitam. Jika setiap baju, bawahan, dan sepatu sama seringnya dipakai oleh Laura, berapakah peluang Laura menggunakan baju merah, bawahan hitam, dan sepatu hitam?

- Baju $\nearrow$ 4 merah, $\searrow$ 3 Biru
- Bawahan $\nearrow$ 2 Hitam, $\searrow$ 4 putih
- Sepatu $\nearrow$ 4 coklat, $\searrow$ 2 Hitam

- Ruang sampel: $\Omega := \{(bj, bw, s) \mid bj \in \text{Himpunan baju}, bw \in \text{Himpunan bawahan}, s \in \text{Himpunan Sepatu}\}$

$\{M_1, M_2, M_3, M_4, B_1, B_2, B_3\}$

$$|\Omega| := \underset{\text{baju}}{\boxed{7}} \times \underset{\text{bawahan}}{\boxed{6}} \times \underset{\text{sepatu}}{\boxed{6}} = \underline{252 \text{ kombinasi}}$$

- kejadian: A: baju merah, bawahan hitam, sepatu hitam.

$$|A| := \underset{\text{baju}}{\boxed{4}} \times \underset{\text{bawahan}}{\boxed{2}} \times \underset{\text{sepatu}}{\boxed{2}} = \underline{16 \text{ kombinasi}}$$

$$\therefore \mathbb{P}(A) := \frac{16}{252} \; //$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

2.2 Mencacah Ruang Sampel

→ bilangan asli!

→ Kita definisikan notasi faktorial sebagai $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ dan $0! = 1$ (mengapa?).

Teknik Pencacahan	Karakteristik Dari Urutan	Contoh ($n = 4, r = 2$) → "kotak" → "opsi"/kandidat	Formula
r-permutasi tak berulang dari n objek =	urutan penting: $(a,b) \neq (b,a)$	(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)	8 $\frac{n!}{(n-r)!} \to \frac{4!}{2!} = 12$ // cara
r-permutasi berulang dari n objek	cth: pemilihan jabatan ketua, wakil (berulang) → rangkap jabatan	(1,2), (1,3), (1,4), (1,1), (2,1), (2,3), (2,4), (2,2), (3,1), (3,2), (3,4), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)	8 $n^r \to 4^2 = 16$ // cara

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

r-kombinasi tak berulang dari n objek	Urutan diabaikan	(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\rightarrow \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ cara //
r-kombinasi berulang dari n objek	(a,b)=(b,a) Cth: orang salaman (tak berulang)	(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)	$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$ cek!!! $\rightarrow \frac{5!}{2!\,3!} = 10$ cara //

Catatan. Anggap r sbgi banyak "kotak" dgn n opsi yg mau dimasukan ke "kotak".

CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(a) Dalam sebuah percobaan, dua buah dadu enam sisi dilempar secara bersamaan. Kedua dadu tersebut memiliki warna berbeda untuk membedakannya, yaitu dadu merah dan dadu biru. Berapa peluang bahwa angka pada dadu merah adalah dua kali lipat dari angka yang muncul pada dadu biru setelah kedua dadu dilempar secara bersamaan?

Ruang sampel Ω : hasil pelemparan dadu merah & biru

- $|\Omega| = 36.$

→ urutan penting? ya!

→ permutasi

→ Berulang / tidak?

$\Downarrow$

$n^r = 6^2 = 36$

n: bykopsi → $\{1,\dots,6\}$

r: byk kotak → $\{M,B\}$

kejadian $A := \left\{ (\underset{\text{merah}}{m}, \underset{\text{biru}}{b}) \;\middle|\; m = 2b,\ m \in \{1,2,\dots,6\},\ b \in \{1,2,\dots,6\} \right\}$

$= \{(2,1), (4,2), (6,3)\}$

$|A| = 3$

$\therefore P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ //

→ (b) Dari dua puluh transistor, diketahui terdapat tiga di antaranya yang rusak. Jika dari dua puluh transistor tersebut diambil dua buah, berapa peluang bahwa semuanya tidak rusak?

CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(c) Pengambilan dua item dari *gatcha vending machine* berisi seratus item, terdiri dari 50 item merah dan 50 item biru. Berapa peluang item yang diambil keduanya merah?

- Ruang Sampel Ω := himpunan semua opsi pengambilan pola

$$|\Omega| := \binom{\overset{n}{100}}{\underset{r}{2}} = \frac{100!}{2!\,98!} = \frac{100.99.\cancel{98....1}}{2!\ \cancel{98.97...1}}$$

$$= 4950 \text{ cara } //$$

→ urutan penting? tidak

→ kombinasi

→ berulang/tidak?

⇓

byk "kotak"

$${}_nC_r = C(n,r) = \binom{n}{r}$$

byk opsi

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- kejadian A := 2 item yg diambil merah

n (opsi merah)

$$|A| := \binom{\overset{n}{50}}{\underset{r}{2}} = \frac{50!}{2!\,48!} = \frac{50.49}{2} = 1225 \text{ cara } //$$

$$\therefore \mathbb{P}(A) = \frac{1225}{4950} //$$

CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
God's People for God's Glory

Aturan Dasar Peluang

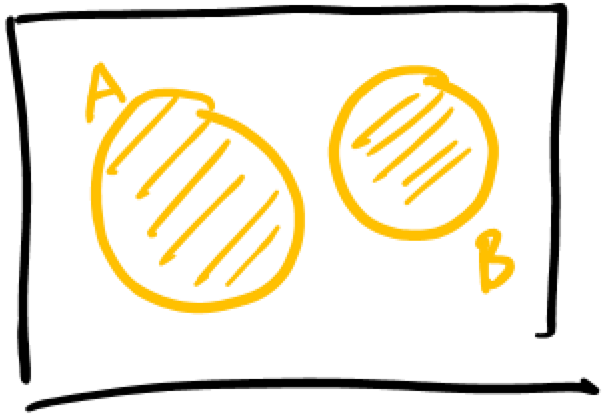
Aturan Penjumlahan, Aturan Perkalian,
dan Konsep Peluang Bersyarat

3.1 Aturan Penjumlahan

Kejadian	Aturan Peluang	Operasi Himpunan	Operasi Logika
Saling lepas (*disjoint*)	Aturan penjumlahan	$\cup$ (gabungan)	$\vee$ (atau/OR)
Saling bebas (*independent*)	Aturan perkalian	$\cap$ (irisan)	$\wedge$ (dan/AND)

Definisi. Kejadian A dan B disebut Saling lepas, jika $A \cap B = \emptyset$.

kosong



$A \cap B = \emptyset$

(tidak punya daerah Irisan)

1. Misalkan A dan B kejadian Saling lepas, maka $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Inilah aturan penjumlahan dengan kejadian $A \cup B$ berarti kejadian A terjadi atau B terjadi.

Sebuah dadu akan dilempar Ali dengan mendefinisikan kejadian-kejadian berikut.

- B_0 kejadian dadu menghasilkan sisi dengan bilangan prima,
- B_1 kejadian dadu menghasilkan sisi dengan bilangan kuadrat,
- B_2 kejadian dadu menghasilkan sisi dengan bilangan genap.

Gunakan informasi di atas untuk menyelesaikan soal-soal di bawah ini.

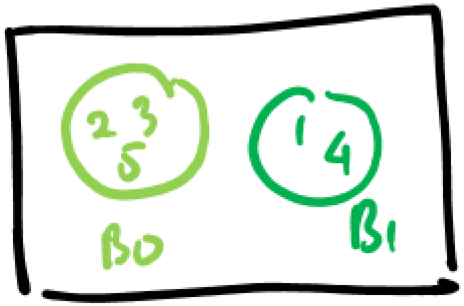
(a) Manakah di antara kejadian-kejadian tersebut yang saling lepas?

