Escola NeoTradicional

O Ensino Centrado
na Avaliação do Conteúdo

FÍSICA

Capítulo 2
- Álgebra Vetorial -

Prof. Dr. Sanderson Pereira da Silva

Manaus/AM, 09/2015 – 11/2022

2.1 – Grandezas Físicas – Escalares e Vetoriais

Dependendo do tipo de informação e da estrutura matemática implícita, as **grandezas físicas** também podem ser classificadas de outra forma, neste caso, como sendo **escalares** ou **vetoriais**.

- **Grandeza Escalar –** é toda grandeza que para ser completamente definida deve possuir as seguintes características:
  - **i. Quantificação:** é quantificada por um <u>número seguido de unidade</u> (**valor escalar**), de cujo <u>módulo</u> se extrai a sua **magnitude**, e do <u>sinal</u> se extrai uma **informação adicional** cujo significado depende da natureza da grandeza física considerada.
  - **ii. Domínio:** possui como domínio de validade o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, onde está estabelecido toda a sua <u>álgebra</u>, com as seguintes restrições: (i) não se pode adicionar / subtrair grandezas diferentes e (ii) ao se adicionar / subtrair grandezas iguais, deve-se antes reduzi-las à mesma unidade.
  - **iii. Invariância:** sua métrica não pode depender do sistema de coordenadas escolhido.

Vejamos alguns exemplos do uso do sinal:

- O valor de $-\text{R\$ }300{,}00$ em uma conta bancária representa um saldo devedor, enquanto que o valor positivo de $\text{R\$ }200{,}00$ representa um crédito.
- O valor de $-10\,℃$ representa uma temperatura climática fria, enquanto que $30\,℃$ representa uma temperatura climática quente.

Se o valor escalar não possuir unidade, não representando qualquer **grandeza física**, então a **grandeza escalar** é simplesmente um ente matemático; um **número puro**.

- **Grandeza Vetorial –** é toda grandeza que para ser completamente definida deve possuir as seguintes características:
  - **i. Quantificação:** é quantificada tanto por um número seguido de unidade (**valor escalar**), quanto por uma característica geométrica associada (**direção espacial**). Neste sentido, enquanto do módulo ou valor absoluto do valor escalar se extrai sua **magnitude**, da combinação de seu sinal com a direção espacial se extrai sua **orientação espacial**, ou seja, sua direção e sentido.
  - **ii. Domínio:** possui como domínio de validade o **espaço vetorial** $\mathbb{V}$, onde está estabelecido toda a sua álgebra, com as seguintes restrições: (i) não se pode adicionar / subtrair grandezas diferentes e (ii) ao se adicionar / subtrair grandezas iguais, deve-se antes reduzi-las à mesma unidade.
  - **iii. Invariância:** sua métrica não pode depender do sistema de coordenadas escolhido.

Se o valor escalar não possuir unidade, não representando qualquer **grandeza física**, então a **grandeza vetorial** é simplesmente um ente matemático; um **vetor puro**. Portanto, como toda a propriedade vetorial está no próprio vetor puro e não na natureza do valor escalar, é que podemos nos restringir a um ponto de vista puramente matemático e não físico, sem perda de generalidade.

Por uma questão de simplicidade, às vezes é comum chamar todas as grandezas vetoriais simplesmente de vetor, ou ainda mais simplesmente pelo seu nome. Seja como for, o uso arbitrário de qualquer das denominações não deverá causar qualquer ambiguidade ou confusão. Como exemplo, **grandeza vetorial de posição**, **vetor posição**, ou, simplesmente, **posição**, se referem à mesma grandeza vetorial.

Enquanto geralmente uma **grandeza escalar** é representada por uma letra do alfabeto latino e/ou grego no modo itálico (massa m, por exemplo), a **grandeza vetorial** é simbolizada por uma letra latina em negrito ou em itálico com uma seta em cima (por exemplo, $\mathbf{u}$ ou $\vec{u}$, respectivamente).

Como fica evidente pelas definições acima e pelo estudo sobre a classificação das grandezas físicas em fundamentais e derivadas (Cap. 1), todo valor escalar, seja associado a uma grandeza física escalar ou a uma grandeza física vetorial, pode ser de natureza fundamental ou derivada. Por exemplo, no SI, enquanto o comprimento ℓ de uma corda é uma grandeza física escalar, com seu valor escalar comprimento sendo de natureza fundamental, a área A de uma parede é uma grandeza física escalar, mas com seu valor escalar área sendo de natureza derivada. Por sua vez, o deslocamento $\Delta\mathbf{S}$ de uma partícula é uma grandeza física vetorial, com seu valor escalar comprimento sendo de natureza fundamental, enquanto que o vetor área $\mathbf{A}$ de uma bobina é uma grandeza física vetorial, mas com seu valor escalar área sendo de natureza derivada.

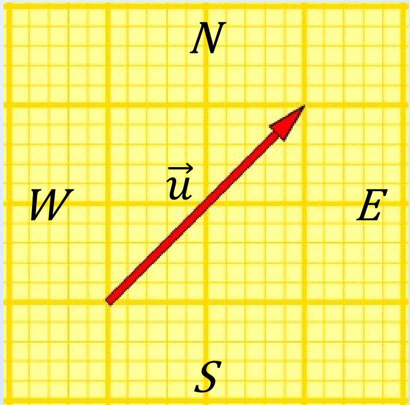
A fim de desenvolvermos um melhor entendimento sobre vetores, a ponto de aprimorarmos o seu conceito e aplicabilidade (atrelado às características **quantificação**, **domínio** e **invariância**), usamos como ponto de partida duas formas de representar um vetor: a **representação geométrica (RG)** e a **representação analítica (RA)**.

Partindo de uma primeira definição de vetor, como dada acima, mostraremos como desenvolver definições cada vez mais sofisticadas a partir de suas propriedades, o que, por sua vez, também estabelecerá sua álgebra vetorial.

Como a **Mecânica Newtoniana** é estruturada em termos de grandezas vetoriais, ela também é chamada de de **Mecânica Vetorial**.

2.2 – Representação Geométrica

A **representação geométrica (RG)** de uma grandeza vetorial ocorre quando a mesma é representada por uma flecha, cujo **comprimento** é <u>proporcional</u> à sua magnitude e cuja **direção e sentido** (em relação a um "elemento" de referência) definem sua orientação espacial.



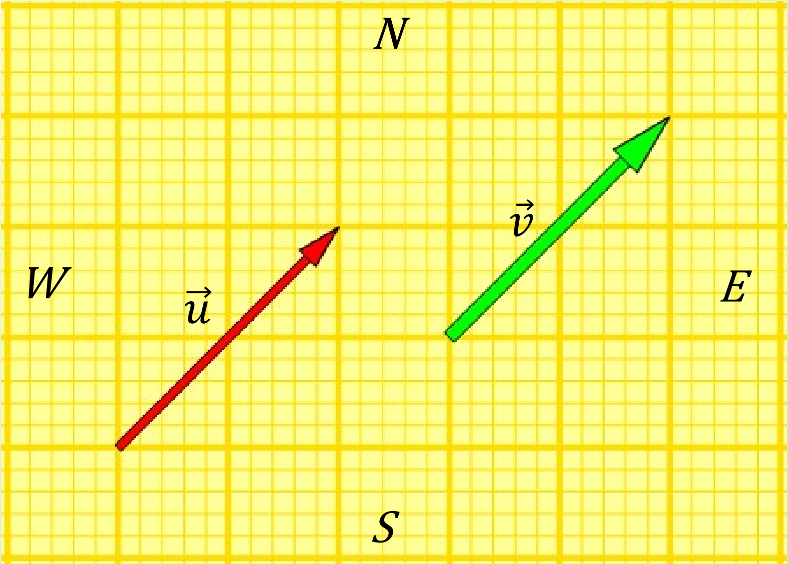
$\vec{u}$ $\begin{cases} \textbf{magnitude: } |\vec{u}| \text{ (sempre positivo)} \\ \textbf{orientação espacial: } NE \end{cases}$

Neste exemplo, o "elemento" de referência para orientação espacial é o conjunto dos pontos cardeais.

Somente quando o valor escalar vinculado à grandeza vetorial tiver a dimensão de comprimento é que o comprimento da sua flecha será <u>igual</u> (e não apenas <u>proporcional</u>) à sua magnitude. Como veremos, isto se dará somente no caso em que a grandeza vetorial for o **deslocamento** (**posição**).

Assim, tendo por base a RG de vetor, vamos agora definir algumas **propriedades** e **operações fundamentais** de fácil inferência.

- IGUALDADE

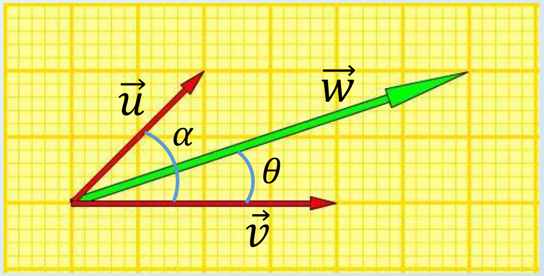


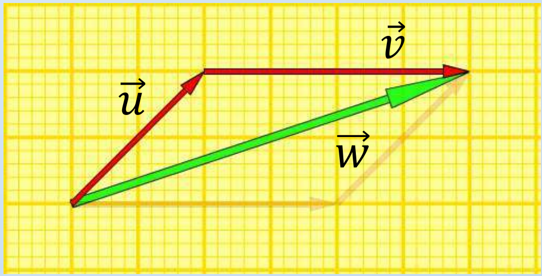
$\vec{v} = \vec{u}$ $\begin{cases} \text{magnitudes iguais } (|\vec{v}| = |\vec{u}|) \\ \text{orientações espaciais iguais } (NE) \end{cases}$

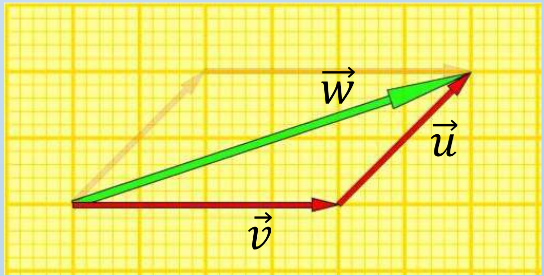
Portanto, uma flecha representará sempre o mesmo vetor, mesmo se ***transladado*** no espaço, desde que mantenha seu comprimento (**magnitude**) e a direção e sentido (**orientação espacial**) inalterados.

