Unidade IV

7 INTRODUÇÃO À LÓGICA

Este tópico será dedicado a uma breve introdução aos principais conceitos relativos à lógica, cujo entendimento é imprescindível para a área computacional. A lógica foi concebida originalmente como um ramo da filosofia e consiste no estudo das regras gerais do pensamento humano. A partir do século XIX, passou a ser considerada, também, um ramo da matemática, e seus conceitos são hoje aplicados aos circuitos dos processadores dos computadores modernos. Consequentemente, as linguagens de programação aplicam seus conceitos, já que os algoritmos produzidos serão executados, fisicamente, pelo hardware do sistema.

Começaremos nossos estudos definindo um dos principais termos relativos à lógica, que é o de proposições.

7.1 Proposições

Uma proposição, de acordo com a lógica clássica, é uma sentença declarativa que assume um e apenas um dos seguintes valores lógicos: verdadeiro (V) ou falso (F). Uma proposição deve expressar uma ideia completa, de forma a ser possível atribuir um valor lógico a ela.

Vejamos alguns exemplos de proposições com seus respectivos valores lógicos:

- A Terra é um planeta do Sistema Solar. (V)
- Marte é o satélite natural da Terra. (F)
- Luís de Camões escreveu *Os Lusíadas*. (V)
- Machado de Assis escreveu *O Cortiço*. (F)
- $2 + 3 = 5$ (V)
- $2 \in$ (V)
- $\pi \in$ (F)

Quando falamos de proposições, estamos falando de uma estrutura dicotômica, ou seja, uma estrutura cujo valor lógico está restrito a apenas duas alternativas (que, a princípio, classificaremos como V ou F). Note que podemos expressar proposições em linguagem matemática, não apenas em uma linguagem cotidiana. No entanto, é necessário nos atentarmos para o fato de que a ideia expressa precisa ser completa, de forma a conseguirmos atribuir um valor lógico a ela. Desse modo, as sentenças apresentadas a seguir não são consideradas proposições:

- **A Terra**. No caso, não foi transmitida uma ideia completa. Assim, não é possível classificarmos a frase como verdadeira ou falsa.

- **Qual é o seu nome?** Trata-se de uma sentença interrogativa, ou seja, de uma pergunta. Não é possível atribuir um valor lógico a perguntas.

- **Saia daqui!** Trata-se de uma sentença imperativa, ou seja, de uma ordem. Não é possível atribuir um valor lógico a ordens.

- **x + y = 3**. Trata-se de uma sentença aberta, ou seja, de uma sentença cujo valor lógico não pode ser determinado até que suas variáveis sejam substituídas por "números específicos".

7.2 Operações lógicas

Os exemplos de proposições que vimos no tópico passado são denominados **proposições simples**, pois cada sentença apresenta uma única ideia, que não pode ser subdividida. É possível unirmos proposições simples utilizando **conectivos lógicos**. Esses conectivos, também chamados de operadores, são palavras que empregamos na nossa linguagem cotidiana, que ganham destaque no estudo da lógica por serem capazes de formar **proposições compostas**.

Observe o exemplo: a Terra é um planeta do Sistema Solar, e Marte é uma estrela.

No caso, temos duas proposições simples formando uma proposição composta. Podemos separá-las, conforme exposto a seguir, observando que cada uma delas assume seu próprio valor lógico.

- **Proposição simples 1**. A Terra é um planeta do Sistema Solar. (V)

- **Proposição simples 2**. Marte é uma estrela. (F)

Voltemos à sentença completa do exemplo. Perceba que as proposições simples estão unidas por um conectivo, representado pela palavra e. Esse conectivo indica uma operação entre as proposições simples, de forma que a proposição composta será verdadeira apenas se ambas as proposições simples componentes forem também verdadeiras. Porém, como a 2ª proposição é falsa, temos uma proposição composta de valor lógico F. Vejamos:

A Terra é um planeta do Sistema Solar, e Marte é uma estrela. (F)

Note que a proposição composta assume, também, um valor lógico. Esse valor depende tanto do valor lógico das proposições simples componentes quanto do conectivo utilizado entre elas. Vamos, em sequência, estudar as principais operações lógicas, apresentando seus respectivos conectivos.

7.2.1 Negação (conectivo "não")

A operação de negação é aquela realizada sobre uma proposição simples por meio do conectivo "não". Simbolicamente, podemos expressar esse conectivo pelo símbolo de til (~).

E por que estamos falando de símbolos, se até então utilizamos palavras para expressar proposições e conectivos? Ora, porque podemos expressar proposições e seus conectivos também de forma simbólica. A maneira mais usual de expressar simbolicamente uma proposição simples é chamando-a com uma letra minúscula.

Vejamos o exemplo: considere a seguinte proposição de nome a com valor lógico verdadeiro.

a: Luís de Camões escreveu *Os Lusíadas*. (V)

Realizar uma operação de negação sobre a proposição a seria incluir em sua sentença o conectivo "não", de forma a trocar o seu valor lógico. Observe:

~a: Luís de Camões não escreveu *Os Lusíadas*. (F)

Quando partimos de uma proposição falsa, a operação de negação torna a proposição verdadeira. Vejamos o exemplo: considere a seguinte proposição b com valor lógico falso: b: Machado de Assis escreveu *O Cortiço*. (F)

Realizar uma operação de negação sobre a proposição b seria incluir em sua sentença o conectivo "não", de forma a trocar o seu valor lógico. Observe:

~b: Machado de Assis não escreveu *O Cortiço*. (V)

Logo, podemos resumir que uma operação de negação simplesmente inverte o valor lógico da proposição sobre a qual atua. Esse comportamento pode ser expresso por meio de uma tabela-verdade, que é uma tabela que lista entradas e saídas lógicas: a entrada, no caso, será uma proposição simples qualquer, a, e a saída será sua negação, ~a.

Tabela 16 – Tabela-verdade da negação

a	~a
V	F
F	V

A tabela indica que, se a é uma proposição verdadeira, sua negação, ~a, deve ser falsa. Mas, se a é falsa, sua negação, ~a, deve ser verdadeira.

7.2.2 Conjunção (conectivo “e”)

A operação de conjunção é aquela capaz de unir duas (ou mais) proposições simples por meio do conectivo “e”. Simbolicamente, podemos expressar esse conectivo pelo símbolo $\wedge$.

Considere as duas proposições simples a seguir.

- a: Luís de Camões escreveu *Os Lusíadas*. (V)
- b: Machado de Assis escreveu *O Cortiço*. (F)

Se realizarmos uma conjunção entre a e b, teremos a proposição composta que segue:

$a \wedge b$: Luís de Camões escreveu *Os Lusíadas*, e Machado de Assis escreveu *O Cortiço*. (F)

A operação de conjunção entre duas proposições simples exige que ambas sejam verdadeiras para que o resultado seja uma proposição composta verdadeira. Desse modo, a proposição composta será verdadeira somente se ambas as proposições simples componentes também o forem.

A tabela-verdade que expressa esse comportamento pode ser vista a seguir. No caso, temos duas entradas quaisquer, a e b, e a saída é justamente a operação de conjunção entre elas, $a \wedge b$.

Tabela 17 – Tabela-verdade da conjunção

a	b	$a \wedge b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Perceba que, dessa vez, precisamos de 4 linhas de estados na tabela-verdade. Isso foi feito porque devemos listar todas as possíveis combinações entre as entradas, ou seja, entre as proposições simples. Para duas entradas dicotômicas, temos quatro possíveis combinações de estados. Aprenderemos a montar tabelas-verdade nas seções seguintes. Por enquanto, vamos nos ater a analisá-las, pois nosso intuito agora é entender as operações lógicas.

A tabela indica que, se a é uma proposição verdadeira e b também é uma proposição verdadeira, a conjunção entre elas deve ser verdadeira. Se pelo menos uma delas for falsa, – o que ocorre nas outras três linhas de estados –, o valor lógico da proposição composta é falso.

7.2.3 Disjunção inclusiva (conectivo “ou”)

A operação de disjunção inclusiva é aquela capaz de unir proposições simples por meio do conectivo “ou”. Simbolicamente, podemos expressar esse conectivo pelo símbolo $\vee$.

Considere as duas proposições simples a seguir.

- a: Luís de Camões escreveu *Os Lusíadas*. (V)
- b: Machado de Assis escreveu *O Cortiço*. (F)

Se realizarmos uma disjunção inclusiva entre a e b, teremos a proposição composta que segue.

A $\vee$ b: Luís de Camões escreveu *Os Lusíadas*, ou Machado de Assis escreveu *O Cortiço*. (V)

A operação de disjunção inclusiva entre duas proposições simples pede que pelo menos uma delas seja verdadeira para que o resultado seja uma proposição composta verdadeira. Desse modo, a proposição composta será falsa somente quando ambas as componentes também forem.

A tabela-verdade que expressa esse comportamento pode ser vista a seguir. No caso, temos duas entradas quaisquer, a e b, e a saída é justamente a operação de disjunção inclusiva entre elas, a $\vee$ b.

Tabela 18 – Tabela-verdade da disjunção inclusiva

a	b	a $\vee$ b
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A tabela indica que a proposição composta será falsa apenas na última linha, ou seja, quando tanto a quanto b forem proposições falsas. Sempre que pelo menos uma delas for verdadeira, – o que ocorre nas três primeiras linhas de estados –, o valor lógico da proposição composta é verdadeiro.

Observação

As operações de negação, conjunção e disjunção inclusiva são consideradas as operações fundamentais da lógica. Todas as linguagens de programação de alto nível disponibilizam, pelo menos, esses três operadores lógicos aos seus desenvolvedores. No caso da linguagem C, temos as seguintes simbologias:

! (não)
&& (e)
|| (ou)

7.2.4 Disjunção exclusiva (conectivo "ou... ou")

Existe outro tipo de operação de disjunção, chamada de exclusiva. A operação de disjunção exclusiva é aquela capaz de unir proposições simples por meio do conectivo "ou...ou". Simbolicamente, podemos expressar esse conectivo por meio do símbolo $\veebar$.

Considere as duas proposições simples a seguir:

- a: Luís de Camões escreveu *Os Lusíadas*. (V)
- b: Machado de Assis escreveu *Dom Casmurro*. (V)

Se realizarmos uma disjunção inclusiva entre a e b, teremos a proposição composta que segue

a $\veebar$ b: Ou Luís de Camões escreveu *Os Lusíadas*, ou Machado de Assis escreveu *Dom Casmurro*. (F)

Note que o operador "ou...ou" traz o sentido de "ou uma, ou outra, mas não ambas". Desse modo, a operação de disjunção exclusiva entre duas proposições simples exige que apenas uma delas seja verdadeira para que o resultado seja uma proposição composta verdadeira.

A tabela-verdade que expressa esse comportamento pode ser vista a seguir. No caso, temos duas entradas quaisquer, a e b, e a saída é a operação de disjunção exclusiva entre elas, a $\veebar$ b.

Tabela 19 – Tabela-verdade da disjunção exclusiva

a	b	a $\veebar$ b
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A tabela indica que a proposição composta será verdadeira se a e b tiverem valores lógicos diferentes. Consequentemente, ela será falsa se a e b tiverem valores lógicos iguais.

7.2.5 Condicional (conectivo "se... então")

A operação condicional é aquela capaz de unir proposições simples por meio do conectivo "se... então". Simbolicamente, podemos expressar esse conectivo por meio do símbolo $\rightarrow$.

Considere as duas proposições simples a seguir.

- a: Machado de Assis nasceu no Rio de Janeiro. (V)
- b: Machado de Assis é brasileiro. (V)

Se realizarmos uma operação condicional entre a e b, teremos a proposição composta que segue.

a → b: Se Machado de Assis nasceu no Rio de Janeiro, então ele é brasileiro. (V)

No caso, a primeira proposição, a, é chamada **antecedente**, e a segunda, b, é chamada **consequente**. Podemos pensar nessa operação como o estabelecimento de uma relação de causa e consequência entre duas proposições: se a acontece, b deve acontecer também. A proposição composta será falsa somente quando tivermos antecedente verdadeiro com consequente falso.

A tabela-verdade que expressa esse comportamento pode ser vista a seguir. No caso, temos duas entradas quaisquer, a e b, e a saída é a operação condicional entre elas, a → b.

Tabela 20 – Tabela-verdade da operação condicional

a	b	a → b
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A tabela indica que a proposição composta será falsa apenas na linha em que a é verdadeiro e b é falso.

Observação

A operação condicional é análoga ao comando if das linguagens de programação. Observe a sintaxe a seguir.

```
if (condição) {
comandos;
}
```

O bloco de comandos será executado sempre que a condição for verdadeira. Desse modo, a condição representa o antecedente e o bloco de comandos representa o consequente. Mas será possível conseguir consequente verdadeiro com antecedente falso, como indica a 3ª linha da tabela-verdade? Para ilustrar essa situação, vamos trazer um trecho de código, escrito em linguagem C.

```
#include <stdio.h>
int main()
```

```
{
int a = 1;
int b = 10;

if(a == 2){
b = 10;

}
printf("O valor de b é %d.", b);
}
```

Quando executado, esse código resulta na impressão "o valor de b é 10", indicando que o consequente é verdadeiro, já que o valor 10 foi atribuído à variável b. Porém, fica claro que o bloco if nem mesmo foi executado, pois a condição era falsa, já que não apresenta valor 2. Acontece que, desde a declaração das variáveis, esse consequente é verdadeiro. Logo, diversas causas podem levar a um mesmo consequente. Por isso, a ser falso e b ser verdadeiro não invalida a relação $a \rightarrow b$.

7.2.6 Bicondicional (conectivo "se e somente se")

A operação bicondicional é capaz de unir proposições simples por meio do conectivo "se e somente se". Simbolicamente, podemos expressar esse conectivo pelo símbolo $\leftrightarrow$.

Considere as duas proposições simples a seguir.

- a: O número 11 é par. (F)
- b: O número 11 é divisível por 2. (F)

Se realizarmos uma operação bicondicional entre a e b, teremos a proposição composta que segue.

$a \leftrightarrow b$: O número 11 é par se e somente se ele for divisível por 2. (V)

Podemos pensar nessa operação como o estabelecimento de uma relação de dependência mútua entre duas proposições: a só acontece se b acontecer também, assim como b só acontece se a acontecer também. Para um número ser par, ele deve ser divisível por 2. Para um número ser divisível por 2, ele deve ser par. Logo, mesmo com ambas as proposições falsas, conforme vimos no exemplo, temos uma relação bicondicional verdadeira.

A proposição composta será verdadeira quando tivermos valores lógicos iguais entre as proposições simples. Consequentemente, a proposição composta será falsa quando tivermos valores lógicos diferentes entre as proposições simples.