Diagram (Venn)

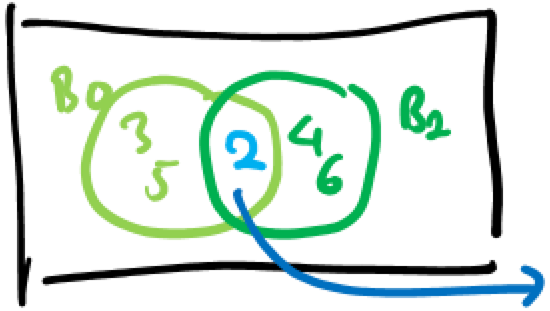
$B_0 := \{2, 3, 5\}$

$B_1 := \{1, 4\}$

$B_2 := \{2, 4, 6\}$



B_0 & B_1 saling lepas



ada irisan.

B_0 & B_2 tak saling lepas.

(b) Berapakah peluang sebuah dadu menghasilkan $\underbrace{\text{bilangan prima}}_{B_0}$ atau $\underbrace{\text{bilangan kuadrat}}_{B_1}$?

(Ya! lihat slide sebelumnya)

B_0 & B_1 harus saling lepas

$$\mathbb{P}(B_0 \cup B_1) := \mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(B_1)$$

$$= \frac{|B_0|}{|\Omega|} + \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \mathbin{/\!/}$$

Kemudian, Ali ditambahkan satu dadu lagi sehingga dua dadu dilempar secara bersamaan.

(c) Berapakah peluang bahwa jumlah kedua mata dadu merupakan bilangan kuadrat?

~~1~~, 4, 9, ~~16~~

Misalkan A_1 : kejadian jumlah dua dadu 4

A_2 : kejadian jumlah dua dadu 9

"Jelas" bahwa A_1 & A_2 saling lepas.

$A_1 := \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \longrightarrow |A_1| = 3$

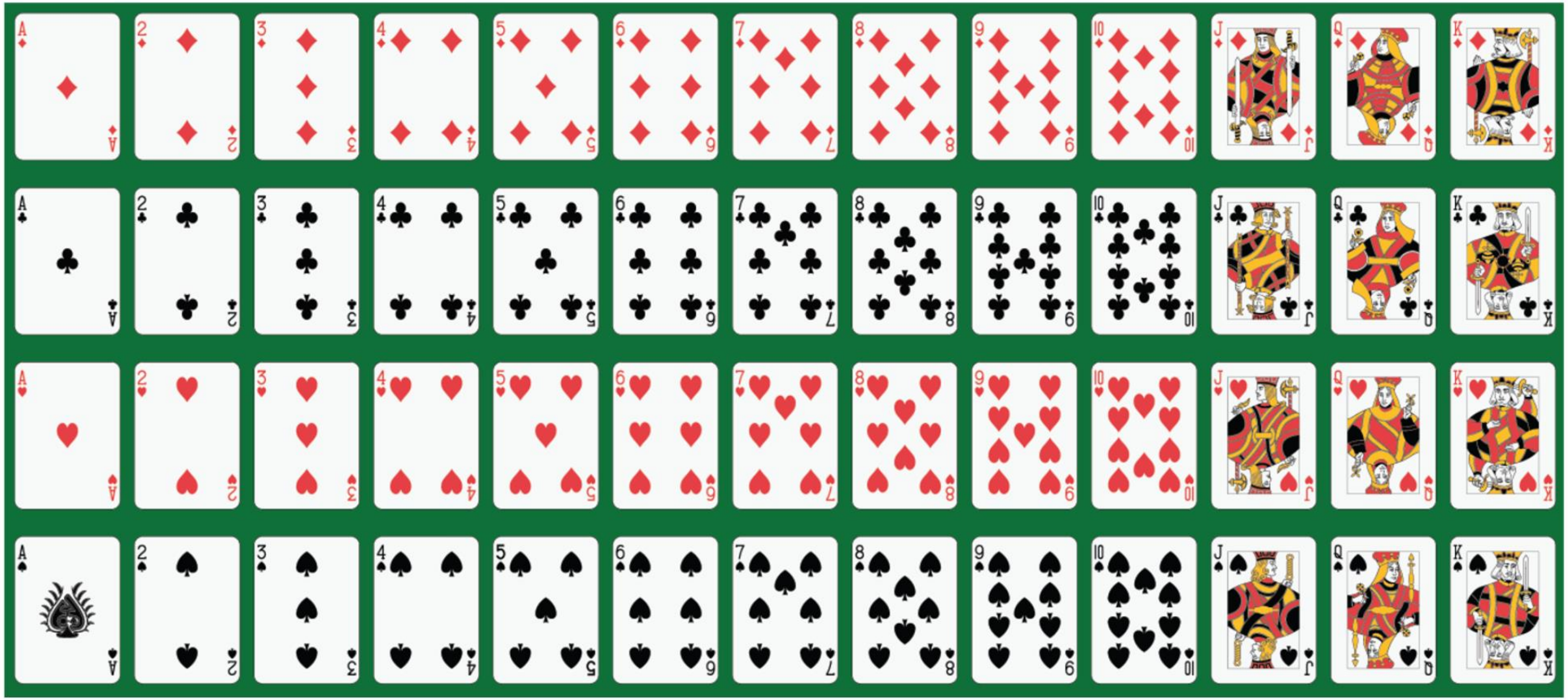
$A_2 := \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} \longrightarrow |A_2| = 4$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36} //$$