- ADIÇÃO (A)

Define-se $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ como o vetor soma (resultante) de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer (1), cuja magnitude e orientação espacial podem ser obtidos por um método gráfico conhecido como **regra do paralelograma**: *translada-se um dos vetores ($\vec{v}$, por exemplo), de tal forma que sua extremidade inicial fique junto da extremidade final do outro vetor (neste caso, $\vec{u}$). O vetor soma $\vec{w}$ será então um vetor que vai da extremidade inicial do que ficou imóvel ($\vec{u}$) até a extremidade final do que foi transladado ($\vec{v}$).*







$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

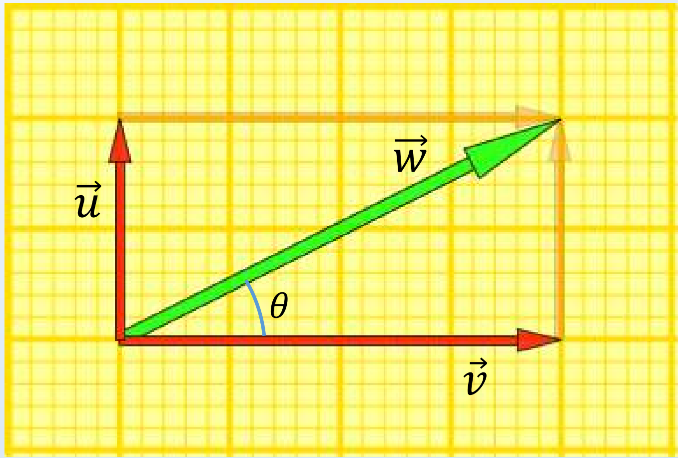
magnitude (2): $|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha}$, onde α é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

orientação espacial (3): $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{|\vec{u}|\text{sen}\,\alpha}{|\vec{v}|+|\vec{u}|\cos\alpha}\right)$

1) Ambos sendo da mesma grandeza e reduzidos à mesma unidade.
2) Vem a ser a própria lei dos cossenos, conforme pode ser demonstrado diretamente da trigonometria.
3) Neste caso, o “elemento” de referência para orientação espacial é o próprio vetor $\vec{v}$.

- ADIÇÃO (B)

Um caso particular importante ocorre quando $\alpha = 90° \ (\pi/2 \ \text{rad})$:

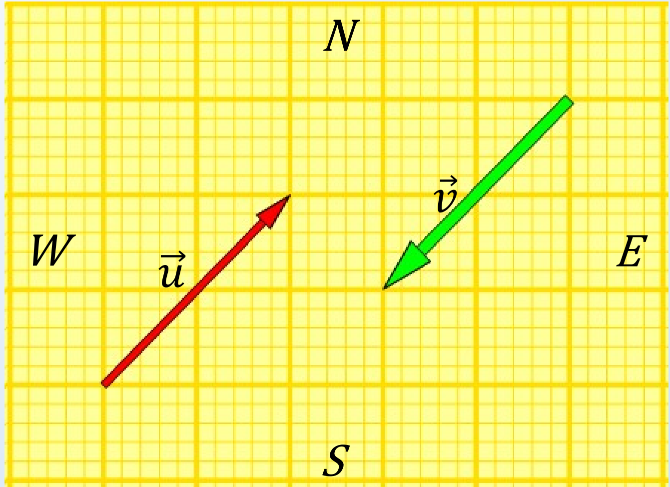


$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

- **magnitude (1):** $|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2}$
- **orientação espacial (2):** $\theta = \tan^{-1}(|\vec{u}|/|\vec{v}|)$

1) Para o caso em que $\alpha = 90°$, a lei dos cossenos se reduz automaticamente ao teorema de Pitágoras.
2) Neste caso, o "elemento" de referência para orientação espacial é o próprio vetor $\vec{v}$.

- OPOSTO

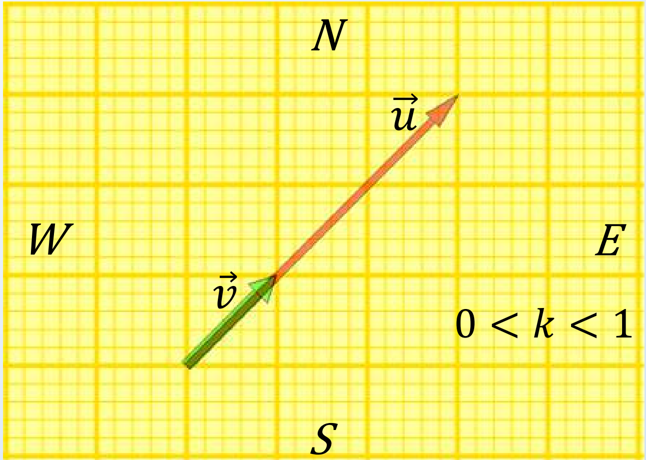


Definimos $\vec{v} = -\vec{u}$ como sendo aquele em que $\vec{v} + \vec{u} = 0$. Portanto, da **regra do paralelogramo** da operação **adição**, concluímos que o sinal negativo representa uma mudança no sentido do vetor original.

$\vec{v} = -\vec{u}$

- magnitudes iguais ($|\vec{v}| = |-\vec{u}| = |\vec{u}|$)
- orientações espaciais diferentes (*mesma direção, mas sentidos opostos*)

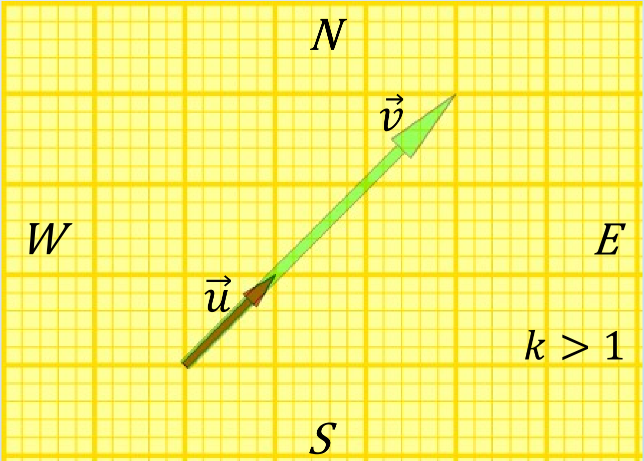
- PRODUTO POR UM ESCALAR (A)



$\vec{v} = k\vec{u}$

Se $0 < k < 1$:

magnitude: diminui, pois $k|\vec{u}| < |\vec{u}|$.
orientação espacial:
- não muda de sentido se $0 < k < 1$.
- muda de sentido se $-1 < k < 0$.



$\vec{v} = k\vec{u}$

Se $|k| > 1$:

magnitude: aumenta, pois $k|\vec{u}| > |\vec{u}|$.
orientação espacial:
- não muda de sentido se $k > 1$.
- muda de sentido se $k < -1$.

- PRODUTO POR UM ESCALAR (B)

Se o escalar k for um número puro ele não alterará a natureza do vetor original que será multiplicado por ele. Por sua vez, se k for uma grandeza escalar, a referida natureza será alterada.

Exemplos:

$\vec{v}_B = 2\vec{v}_A$

- $k = 2 \rightarrow$ número puro
- $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ têm a mesma natureza vetorial; ambos representam a grandeza velocidade.

$\vec{F}_R = m\vec{a}$

- $k = m \rightarrow$ grandeza escalar (massa constante)
- $\vec{F}_R$ e $\vec{a}$ têm natureza vetorial diferentes; $\vec{a}$ é aceleração e $\vec{F}_R$ é força resultante.

- PRODUTO POR UM ESCALAR (C)

Da definição de **produto por um escalar** chega-se à conclusão de que um vetor $\vec{u}$ qualquer pode sempre ser escrito como produto de um escalar u (proporcional à sua magnitude, $u = \pm|\vec{u}|$) por um vetor unitário $\hat{\imath}$ (orientação espacial de referência, onde $|\hat{\imath}| = 1$), ou seja,$\vec{u} \equiv \hat{\imath}u = \pm\hat{u}\ |\vec{\imath}|$. Portanto, $\pm\hat{\imath}$ define a verdadeira **orientação espacial** (direção e sentido) do vetor $\vec{u}$.

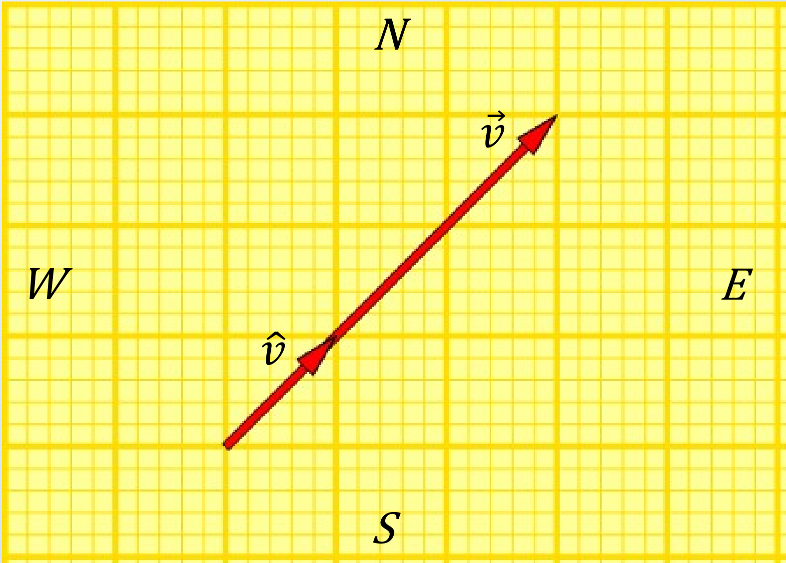
Desde que $\hat{\imath}$ é um vetor unitário puro ($|\hat{\imath}| = 1$), não possuindo qualquer unidade, toda a magnitude e natureza física da grandeza vetorial residem exclusivamente na parte escalar do vetor.