A tabela-verdade que expressa esse comportamento pode ser vista a seguir. No caso, temos duas entradas quaisquer, a e b, e a saída é a operação bicondicional entre elas, $a \leftrightarrow b$.

Tabela 21 – Tabela-verdade da operação bicondicional

a	b	$a \leftrightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

7.2.7 Resumindo as operações lógicas

Vamos, agora, trazer todas as operações lógicas que vimos em um único quadro, que resume os nomes dos operadores, das operações e o comportamento de suas saídas, considerando duas entradas, a e b.

Quadro 7 – Resumo das operações lógicas

Conectivo		"Não"	"E"	"Ou"	"Ou...ou"	"Se...então"	"Se e somente se"
Operação		Negação	Conjunção	Disjunção inclusiva	Disjunção exclusiva	Condicional	Bicondicional
a	b	$\sim a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \veebar b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Começamos estudando a operação de negação e terminamos estudando a operação bicodicional. A ordem que utilizamos para estudá-las é justamente a ordem de precedência entre os operadores lógicos que adotaremos nesse conteúdo. Como assim, ordem de precedência? Bom, se voltarmos às expressões algébricas, saberemos que, se não houver parênteses indicando o contrário, deveremos resolver uma multiplicação antes de uma adição. Desse modo, a multiplicação vem antes da adição na ordem de precedência, sendo, portanto, prioritária. Essa regra faz parte da ordem de precedência dos operadores aritméticos.

Entendido o que é ordem de precedência, voltemos à lógica. Em uma expressão lógica qualquer, a operação de negação será a prioridade, seguida da conjunção, da disjunção inclusiva, da disjunção exclusiva, do condicional e, finalmente, do bicondicional. Se um mesmo operador aparecer na mesma expressão, associamos os operandos da esquerda para a direita (como os operadores aritméticos).

Observação

Na aritmética, a ordem de precedência dos operadores é universal. Na lógica, isso não acontece. Cada linguagem de programação, por exemplo, adota uma ordem de precedência para seus operadores lógicos, e devemos estar atentos às regras do sistema lógico com o qual trabalhamos. Na linguagem C, temos a seguinte ordem para os operadores lógicos, sendo o 1º o de maior prioridade e o 3º o de menor prioridade:

! (não)
&& (e)
|| (ou)

7.3 Expressões lógicas

Podemos utilizar os operadores lógicos para trabalhar com quantas proposições simples precisarmos, e podemos, inclusive, utilizar vários deles na mesma expressão. Assim como utilizamos expressões algébricas para "traduzir" situações para a linguagem matemática, podemos também utilizar expressões lógicas para modelar comportamentos de sistemas dicotômicos, como os circuitos dos nossos processadores.

Essas expressões são utilizadas tanto na programação de alto nível quanto em nível de hardware, em que projetistas utilizam tabelas-verdade para extrair expressões que representam circuitos que se comportam da forma esperada. Conforme já mostrado, essas regras também são aplicadas a nossa linguagem corrente, porém, de uma forma mais restrita do que aplicamos cotidianamente, já que a lógica trabalha apenas com sentenças declarativas.

Exemplo 54. Considere as seguintes proposições simples.

- p: Ana é dentista.
- q: Ana joga vôlei.

Traduza para linguagem corrente as proposições seguintes.

A) $p \vee \sim q$

B) $\sim p \rightarrow q$

C) $p \leftrightarrow \sim q$

D) $\sim p \wedge \sim q$

Resolução

A) $p \lor \sim q$: Ana é dentista ou não joga vôlei.

B) $\sim p \rightarrow q$: Se Ana não é dentista, então ela joga vôlei.

C) $p \leftrightarrow \sim q$: Ana é dentista se e somente se ela não jogar vôlei.

D) $\sim p \land \sim q$: Ana não é dentista e não joga vôlei.

Exemplo 55. Considere a expressão lógica $S = \sim a \land b$, que representa o circuito digital que será desenvolvido por um projetista. Se tivermos a verdadeiro e b falso, qual será o valor da saída S?

Resolução

A expressão lógica $S = \sim a \land b$ indica que temos uma saída, chamada S, que é a proposição composta. Essa proposição é composta de duas entradas, que são as proposições simples a e b. Elas relacionam-se por meio dos operadores "não" e "e". Para sabermos o valor lógico de S quando a é verdadeiro e b é falso, devemos "resolver" a expressão de maneira semelhante ao que faríamos com expressões algébricas. Porém devemos lembrar que não estamos lidando com operações algébricas convencionais, mas com operações lógicas, e devemos respeitar o comportamento das operações estudadas ao longo deste tópico.

Podemos pensar em a e b como variáveis. Porém, diferentemente das variáveis que estudamos nos tópicos anteriores, as variáveis lógicas só podem assumir um entre dois valores, que, aqui, chamamos V ou F.

O enunciado diz que a = V e que b = F. Vamos, então, substituir as variáveis por esses valores na expressão lógica.

$S = \sim a \land b = \sim V \land F$

Devemos priorizar o operador "não" em relação ao operador "e". Portanto, a operação de negação é a primeira que vamos fazer, a seguir. Como a negação nos pede para inverter o nível lógico do qual partimos, temos que $\sim V = F$. Faremos essa substituição na expressão.

$S = \sim a \land b = \sim V \land F = F \land F$

Finalmente, resolveremos a operação de conjunção. Ela pede que ambos os operandos sejam verdadeiros para que o resultado seja verdadeiro. No entanto, há dois operandos falsos. Logo, $F \land F = F$. Desse modo, temos o que segue.

$S = \sim a \land b = \sim V \land F = F \land F = F$

Portanto, para a = V e b = F, a expressão lógica $S = \sim a \wedge b$ tem valor lógico falso. No contexto, que trata de circuitos lógicos, tanto as entradas a e b quanto a saída S representam sinais de um circuito, não sentenças declarativas, conforme estudamos no conteúdo de lógica formal. Contudo, a forma de lidar com esses sinais é exatamente a mesma como lidamos com a nossa linguagem. Por isso, as expressões lógicas podem representar qualquer sistema dicotômico. Ainda no contexto de circuitos, em vez de utilizar V e F, é mais comum utilizarmos 0 e 1 para distinguir entre os dois valores lógicos. Veremos essa representação nos próximos tópicos.

Exemplo 56. Considere a expressão lógica $S = (\sim a \veebar b) \rightarrow c$. Se tivermos a verdadeiro, b falso e c verdadeiro, qual será o valor da proposição composta S?

Resolução

A expressão lógica $S = (\sim a \veebar b) \rightarrow c$ indica que temos uma saída, chamada de S, que é a proposição composta. Essa proposição é composta por três entradas, que são as proposições simples a, b e c. Elas relacionam-se por meio dos operadores "não", "ou...ou" e "se...então".

O enunciado diz que a = V, b = F e c = V. Vamos, então, substituir as variáveis por esses valores na expressão lógica.

$$S = (\sim a \veebar b) \rightarrow c = (\sim V \veebar F) \rightarrow V$$

Assim como nas expressões algébricas, devemos respeitar tanto a ordem de precedência dos operadores lógicos quanto os parênteses, que são capazes de "quebrar" a ordem natural entre eles. Pela ordem de precedência adotada, a existência dos parênteses nessa expressão não modifica a ordem na qual resolveríamos as operações: primeiro a negação, depois a disjunção exclusiva e, por último, a condicional. Vamos, então, começar pela negação $\sim V = F$. Logo, fazemos a substituição a seguir.

$$S = (\sim a \veebar b) \rightarrow c = (\sim V \veebar F) \rightarrow V = (F \veebar F) \rightarrow V$$

Agora, partimos para a disjunção exclusiva. Essa operação exige exclusividade no valor lógico verdadeiro para que seu resultado seja verdadeiro. No entanto, temos dois operandos falsos. Logo, $F \veebar F = F$. Vamos à substituição na expressão.

$$S = (\sim a \veebar b) \rightarrow c = (\sim V \veebar F) \rightarrow V = (F \veebar F) \rightarrow V = F \rightarrow V$$

Por último, resolvemos a operação condicional. A única forma de termos saída falsa na operação é com antecedente verdadeiro e consequente falso. Porém, temos antecedente falso e consequente verdadeiro, o que não descaracteriza a relação condicional. Portanto, $F \rightarrow V = V$. Substituindo, temos o que segue.

$$S = (\sim a \veebar b) \rightarrow c = (\sim V \veebar F) \rightarrow V = (F \veebar F) \rightarrow V = F \rightarrow V = V$$

Portanto, para a = V, b = F e c = V, a expressão lógica $S = (\sim a \veebar b) \rightarrow c$ tem valor lógico verdadeiro.

Exemplo 57. Considere a expressão lógica $S = ((\sim a \leftrightarrow \sim b) \vee c) \wedge a$. Se tivermos a falso, b falso e c verdadeiro, qual será o valor da proposição composta S?

Resolução

A expressão lógica $S = ((\sim a \leftrightarrow \sim b) \vee c) \wedge a$ indica que temos uma saída, chamada de S, que é a proposição composta. Essa proposição é composta de três entradas, que são as proposições simples a, b e c. Elas se relacionam por meio dos operadores "não", "e", "ou" e "se e somente se".

O enunciado diz que a = F, b = F e c = V. Vamos, então, substituir as variáveis por esses valores na expressão lógica.

$S = ((\sim a \leftrightarrow \sim b) \vee c) \wedge a = ((\sim F \leftrightarrow \sim F) \vee V) \wedge F$

Assim como nas expressões algébricas, devemos respeitar tanto a ordem de precedência dos operadores lógicos quanto os parênteses, que são capazes de "quebrar" a ordem natural entre eles. Pela ordem de precedência adotada, a existência dos parênteses nessa expressão modifica a ordem na qual resolveremos as operações: primeiro as duas operações de negação, depois o bicondicional, depois a disjunção inclusiva e, por último, a conjunção. Vamos, então, começar pela negação $\sim F = V$. Logo, fazemos as substituições a seguir.

$S = ((\sim a \leftrightarrow \sim b) \vee c) \wedge a = ((\sim F \leftrightarrow \sim F) \vee V) \wedge F = ((V \leftrightarrow V) \vee V) \wedge F$

Passemos à operação dos parênteses internos. Resolveremos, ali, um bicondicional, entre dois operandos verdadeiros. A operação bicondicional exige operando de valores lógicos iguais para que sua saída seja verdadeira. Logo:

$V \leftrightarrow V = V$

Substituindo essa igualdade na expressão, temos o seguinte:

$S = ((V \leftrightarrow V) \vee V) \wedge F = (V \vee V) \wedge F$

Continuando com a operação dos parênteses, resolveremos a disjunção inclusiva entre dois operandos verdadeiros. A disjunção, inclusive, pede que pelo menos um deles seja verdadeiro para que o resultado seja verdadeiro. Logo:

$V \vee V = V$

$S = ((V \leftrightarrow V) \vee V) \wedge F = (V \vee V) \wedge F = V \wedge F$

Finalmente, vamos à última operação. A conjunção exige que ambos os operandos sejam verdadeiros para que seu resultado seja verdadeiro. Porém, temos que o segundo operando é falso. Logo:

$V \wedge F = F$

$S = ((V \leftrightarrow V) \vee V) \wedge F = (V \vee V) \wedge F = V \wedge F = F$

Portanto, para a = F, b = F e c = V, a expressão lógica $S = ((\sim a \leftrightarrow \sim b) \vee c) \wedge a$ tem valor lógico falso.

7.4 Tabelas–verdade

Anteriormente, resolvemos expressões lógicas para valores específicos das variáveis de entrada. No entanto, cada expressão lógica tem a sua própria tabela-verdade. Uma tabela-verdade é um artifício utilizado para conhecermos a saída de uma expressão lógica para todas as possíveis combinações de valores lógicos das entradas. Ao montarmos uma tabela como essa, teremos a descrição completa do comportamento da expressão lógica, mesmo que não saibamos quais são os valores lógicos de suas entradas.

E como montamos uma tabela-verdade a partir de uma expressão lógica? Acompanharemos as etapas de montagem, a seguir.

Passo 1. O primeiro passo é determinarmos quantas são as proposições simples, ou seja, quantas são as entradas da expressão. A partir disso, conseguimos calcular qual é o número de linhas de estados que precisaremos para montar sua tabela-verdade. O cálculo é feito por meio de uma função exponencial, em que o número de linhas de estados l(n) da tabela é dado em função do número n de proposições simples.

$l(n) = 2^n$

Desse modo, se tivermos 2 proposições simples, precisaremos de 4 linhas de estado na tabela para que consigamos todas as possíveis combinações de estados das entradas.

$l(2) = 2^2 = 4$

Se tivermos 3 proposições simples, precisaremos de 8 linhas de estado na tabela para que consigamos todas as possíveis combinações de estados das entradas.

$l(3) = 2^3 = 8$

Para 4 proposições simples, precisaremos de 16 linhas na tabela, e assim por diante.

Passo 2. Definido o número de linhas, devemos montar a lista de todas as possíveis combinações das entradas. Para a simbologia V e F, o mais usual é começarmos com todas as entradas em V e terminarmos com todas em F. Para isso, podemos adotar um artifício: se tivermos 2 entradas, a e b, teremos 4 linhas e começamos pelos estados de b, que é posicionada mais à direta, intercalando entre V e F. Acompanhe a seguir.

Tabela 22 – Construção da lista de estados para duas variáveis

a	b

Começamos adotando as 4 linhas de estados

a	b
	V
	F
	V
	F

Começando a lista de estados pela coluna de b, adotamos V na primeira linha; em seguida, vamos intercalando entre V e F, considerando cada valor lógico uma vez

a	b
V	V
V	F
F	V
F	F

Passamos para a proposição a, mas, dessa vez, dobramos a quantidade de vezes que consideramos cada valor lógico; intercalamos de 2 em 2, dessa vez, começando também em V

E se tivermos 3 entradas? Seguiremos exatamente a mesma lógica, porém teremos 8 linhas e 3 colunas de estados. Acompanhe a seguir.

Tabela 23 – Construção da lista de estados para três variáveis

a	b	c

Começamos adotando as 8 linhas de estados

a	b	c
		V
		F
		V
		F
		V
		F
		V
		F

Começando a lista de estados pela coluna de c, adotamos V na primeira linha; em seguida, vamos intercalando entre V e F, considerando cada valor lógico uma vez

a	b	c
	V	V
	V	F
	F	V
	F	F
	V	V
	V	F
	F	V
	F	F

Passamos para a proposição b, mas, dessa vez, dobramos a quantidade de vezes que consideramos cada valor lógico; intercalamos de 2 em 2, dessa vez, começando também em V

a	b	c
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Finalmente, em a, dobramos novamente a quantidade de vezes que consideramos cada valor lógico; intercalamos de 4 em 4, começando em V

Com isso, conseguimos todas as possíveis combinações de entradas, o que permite a montagem da tabela-verdade. Note que cobrimos todas as possíveis combinações e em nenhuma linha há estados que se repetem em outra. Se houver mais proposições, o mesmo procedimento é adotado, sempre começando na coluna mais à direita e terminando na coluna mais à esquerda da tabela.