$A :=$ jumlah mata dadu bil. kuadrat $\rightsquigarrow \mathbb{P}(A) = \frac{7}{36}$ //

	1	2	3	4	5	6
1			× (1,3)			
2		× (2,2)				
3	× (3,1)					× (3,6)
4					× (4,5)	
5				× (5,4)		
6			× (6,3)			

(a) Sebuah kartu diambil acak dari set kartu remi.

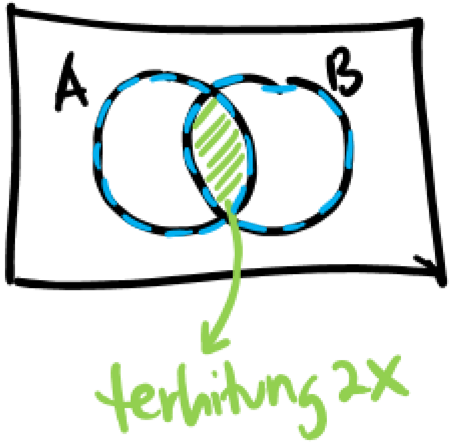


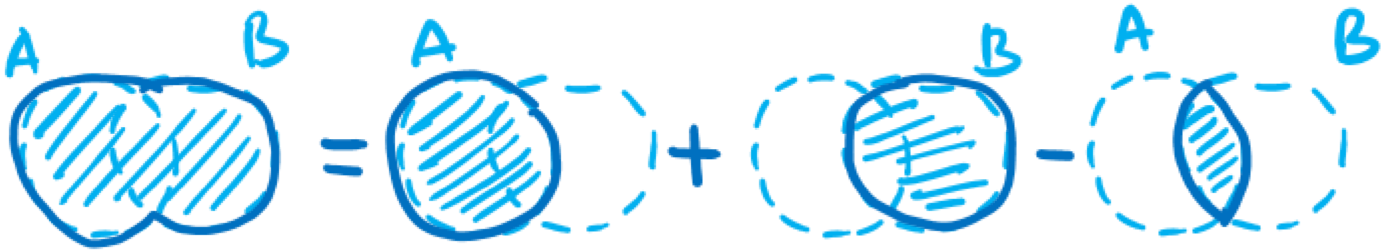
Berapa peluang terpilih kartu As atau kartu sekop?

Teorema. Misalkan A dan B kejadian yang tidak harus saling lepas, maka

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Ilustrasi.





$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(b) Dari dua puluh transistor, diketahui terdapat tiga di antaranya yang rusak. Jika dari semua transistor tersebut diambil dua buah, berapa peluang ada transistor rusak yang diambil?

Temukan hal yang aneh dari kalimat berita ramalan cuaca berikut.

”Diperkirakan besok hujan dengan peluang 40% dan tidak hujan dengan peluang 50%.”

2. Misalkan A adalah kejadian dengan ruang sampel Ω yang memenuhi $A \cup \bar{A} = \Omega$ dan $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Maka, peluang kejadian ______________________________ adalah $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3.2 Peluang Bersyarat

Kita akan melihat fenomena ”beda komunitas, beda peluang” melalui data COVID-19 di California.