No entanto, é no vetor unitário que se encontra toda a informação da direção espacial de referência do vetor. Portanto, ao invés de olharmos na vizinhança do referido vetor à procura de um “objeto” para especificar sua orientação espacial, basta agora olharmos diretamente para o seu vetor unitário, que, juntamente com o sinal do valor escalar do vetor, determina a completa orientação espacial do vetor.

Por exemplo, se $\vec{v} \equiv (-4{,}2\ \mathrm{m/s})\hat{\imath}$ representar a velocidade de uma partícula, temos então que o seu valor escalar é $v = -|\vec{v}| = -4{,}2\ \mathrm{m/s}$, com magnitude de $|v| = 4{,}2\ \mathrm{m/s}$ (dada no SI), enquanto que sua orientação espacial é dada pelo sinal do seu valor escalar v, em conjunto com o vetor unitário $\hat{\imath}$, ou seja, $-\hat{\imath}$. Por sua vez, em termos de um novo vetor unitário $\hat{\imath}'$ definido como $\hat{\imath}' = -\hat{\imath}$ teríamos $\vec{v} \equiv (4{,}2\ \mathrm{m/s})\hat{\imath}'$. Seja como for, usando $\hat{\imath}$ ou $\hat{\imath}'$, $\vec{v}$ sempre será o mesmo.

- PRODUTO POR UM ESCALAR (D)

Outra forma de representarmos um vetor $\vec{u}$ qualquer em termos de um **produto por um escalar** é definindo um vetor unitário $\hat{u}$ ($|\hat{u}| = 1$) que têm sempre a mesma orientação espacial que $\vec{u}$, da seguinte forma: $\vec{u} \equiv \hat{u}|u|$, ou $\hat{u} \equiv \vec{u}/|u|$. Portanto, pelo fato de que os vetores $\vec{u}$ e $\hat{u}$ terem sempre a mesma orientação espacial é que usamos a mesma letra para representá-los.



No exemplo ao lado, se $\vec{v} \equiv (-4{,}2\ \mathrm{m/s})\hat{\imath}$ representar a velocidade de uma partícula, temos então que o seu valor escalar é $v = -|\vec{v}| = -4{,}2\ \mathrm{m/s}$, com magnitude de $|\vec{v}| = 4{,}2\ \mathrm{m/s}$ (dada no SI), enquanto que sua orientação espacial é dada pelo sinal do seu valor escalar v, em conjunto com o vetor unitário $\hat{\imath}$, ou seja, $-\,\hat{\imath}$.

Por sua vez, em termos do vetor unitário $\hat{v}$ teríamos $\vec{v} \equiv (4{,}2\ \mathrm{m/s})\hat{v}$, onde $\hat{v} = -\hat{\imath}$. Seja como for, usando $\hat{v}$ ou $\hat{\imath}$, $\vec{v}$ deve ser sempre o mesmo.

2.3 – Representação Analítica

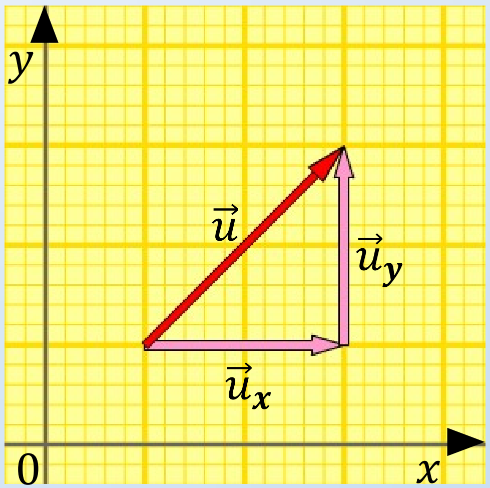
Quando uma grandeza vetorial é representada geometricamente dentro de um dado sistema de coordenadas, então sua magnitude e orientação espacial podem ser completamente descritas (de forma indireta) em termos de seus **componentes**, que são projeções (segundo uma dada regra) sobre os correspondentes eixos coordenados de tal sistema, e, por isso, seus valores são proporcionais (1) aos correspondentes comprimentos destas projeções. Denominamos tal descrição vetorial de **representação analítica (RA)**.

Dentre as diferentes representações analíticas, as mais importantes são aquelas em que os eixos coordenados são ortogonais entre si (2), o que faz com que as regras de projeção do vetor sobre tais eixos também o sejam. Em termos práticos, além de tal ortogonalidade facilitar o manuseio e interpretação dos recursos da álgebra vetorial, o que, por si só, já justificaria seu constante uso, a ortogonalidade entre seus componentes vetoriais facilita o entendimento de **Espaço Vetorial**, bem como sua extensão para o **Espaço de Funções**. Certamente, devido a sua evidente importância, tomaremos o sistema cartesiano como o protótipo (sistema de referência) dentre os demais sistemas para a RA, denominada **representação analítica cartesiana (RAC)**.

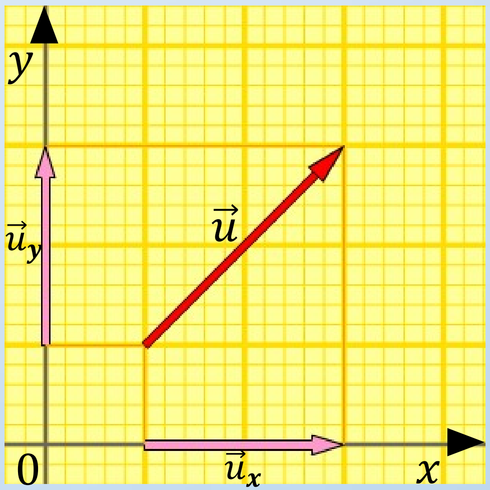
1) Ver último comentário da pg. 5.
2) Os sistemas 2D Cartesiano e Polar, e os sistemas 3D Cartesiano, Polar Esférico e Circular Cilíndrico são os sistemas ortogonais mais utilizados.

2.3.A – Representação Analítica Cartesiana

A RAC ocorre quando um vetor $\mathbf{u}$ é descrito em termos de seus **componentes escalares** u_x, u_y e u_z, que são <u>projeções ortogonais</u> sobre os correspondentes eixos coordenados cartesianos x, y e z, e, por isso, seus valores são <u>proporcionais</u> aos correspondentes comprimentos destas projeções. Assim, observando as regras do **produto por um escalar** e da **adição** de vetores, temos que $\mathbf{u} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z$. Aqui, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são vetores unitários, mutuamente ortogonais, que apontam sempre nos sentidos positivos dos eixos-x, -y e -z, respectivamente.

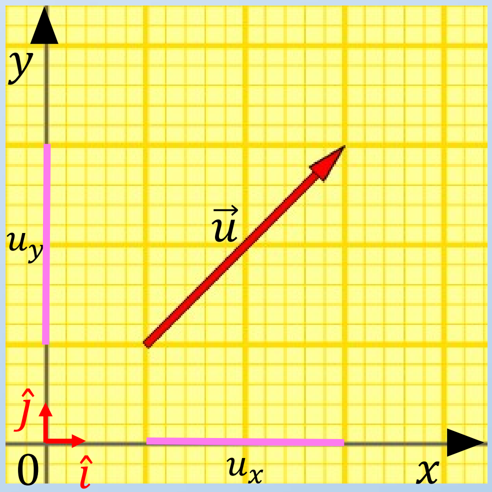


$\mathbf{u} = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y$



$\mathbf{u}_x = u_x\mathbf{i} = \mathbf{i}u_x$

$\mathbf{u}_y = u_y\mathbf{j} = \mathbf{j}u_y$



Rep. Analítica Cartesiana

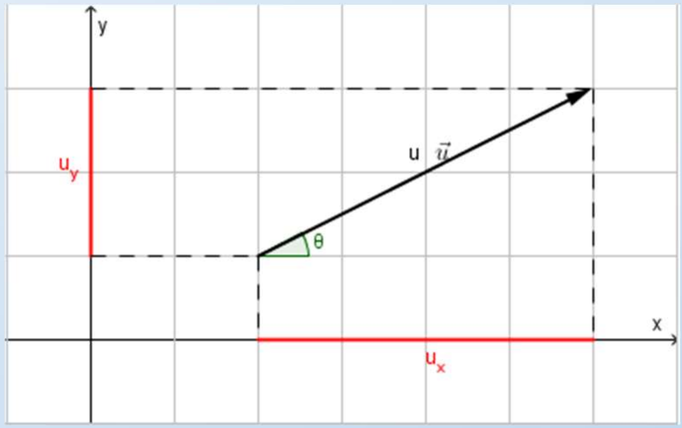
$\mathbf{u} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y$

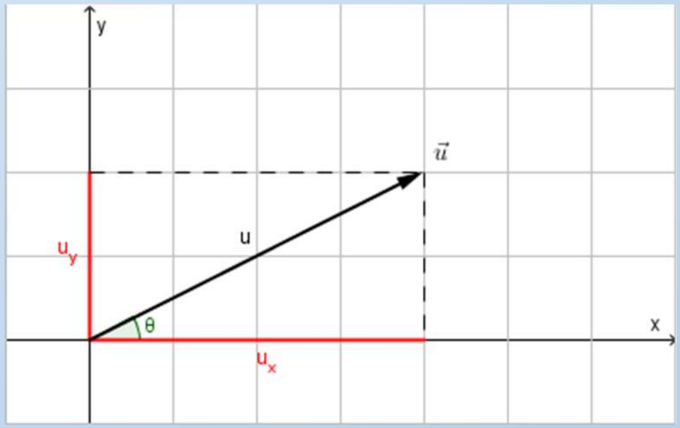
As figuras ao lado, por questão de simplicidade, mostram um vetor $\mathbf{u}$ na representação analítica cartesiana bidimensional.

Por motivos de facilidade de notação, passamos a utilizar o **negrito** como a notação regular de vetor.

Por sua vez, desde que as representações geométrica (RG) e analítica (RA) devem ser equivalentes, pois ambas são apenas maneiras matemáticas distintas de descrever um mesmo vetor, precisamos determinar as relações matemáticas que permitem passar de uma representação para outra. Na realidade, isto pode ser facilmente realizado por empregar um básico conhecimento de trigonometria e do teorema de Pitágoras sobre o segmento de reta que define a flecha do vetor e suas projeções sobre os eixos coordenados. No que segue, trataremos apenas da RAC.