Passo 3. Definimos a ordem na qual vamos resolver as operações lógicas da expressão, observando a ordem de precedência dos operadores, assim como os parênteses. Cada operação pode ser feita em uma coluna auxiliar.

Passo 4. Resolvemos as operações lógicas, sendo que a última coluna da tabela representa, de fato, o resultado da saída.

Exemplo 58. Monte a tabela-verdade da expressão lógica $S = \sim a \wedge b$, que representa o circuito digital que será desenvolvido por um projetista.

Resolução

Passo 1. Temos duas entradas, a e b. Com isso, sabemos que precisamos de 4 linhas na tabela-verdade.

Passo 2. Montamos a lista de estados, mostrada a seguir.

Tabela 24

a	b
V	V
V	F
F	V
F	F

Passo 3. Definimos a ordem na qual vamos resolver as operações lógicas da expressão. Pela ordem de precedência, resolveremos a negação e, em seguida, a conjunção. Vamos adotar uma coluna para cada uma dessas operações. Assim que resolvermos a conjunção, já teremos o resultado da saída da expressão.

Tabela 25

a	b	~a	~a ∧ b
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Passo 4. Resolvemos as operações lógicas. Começando por ~a, devemos observar a coluna de a (que está a seguir destacada com uma seta) e aplicar a ela a operação de negação. Vamos, portanto, inverter o valor lógico de cada uma de suas linhas. O operador que está sendo resolvido no momento também está em destaque (aparece em vermelho).

Tabela 26

↓			
a	b	~a	~a ∧ b
V	V	F	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

Agora, resolveremos a conjunção entre ~ã e b . Para isso, olhamos para a coluna de ~a e para a coluna de b, considerando o resultado verdadeiro apenas nas linhas em que ambos são verdadeiros.

Tabela 27

	↓	↓	
a	b	~a	~a ∧ b
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Com isso, sabemos o comportamento da expressão S, pois a tabela já está finalizada. S só será verdadeira se tivermos a = F e b = V (o que ocorre na 3ª linha de estados). Para todas as outras combinações, S resultará em F.

Exemplo 59. Monte a tabela-verdade da expressão lógica:

$S = (\sim a \veebar b) \rightarrow c$

Resolução

Como temos 3 proposições simples na expressão (a, b e c), precisamos de 8 linhas na tabela-verdade. As listas de combinações de estados das proposições simples serão posicionadas nas primeiras três colunas da tabela.

Tabela 28

a	b	c
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

A ordem na qual resolveremos as operações segue a própria ordem de precedência dos operadores lógicos: negação, disjunção exclusiva e, por último, condicional. Com isso, esperamos as colunas seguintes na tabela, onde a última coluna representará o resultado de S.

Tabela 29

a	b	c	$\sim a$	$\sim a \veebar b$	$(\sim a \veebar b) \rightarrow c$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Vamos, então, resolver as operações lógicas. Começando pela negação, para resolver $\sim a$, olhamos para a coluna de a e negá-la, linha por linha. O resultado será preenchido na 4ª coluna.

Tabela 30

↓					
a	b	c	$\sim a$	$\sim a \veebar b$	$(\sim a \veebar b) \rightarrow c$
V	V	V	F		
V	V	F	F		
V	F	V	F		
V	F	F	F		
F	V	V	V		
F	V	F	V		
F	F	V	V		
F	F	F	V		

Na sequência, vamos à disjunção exclusiva entre $\sim a$ e b. Olhamos para essas duas colunas e aplicamos a definição da operação, com o resultado posicionado na 5ª coluna. Nas linhas em que $\sim a$ e b forem diferentes, o resultado será V, e, nas linhas em que forem iguais, o resultado será F.

Tabela 31

	↓		↓		
a	b	c	$\sim a$	$\sim a \veebar b$	$(\sim a \veebar b) \rightarrow c$
V	V	V	F	V	
V	V	F	F	V	
V	F	V	F	F	
V	F	F	F	F	
F	V	V	V	F	
F	V	F	V	F	
F	F	V	V	V	
F	F	F	V	V	

Finalmente, resolvemos a última operação, que será a condicional. Com isso, teremos o resultado completo da expressão $(\sim a \veebar b) \rightarrow c$, que representa S. O antecedente,$(\sim a \veebar b)$ encontra-se na 5ª coluna, e o consequente, c, encontra-se na 3ª coluna. Lembrando que essa operação só resulta em F quando temos antecedente verdadeiro com consequente falso, apenas posicionaremos F na 6ª e última coluna nas linhas em que, $\sim a \veebar b$ for verdadeiro e c for falso. Note que isso só ocorre na 2ª e na última linha de estados.

Tabela 32

		↓		↓	
a	b	c	~a	$\sim a \veebar b$	$(\sim a \veebar b) \rightarrow c$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

Temos, agora, a tabela completa. A saída S é representada na última coluna. Ela resulta em F quando temos as entradas a = V, b = V e c = F. Ela também resulta em F quando as entradas são a = F, b = F e c = F. Para qualquer outra combinação de estados das entradas, a saída é verdadeira.

Exemplo 60. Considere as proposições simples a seguir.

p: Joana é estudante.

q: Joana mora em Santos.

Determine em que condições é verdadeira a seguinte sentença composta.

R: Se Joana é estudante, então ela não está morando em Santos.

Resolução

A sentença composta, R, é formada pelas duas proposições simples, p e q, associadas pelos operadores "não" e "se...então". Passando da linguagem corrente para a linguagem simbólica, podemos descrever R como:

$R = p \rightarrow \sim q$

Em linguagem corrente, os tempos verbais podem ser ajustados para que a sentença se adeque melhor ao contexto.

Desconhecemos, a princípio, os valores lógicos de p e de q. Consequentemente, também desconhecemos o valor lógico de R. Para saber em que condições R será verdadeira, podemos montar a tabela-verdade correspondente à expressão.

Com duas proposições simples, precisamos de 4 linhas na tabela. As duas primeiras colunas da tabela serão dedicadas às entradas, p e q. Na sequência, resolveremos a negação ~q, seguida da condicional p → ~q. O resultado de R é expresso na última coluna, já que:

R = p → ~q

Tabela 33

p	q	~q	p → ~q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Com isso, percebemos que a sentença p → ~q só será falsa se tivermos p verdadeiro e q verdadeiro. Ou seja, se for verdade que Joana é estudante, e for verdade que ela mora em Santos. Isso faz com que tenhamos um antecedente verdadeiro com um consequente falso, já que o consequente diz que ela não mora em Santos. Para qualquer outra combinação de estados, continuamos com uma sentença verdadeira.

Saiba mais

Existem diversos geradores on-line de tabelas-verdade. Um deles é o disponível em:

GERADOR de tabela verdade +. Micalevisk's GitHub Repositories. Disponível em: https://bityli.com/YzbZQ. Acesso em: 18 mar. 2022.

7.5 Números binários

Você, provavelmente, já ouviu falar que computadores entendem apenas "zeros e uns". O que, na prática, isso significa? Os circuitos dos processadores dos computadores modernos trabalham com transistores, dispositivos que funcionam como chaves ou interruptores eletrônicos. Essas chaves podem ser conectadas umas às outras de forma a desempenharem funções lógicas semelhantes às que estudamos ao longo deste tópico. Esses circuitos transistorizados, que desempenham função lógica, são denominados **portas lógicas**.

As portas lógicas são responsáveis pelo processamento dos dados nos computadores que utilizamos rotineiramente. Uma porta lógica recebe sinais com determinados níveis de tensão elétrica em seus terminais de entrada, processa esses sinais de acordo com sua operação lógica correspondente e, em seguida, responde com determinado nível de tensão elétrica em seu terminal de saída. Esses níveis de tensão, tanto de entrada quanto de saída, são restritos a duas medidas distintas, ou seja, trata-se de um sistema dicotômico. Nos projetos desses circuitos, em vez de se referirem a medidas de tensão, em volts, os projetistas adotam uma abstração: referem-se ao nível de tensão mais baixo (por exemplo, 0 V) como **nível 0** e, ao nível de tensão mais alto (por exemplo, 5 V), como **nível 1**. Daí, dizemos que computadores só entendem "zeros e uns", ou seja, eles falam uma **linguagem binária**.

Do ponto de vista lógico, não há diferença entre considerar os dois possíveis estados de um sistema dicotômico como V ou F ou como 0 ou 1. Contanto que estejamos dentro de um sistema dicotômico, as mesmas regras se aplicam, independentemente da simbologia utilizada. No entanto, quando adotamos a simbologia binária 0 ou 1, podemos notar algumas particularidades nas tabelas-verdade que costumam passar despercebidas com outra simbologia não numérica. Para entendermos essas particularidades, vamos, primeiramente, entender como são constituídos os numerais, tanto em sistema binário quanto em sistema decimal.

7.5.1 Constituição dos numerais em sistema decimal

O sistema de numeração que utilizamos normalmente para expressar numerais é o **sistema decimal**. Esse sistema também é conhecido como "base 10"; já entenderemos o motivo de empregarmos tal denominação. Vejamos, a seguir, as características que regem o sistema decimal.

Existe um símbolo para o valor nulo (no caso, 0). Cada símbolo utilizado é uma unidade maior do que o seu predecessor.

A notação é posicional, ou seja, o valor de um algarismo é determinado pela sua posição dentro do numeral. Cada posição tem determinado peso. Você sabe que 23 representa uma grandeza diferente de 32, por mais que ambos os numerais utilizem apenas o símbolo 2 e o símbolo 3, certo?

Há 10 símbolos distintos para representar grandezas: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Quando combinados entre si, esses símbolos podem formar qualquer numeral desejado.

Vamos selecionar um numeral como exemplo para estudarmos sua constituição e entendermos as características elencadas anteriormente: 2.396, em base 10, constituído da forma mostrada na figura a seguir.

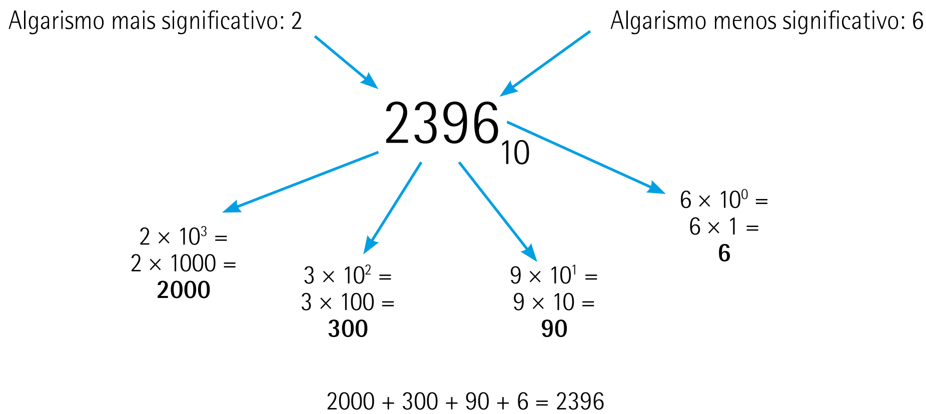

Figura 56 – Constituição do número 2.396 na base 10

Note que a posição de cada um dos algarismos que compõem nosso numeral determina, de fato, quanto ele vale dentro do numeral em questão. Na posição 0, mais à direita, temos o **algarismo menos significativo**. "Pegamos" o valor de face dele, 6, e multiplicamos por uma base 10 elevada ao expoente correspondente à sua posição. Se sua posição é 0, temos, então:

$6 \,.\, 10^0 = 6 \,.\, 1 = 6$

Com isso, sabemos que o algarismo 6, na posição 0, vale 6 unidades dentro de seu numeral. Se formos uma casa para a esquerda, chegaremos à posição 1 para o algarismo 9. Temos, então:

$9 \,.\, 10^1 = 9 \,.\, 10 = 90$

Com isso, sabemos que o algarismo 9, na posição 1, vale 90 unidades dentro de seu numeral. Se andarmos mais uma casa para a esquerda, chegaremos à posição 2 para o algarismo 3. Temos, então:

$3 \,.\, 10^2 = 3 \,.\, 100 = 300$

Logo, o algarismo 3, na posição 2, vale 300 unidades dentro de seu numeral. Se andarmos para a esquerda novamente, chegaremos ao último algarismo que compõe o nosso numeral. O algarismo mais à esquerda é o **algarismo mais significativo**, pois ele terá o maior valor entre todos os algarismos vizinhos. Portanto, o algarismo 2 é o mais significativo no numeral 2.396, ocupando a posição 3. Temos, então:

$2 \,.\, 10^3 = 2 \,.\, 1000 = 2000$

Logo, o algarismo 2, na posição 3, vale 2.000 unidades dentro de seu numeral. Para retornarmos ao numeral de origem, basta somarmos todos os valores encontrados:

$2000 + 300 + 90 + 6 = 2396$

Repare que, em se tratando do sistema decimal, sempre multiplicamos o algarismo pela base 10 elevada ao expoente correspondente à sua posição. Daí, nos referirmos ao sistema decimal como "base 10".

7.5.2 Constituição dos numerais em sistema binário

O **sistema binário** compõe a “linguagem dos computadores”. Podemos expressar qualquer grandeza que expressamos em sistema decimal também em sistema binário, basta sabermos fazer a conversão de um sistema para o outro. Esse sistema também é conhecido como “base 2” e, a essa altura, você já deve imaginar o porquê de empregarmos tal denominação. Vejamos, a seguir, as características que regem o sistema binário.

Existe um símbolo para o valor nulo (no caso, 0).

Cada símbolo utilizado é uma unidade maior do que o seu predecessor.

A notação é posicional, ou seja, o valor de um algarismo é determinado pela sua posição dentro do numeral.

Há 2 símbolos distintos para representar grandezas: 0 e 1. Quando combinados entre si, esses símbolos podem formar qualquer numeral desejado.

Basicamente, a única diferença existente entre as características do sistema decimal e do sistema binário é o número de símbolos que utilizamos. Se temos 10 símbolos, usamos base 10. Se temos 2 símbolos, usamos base 2. Vamos selecionar um numeral como exemplo, para estudar sua constituição: 110.010 que, em base 2, é constituído da forma mostrada a seguir.