Banyak Penderita	3.578.727
Total Populasi	39.512.223

Artinya, $\mathbb{P}(\text{seseorang terkena COVID-19}) = 9,06\%$. Lebih jauh, kita memiliki data yang lebih detail.

	White	Black	Hispanic	Asian	Total
Banyak penderita	930.469	644.171	858.894	1.145.193	3.575.727
% dari populasi total	35%	8%	30%	27%	100%
Populasi	1.382.928	3.160.978	11.853.667	10.668.300	39.512.223

Kelompok mana yang paling beresiko menderita COVID-19 di California?

Definisi. Misalkan A dan B suatu kejadian. Peluang ______________________ didefinisikan sebagai

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

dengan $A \cap B$ menyatakan kejadian A dan B sekaligus terjadi. Secara informal, kita simpulkan bahwa $\mathbb{P}(A \mid B)$ merepresentasikan pemindahan ruang sampel dari semesta Ω menjadi B.

Perhatikan data pada tabel penderita COVID-19 di California berikut!

	White	Black	Hispanic	Asian	Total
Banyak penderita	930.469	644.171	858.894	1.145.193	3.575.727
% dari populasi total	35%	8%	30%	27%	100%
Populasi	1.382.928	3.160.978	11.853.667	10.668.300	39.512.223

Apakah orang White lebih beresiko menderita COVID-19 daripada orang Hispanic? Jelaskan.

Sebuah konter permainan melempar dadu memberikan hadiah berupa Teddy Bear bagi pemain dengan aturan sebagai berikut. Setiap pengunjung melempar dua buah dadu secara acak. Jika jumlah kedua mata dadu yang diperoleh 12, maka pengunjung menang dan bisa mendapat Teddy Bear. Aurel melempar dua dadu tersebut dan tidak sengaja menjatuhkan dadu ke arah kerumunan sehingga ia tidak bisa melihat hasilnya. Namun demikian, salah satu kerumunan berteriak, " Wah, kedua dadu muncul angka genap!" Jika Anda jadi Aurel, apakah Anda akan meras lebih percaya diri untuk mendapatkan Teddy bear atau tidak? Berikan alasannya.

Film produksi Holywood mewakili 74% dari seluruh film yang beredar sepanjang sejarah. Secara umum, peluang sebuah film menerima skor IMDB di atas 7 adalah 14% saja. Diketahui pula bahwa 11% dari seluruh film yang beredar sepanjang sejarah adalah produksi Holywood yang berskor IMDB lebih dari 7. Dengan informasi tersebut, analisalah hal-hal berikut:

i. Jika sebuah film Holywood diambil secara acak, berapakah peluang film yang dipilih mempunyai skor IMDB di atas 7?

ii. Jika sebuah film punya skor IMDB di atas 7 diambil secara acak, berapa peluang film tersebut produksi Holywood?

Pilihan Jawaban.

(a) $\frac{11}{74}$

(b) $\frac{14}{74}$

(c) $\frac{11}{14}$

(d) $\frac{11}{100}$

(e) $\frac{74}{100}$

3.3 Aturan Perkalian

Peluang terjadinya kecelakaan pada sebuah Roller Coaster adalah $0,01\%$, atau 1 di antara 10.000 kali operasi wahana. Roller Coaster tersebut telah beroperasi sebanyak 9.999 kali dengan aman, tanpa kecelakaan. Kini, Anda berada di antrian terdepan untuk menaiki wahana tersebut, dan diketahui giliran Anda merupakan perjalanan ke-10.000. Apakah Anda tetap ingin naik Roller Coaster tersebut?