Caso bidimensional: Enquanto $|\mathbf{u}|$ e $\hat{u} = \hat{u}(\theta)$ são, respectivamente, a **magnitude** e **orientação espacial** do vetor $\mathbf{u} = \hat{u}|\mathbf{u}|$ na RG, u_x e u_y são, respectivamente, os **componentes escalares** nas direções x e y do vetor $\mathbf{u} = \mathbf{i}\, u_x + \mathbf{j}\, u_y$ na RAC. *A menos que o vetor* $\mathbf{u}$ *seja a posição ou deslocamento, os valores de tais componentes são apenas* *__proporcionais__* *aos comprimentos das projeções ortogonais sobre os eixos coordenados*.





<u>Dados $|\mathbf{u}|$ e θ (RG):</u>

$$u_x = |\mathbf{u}| \cos\theta$$

$$u_y = |\mathbf{u}| \operatorname{sen}\theta$$

<u>Dados u_x e u_y (RC):</u>

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(u_y/u_x\right)$$

Não confundir a descrição geométrica com a polar; a coincidência neste caso é apenas aparente.

Assim, a escolha de usar $\mathbf{u} = \hat{u}|\mathbf{u}|$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{i}\,u_x + \mathbf{j}\,u_y + \mathbf{k}\,u_z$ é essencialmente uma escolha entre a RG ou a RAC. Enquanto que a RG pode ajudar na visualização, a RAC é usualmente mais apropriada para os desenvolvimentos algébricos e as computações numéricas. Sendo assim, existe a seguinte correspondência biunívoca:

$$\{\text{flecha}\} \leftrightarrow \{\text{componentes}\}$$

ou, mais especificamente,

$$\mathbf{u} = \hat{u}|\mathbf{u}| \;\leftrightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{i}\,u_x + \mathbf{j}\,u_y + \mathbf{k}\,u_z$$

Observe que o índice x em u_x denota o componente x e não uma dependência sobre a variável x; o mesmo se dá para os demais índices.

Além do mais, como fica evidente das figuras e relações matemáticas de transformação acima, há aqui uma dupla liberdade de translação: **(i)** a de transladar um dado sistema cartesiano em relação a qualquer vetor fixo no espaço e **(ii)** a de transladar qualquer vetor em relação a um dado referencial cartesiano fixo. Seja como for, em ambos os casos de translação não há alteração da estrutura geométrica do vetor (magnitude e orientação espacial), pois o vetor continua sendo o mesmo. Como já visto antes, denominamos esta propriedade de **Invariância Translacional**.

2.3.B – Vetor Posição

Embora o vetor $\mathbf{u}$ possa representar qualquer grandeza vetorial (deslocamento, velocidade, força etc.), um vetor particularmente importante é aquele que representa a localização de um ponto (x, y, z) a partir da origem $(0,0,0)$ do sistema cartesiano de coordenadas, que recebe o nome de vetor posição e o símbolo especial $\mathbf{r}$. Portanto, neste caso em particular, os componentes (x, y, z) do vetor posição $\mathbf{r}$ não só são exatamente iguais às suas projeções sobre os eixos coordenados, como também são as próprias coordenadas do ponto cartesiano. Tal situação é descrita pela seguinte correspondência biunívoca:

$$\{\text{flecha}\} \leftrightarrow \{\text{componentes} = \text{coordenadas}\}$$

ou, mais especificamente,

$$\boxed{\mathbf{r} = \hat{r}\, r \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{i}\, x + \mathbf{j}\, y + \mathbf{k}\, z = (x, y, z)}$$

RAC bidimensional: Enquanto r e $\hat{r} = \hat{r}(\theta)$ são, respectivamente, a magnitude e a orientação espacial do vetor posição $\mathbf{r}$ na RG, x e y são, respectivamente, os componentes escalares do vetor posição $\mathbf{r}$ na RAC. Neste caso, os componentes x e y do vetor posição $\mathbf{r}$ não só são exatamente iguais às suas projeções sobre os eixos coordenados, como também são as próprias coordenadas (x, y) do ponto cartesiano.

Dados r e θ:

$$x = r\cos\theta$$

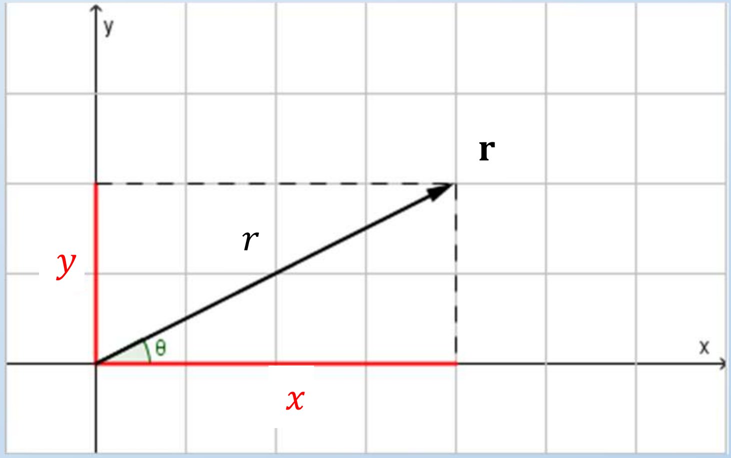
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Dados x e y:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan y/x$$

$$\boxed{\mathbf{r} = \hat{r}\,r \ \leftrightarrow\ \mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y = (x, y)}$$



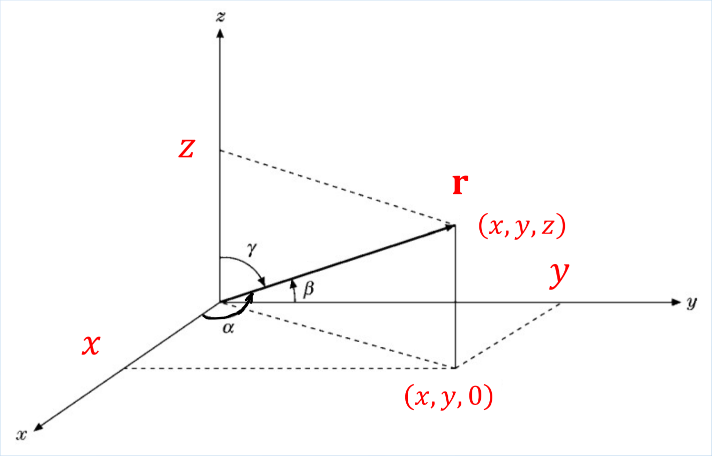
RAC tridimensional: Enquanto r e $\hat{r} = \hat{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ são, respectivamente, a magnitude e a orientação espacial do vetor posição $\mathbf{r}$ na RG, x, y e z são, respectivamente, os componentes do vetor posição $\mathbf{r}$ na RAC; aqui, α, β e γ são denominados **ângulos diretores**. Neste caso, os componentes x, y e z do vetor posição $\mathbf{r}$ não só são exatamente iguais às suas projeções sobre os eixos coordenados, como também são as próprias coordenadas (x, y, z) do ponto cartesiano.

Dados r e o conjunto α, β e γ:

$$x = r\cos\alpha,$$
$$y = r\cos\beta,$$
$$z = r\cos\gamma$$

Dados x, y e z:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\alpha = \arctan\sqrt{y^2 + z^2}/x$$
$$\beta = \arctan\sqrt{z^2 + x^2}/y$$
$$\gamma = \arctan\sqrt{x^2 + y^2}/z$$



$$\mathbf{r} = \hat{r}\, r \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{i}\, x + \mathbf{j}\, y + \mathbf{k}\, z = (x, y, z)$$

Aqui, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são chamados **cossenos diretores**.

A fim de simplificar a visualização do vetor, bem como facilitar o tratamento matemático de sua álgebra, vamos nos restringir na maioria das vezes a vetores embebidos no espaço bidimensional. Certamente, tal simplificação não implicará em perda de generalidade.

2.4 – Uma Breve Discussão

Na seção anterior, vetores foram definidos ou representados de dois modos equivalentes: **(1) geometricamente**, em que suas magnitude e orientação espacial são diretamente especificadas, e **(2) analiticamente**, em que sua magnitude e orientação espacial são indiretamente especificadas por meio de seus componentes em relação a uma base vetorial.

Entretanto, **a definição de vetor como uma quantidade que tem magnitude e orientação espacial é incompleta.** Por exemplo, encontramos quantidades, tais como constantes elásticas e índices de refração em cristais anisotrópicos, que têm magnitude e orientação espacial, **mas não são vetores**. Por este motivo, incluímos ainda em sua definição original o fato do mesmo ter que obedecer uma álgebra específica, como foi descrito acima pelas operações de adição e multiplicação por escalar e suas propriedades associadas.

Todavia, da mesma forma como ocorre com a Teoria dos Números, em que para cada conjunto especificamos seu domínio de operações e propriedades (1), para definirmos o vetor de forma matematicamente estruturada, precisaremos também especificar o seu domínio de existência, onde toda uma álgebra possa ser estabelecida. Conforme veremos, este desenvolvimento levará ao que denominamos **espaço vetorial**, e permitirá uma generalização do conceito de vetor apresentado até aqui para: **(1) quantidades complexas**, **(2) funções** e **(3) um número infinito de componentes**. Isto levará a espaços de funções de infinitas dimensões, os **espaços de Hilbert**, que são importantes na moderna teoria quântica.

1) Ver os conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$, Inteiros $\mathbb{Z}$, racionais $\mathbb{Q}$, irracionais $\mathbb{I}$, reais $\mathbb{R}$ e complexos $\mathbb{C}$.

Entretanto, como o vetor é originalmente um objeto geométrico, e portanto independente de qualquer sistema de coordenadas, sua estrutura geométrica não pode depender do sistema de coordenadas utilizado para representá-lo analiticamente. Em outras palavras, além da **invariância translacional**, deve haver também uma **invariância rotacional**, que corresponde a liberdade de se rotacionar o sistema de coordenadas escolhido em relação a qualquer vetor devidamente fixado no espaço.