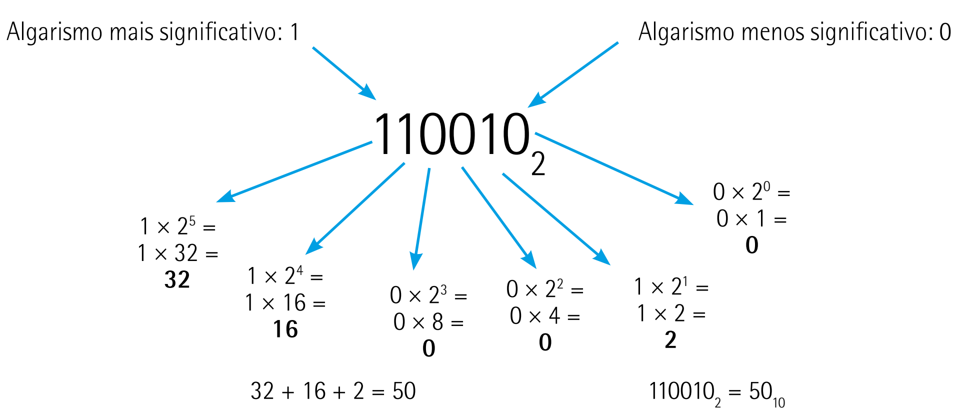

Figura 57 – Constituição do número 110.010 na base 2

Novamente, a posição de cada um dos algarismos que compõem nosso numeral determina quanto ele vale dentro do numeral em questão. Na posição 0, mais à direita, temos o algarismo menos significativo. Pegamos o valor de face dele, 0, e multiplicamos por uma base 2 elevada ao expoente correspondente à sua posição. Se sua posição é 0, temos:

$0 \,.\, 2^0 = 0 \,.\, 1 = 0$

Passando à posição 1, uma casa à direita, temos o algarismo 1. Logo, seu valor é determinado por:

$1 . 2^1 = 1 . 2 = 2$

Na posição 2, temos o algarismo 0:

$0 . 2^2 = 0 . 4 = 0$

Na posição 3, temos o algarismo 0:

$0 . 2^3 = 0 . 8 = 0$

Na posição 4, temos o algarismo 1:

$1 . 2^4 = 1 . 16 = 16$

Finalmente, chegamos ao algarismo mais significativo, que se encontra na posição mais à esquerda do numeral. O algarismo 1 encontra-se na posição 5 e vale:

$1 . 2^5 = 1 . 32 = 32$

Se fizermos o somatório dos valores encontrados, teremos:

$32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 0 = 32 + 16 + 2 = 50$

O que isso significa? Que o algarismo 110.010, em base 2, representa o algarismo 50 em base 10. A constituição dos numerais é diferente, no entanto, eles representam a mesma grandeza. Em linguagem simbólica, podemos dizer que:

$110010_2 = 50_{10}$

Esse processo, portanto, permite a conversão de grandezas escritas em sistema binário para o sistema decimal.

Observação

Se o algarismo é 0, independentemente da posição que ele ocupa, ele vai valer 0 unidades em seu numeral. Isso vale tanto para sistema binário quanto para sistema decimal.

7.5.3 Tabelas-verdade em sistema binário

Voltando ao assunto das tabelas-verdade, já dissemos anteriormente que, no mundo dos circuitos lógicos, projetistas adotam 0 e 1 como simbologia dicotômica. Eles adotam, portanto, a simbologia do sistema binário. A lógica envolvida no processo é, basicamente, a mesma: o símbolo F é representado como 0 e o símbolo V é representado como 1.

Uma das convenções de montagens de tabela, no entanto, é geralmente alterada: as tabelas costumam começar com todas as entradas em 0 e terminar com todas as entradas em 1. A mesma regra de distribuição de valores lógicos que utilizamos anteriormente pode ser adotada para conseguirmos a lista completa de estados. Acompanhe a montagem de uma lista de estados para duas variáveis de entrada, a e b.

Tabela 34 – Montagem da lista de estados utilizando os símbolos 0 e 1

a	b

Começamos adotando as 4 linhas de estados

a	b
	0
	1
	0
	1

Começando a lista de estados pela coluna de b, adotamos 0 na primeira linha; em seguida, vamos intercalando entre 0 e 1, considerando cada valor lógico uma vez

a	b
0	0
0	1
1	0
1	1

Passamos para a entrada a, mas, dessa vez, dobramos a quantidade de vezes que consideramos cada valor lógico; intercalamos de 2 em 2, dessa vez, começando também em 0

Lembrete

Na simbologia binária, temos as seguintes igualdades:

F = 0

V = 1

Se tivermos 3 entradas, teremos 8 linhas e 3 colunas de estados. Acompanhe:

Tabela 35 – Montagem da lista de estados utilizando os símbolos 0 e 1

a	b	c

Começamos adotando as 8 linhas de estados

a	b	c
		0
		1
		0
		1
		0
		1
		0
		1

Começando a lista de estados pela coluna de c, adotamos 0 na primeira linha; em seguida, vamos intercalando entre 0 e 1, considerando cada valor lógico uma vez

a	b	c
	0	0
	0	1
	1	0
	1	1
	0	0
	0	1
	1	0
	1	1

Passamos para a entrada b, mas, dessa vez, dobramos a quantidade de vezes que consideramos cada valor lógico; intercalamos de 2 em 2, dessa vez, começando também em 0

a	b	c
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Finalmente, em a, dobramos novamente a quantidade de vezes que consideramos cada valor lógico; intercalamos de 4 em 4, começando em 0

Vamos, então, observar a lista completa de estados da tabela de 3 entradas que acabamos de montar. Se fizermos a conversão de cada uma das linhas de estados para o sistema decimal, teremos o que segue.

Tabela 36 – Conversão para decimal das linhas de estados da tabela-verdade

a	b	c	Conversão de binário para decimal
0	0	0	$000_2 = 0 . 2^0 + 0 . 2^1 + 0 . 2^2 = 0 + 0 + 0 = 0_{10}$
0	0	1	$001_2 = 1 . 2^0 + 0 . 2^1 + 0 . 2^2 = 1 + 0 + 0 = 1_{10}$
0	1	0	$010_2 = 0 . 2^0 + 1 . 2^1 + 0 . 2^2 = 0 + 2 + 0 = 2_{10}$
0	1	1	$011_2 = 1 . 2^0 + 1 . 2^1 + 0 . 2^2 = 1 + 2 + 0 = 3_{10}$
1	0	0	$100_2 = 0 . 2^0 + 0 . 2^1 + 1 . 2^2 = 0 + 0 + 4 = 4_{10}$
1	0	1	$101_2 = 1 . 2^0 + 0 . 2^1 + 1 . 2^2 = 1 + 0 + 4 = 5_{10}$
1	1	0	$110_2 = 0 . 2^0 + 1 . 2^1 + 1 . 2^2 = 0 + 2 + 4 = 6_{10}$
1	1	1	$111_2 = 1 . 2^0 + 1 . 2^1 + 1 . 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7_{10}$

O que fazemos quando adotamos a regra de intercalar os valores lógicos na hora de montar a lista de estados é, simplesmente, adotar um padrão que nos leva a uma contagem ordenada em binário. Em uma tabela-verdade de 4 linhas, contamos, em binário, de 0 a 3. Em uma tabela de 8 linhas, contamos, em binário, de 0 a 7 (conforme demonstrado anteriormente). Em uma tabela de 16 linhas, contamos de 0 a 15. Desse modo, contamos sempre de 0 a l(n) - 1, onde l(n) representa o número de linhas de estados da tabela.

Observação

Por mais que tenhamos trabalhado com as convenções mais comuns, na verdade, tanto faz a ordem adotada para a lista de estado de uma tabela-verdade. Podemos, tranquilamente, montar uma tabela cujos estados começam em 1 e terminam em 0. Nesse caso, faremos uma contagem regressiva em binário. Como invertemos todas as linhas de estados (por exemplo, em vez de contar de 0 a 3, contamos de 3 a 0), todas as saídas também estarão invertidas em relação a uma tabela que adota a regra padrão. No final, a informação que a tabela entrega é exatamente a mesma.

8 INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA

Este tópico será dedicado a uma breve introdução aos principais conceitos práticos relativos à estatística, cujo conteúdo é comumente utilizado na computação moderna. De forma geral, podemos dizer que a estatística é a ciência destinada ao aprendizado a partir dos dados. Entre seus objetivos, estão o estudo de técnicas de levantamento de dados e suas manipulações matemáticas, de forma que consigamos extrair informações relevantes às soluções de problemas.

Ao longo deste tópico, estudaremos algumas noções gerais sobre conceitos estatísticos, além das principais técnicas associadas a medidas de tendência central e de dispersão. Abordaremos, portanto, apenas uma pequena fração do vasto mundo da estatística.

Saiba mais

Atualmente, na área da computação, muito se fala no termo ciência de dados. A ciência de dados pode ser considerada um subconjunto da inteligência artificial e refere-se às áreas sobrepostas da estatística, métodos científicos e análise de dados (todas usadas para extrair significado dos dados). Ela abrange a preparação de dados para análise, incluindo limpeza, agregação e manipulação, para realizar análises avançadas. Os softwares analíticos e os cientistas de dados podem, então, revisar os resultados para descobrir padrões, o que permite aos líderes de negócios obter informações relevantes a suas áreas de atuação.

Você pode ler mais sobre esse assunto no artigo disponível em:

O QUE é Ciência de Dados? *Oracle Brasil*.

Disponível em: https://bityli.com/RUuyOu. Acesso em: 18 mar. 2022.

8.1 População e amostra

Pesquisas, em geral, costumam coletar dados de uma pequena parte de um grupo maior, de forma a conhecermos determinadas características desse grupo. No contexto da estatística, uma **população** é a coleção completa de todos os elementos (ou indivíduos) que interessam ao estudo de determinado fenômeno. Na figura a seguir, vemos uma população constituída por 8 elementos.

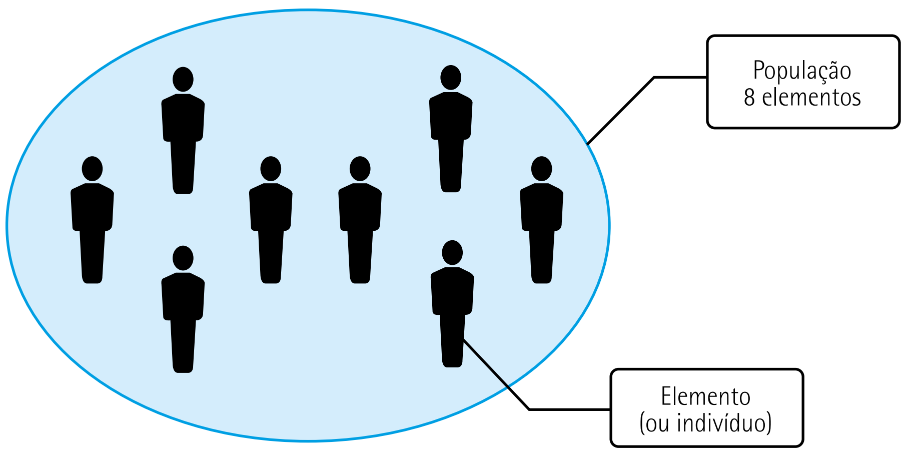

Figura 58 – População

Uma **amostra** é um subconjunto não vazio da população. Na figura seguinte, vemos uma amostra de 4 elementos, extraída da população composta por 8 elementos.

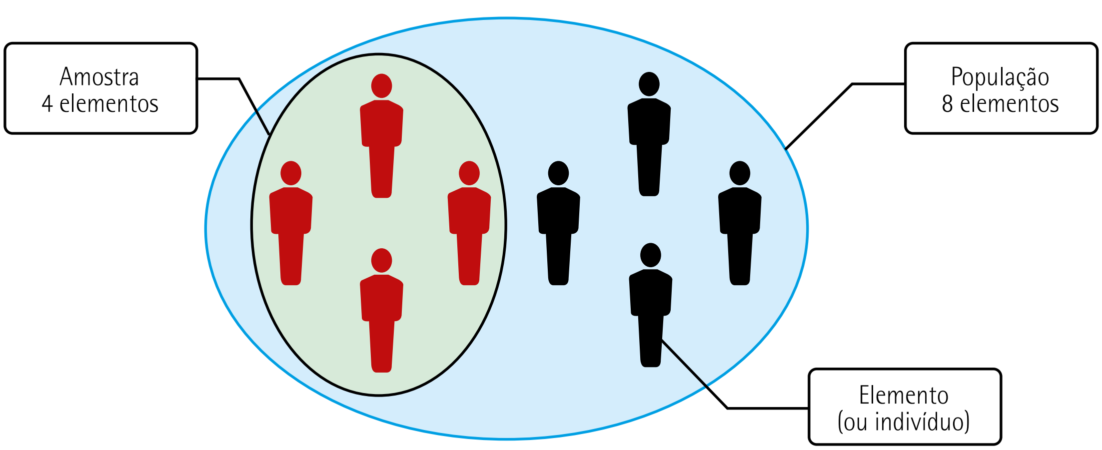

Figura 59 – Amostra

Um **parâmetro** é uma característica numérica estabelecida para toda a população, enquanto uma **estimativa** é uma característica numérica estabelecida para uma amostra. Podem ser estabelecidos diversos parâmetros para uma mesma população, assim como podem ser estabelecidos diversas estimativas para uma mesma amostra.

Observação

Uma estimativa é uma característica numérica que pretende representar o parâmetro relativo a sua característica. Podemos pensar que a "intenção" de uma estimativa é ser igual ao seu respectivo parâmetro. Por exemplo, uma média aritmética populacional, que é um parâmetro, é uma média calculada a partir dos dados de toda uma população e, portanto, representa uma característica exata dessa população. Já o resultado de uma média aritmética amostral, que é uma estimativa, trabalha com um número de elementos limitados e, portanto, dificilmente trará o valor exato da média populacional. No entanto, a intenção é, justamente, estimar o valor desse parâmetro.

Vamos acompanhar um exemplo ilustrativo a seguir, que lidará com valores relativamente pequenos, apenas para aprendermos os conceitos envolvidos. Imagine uma cidade chamada Nova Londres, que possui 50 eleitores habilitados para votar. Em uma eleição para a escolha do novo prefeito, estão concorrendo ao cargo apenas dois candidatos: A e B.

No fenômeno "eleição para prefeito de Nova Londres", a **população** é conjunto de todos os 50 eleitores, que representa 100% dos eleitores da cidade. Um possível **parâmetro** é a proporção real de intenção de votos para o candidato A. Uma **amostra** é um grupo de, por exemplo, 12 eleitores selecionados na cidade. Uma **estimativa** é a proporção de intenção de votos para o candidato A obtida da amostra. A figura a seguir ilustra esse cenário.