Definisi. Misalkan A dan B suatu kejadian, maka A dan B ________________________, jika

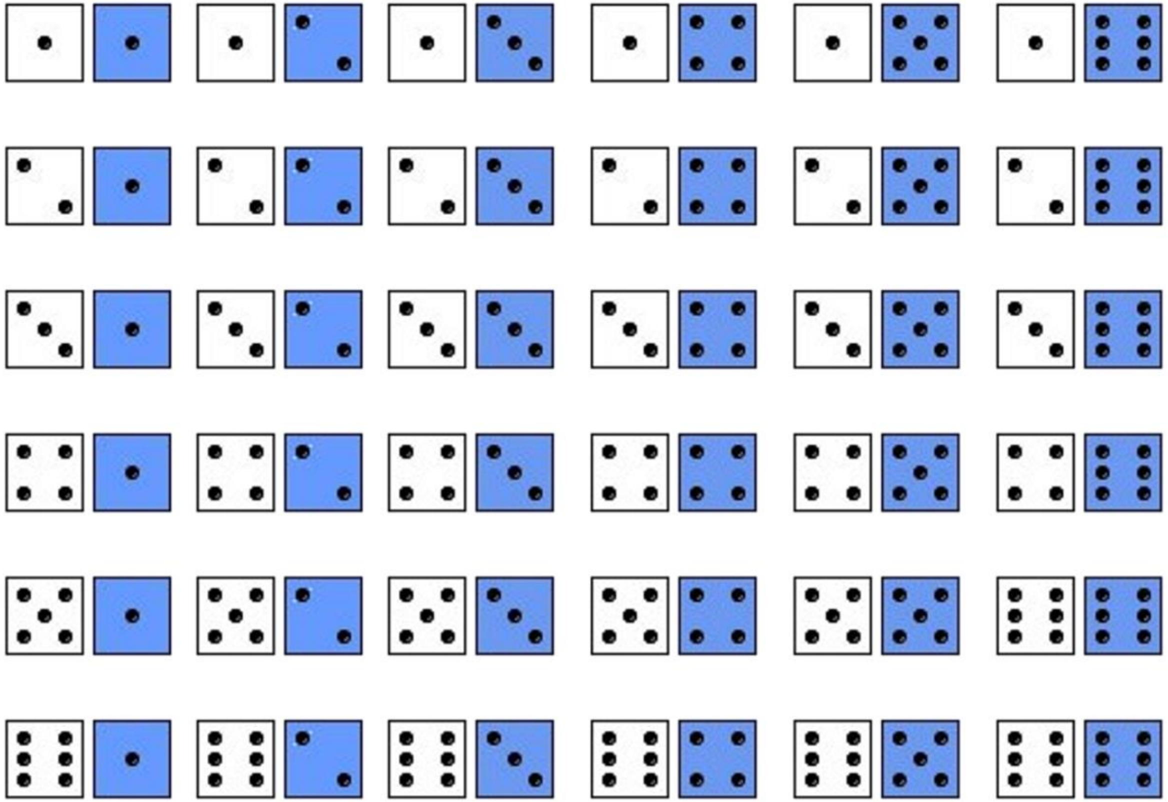
$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{dan} \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Dengan kata lain, peluang A terjadi tidak dipengaruhi oleh kejadian B, begitu sebaliknya.

Teorema. Misalkan A dan B merupakan kejadian yang saling bebas, maka $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Seseorang melempar dadu dua kali. Pelemparan pertama menghasilkan sisi 2.

(a) Misalkan A adalah kejadian dadu pertama menunjukkan sisi 2 dan B adalah kejadian dadu kedua menunjukkan sisi 2. Apakah kejadian A dan B merupakan kejadian saling bebas?



(b) Berapa peluang bahwa dadu pada pelemparan kedua juga menunjukkan sisi 2?

(c) Jika hasil pelemparan pertama tidak diketahui atau tidak diberikan informasi tentangnya, berapa peluang pelemparan kedua akan menghasilkan sisi 2 pada dadu yang dilempar?

Dari dua kotak di bawah ini, masing-masing diambil sebuah bola secara acak dan saling bebas.

- Kotak 1: Bola merah sebanyak 3 buah dan bola biru sebanyak 4 buah.
- Kotak 2: Bola merah sebanyak 4 buah dan bola biru sebanyak 1 buah.

Berapa peluang keduanya terambil bola merah?

Leni memiliki dua token *lucky draw* yang bisa dimainkan di dua buah mesin *roullete* berbeda. Setiap mesin akan memberikan *grand prize* dengan peluang 5% dan 2% secara berturut-turut. Berapa peluang Leni tidak mendapatkan *grand prize* pada kedua mesin tersebut?