Há uma base física para tais invariâncias. Descrevemos nosso mundo físico pela Matemática, mas essa descrição e quaisquer previsões físicas que possamos fazer devem ser **independentes** de nossas convenções matemáticas. Em nosso caso específico, admitimos que o espaço é isotrópico; isto é, não há uma direção preferencial (todas as direções são equivalentes). **Então, o sistema físico que está sendo analisado ou a lei da física que está sendo enunciada (seja uma grandeza escalar ou vetorial) não pode e não deve depender de nossa escolha ou orientação dos eixos coordenados**.

A busca desta invariância levará a um refinamento e sofisticação a mais na definição de vetor, de seu espaço vetorial e de sua álgebra associada. Em particular, o vetor será agora definido em termos do comportamento de seus componentes sob rotação dos eixos coordenados, e criará a base matemática para a introdução à **análise tensorial** e aos **grupos de transformação**.

Por fim, ainda podemos afirmar que os vetores entram na física em duas formas distintas:

i. Como uma grandeza vinculada a um corpo, implicando alguma característica dele ou ação aplicada sobre ele, que não depende necessariamente de um ponto específico do espaço onde o corpo se encontra. A velocidade e a força ilustram este tipo de vetor.

ii. Como uma grandeza que está vinculada a uma certa região do espaço e, portanto, é função da posição; isto é, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$, onde $u_x = u_x(x, y, z)$, e assim por diante. Exemplos deste tipo de força incluem a velocidade de um fluido que escoa em um dado volume, e os campos elétrico e magnético. A este tipo de vetor definido sobre uma dada região do espaço e sendo uma função da posição denominamos de **Campo Vetorial**, e se tornará extremamente importante quando nós diferenciarmos e integrarmos vetores.

2.5 – Espaço Vetorial

A definição elementar de vetor, com suas propriedades e operações fundamentais, notadamente a **adição** e **produto por um escalar**, garantem a definição de um domínio de validade, denominado **espaço vetorial** $\mathbb{V}$, onde se estabelece todo o desenvolvimento de uma **álgebra vetorial**:

- **Espaço Vetorial:** Um **espaço vetorial** real é um conjunto $\mathbb{V}$, não vazio, com duas operações: **adição**: $\mathbb{V}\times\mathbb{V}\xrightarrow{+}\mathbb{V}$, e **multiplicação por um escalar**: $\mathbb{R}\times\mathbb{V}\xrightarrow{\cdot}\mathbb{V}$, tais que, para quaisquer $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{V}$ e $a,b\in\mathbb{R}$, as propriedades de fechamento abaixo são satisfeitas:

Adição	Igualdade (Invariância Translacional):	$\mathbf{v}=\mathbf{u}$, desde que $\lvert\mathbf{v}\rvert=\lvert\mathbf{u}\rvert$ e $\hat{\mathbf{v}}=\hat{\mathbf{u}}$
	Elemento Neutro (Vetor Nulo):	$\exists\ \mathbf{0}\in\mathbb{V}\mid\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$
	Oposto (Negativo de um Vetor):	$\exists\ -\mathbf{u}\in\mathbb{V}\mid\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}=0$
	Comutativa:	$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
	Associativa:	$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
Multiplicação	Elemento Neutro:	$1(\mathbf{u})=\mathbf{u}$
	Comutativa:	$a\mathbf{u}=\mathbf{u}a$
	Associativa:	$(ab)\mathbf{u}=a(b\mathbf{u})$
	Distributiva (em relação aos vetores):	$k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
	Distributiva (em relação aos escalares):	$(k+l)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$

Todo espaço ou subespaço vetorial tem que ter o vetor nulo.

A definição de **espaço vetorial** suscita imediatamente outras definições que permitem tratá-lo de forma mais consistente e prática, e, consequentemente, um maior aperfeiçoamento da álgebra vetorial associada:

- **Combinação Linear:** Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real, onde $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N \in \mathbb{V}$ e $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$. Então, o vetor $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_N\mathbf{u}_N$ também é um elemento de $\mathbb{V}$, ao que chamamos **combinação linear** de $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N$.
- **Conjunto Completo:** Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real, onde $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N \in \mathbb{V}$ e $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$. Então, se os vetores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N$ abrangem todo $\mathbb{V}$, em termos do qual qualquer vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ pode ser expandido como uma **combinação linear** dos mesmos, o conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N\}$ é um **conjunto completo** de $\mathbb{V}$, que denotamos como $\mathbb{V} = [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N]$.
- **Dependência e Independência Linear:** Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real, onde $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N \in \mathbb{V}$ e $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$. Então, dizemos que o conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N\}$ é **linearmente independente (LI)**, ou que os vetores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N$ são LI, se a equação $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_N\mathbf{u}_N = 0$ implica que $a_1 = \cdots = a_N = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$, dizemos que o conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N\}$ é **linearmente dependente (LD)**, ou que os vetores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u}_N$ são LD.

- **Base de um Espaço Vetorial**: Um conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$ de vetores de $\mathbb{V}$ forma uma **base** de $\mathbb{V}$ se:

i. $\mathbb{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\mathrm{N}]$.

ii. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\mathrm{N}\}$ for LI.

- **Corolário:** Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado de **dimensão** de $\mathbb{V}$, e denotado por $\dim \mathbb{V}$.

- **Teorema:** Dada uma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$ de $\mathbb{V}$, cada vetor de $\mathbb{V}$ é escrito de maneira única como combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$.

2.5.A – Espaço Vetorial – Sistema Cartesiano de Coordenadas

Com base no formalismo do Espaço Vetorial desenvolvido na RG, buscamos aqui estender seus inerentes conceitos e aplicabilidades da álgebra vetorial associada para a RAC, observando que ambas as representações devem ser consistentes entre si:

Sejam k e l escalares quaisquer e $\mathbf{u} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y + \mathbf{k}w_z$ vetores quaisquer descritos no sistema cartesiano de coordenadas. Assim, observadas as exigências anteriormente mencionadas, temos:

Igualdade:	$\mathbf{v} = \mathbf{u} \;\Leftrightarrow\; v_x = u_x, v_y = u_y$ e $v_z = u_z$
Adição:	$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; w_x = u_x + v_x, w_y = u_y + v_y$ e $w_z = u_z + v_z$
Multiplicação por um escalar:	$\mathbf{v} = k\mathbf{u} \;\Leftrightarrow\; v_x = ku_x, v_y = ku_y$ e $v_z = ku_z$
Oposto:	$\mathbf{v} = -\mathbf{u} \;\Leftrightarrow\; v_x = -u_x, v_y = -u_y$ e $v_z = -u_z$
Vetor nulo:	$\exists\, \mathbf{u} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; v_x = 0, v_y = 0$ e $v_z = 0$
E assim por diante ...	...

Assim, neste sentido, desde que os três vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ abrangem todo o espaço real tridimensional $\mathbb{R}^3$, em termos do qual qualquer vetor $\mathbf{u}$ pode ser expandido como uma **combinação linear** dos mesmos, temos que $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$, e como nenhum dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ podem ser escritos como uma **combinação linear** dos outros dois (1), temos que o conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é LI.

Portanto, das duas propriedades acima, e pelo fato dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ serem **unitários** e **ortogonais entre si**, podemos afirmar que o conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ forma uma **base ortonormal** (2) do **espaço vetorial** (**espaço Euclidiano**) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$, também denominado de **base canônica**.

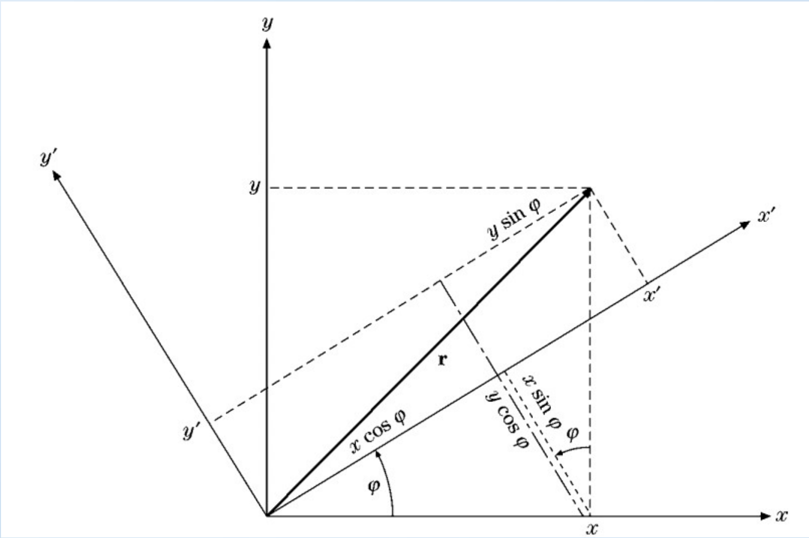
1) Se um vetor qualquer $\mathbf{u} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z$ se anula, todos os seus componentes também devem individualmente se anular; isto é, se $\mathbf{u} = 0 \;\Rightarrow\; u_x = u_y = u_z = 0$.

2) A base de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ não é única; nem sequer ortogonais ou unitários eles precisam ser.

2.6 – Rotação dos Eixos Coordenados

Como o vetor é originalmente um objeto geométrico, e portanto independente de qualquer sistema de coordenadas, sua estrutura geométrica não pode depender do sistema de coordenadas utilizado para representá-lo analiticamente. Em outras palavras, além da **invariância translacional**, deve haver também uma **invariância rotacional**, que corresponde a liberdade de se rotacionar o sistema de coordenadas escolhido em relação a qualquer vetor devidamente fixado no espaço.