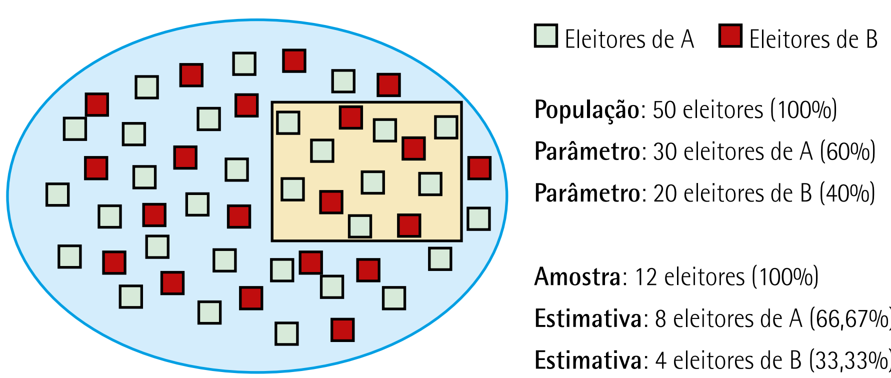

Figura 60 – Situação hipotética e eleição para prefeito de Nova Londres

Pela imagem, vemos que existem, na população, 30 eleitores do candidato A e 20 eleitores do candidato B. Desse modo, temos 60% da população com intenção de votar em A e 40% da população com intenção de votar em B. Essas informações constituem parâmetros, ou seja, características numéricas da população como um todo. Para chegar a esses valores, consideramos a intenção de voto de todos os 50 indivíduos.

Também podemos notar, na figura, que foi considerada uma amostra de 12 eleitores selecionados. Essa amostra constitui um subconjunto da nossa população. Entre esses 12 eleitores, 8 deles pretendem votar em A e 4 pretendem votar em B. Temos 66,67% da amostra com intenção de votar em A e 33,33% com intenção de votar em B. Essas informações constituem estimativas, ou seja, características numéricas da amostra selecionada. Para chegar a esses valores, precisamos conhecer a intenção de voto de apenas esses 12 indivíduos.

Nesse ponto, você provavelmente já percebeu que a finalidade de selecionar amostras é aprender sobre um grande grupo pelo exame dos dados de alguns de seus elementos. **Uma boa amostra, portanto, deve ser representativa de sua população**. Se isso acontece, as estimativas que levantamos refletem o comportamento dos respectivos parâmetros, mesmo que não tão precisamente. A estatística estabelece critérios para a seleção de amostras, de modo que consigamos um grupo que represente a população que se quer estudar. Esses critérios consideram tanto o tamanho quanto a qualidade da amostra. Não vamos, neste tópico, estudar esses critérios, mas é importante que você saiba que eles existem.

Observação

No exemplo da eleição para a prefeitura de Nova Londres, na prática, escolhemos uma amostra pequena demais para ser considerada representativa. Se há apenas 50 eleitores, essa população é considerada pequena dentro desse contexto, e o ideal, nesse caso, seria consultar todos os eleitores. A intenção foi apenas exemplificar os conceitos de população, amostra, parâmetro e estimativa.

Parâmetros ou estimativas são, geralmente, resultados de cálculos feitos a partir dos dados obtidos em determinado estudo. Estudaremos alguns desses cálculos nas seções seguintes.

8.2 Média aritmética

Uma **medida de tendência central** é uma medida que tenta representar o "centro" de um conjunto de dados numéricos com apenas um valor. Existem diversos tipos de medidas de tendência central, sendo que a **média aritmética** é a principal delas.

Para calcularmos a média aritmética, independentemente de termos um conjunto de dados que representa uma população ou uma amostra, devemos realizar o somatório dos elementos e, em seguida, dividir o resultado pelo número de elementos.

Observação

Há uma brincadeira que ilustra bem o sentido da média: se você come uma barra de chocolate e eu não como chocolate algum, "na média", cada um de nós comeu meia barra de chocolate.

Quando temos dados de toda a **população**, a média aritmética é geralmente representada pela letra grega μ, e constituiu um **parâmetro**. Sejam:

- N o número de elementos da população;
- X uma variável que representa os elementos da característica numérica estudada;
- i um índice de contagem dos elementos (que vai de 1 até).

Temos, matematicamente, o que segue.

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N}$$

Essa mesma fórmula pode ser representada de uma forma mais enxuta e genérica, utilizando o símbolo de somatório $\sum$ no numerador, da seguinte maneira:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

O que a fórmula diz é o seguinte: faça o somatório dos valores X_i, cujo índice i varia de 1 até N, e divida o resultado desse somatório por N. Se você não entendeu muito bem, acompanhe o exemplo a seguir: verá que é mais fácil do que pensa.

Exemplo 61. Uma turma do ensino fundamental da escola Stephen Hawkin é composta de 10 alunos. Os alunos fizeram uma prova de conhecimentos gerais, cujas notas são apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 8 – Notas dos alunos

9,0	8,5	7,0	9,5	6,5	5,0	6,5	7,5	8,0	8,5

Nesse contexto, qual é a média que a turma obteve na prova?

Resolução

O enunciado pede para calcularmos a média aritmética que a turma obteve na prova de conhecimentos gerais. Temos as notas de todos os indivíduos da turma e, portanto, conhecemos toda a população do contexto. Com isso, conseguimos calcular a média populacional μ.

Como temos 10 elementos na população, temos N = 10 nesse contexto, X é uma variável que representa as notas disponíveis. Lembrando que i é um índice de contagem dos elementos que vai de 1 até N, nossos dados X_i variam de X_1 até X_{10}. Observe o quadro expandido das notas a seguir.

Quadro 9 – Notas dos alunos associadas a valores da variável X

9,0	8,5	7,0	9,5	6,5	5,0	6,5	7,5	8,0	8,5
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}

Logo, no contento em estudo, temos X_1 = 9,0, X_2 = 8,5, X_3 = 7,0 e assim por diante, até chegarmos a X_{10} = 8,5. Vamos, portanto, fazer o somatório desses valores e dividir o resultado por 10, conforme mostrado a seguir:

$$\mu = \frac{\sum_1^N X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}}{10}$$

$$\mu = \frac{9{,}0 + 8{,}5 + 7{,}0 + 9{,}5 + 6{,}5 + 5{,}0 + 6{,}5 + 7{,}5 + 8{,}0 + 8{,}5}{10} = \frac{76}{10} = 7{,}6$$

Logo, a nota média da turma como um todo foi de 7,6 pontos. Note que em vez de pensarmos em fórmulas, simplesmente, podemos pensar em somar todos os valores das observações e dividir o resultado obtido pelo número de elementos somados. É exatamente isso o que a fórmula nos pede para fazer.

Quando temos dados de uma **amostra**, a média aritmética é geralmente representada pelo símbolo $\bar{x}$, e seu resultado constitui uma **estimativa**. Porém, a lógica aplicada ao cálculo é a mesma. Sejam:

- n o número de elementos da amostra;
- x uma variável que representa os elementos da característica numérica estudada;
- i um índice de contagem dos elementos (que vai de 1 até n).

Temos, matematicamente, o que segue:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

A fórmula representa um **estimador**, ou seja, uma regra matemática utilizada para calcularmos estimativas. Essa mesma fórmula pode ser representada de uma forma mais enxuta, da seguinte maneira:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

O que esse estimador nos diz é o seguinte: faça o somatório dos valores amostrais x_i, cujo índice i varia de 1 até n, e divida o resultado desse somatório por n. Você deve ter reparado que o formato de cálculo é exatamente o mesmo aplicado a populações. Mesmo assim, veremos um exemplo a seguir.

Exemplo 62. A empresa iSoftGames, produtora do jogo Crazy Pigeons, coletou uma amostra da pontuação, que poderia variar de 0 a 100, de doze partidas de usuários aleatórios. As pontuações conquistadas foram as seguintes: 52, 41, 37, 82, 24, 63, 68, 98, 10, 23, 55, 86. Encontre a média aritmética dessa série de dados.

Resolução

Como não temos dados referentes a toda a população, temos dados de uma amostra. Calcularemos, portanto, uma estimativa da média de pontuação das partidas desse jogo.

Como há 12 elementos na amostra, temos n = 12. O símbolo x é uma variável que representa as pontuações coletadas. Lembrando que i é um índice de contagem dos elementos que vai de 1 até n, nossos dados x_i variam de x_1 até x_{12}. Observe a tabela a seguir, que resume os dados que temos.

Tabela 37 – Dados da amostra

52	41	37	82	24	63	68	98	10	23	55	86
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}

Logo, no contento em estudo, temos x_1 = 52, x_2 = 41, x_3 = 37 e assim por diante, até chegarmos a x_{12} = 86. Vamos, portanto, fazer o somatório desses valores e dividir o resultado por 12, conforme mostrado a seguir:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}}{12}$$

$$\overline{x} = \frac{52 + 41 + 37 + 82 + 24 + 63 + 68 + 98 + 10 + 23 + 55 + 86}{12} = \frac{639}{12} = 53{,}25$$

Logo, a pontuação média da amostra de usuários nas partidas de Crazy Pigeons foi de 53,25 pontos.

Observação

A média à qual estamos nos referindo é a média aritmética simples. Existem outros tipos, como a média ponderada, em que damos "pesos" diferentes para determinadas medidas. Além disso, também existem outros tipos de medidas de tendência central, como a mediana e a moda, que são estudadas em cursos de estatística.

A unidade de medida da média aritmética acompanha a unidade de medida dos dados da amostra ou população. Por exemplo, se temos dados da altura de uma amostra de indivíduos, medida em metros, calculamos a média, cujo resultado será dado também em metros.

Resumindo, temos as "regras" a seguir para o cálculo de média aritmética.

Quadro 10 – Resumo das "regras" da média aritmética

$\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
Média populacional (parâmetro)	Média amostral (estimador)

8.3 Desvio–padrão

A média nos traz uma informação de medida de centro, ou seja, um único valor que pretende descrever todo um conjunto de dados numéricos. No entanto, ela não traz qualquer informação a respeito do quão diversos eram os dados dos quais partimos.

Por exemplo, se calcularmos a média entre os valores 10, 10 e 10, chegaremos ao resultado 10. Note que todos os valores dos quais partimos eram iguais. Se calcularmos a média entre os valores 8, 10 e 12, também chegaremos ao resultado 10. Dessa vez, os valores dos quais partimos eram diferentes entre si, porém, a média não nos traz essa informação.

Para termos uma ideia do quão dispersos são os valores que compõem nosso conjunto de dados, podemos trabalhar com **medidas de dispersão**. A principal medida de dispersão é chamada de **desvio-padrão**.

O desvio-padrão de um conjunto de dados é um valor que indica se a variabilidade de um conjunto de valores é grande ou é pequena em relação à média dos valores. Assim, vejamos as situações a seguir.

- Se o desvio-padrão de um conjunto de dados é zero, significa que esse conjunto é formado por valores idênticos.

- Se o desvio-padrão de um conjunto de dados é "pequeno" quando comparado à média, significa que esse conjunto é formado por valores "pouco dispersos", que variam pouco.

- Se o desvio-padrão de um conjunto de dados é "grande" quando comparado à média, significa que esse conjunto é formado por valores "muito dispersos", que variam muito.

Se estamos tratando de dados de toda uma **população**, o desvio-padrão é geralmente expresso pela letra grega σ, e seu resultado representa um **parâmetro**. Seu formato de cálculo é dado conforme exposto a seguir, em que N é o número de elementos da população, X é a variável que representa os elementos da característica numérica estudada, i é o índice de contagem dos elementos (que vai de 1 até N) e μ é a média aritmética populacional.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N}}$$

As etapas de cálculo, indicadas na própria fórmula, são as que seguem.

1) Calcule a média aritmética populacional.

2) Calcule a diferença entre cada elemento X_i da sua população e a média populacional μ.

3) Eleve cada uma dessas diferenças ao quadrado. Isso fará com que a distância entre X_i e μ se torne um valor sempre positivo, independentemente de X_i se maior ou menor do que μ.

4) Faça o somatório dos valores elevados ao quadrado.

5) Divida o resultado por N.

6) Extraia a raiz quadrada. Como elevamos, anteriormente, as diferenças ao quadrado, extrair a raiz nos permitirá voltar à mesma ordem de grandeza das diferenças, e também permite que a unidade de medida do desvio-padrão seja a mesma dos dados dos quais partimos.

Acompanharemos um exemplo no qual utilizaremos uma tabela para nos auxiliar nas etapas de cálculo, o que torna o raciocínio mais claro. A seguir, resolveremos o mesmo exemplo, simplesmente aplicando a fórmula do desvio-padrão.

Exemplo 63. Leila realizou, ao longo do ano, quatro provas de ciências, cujas notas são apresentadas a seguir.

Tabela 38 – Notas da Leila

Estudante	Notas em ciências			
Leila	1,0	3,0	9,0	3,0

Calcule o desvio-padrão das notas da Leila em ciências.

Resolução 1

Estamos interessados no desvio-padrão das notas de ciências da estudante Leila. Como temos todos os dados que nos interessam nessa situação, estamos em um contexto populacional.

Primeiramente, devemos encontrar a média aritmética do conjunto de dados. Sabemos que N = 4 e que cada elemento X_i está disposto na tabela.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} = \frac{1,0 + 3,0 + 9,0 + 3,0}{4} = \frac{16}{4} = 4,0$$

Já sabemos que a média aritmética das notas de Leila vale 4,0. O próximo passo é acharmos a diferença entre cada uma das notas X_i e o valor médio μ = 4,0. Para isso, utilizaremos a tabela a seguir, em que a diferença é indicada como $X_i - \mu$.

Tabela 39 – Primeira tabela de apoio

Elemento X_i	$X_i - \mu$
$X_1 = 1,0$	$X_1 - \mu = 1 - 4 = -3$
$X_2 = 3,0$	$X_2 - \mu = 3 - 4 = -1$
$X_3 = 9,0$	$X_3 - \mu = 9 - 4 = 5$
$X_4 = 3,0$	$X_1 - \mu = 3 - 4 = -1$

Repare que encontramos resultados negativos quando os valores X_i eram menores do que o valor médio, assim como encontramos resultado positivo para X_3, que era maior do que o valor médio.

A próxima etapa é elevarmos o resultado de cada linha ao quadrado. Para isso, criaremos uma nova coluna, indicada como $(X_i - \mu)^2$. Vamos omitir as etapas de cálculos anteriores, mantendo na tabela apenas os resultados.

Tabela 40 – Segunda tabela de apoio

Elemento X_i	$X_i - \mu$	$(X_i - \mu)^2$
$X_1 = 1,0$	-3	$(X_1 - \mu)^2 = (-3)^2 = 9$
$X_2 = 3,0$	-1	$(X_2 - \mu)^2 = (-1)^2 = 1$
$X_3 = 9,0$	5	$(X_3 - \mu)^2 = 5^2 = 25$
$X_4 = 3,0$	-1	$(X_4 - \mu)^2 = (-1)^2 = 1$

Perceba que independentemente de termos partido de uma diferença positiva ou de uma diferença negativa, os valores que encontramos nessa etapa foram todos positivos. Elevar ao quadrado cada uma das diferenças tem esse efeito. Agora, não importa mais se os valores X_i eram maiores ou menores do que μ. Estamos interessados apenas em o quão distantes eles estão do valor médio.