Neste sentido, vamos tomar o vetor posição $\mathbf{r}$ como protótipo e verificar como se comporta sua representação analítica sob dois sistemas cartesianos de coordenadas, sendo que um rotacionado em relação ao outro; por questão de simplicidade, vamos considerar apenas o caso bidimensional (ver figura abaixo):



SCC original (sem linha):

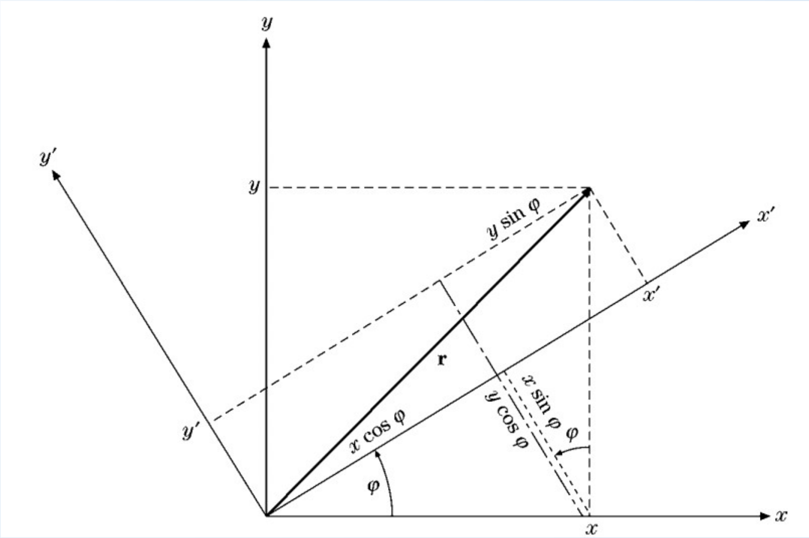
$\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y$, com magnitude $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e orientação espacial $\theta = \arctan(y/x)$.

SCC rotacionado (com linha):

$\mathbf{r}' = \mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y'$, com magnitude $r' = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ e orientação espacial $\theta' = \arctan(y'/x')$.

Obs.: SCC rotacionado em torno do eixo-z no sentido anti-horário por um ângulo φ, mas de forma a manter $\mathbf{r}$ fixo.

Por meio de uma análise trigonométrica da figura em questão, chegamos às seguintes relações entre ambas as representações:



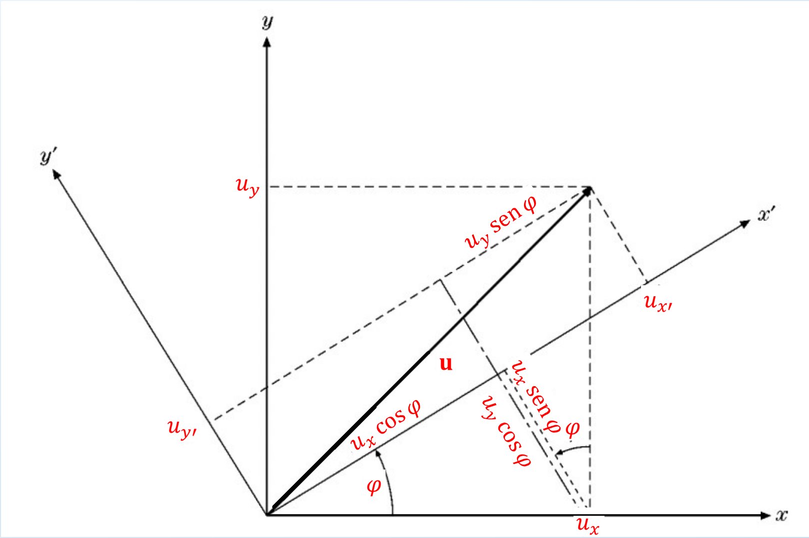
$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = x'\,\mathrm{sen}\,\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

Por fim, partindo do primeiro conjunto de equações e após algumas manipulações algébricas, chegamos aos seguintes resultados:

$$\begin{cases} r' = \left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r \\ \theta' = \arctan\left(\dfrac{y'}{x'}\right) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \varphi = \theta - \varphi \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}}$$

Portanto, tais resultados significam que <u>o vetor posição $\mathbf{r}$ permanece invariante sob rotação do sistema de coordenadas</u>, mantendo inalteradas a sua magnitude e orientação espacial, como era de se esperar.

Por sua vez, como os componentes escalares de um vetor **u** qualquer escalam proporcionalmente às suas correspondentes coordenadas cartesianas, então, desde que o referido vetor se mantenha fixo, seus componentes também devem se transformar sob rotação do sistema cartesiano de coordenadas da mesma forma como os componentes de **r**. Portanto, todo vetor é invariante sob rotação do sistema de coordenadas.



$$\begin{cases} u'_x = u_x \cos\varphi + u_y \operatorname{sen}\varphi \\ u'_y = -u_x \sin\varphi + u_y \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = u'_x \cos\varphi - u'_y \operatorname{sen}\varphi \\ \mathrm{u}_y = u'_x \operatorname{sen}\varphi + u'_y \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\mathbf{u}'| = \left({u'_x}^2 + {u'_y}^2\right)^{1/2} = \left(u_x^2 + u_y^2\right)^{1/2} = |\mathbf{u}| \\ \theta' = \arctan\left(\dfrac{u'_y}{u'_x}\right) = \arctan\left(\dfrac{u_y}{u_x}\right) - \varphi = \theta - \varphi \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{u}}$$

Como as relações de transformação anteriores são sempre válidas qualquer que seja o sistema de coordenadas ortogonais, então podemos refinar o conceito de vetor na representação analítica (RA), sendo agora dada em termos da transformação de seus componentes sob rotação do sistema de coordenadas ortogonais:

Sempre que um par de quantidades u_x e u_y em um sistema de eixos-x -y coordenados ortogonais se transformarem sob rotação deste sistema em u'_x e u'_y como

$$\begin{cases} u'_x = u_x \cos\varphi + u_y \operatorname{sen}\varphi \\ u'_y = -u_x \sin\varphi + u_y \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = u'_x \cos\varphi - u'_y \operatorname{sen}\varphi \\ \mathrm{u}_y = u'_x \operatorname{sen}\varphi + u'_y \cos\varphi \end{cases}$$

então nós definimos u_x e u_y como os componentes de um vetor $\mathbf{u}$; caso contrário, não formam um vetor.

A esta forma de invariância denominamos de **covariância**.

Os componentes de $\mathbf{u}$ em um sistema de coordenadas particular constitui a RA de $\mathbf{u}$ neste sistema.

As relações de transformação anteriores são uma garantia de que $\mathbf{u}$ é um vetor, e, portanto, seu significado físico é independente da rotação do sistema de coordenadas.

Perceba que se o sistema cartesiano permanece fixo e é o vetor que rotaciona, as relações anteriores ainda são válidas, mas desta vez descrevem vetores diferentes, pois suas orientações espaciais mudaram. Uma forma matemática interessante de descrever tal situação é usando a notação matricial:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Tais matrizes são denominadas **matrizes ortogonais de rotação**.

2.6.A – Generalização para Maiores Dimensões

A fim de generalizarmos os resultados anteriores, é conveniente primeiro usarmos uma notação mais geral, em termos de índices. Neste sentido, fazemos as substituições

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y,$$

e reescrevemos os parâmetros em φ em termos dos cossenos do ângulo entre as direções de sentido positivo x_i' e x_j (cossenos diretores):

$$a_{11} = \cos(x_1', x_1) = \cos\varphi,$$

$$a_{12} = \cos(x_1', x_2) = \cos(\varphi - \pi/2) = \operatorname{sen}\varphi,$$

$$a_{21} = \cos(x_2', x_1) = \cos(\varphi + \pi/2) = -\operatorname{sen}\varphi,$$

$$a_{22} = \cos(x_2', x_2) = \cos\varphi,$$

Desta forma, as relações de transformação para os componentes de $\mathbf{r}$ ficam da forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = a_{22}x_1' + a_{21}x_2' \\ x_2 = a_{12}x_1' + a_{11}x_2' \end{cases}$$

Das equações acima, uma generalização para três, quatro e maiores dimensões é direta. Assim, usando um somatório para compactar a notação e observando que os cossenos diretores, dados pelos parâmetros a_{ij}, podem ser redefinidos como derivadas parciais de x_i com x_j. Assim, temos

$$x'_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \,, \qquad i = 1,2,\dots,N$$

onde $a_{ij} \equiv \cos(x'_i, x_j) = \partial x'_i / \partial x_j$.

$$x_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} x'_i \,, \qquad j = 1,2,\dots,N$$

onde $a_{ij} \equiv \cos(x'_i, x_j) = \partial x_j / \partial x'_i$.

Os cossenos diretores são invariantes quanto a troca das coordenadas dos eixos fixos e os rotacionados:

$$a_{ij} \equiv \partial x'_i / \partial x_j = \partial x_j / \partial x'_i$$

Os cossenos diretores satisfazem uma condição de ortogonalidade:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Para verificar tal resultado, basta substituir os cossenos diretores por suas derivadas parciais:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \sum_i \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

pois, a menos que $j \neq k$, x_j e x_k serão coordenadas independentes, completamente perpendiculares (duas ou três dimensões) ou ortogonais (para qualquer número de dimensões).

Por fim, estendendo tal notação para outros vetores, a definição de vetor em termos do comportamento de seus componentes sob rotação do sistema de coordenadas, agora fica como:

As N quantidades u_j são ditas serem componentes de um vetor N-dimensional se, e somente se, seus valores relativos aos eixos coordenados rotacionados forem dados como

$$u'_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j \,, \qquad i = 1,2,\dots,N.$$

onde os parâmetros a_{ij} são os cossenos diretores dados como

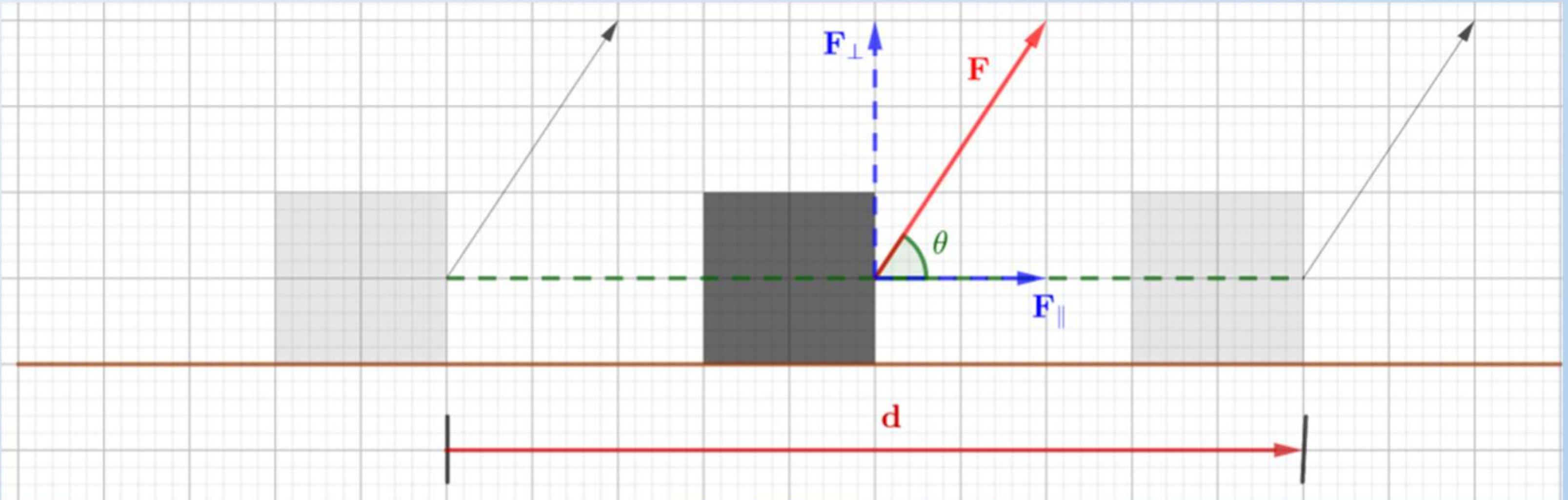
$$a_{ij} = \cos(x'_i, x_j) = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}.$$

Para duas dimensões, os quatro a_{ij} não são independentes, estando sujeitos a três restrições, ainda a serem consideradas. Para rotações tridimensionais há nove parâmetros a_{ij}, mas apenas três independentes, e assim por diante. A justificativa para esse conjunto redundante de cossenos diretores é a conveniência que ele oferece, como será visto mais tarde. (Também ver descrições alternativas, tais como (i) os ângulos de Euler, (ii) os quatérnions e (iii) os parâmetros de Cayley–Klein; essas alternativas têm suas respectivas vantagens e desvantagens.)

Tendo estabelecida a base conceitual-matemática de vetor, agora vamos estabelecer outras operações matemáticas entre eles. Das possibilidades que são consistentes, abordaremos o **produto escalar (interno ou ponto)** e o **produto vetorial (externo ou cruzado)** que são tanto matematicamente quanto fisicamente interessantes. Uma terceira possibilidade, a que trata sobre **tensores**, deverá ser tratada somente posteriormente.

2.7 – Produto Escalar, Interno ou Ponto

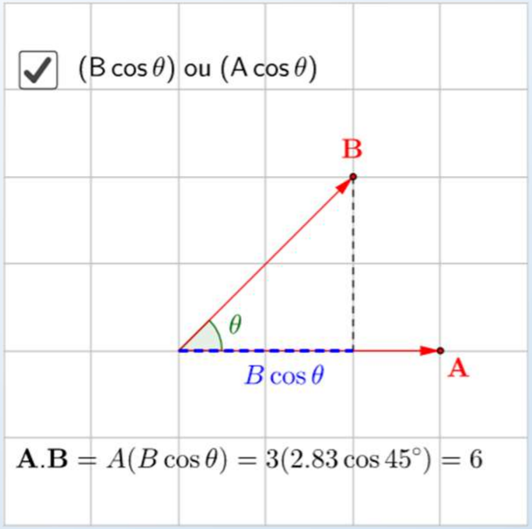
A principal motivação para a definição do produto escalar vem do campo da física, especificamente do cálculo do **trabalho de uma força**, W (ou, simplesmente, **trabalho**), que pode ser inicialmente definido como o produto do deslocamento de um corpo em linha reta, vezes a projeção de uma força constante que atua sobre ele ao longo da direção deste mesmo deslocamento, e descrito matematicamente pela notação do produto escalar $W = \mathbf{F}.\mathbf{d} = \mathrm{F}\ \mathrm{d}\cos\theta$; aqui, $\mathbf{d}$ é o deslocamento (em linha reta) e $\mathbf{F}$ é a força (constante em todo o deslocamento).

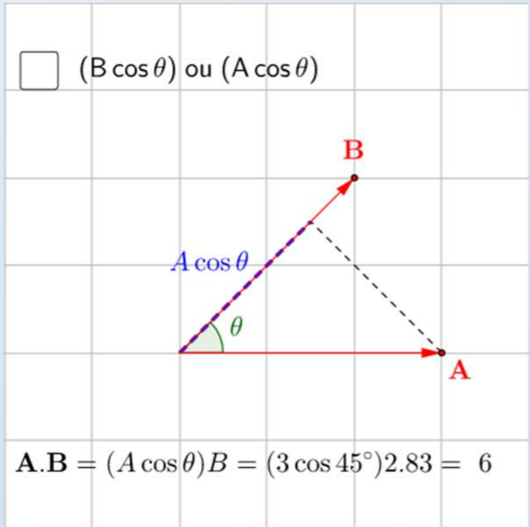


- A fim de simplificar a notação, usaremos F ao invés de $|\mathbf{F}|$ como módulo do vetor $\mathbf{F}$, e assim por diante.

- Aqui, $\cos\theta = \cos(\mathbf{F}, \mathbf{d})$.

2.7.A – Produto Escalar - Representação Geométrica





Definição:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\,(B\cos\theta) = (A\ \cos\theta)B$$

Propriedades:

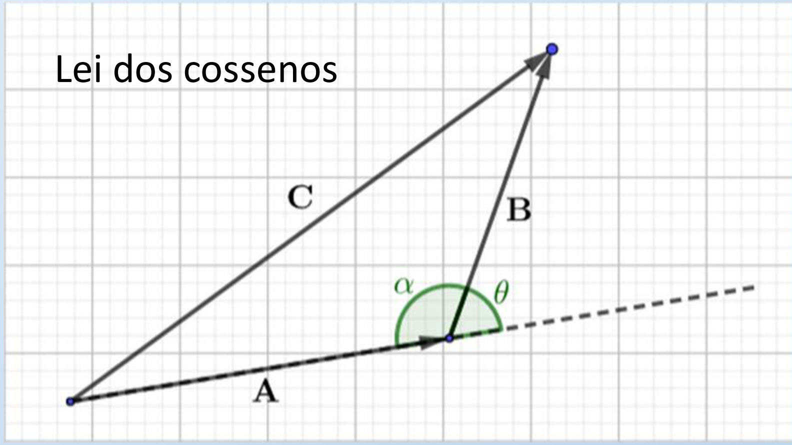
Seja $c \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{V}$, então:

- $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$ - Comutativa
- $(c\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}.(c\mathbf{B}) = c(\mathbf{A}.\mathbf{B})$ - Associativa
- $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}.\mathbf{B} + \mathbf{A}.\mathbf{C}$ - Distributiva
- $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$

<u>Resultados importantes</u>:

Se $\mathbf{A} \neq 0$ e $\mathbf{B} \neq 0$, então

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \quad (\mathbf{A} \perp \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \pm AB \Rightarrow \theta = 0^\circ/180^\circ\,(+/-) \quad (\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}) \end{cases}$$



<u>Lei dos Cossenos & Invariância</u>:

$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$

$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$C^2 = A^2 + B^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

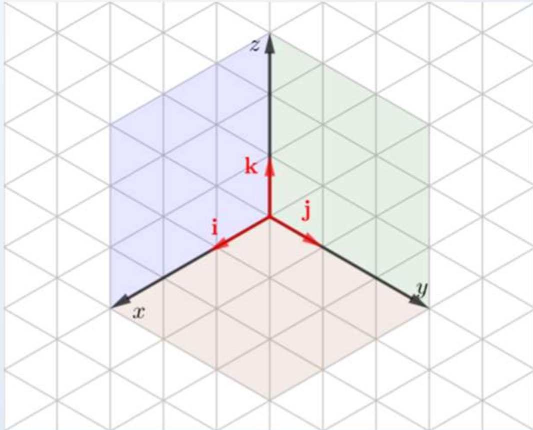
Invariância sob rotação dos eixos coordenados (pois é um escalar!):

$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \frac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2)$

Lei dos cossenos

$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha$

2.7.B – Produto Escalar - Representação Analítica



A fim de estabelecermos como se dá o produto escalar entre dois vetores quaisquer na representação analítica, vamos primeiro obter o produto escalar entre os vetores ortonormais $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, que determinam a base do espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \leftarrow \text{ base } \mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \leftarrow \text{ coordenadas cartesianas} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \cos 0° = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \cos 90° = 0 \end{cases}$$

<u>Definição</u>:

Seja $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{i}\, A_x + \mathbf{j}\, A_y + \mathbf{k}\, A_z$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i}\, B_x + \mathbf{j}\, B_y + \mathbf{k}\, B_z$. Então, da definição de produto escalar na representação geométrica, temos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\mathbf{i}\, A_x + \mathbf{j}\, A_y + \mathbf{k}\, A_z\right) \cdot \left(\mathbf{i}\, B_x + \mathbf{j}\, B_y + \mathbf{k}\, B_z\right)$$

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

<u>Invariância</u>:

Sistema de coordenadas (com linha) rotacionado em relação ao sistema original (sem linha):

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i = \sum_j A'_j B'_j$ - Demonstrar!