A próxima etapa será realizar o somatório dos valores da 3ª coluna, que acabamos de calcular. Com isso, já conseguimos tudo o que o numerador da fórmula do desvio-padrão populacional nos pede. Adicionaremos uma linha para representar esse somatório.

Tabela 41 – Terceira tabela de apoio

Elemento X_i	$X_i - \mu$	$(X_i - \mu)^2$
$X_1 = 1{,}0$	-3	9
$X_2 = 3{,}0$	-1	1
$X_3 = 9{,}0$	5	25
$X_4 = 3{,}0$	-1	1
		$\Sigma = 36$

Assim, sabemos que $\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 = 36$. Agora, basta dividirmos esse somatório por N, pois assim dividiremos o somatório dos quadrados das "distâncias" entre o número de elementos do conjunto de dados. Em seguida, extrairemos a raiz quadrada do resultado. Como elevamos as diferenças ao quadrado para nos "livrarmos" dos sinais negativos, extrair a raiz nos levará novamente a um valor próximo à média das distâncias. Pense assim: se elevarmos 2 ao quadrado, chegaremos a 4. Se extrairmos a raiz de 4, voltaremos ao 2. É algo parecido que estamos fazendo aqui. Vamos ao cálculo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

Finalmente, sabemos que Leila tirou média 4,0, com desvio-padrão de 3,0 pontos. De maneira simples, esse resultado indica que a maior parte dos valores X_i que compõem nossa população estão a uma distância de até 3,0 pontos do valor da média, seja para mais ou para menos.

Resolução 2

O método da tabela é interessante para entendermos as etapas de cálculo e para quando estamos lidando com um conjunto de dados relativamente grande. Como nosso conjunto era composto por apenas quatro elementos, podemos facilmente aplicar os cálculos diretamente na fórmula do desvio-padrão. Desse modo, no numerador de nossa fração, cada parcela corresponderá ao cálculo de um elemento X_i.

Já sabemos que a média é $\mu = 4{,}0$ e que $N = 4$. Com isso, substituiremos esses valores diretamente na fórmula, conforme exposto a seguir:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + (X_3 - \mu)^2 + (X_4 - \mu)^2}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1{,}0 - 4{,}0)^2 + (3{,}0 - 4{,}0)^2 + (9{,}0 - 4{,}0)^2 + (3{,}0 - 4{,}0)^2}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-3,0)^2 + (-1,0)^2 + 5,0^2 + (-1,0)^2}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{9+1+25+1}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

Observação

Você deve imaginar que, na maior parte das vezes, precisamos extrair raízes quadradas de valores não exatos nos cálculos de desvio-padrão. Para isso, você pode contar com o auxílio de uma calculadora que realize essa operação. Vários modelos de calculadoras simples possuem essa função. Você também encontrará essa operação em qualquer calculadora científica.

Se estamos tratando com dados de uma **amostra**, o desvio-padrão é geralmente expresso pela letra s, e seu resultado representa uma **estimativa**. Seu formato de cálculo, ou seja, seu estimador, é dado conforme exposto a seguir, em que n é o número de elementos da amostra, x é a variável que representa os elementos da característica numérica estudada, i é o índice de contagem dos elementos (que vai de 1 até n) e $\overline{x}$ é a média aritmética amostral.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Repare que, dessa vez, existe uma diferença entre a lógica de cálculo do parâmetro e do estimador: enquanto o parâmetro utiliza apenas N no denominador da fração, o estimador utiliza n - 1. Essa diferença na lógica de cálculo deve-se ao fato de não conhecermos todos os dados da população. Se dividimos por n, o estimador tende a subestimar o parâmetro que ele pretende representar, ou seja, a estimativa tende a apresentar um valor sempre menor do que o seu respectivo parâmetro. Ao dividirmos por n - 1, o estimador tende a gerar resultados mais próximos do parâmetro. Por isso, recomenda-se que esse seja o formato adotado para o desvio-padrão amostral.

Lembrete

Uma boa estimativa traz um valor próximo ao valor do parâmetro que ela pretende estimar. Desse modo, o desvio-padrão amostral deve oferecer um valor capaz de representar o desvio-padrão populacional.

Vamos, a seguir, acompanhar um exemplo em que calcularemos o desvio-padrão amostral dentro de um contexto.

Exemplo 64. Paulo é um engenheiro que trabalha em uma fábrica de peças automotivas. Ele produziu, com o auxílio de uma máquina, uma chapa metálica que será utilizada em um processo de fabricação de um veículo. Para verificar se o produto se encontra dentro das especificações desejadas, Paulo realizou seis medições de espessura dessa chapa. Os dados obtidos por ele, com unidades em milímetros, são apresentados a seguir.

Tabela 42 – Medições da espessura de uma placa (em mm)

6,50	6,42	6,34	6,45	6,15	6,80
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

A partir dos dados levantados pelo engenheiro, calcule a média aritmética e o desvio-padrão da espessura da chapa metálica.

Resolução

O enunciado traz dados a respeito de medidas de espessura, em milímetros, realizadas em uma chapa metálica. A realização de diversas medidas em determinado objeto ou material é uma prática muito comum na área industrial ou científica e requer técnicas de análise estatística para conseguirmos extrair informações a partir dos dados.

Primeiramente, verificaremos se estamos em um contexto populacional ou em um contexto amostral. Temos várias medidas feitas em um mesmo objeto, sendo que cada medida será considerada um elemento do nosso conjunto de dados. O engenheiro, no caso, realizou seis medições. Se, na prática, fazemos um número limitado de medições, algumas estarão mais próximas do valor "exato" do que outras. Isso pode ser devido a variações reais do próprio objeto medido (por exemplo, a espessura pode variar ao longo da área da chapa) e também devido a variações por conta do método de medição (como flutuações por causa da precisão do instrumento de medida utilizado).

Ele fez seis medições, mas poderia ter realizado dez, vinte ou cem. Isso faz com que tenhamos, nessa situação, uma população cujo tamanho tende ao infinito. Perceba que cada valor medido é um elemento da população, e essa população, em sua totalidade, é composta de todas as medições possíveis. De posse de um número limitado de dados, estamos, portanto, com dados amostrais. Esse é um dos motivos pelos quais a fórmula do desvio-padrão amostral é muito mais utilizada na área científica do que o formato populacional.

Vamos ao cálculo da média aritmética e do desvio-padrão amostral utilizando o método da tabela. Faremos, na tabela, também o somatório dos próprios valores x_i para facilitar o cálculo da média aritmética. Resolveremos os cálculos na seguinte sequência: somatório de x_i, cálculo da média amostral $\bar{x}$, cálculo de $x_i - \bar{x}$ seguido de $(x_i - \bar{x})^2$, somatório dos valores $(x_i - \bar{x})^2$ e, finalmente, o cálculo do desvio-padrão amostral s. Acompanhe.

Tabela 43 – Etapas para o cálculo do desvio-padrão

Elemento x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
$x_1 = 6{,}50$	0,05	0,0025
$x_2 = 6{,}42$	-0,03	0,0009
$x_3 = 6{,}35$	-0,1	0,01
$x_4 = 6{,}46$	0,01	0,0001
$x_5 = 6{,}16$	-0,29	0,0841
$x_6 = 6{,}81$	0,36	0,1296
$\sum = 38{,}7$		**$\sum = 0{,}2272$**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38{,}7}{6} = 6{,}45 \text{ mm}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}2272}{6-1}} = \sqrt{\frac{0{,}2272}{5}} = \sqrt{\frac{0{,}2272}{5}} = \sqrt{0{,}004544} = 0{,}213 \text{ mm}$$

Resumindo, vimos as "regras" de cálculo de desvio-padrão mostradas a seguir:

Quadro 11 – Resumo das "regras" do desvio-padrão

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N}}$	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
Desvio-padrão populacional (parâmetro)	Desvio-padrão amostral (estimador)

Saiba mais

No canal do Youtube Matemática Rio, o professor Rafael Procopio ensina uma dica para encontrar valores aproximados de raízes quadradas não exatas, utilizando apenas operações de adição, multiplicação e divisão. Você pode conferir essa explicação em:

RAIZ quadrada não exata. Um truque de aproximação do valor. Publicado por Matemática Rio com professor Rafael Procopio, Youtube [s.l.], 2018. 1 vídeo (5 min.). Disponível em: https://cutt.ly/fSh8ruE. Acesso em: 18 mar. 2022.

Resumo

Nesta unidade, estudamos uma pequena introdução à lógica, conceituando proposições e as principais operações lógicas. Aprendemos a montar tabelas-verdade, assim como aprendemos como se dá a composição dos números binários, importantíssimos na área computacional. Pudemos perceber que a lógica é capaz de modelar diversas situações dicotômicas, como a nossa linguagem corrente, os circuitos digitais utilizados nos processadores dos computadores e os algoritmos computacionais.

Também fizemos uma introdução à estatística, a ciência dedicada ao aprendizado a partir de dados. Estudamos os conceitos de população e de amostra, assim como os conceitos de parâmetro e de estimador. Depois, estudamos a principal medida de tendência central, a média aritmética, utilizada em diversas situações cotidianas.

Por fim, aprendemos a aplicar a principal medida de dispersão, o desvio-padrão, que indica o quão dispersos são os dados do nosso conjunto em relação ao valor médio. Conceitos estatísticos são essenciais à ciência de dados, considerada como um subconjunto da inteligência artificial.

Exercícios

Questão 1. Considere as proposições simples r e s mostradas a seguir.

r: Hoje faz frio.

s: Hoje chove.

Analise a proposição composta t mostrada a seguir:

t: Hoje faz frio se e somente se hoje não chove.

Assinale a alternativa que exibe corretamente a fórmula proposicional lógica para t.

A) $r \rightarrow s$

B) $r \rightarrow \sim s$

C) $s \rightarrow \sim r$

D) $r \leftrightarrow \sim s$

E) $s \leftrightarrow \sim r$

Resposta correta: alternativa D.

Análise da questão

Nas alternativas A, B e C, temos o conectivo condicional $\rightarrow$.

Assim, em linguagem corrente, para a situação em estudo:

- $r \rightarrow s$ equivale a "Hoje faz frio se hoje chove"
- $r \rightarrow \sim s$ equivale a "Hoje faz frio se hoje não chove"
- $s \rightarrow \sim r$ equivale a "Hoje chove se hoje não faz frio"

Nas alternativas D e E, temos o conectivo bicondicional $\leftrightarrow$.

Assim, em linguagem corrente, para a situação em estudo:

- $r \leftrightarrow \sim s$ equivale a "Hoje faz frio se e somente se hoje não chove"
- $s \leftrightarrow \sim r$ equivale a "Hoje chove se e somente se hoje não faz frio"

Questão 2. (Enade 2012, adaptada) O proprietário de um pequeno restaurante decidiu avaliar a qualidade do seu serviço. Para tanto, durante uma semana, convidou seus clientes para avaliarem o serviço da casa com uma de três notas possíveis: 0 (zero), 5 (cinco) ou 10 (dez).

Após a consolidação dos dados coletados, observou-se que:

- 20 clientes atribuíram à casa nota 0;
- 200 clientes atribuíram à casa nota 5;
- 180 clientes atribuíram à casa nota 10.

Na análise dos resultados, o proprietário decidiu extrair a média das respostas. Ele oferecerá um bônus aos empregados se a média estiver acima de 8,0, e fará uma ação promocional para seus clientes se a média for inferior a 6,0.

Com base nessas informações, o proprietário deve:

A) providenciar a ação promocional, pois o valor da média ficou abaixo do valor de referência considerado para essa decisão.

B) providenciar o bônus para os empregados, pois o valor da média ficou acima do ponto de referência considerado para essa decisão.

C) providenciar o bônus para os empregados, pois o valor da média é a média dos valores de referência considerados na questão.

D) manter o funcionamento do restaurante como está, pois o valor da média ficou acima de 8,0.

E) manter o funcionamento do restaurante como está, pois a média ficou entre 6,0 e 8,0.

Resposta correta: alternativa E.

Análise da questão

Com os dados fornecidos na questão, podemos montar a tabela a seguir.

Tabela 44 – Distribuição das notas atribuídas pelos clientes

Número de clientes	Nota
20	0
200	5
180	10

A média $\overline{X}$ é igual ao quociente entre a soma de todas as notas pelo número de clientes que participaram da pesquisa. Ou seja:

$$\overline{X} = \frac{20 \times 0 + 200 \times 5 + 180 \times 10}{20 + 200 + 180} = \frac{2800}{400}$$

$$\overline{X} = 7$$

Vemos que a média não ficou acima de 8 (a média é igual a 7). Logo, o proprietário não oferecerá bônus para seus empregados.

Vemos que a média ficou acima de 6 (a média é igual a 7). Logo, o proprietário não fará nenhuma ação promocional para seus clientes.

REFERÊNCIAS

Audiovisuais

2012. Direção: Roland Emmerich. Estados Unidos: Columbia Pictures, 2012. 158 min.

FUNÇÃO exponencial – aula 2 – lei de formação. Publicado por Escolinha Pitágoras, Youtube [s.l.], 2020. 1 vídeo (6 min.). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-Zv46_iG148. Acesso em: 17 mar. 2022.

GRÁFICO de funções – GeoGebra. Publicado por Alex Cascardo, Youtube. [s.l.], 2017. 1 vídeo (29 min.). Disponível em: https://cutt.ly/dSqyx0w. Acesso em: 15 mar. 2022.

RAIZ quadrada não exata. Um truque de aproximação do valor. Publicado por Matemática Rio com professor Rafael Procopio, Youtube [s.l.], 2018. 1 vídeo (5 min.). Disponível em: https://cutt.ly/fSh8ruE. Acesso em: 18 mar. 2022.

TERREMOTO. Direção: Mark Robson. Estados Unidos: Universal Pictures, 1974. 123 min.

TRAJETÓRIA da bola. Publicado por Como Pode Cair no Enem, Youtube. [s.l.], 2014. Disponível em: https://bit.ly/2S3gH2r. Acesso em: 15 mar. 2022.

WHY is "x" the unknown. TED por Terry Moore. [s.l.], 2012. 1 vídeo (3 min.). Disponível em: https://bit.ly/3uEKixs. Acesso em: 2 mar. 2022.

Textuais

ALBERTO, J. *Matemática para concursos públicos e vestibulares*. São Paulo: Digerati Books, 2008.

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ÁVILA, G. *Cálculo 1*: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1982.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

BARUFFI, M. C. B.; LAURO, M. M. *Funções elementares, equações e inequações*: uma abordagem usando microcomputador. São Paulo: CAEM-IME-USP, 2011.

BOMBELLI, R. *L'Algebra*. Milão: Feltrinelli, 1966.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R. *Matemática fundamental*: Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2011.

BOULOS, P. *Cálculo diferencial e integral*. São Paulo: Books International, 1999. v. 1.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Sá da Costa, Lisboa, 1989.

CASTANHEIRA, N. P. *Noções básicas de matemática comercial e financeira*. Curitiba: IBPEX, 2008.

CERRI, C.; MONTEIRO, M. *História dos números complexos*. São Paulo: USP, 2011.

CHIEREGATTI, B. G.; LIMA, J. S. B. (coords.). *Minimanual de matemática*: Enem, vestibulares e concursos. São Paulo: Rideel, 2017.

COMO reconhecer funções a partir de gráficos. Khan Academy. Disponível em: https://bit.ly/3DQdHtP. Acesso em: 7 abr. 2022.

DAGHLIAN, J. *Lógica e álgebra de Boole*. São Paulo: Atlas, 2012.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas da matemática*. São Paulo: Ática, 1997.

DANTE, L. R. *Matemática aula por aula*. São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática*: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2018.

DETERMINANT of a matrix. dCode, [s.d.]. Disponível em: https://bit.ly/3tZQiji. Acesso em: 17 mar. 2022.

DOI, C. M. *Conversando sobre funções, fórmulas, gráficos, tabelas e contagens*. Contém 75 exercícios detalhadamente resolvidos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

DOI, C. M. *Cálculo bem explicado*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2022.

DUARTE, O. *Futebol, regras e comentários*. São Paulo: Senac, 2005.

EULER, L. 1809. *Elementos da algebra*. Rio de Janeiro: Impressão Régia, 2015.

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GEOGEBRA. *Calculadora*. Disponível em: https://bityli.com/mcxzq. Acesso em: 15 mar. 2022.

GERADOR de tabela verdade +. Micalevisk's GitHub Repositories. Disponível em: https://bityli.com/YzbZQ. Acesso em: 18 mar. 2022.

GERSTING, J. L. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação*: matemática discreta e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

IEZZI, D.; DOLCE, O.; DEGEMSZAJN, R. *Matemática*. 5. ed. São Paulo: Atual, 2011.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. C. *Descobrindo o Teorema de Pitágoras*. 12. ed. São Paulo: Scipione, 1997.

JACQUES, I. *Matemática para economia e administração*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MOORE, D. S. *A estatística básica e sua prática*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

OLIVEIRA, C. A. M. *Matemática*. Curitiba: InterSaberes, 2016.

O QUE é Ciência de Dados? *Oracle Brasil*. Disponível em: https://bityli.com/RUuyOu. Acesso em: 18 mar. 2022.

PAIVA, M. R. *Matemática*: conceitos, linguagem e aplicações. Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2009. v. 3.

PAPADIMITRIOU, C. *Computational complexity* Inglaterra: Addison Wesley Longman, 1994.

PYTHON Software Foundation. *Estrutura de dados*. Python, [s.d.]. Disponível em: https://bit.ly/3xZdOjH. Acesso em: 4 mar. 2022.

ROCHA, A.; MACEDO, L. R. D.; CASTANHEIRA, N. P. *Tópicos de matemática aplicada*. Curitiba: InterSaberes, 2013.

SHARPE, R. D.; DE VEAUX, R. D.; VELLEMAN, P. F. *Estatística aplicada*. Porto Alegre: Bookman, 2011.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1925.

SILVA, M. H. M.; REZENDE, W. M. *Análise histórica do conceito de função*. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática, 1999. (Caderno Dá Licença).

SOUZA, J. *Um novo olhar*: matemática. São Paulo: FTD, 2010.

TINOCO, L. A. A. *Construindo o conceito de função*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, 2009.

TRIOLA, M. F. *Introdução à estatística*: atualização da tecnologia. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

VILLAR, B. *Raciocínio lógico-matemático facilitado*. Rio de Janeiro: Forense; São Paulo: MÉTODO, 2019.

WAGNER, E. *Matemática 1*. Rio de Janeiro: FGV, 2013.

APÊNDICE A — PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

Produtos notáveis

Para o entendimento deste tópico, devemos primeiramente relembrar o que é um polinômio e, a partir disso, calcular os produtos notáveis. Assim, consideramos um polinômio toda função matemática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$$

Os termos a_0, a_1, a_2, a_n são chamados de coeficientes do polinômio. Existem vários tipos de polinômios, os quais são classificados de acordo com o grau de seus coeficientes. Se **n** é o maior expoente em **x**, dizemos que o polinômio é de grau **n**. Por exemplo, $1 + x^2$ é um polinômio de grau 2, pois o maior expoente em **x** está elevado à segunda potência. Os binômios e trinômios são extremamente importantes no desenvolvimento de cálculos algébricos.

Entre os binômios, destacam-se os especiais, chamados **produtos notáveis**, que podem ser resolvidos por meio de técnicas matemáticas. Especificaremos aqui os mais importantes.

- $(a + b)^2 \rightarrow$ quadrado da soma de dois termos;
- $(a - b)^2 \rightarrow$ quadrado da subtração de dois termos;
- $(a + b)(a - b) \rightarrow$ produto da soma pela diferença de dois termos.

Veremos, a seguir, as principais regras de produtos notáveis, com exemplos.

Quadrado da soma de dois termos

Quadrado do primeiro termo mais duas vezes o primeiro termo multiplicado pelo segundo e o último termo elevado ao quadrado. Ou seja:

$$(a + b)^2 = a^2 = 2ab + b^2$$

Vejamos os exemplos a seguir:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Quadrado da diferença de dois termos

Quadrado do primeiro termo menos duas vezes o primeiro termo multiplicado pelo segundo e o último termo elevado ao quadrado. Ou seja:

$(a - b)^2 = a^2 = - 2ab + b^2$

Vejamos os exemplos a seguir:

$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$$\left(-x-\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + 2x\sqrt{3} + 3$$

$(3a^3 - 2a^2)^2 = 9a^6 - 12a^5 + 4a^4$

Produto da soma pela diferença de dois termos

Quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo. Ou seja:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Vejamos os exemplos a seguir:

$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

$(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$

$(3a^3 - 2a^2)(3a^3 + 2a^2) = 9a^6 - 4a^4$

$$\left(-x-\sqrt{3}\right)\left(-x+\sqrt{3}\right) = x^2 - 3$$

Lembrete

Essas regras foram desenvolvidas para facilitar os cálculos. Porém, tais cálculos podem ser feitos por meio da multiplicação de fatores, ou propriedade distributiva, já conhecida usando a famosa regra do "chuveirinho", ou seja, "multiplicar termo a termo e somá-los".

Cubo da soma de dois termos

Cubo do primeiro termo mais três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o segundo termo elevado ao quadrado, mais o segundo termo elevado ao cubo. Observe a regra, seguida de um exemplo:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Cubo da diferença de dois termos

Cubo do primeiro termo menos três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o segundo termo elevado ao quadrado, menos o segundo termo elevado ao cubo. Observe a regra, seguida de um exemplo:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

A seguir, acompanhe mais exemplos, em que cada um dos produtos será desenvolvido utilizando uma regra de produtos notáveis.

A) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$

B) $(3x + 5)(3x - 5) = 9x^2 - 25$

C) $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

D) $\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)=7-4=3$

E) $\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)=12-1=11$

Observação

Nos cálculos, é extremamente importante prestar atenção no sinal dos termos. Um erro de sinal será fatal e comprometerá todo o resultado.

Fatoração

Vimos como gerar os polinômios, a partir dos produtos notáveis. Agora, nosso próximo passo é obter o processo inverso, ou seja, colocar um polinômio na forma de um produto de dois ou mais fatores.

Podemos fatorar os polinômios, ou seja, modificar sua forma algébrica de maneira que seja criada outra expressão equivalente à expressão dada, escrita na forma de produtos. Na maioria dos casos, o resultado é um produto notável. Vejamos alguns exemplos, começando pelos casos mais simples.

Fator comum e agrupamento

Seja a expressão:

$2x - 2$

Primeiramente, devemos observar qual número ou caráter algébrico aparece em ambos os termos dessa subtração, ou seja, o fator comum. Observa-se que o número 2 aparece em ambos. Logo, podemos reescrever a expressão como:

$2(x - 2)$

O polinômio, portanto, está fatorado. Vejamos mais alguns exemplos:

$ax + ay = a(x + y)$

$12x^2y + 4xy^3 = 4xy(3x + y^2)$

$ax + ay + bc + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

No entanto, existem polinômios que necessitam de regras mais específicas para serem fatorados. Assim, devemos utilizar outro critério, que veremos a seguir.

Diferença de quadrados

Nesse caso, deve-se verificar primeiro se existe uma diferença entre dois monômios cujas literais apresentem expoentes pares. O procedimento para a fatoração consiste das etapas a seguir.

1) As raízes quadradas de cada monômio devem ser extraídas.

2) Os expoentes dos termos literais devem ser divididos por 2.

3) Feito isso, o resultado é escrito como um produto da soma pela diferença dos novos monômios.

Vejamos os exemplos a seguir:

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

$x^6 - a^6 = (x^3 - a^3)(x^3 + a^3)$

$4x^2 - 36 = (2x - 6)(2x + 6)$

Trinômio quadrado perfeito

Podemos identificar um trinômio quadrado perfeito toda vez que ele resultar do quadrado da soma ou da diferença entre dois monômios. Considere o exemplo a seguir:

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Pois o polinômio $x^2 + 6x + 9$ pode ser escrito na forma $a^2 + 2ab + b^2$, onde $a = x$ e $b = 3$.

Desse modo, um trinômio quadrado perfeito é toda expressão que pode ser colocada na forma:

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Assim:

$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Trinômios de segundo grau

Suponhamos que temos uma equação do tipo $ax^2 - bx + c$ e sejam x_1 e x_2 as raízes dessa equação, ou seja, os números que, quando colocados substituindo a variável **x**, tornam o trinômio igual a zero. Podemos fatorar essa expressão da seguinte forma:

$ax^2 - bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Então, a partir da informação fornecida, podemos fatorar os trinômios de segundo grau. Acompanhe os exemplos a seguir:

$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$, onde $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ e $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$

$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, onde $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ e $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$

Soma e diferença de dois cubos

Quando multiplicamos o binômio (a + b) pelo trinômio ($a^2 - ab + b^2$), obtemos:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$

Da mesma maneira, temos:

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

Acompanhe mais alguns exemplos, a seguir.

Exemplo 1. Fatore o polinômio:

$4x^2 + 6x^3y - 8x^4y^5$

Resolução

Fatorar um polinômio significa transformá-lo em produto. Portanto devemos colocar em evidência o menor divisor comum que o compõe, isto é, o produto dos fatores comuns com o menor expoente, que no caso é $2x^2$. Assim, temos:

$4x^2 + 6x^3y - 8x^4y^5 = 2x^2(2 + 3xy - 4x^2y^5)$

Exemplo 2. Fatore o trinômio quadrado perfeito:

$25y^2 - 10y + 1$

Resolução

Esse trinômio pode ser fatorado observando-se que o primeiro e o último termo são quadrados perfeitos. Assim, pode ser reescrito como:

$25y^2 - 10y + 1 = (5y - 1)^2$

Exemplo 3. Fatore o polinômio dado por:

$y^2 - b^2 - y + b$

Resolução

Fatorando os termos que são quadrados perfeitos, $y^2 - b^2$, temos:

$(y - b)(y + b) - y + b$

Colocando o sinal negativo da expressão em evidência, chegamos a:

$(y - b)(y + b) - (y - b)$

Colocando o fator comum $(y - b)$ em evidência, terminamos a fatoração com a expressão seguinte:

$(y - b)(y + b - 1)$

Exemplo 4. Simplifique a expressão:

$2bc + b^2 + c^2 - a^2$

Resolução

Os primeiros três termos podem ser escritos como:

$(b + c)^2$

Assim:

$(b + c)^2 - a^2$

Essa expressão pode ser escrita como:

$(b + c - a)(b + c + a)$

Exemplo 5. Fatore:

$25a^4 - 100b^2$

Resolução

$25a^4 - 100b^2 = 25(a^4 - 4b^2) = 25(a^2 - 2b)(a^2 + 2b)$

Simplificação de expressões fracionárias

Todos os critérios descritos anteriormente podem ser utilizados quando desejamos simplificar expressões. Existem casos em que as expressões estão colocadas na forma de fração: nesses casos, devemos eliminar todos os fatores comuns e torná-la mais simples e equivalente.

Considere a seguinte fração:

$$\frac{x + xy}{x + xz} = \frac{x(1+y)}{x(1+z)} = \frac{(1+y)}{(1+z)}$$

O **x** é um fator comum, aparecendo tanto no numerador quanto no denominador, assim, pode ser colocado em evidência e simplificado. Vamos ver outro exemplo, agora usando produto notável:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=(x+3)$$

Agora, utilizamos agrupamento e fator comum:

$$\frac{x^2-5x+xy+5y}{7x+7y}=\frac{x(x-5)+y(x-5)}{7(x+y)}=\frac{(x-5)(x+y)}{7(x+y)}=\frac{x-5}{7}$$

No caso de termos um trinômio quadrado perfeito, ficamos com:

$$\frac{4x^2-4xy+y^2}{2x+y}=\frac{(2x+y)^2}{2x+y}=\frac{(2x+y)(2x+y)}{(2x+y)}=(2x+y)$$

APÊNDICE B — LOGARITMOS

Logaritmos

Formalizada pelo escocês John Napier (1550-1617), a teoria dos logaritmos tornou-se extremamente importante na descrição de vários fenômenos da natureza, bem como na resolução de vários problemas complexos na matemática. Considere a seguinte potência:

$16 = 2^4$

Ao expoente dessa potência, damos o nome de logaritmo. Portanto, 4 é o logaritmo de 16 na base 2. Desse modo, o logaritmo é uma operação na qual queremos descobrir o expoente que dada base deve ter para resultar em certa potência.

Usando a simbologia dos logaritmos, temos a seguinte equivalência entre expressões, em que a expressão da esquerda utiliza a forma exponencial e a expressão da direita usa a forma logarítmica:

$2^4 = 16 \Leftrightarrow \log_2 16 = 4$

Lembrete

O logaritmo de base 10 é chamado logaritmo decimal e é representado por $\log_a$. Quando o logaritmo é escrito dessa maneira, a base fica subentendida.