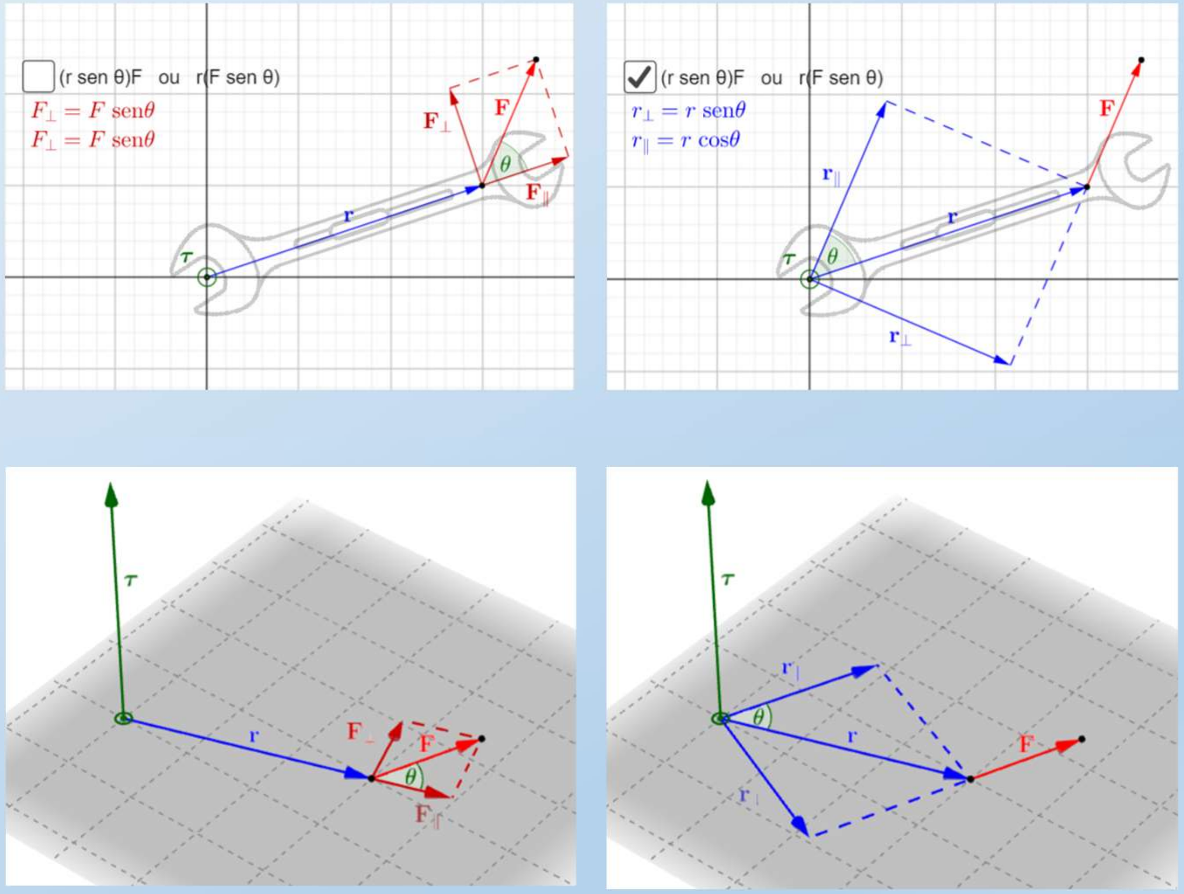
<u>Generalização para $\mathbb{V} = \mathbb{R}^N$</u>:

Seja $e_i \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^N$, onde $i = 1,2, \dots, N$. Então:

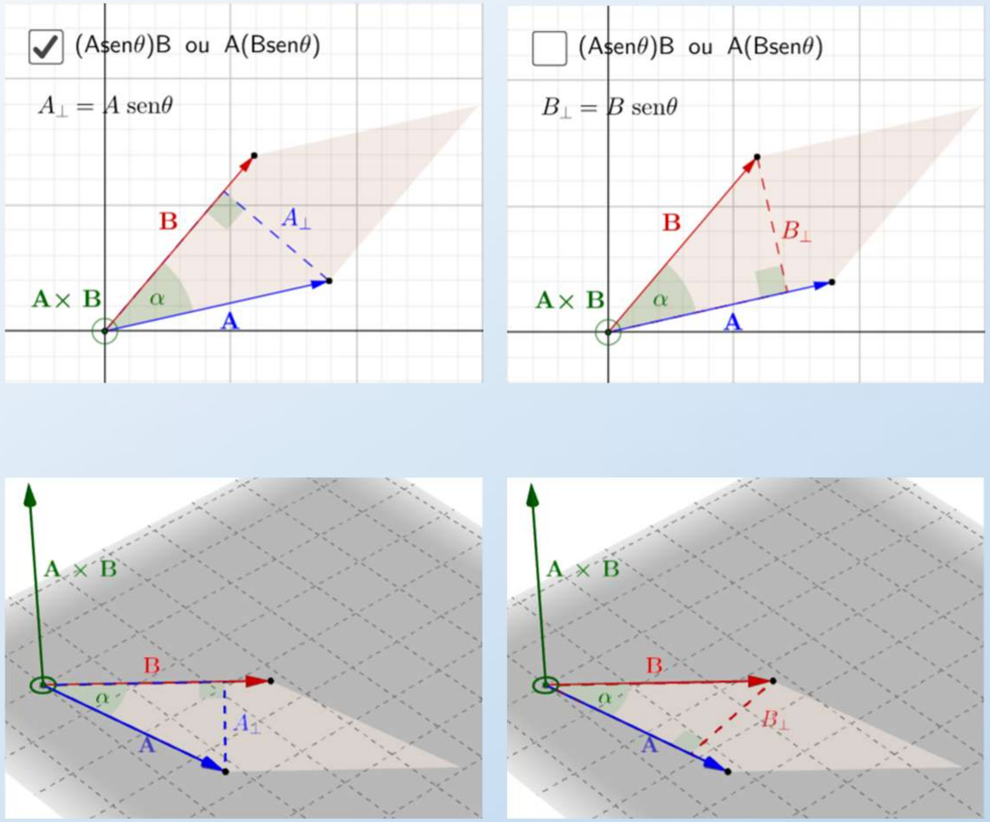
$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$

2.8 – Produto Vetorial, Externo ou Cruz

Uma das motivações para a definição do produto vetorial vem do campo da física, especificamente do cálculo do **torque de uma força, $\boldsymbol{\tau}$** (ou, simplesmente, **torque**), que pode ser inicialmente definido como uma grandeza vetorial cuja **magnitude** é o produto da força aplicada em um determinado ponto de um corpo (corpo este que possui um eixo de rotação), vezes a menor distância que vai do ponto de aplicação da força até o eixo de rotação (**braço da alavanca**), e cuja orientação espacial é dada pela regra da mão direita, no sentido de rotação da menor distância até a força aplicada. Tal grandeza vetorial é descrita matematicamente pela notação do **produto vetorial** $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, onde $\tau = F(r\,\mathrm{sen}\,\theta)$; aqui, $\mathbf{r}$ é o vetor posição, que vai do eixo até o ponto de aplicação da força, e $\mathbf{F}$ é a força, sendo que r, F e θ se mantêm constantes durante a rotação do corpo em torno do seu eixo.



2.8.A – Produto Vetorial - Representação Geométrica



Definição:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{cases} \textbf{magnitude: } (A\,\mathrm{sen}\,\theta)B = A(B\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ \text{(numericamente igual a área do paralelograma)} \\ \textbf{orientação espacial: } \text{regra da mão direita} \end{cases}$$

Propriedades:

Seja $c \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{V}$, então:

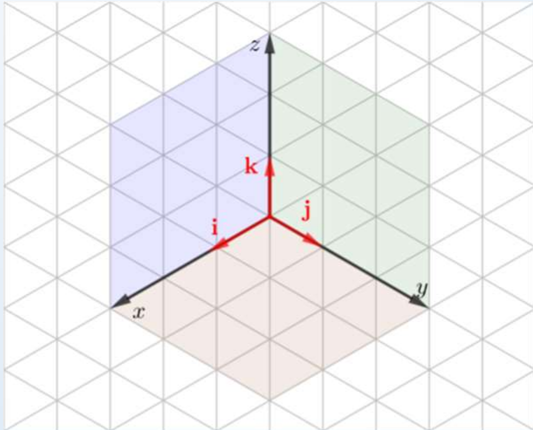
- $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ - Anti-Comutativa
- $(c\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(c\mathbf{B}) = c(\mathbf{A}\times\mathbf{B}),$ - Associativa
- $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C},$ - Distributiva
- $\mathbf{A}\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$

Resultados importantes:

Se $\mathbf{A} \neq 0$ e $\mathbf{B} \neq 0$, então

$$\begin{cases} \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \theta = 0°/180° \quad (\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}) \\ |\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB \Rightarrow \theta = 90° \quad (\mathbf{A} \perp \mathbf{B}) \end{cases}$$

2.8.B – Produto Vetorial - Representação Analítica



A fim de estabelecermos como se dá o produto vetorial entre dois vetores quaisquer na representação analítica, vamos primeiro obter o produto vetorial entre os vetores ortonormais $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, que determinam a base do espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \leftarrow \text{base } \mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \leftarrow \text{coordenadas cartesianas} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{cases}$$

<u>**Definição**</u>:

Seja $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{i}\, A_x + \mathbf{j}\, A_y + \mathbf{k}\, A_z$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i}\, B_x + \mathbf{j}\, B_y + \mathbf{k}\, B_z$. Então, da definição de produto vetorial na representação geométrica, temos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(\mathbf{i}\, A_x + \mathbf{j}\, A_y + \mathbf{k}\, A_z\right) \times \left(\mathbf{i}\, B_x + \mathbf{j}\, B_y + \mathbf{k}\, B_z\right)$$

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(A_y B_z + A_z B_y\right)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\mathbf{k}}$$

Como pode ser verificado, o produto vetorial pode ainda ser escrito na forma de um determinante:

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

- **Demonstrar que a def. geométrica é equivalente à def. analítica:** $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, tal que $\mathbf{A}.\mathbf{C} = 0$, $\mathbf{B}.\mathbf{C} = 0$ e $\mathbf{C} = AB\,\mathrm{sen}\,\theta$

- **Invariância:** Demonstrar que $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é, de fato, um vetor, isto é, obedece à invariância na métrica sob rotação das coordenadas.

OBS 1: A natureza vetorial do produto vetorial é um acidente associado com a natureza tridimensional do espaço ordinário. O produto vetorial também pode ser tratado como um tensor antissimétrico de segunda ordem.

OBS 2: Se definirmos um vetor como uma trinca ordenada de números (ou funções), então não há problema algum em identificar o produto vetorial como um vetor. A operação de produto vetorial mapeia as duas trincas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ para uma terceira trinca, $\mathbf{C}$, que é, por definição, um vetor.

2.9 – Produto Triplo

2.9.A – Produto Escalar Triplo

$\mathbf{A}.\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$ **[Numericamente igual ao volume de um paralelepípedo formado por $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.]**

- **Propriedades:**

• $\mathbf{A}.\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}.\mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C}.\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

2.9.A – Produto Vetorial Triplo

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}.\mathbf{B})$, **Regra BAC – CAB.**