De forma geral, temos:

$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$

A base **a** de um logaritmo sempre deve ser um número positivo e diferente de 1, enquanto o logaritmando deve ser sempre um número positivo. Logo, temos que **a** e **b** são números reais, tal que $a \neq 1$, $a > 0$ e $b > 0$.

Propriedades dos logaritmos

- $\log_a 1 = 0$, ou seja, o log1 em qualquer base é sempre igual a 0. Seguem alguns exemplos:

  $\log_2 1 = 0$

  $\log_5 1 = 0$

- $\log_a a = 1$, ou seja, o logaritmo da base, qualquer que seja a base, é sempre 1. Seguem alguns exemplos:

  $\log_2 2 = 1$

  $\log_5 5 = 1$

- $\log_a a^m = m$, ou seja, o logaritmo em base **a** de uma potência **a** elevada a **m** é igual ao expoente **m**. Seguem alguns exemplos:

  $\log_2 2^3 = 3$

  $\log_{10} 10^5 = 5$

- $a^{\log_a b} = b$, ou seja, uma base **a** elevada a um logaritmo de **b** em mesma base **a** é igual ao próprio **b**. Acompanhe os exemplos:

  $5^{\log_5 3} = 3$

  $10^{\log_{10} 7} = 7$

- Se $\log_a b = \log_a c$, então $b = c$. Se dois logaritmos com a mesma base são iguais, então significa que os logaritmandos são iguais, portanto $b = c$.

  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

  $\log_a c = x \Leftrightarrow a^x = c$

  Logo, $b = c$.

Propriedades operacionais dos logaritmos

O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores. Ou seja:

$\log_b (m.n) = \log_b m + \log_b n$

O logaritmo de um quociente é dado por:

$$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=\log_b m-\log_b n$$

O logaritmo de uma potência é dado por:

$\log_b m^k = k\log_b m$

Exemplo 6. Sabendo que $\log_b a = 3$, calcule $\log_b a^5$.

Resolução

$\log_b a^5 = 5 \log_b a$ mas $\log_b a = 3 \therefore \log_b a^5 = 5 . 3 = 15$

Exemplo 7. Calcule o valor de:

$A = 5^{2+\log_5 3}$

Resolução

$5^{2+\log_5 3} = 5^2 . 5^{\log_5 3}$

Usando a propriedade, temos que $5^{\log_5 3} = 3$.

Assim:

$5^{2+\log_5 3} = 5^2 . 5^{\log_5 3} = 25 . 3 = 75.$

Exemplo 8. Sabendo se que $\log_b a = 4$, calcule $\log_b \sqrt[6]{a^5}$.

Resolução

$$\log_b \sqrt[6]{a^5} = \log_b a^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}\log_b a$$

Como $\log_b a = 4$

$$\therefore \log_b \sqrt[6]{a^5} = \frac{5}{6} . 4 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

Mudanças de base

Existem momentos em que nos deparamos com certo logaritmo em determinada base e temos de convertê-lo em outra base. Por exemplo, se quisermos calcular $\log_7 2$, não conseguiremos por meio de calculadoras que trabalham com logaritmos na base 10 ou na base neperiana. Nesse caso, devemos fazer uso de um artifício matemático que permite calcular esse logaritmo a partir de logaritmos de bases conhecidas. Essa ferramenta poderosa que facilita os cálculos chama-se mudança de base. Mas como fazer isso? Essa mudança não altera o resultado?

A mudança de base é definida como:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad c \neq 1$$

Essa mudança não altera o resultado. Vejamos alguns exemplos:

$$\log_{64} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 64} = \frac{5}{6}$$

$$\log_{81} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 81} = \frac{2}{4}$$

Função logarítmica

Podemos dizer que uma função logarítmica é toda função definida pela lei de formação $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$. Nesse tipo de função, o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero, e o contradomínio, o conjunto dos reais.

Vejamos alguns exemplos de funções logarítmicas:

$f(x) = \log_2 x$

$f(x) = \log_3 x$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$f(x) = \log_2 x$

$f(x) = \log_{10} x$

Nas funções logarítmicas, dois casos devem ser considerados para análise.

Caso 1: $a > 1$. Nesse caso, o gráfico tem a forma mostrada a seguir.

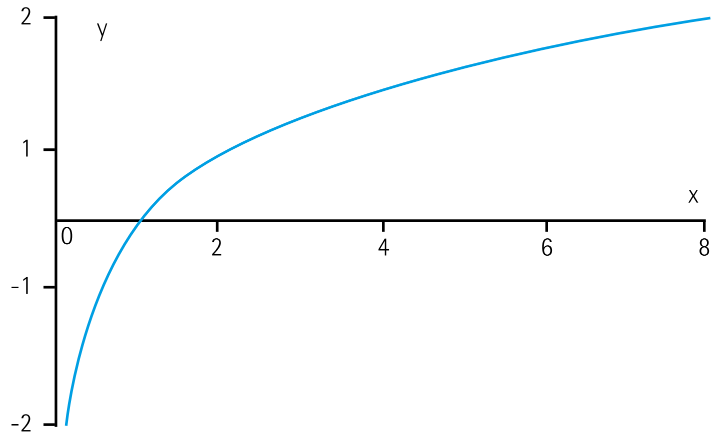

Figura 61 – Gráfico de uma função logarítmica no caso em que $a > 1$

Observamos que essa é uma função crescente em todo seu domínio.

Caso 2: $0 < a < 1$. Nesse caso, o gráfico tem a forma mostrada a seguir.

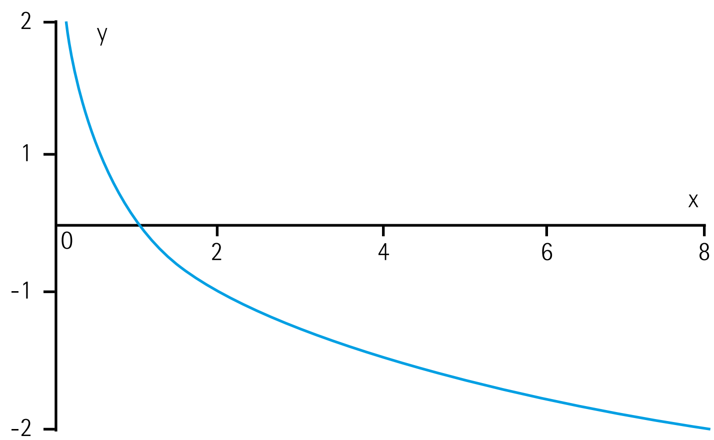

Figura 62 – Gráfico de uma função logarítmica no caso em que $0 < a < 1$

Comparando os dois gráficos, podemos observar que:

- estão totalmente à direita do eixo y, pois estão definidos para $y > 0$;
- ambos interceptam, ou seja, cruzam o eixo do x, no ponto (1,0), o que mostra que a função apresenta uma raiz;
- y assume todos os valores reais.

Observação

Conforme pode ser observado, a função logarítmica é o inverso da função exponencial.

Equação logarítmica

Para finalizar esse apêndice, estudaremos as equações logarítmicas, ou seja, aquelas em que a incógnita **x** apresenta-se na base de um logaritmo ou no logaritmando. Para resolver essas equações, devemos usar as propriedades dos logaritmos.

Temos dois casos de equações logarítmicas.

Caso 1: $\log_a r = f(x) \Leftrightarrow f(x) = a^r$

Exemplo:

$\log_2 (3x + 1) = 4 \Leftrightarrow 2^4 = (3x + 1)$

$3x + 1 = 16$

$3x = 15 \rightarrow x = 5$

$\therefore S = \{5\}$

Caso 2: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Exemplo:

$\log(x + 2) + \log(x - 2) = \log 3x$

Usando a propriedade dos logaritmos $\log_b (m.n) = \log_b m + \log_b n$, podemos reescrever a equação assim:

$\log(x + 2)\,(x - 2) = \log 3x$

Usando a propriedade dos produtos notáveis, visto no apêndice A, temos:

$\log(x^2 - 4) = \log 3x$

Como as bases são iguais, basta igualar os logaritmandos. Portanto:

$x^2 - 4 = 3x$

Trata-se de uma equação do segundo grau. Assim, precisamos calcular as raízes:

$x^2 - 4 - 3x = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -1$$

Obtemos dois valores para as soluções, mas temos de analisar as condições:

$(x + 2) > 0$ e $(x - 2) > 0 \rightarrow x > -2$ e $x > 2$

A resolução, portanto, que satisfaz a condição é $S = \{4\}$.

Vejamos outro exemplo para ilustrar o uso das propriedades dos logaritmos na resolução das equações:

$\log_3 (x + 1) + \log_3 (x - 7) = 2$

$\log_3 (x + 1)(x - 7) = 2$

$(x + 1)(x - 7) = 3^2$

$x^2 - 6x - 7 = 9$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

Resolvendo a equação, obtemos $x_1 = 8$ e $x_2 = -2$.

Observando as condições de existência $x > -1$e $x > 7$, vemos que a única resolução possível é $S = \{8\}$.

Saiba mais

Uma aplicação interessante é a medição da intensidade de um terremoto medida na escala Richter. Vários filmes descrevem esse tipo de desastre natural e podem ajudar na interação desse conteúdo, como o indicado a seguir

TERREMOTO. Direção: Mark Robson. Estados Unidos: Universal Pictures, 1974. 123 min.

2012. Direção: Roland Emmerich. Estados Unidos: Columbia Pictures, 2012. 158 min.

Acompanhe mais alguns exercícios para fixação.

Exemplo 9. Resolva a equação:

$\log_2 (x + 2) + \log_2 (x - 2) = 5$

Resolução

Devemos estabelecer as condições de existência, ou seja, as condições para que os logaritmandos sejam maiores do que 0. Essas condições são: $x > -2$ e $x > 2$. Portanto, para que essas duas condições sejam satisfeitas, temos que $x > 2$.

A propriedade do logaritmo de um produto permite-nos reescrever a equação como:

$\log_2 (x + 2)(x - 2) = 5$

Pela definição de logaritmo, temos:

$(x + 2)(x - 2) = 2^5$

Calculando o produto, temos:

$x^2 = - 4 = 32$

$x^2 = 36$

$x = \pm 6$

Somente 6 satisfaz a condição inicial. Portanto, $S = \{6\}$.

Exemplo 10. Resolva a equação:

$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

Resolução

A condição de existência é $x > 0$.

Vamos escrever tudo na base 2 para facilitar os cálculos, ou seja, mudaremos de base.

$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = 7$$

Mas $\log_2 4 = 2$

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{4} = 7$$

Chamando $\log_2 x = y$, temos:

$$y + \frac{y}{2} + \frac{y}{4} = 7$$

$$\frac{7y}{4} = 7 \rightarrow y = 4$$

Mas $\log_2 x = y \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 16$

Portanto, $S = \{16\}$.

Exemplo 11. Determine o conjunto Resolução da seguinte equação:

$2\log_2 (x - 3) - \log_2 (x - 3) = 0$

Resolução

Usando a propriedade da subtração de dois logaritmos, podemos reescrever a equação como:

$$2\log_2 (x-3) \div (x-3) = \log_2 \frac{(x-3)^2}{(x-3)} \rightarrow \log_2 (x-3) = 0$$

Pela propriedade dos logaritmos, temos:

$x - 3 = 2^0 = 1 \rightarrow x = 4$

Exemplo 12. A escala Richter relaciona a magnitude M de um terremoto à sua energia liberada E (em ergs) pela seguinte equação:

$\log E = 11{,}8 + 1{,}5M$

Se um terremoto liberou energia equivalente a 10^{25} ergs, calcule sua magnitude.

Resolução

$\log E = 11{,}8 + 1{,}5M$

$\log 10^{25} = 11{,}8 + 1{,}5M$

Usando a propriedade dos logaritmos, temos:

$25 = 11{,}8 + 1{,}5M$

$1{,}5M = 13{,}2$

$M = 8{,}8$

A magnitude associada a esse terremoto, portanto, foi de 8,8.

Exemplo 13. Construir o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Resolução

Para fazer o gráfico, atribuímos valores a x conforme dado na tabela a seguir.

Tabela 45 – Valores para a construção do gráfico

x	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

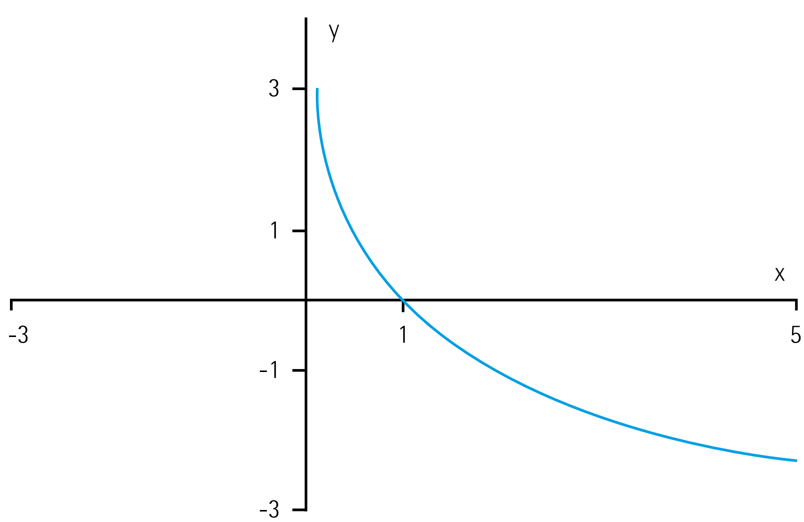

Figura 63 – Gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Observando a curva, nos pontos em que $y \geq 0$, notamos que ela se assemelha a uma famosa torre: a Torre Eiffel. É a matemática aplicada à arquitetura e à engenharia.

Exemplo 14. Calcule:

$\log_5 625 + \log 100 - \log_3 27$

Resolução

$\log_5 625$ é expoente da potência de base 5, que resulta em 625.

$\log_5 625 = x \rightarrow 5^x = 625$

625 pode ser fatorado, por meio de sua decomposição, em fatores primos. Assim:

$265 = 5^4$

Logo:

$5^x = 5^4 \rightarrow x = 4$

$\log 100$ é o expoente da potência de base 10 que resulta em 100.

$\log 100 = x \rightarrow 10^x = 100$

Uma potência de 10 com expoente natural resulta em um número começando pelo algarismo 1 seguido de tantos zeros quanto indicados por esse expoente.

O número 100 tem dois zeros após 1, porque o expoente da potência de base 10 é igual a 2. Assim:

$10^x = 10^2 \rightarrow x = 2$

O $\log_3 27$ é igual a 3, visto que o número 27 pode ser decomposto em fatores primos, resultando em:

$27 = 3^3$

Assim:

$\log_3 27 = x \rightarrow x = 3$

Portanto:

$$\log_5 625 + \log 100 - \log_3 27 = 4 + 2 - 3 = 3$$

Exemplo 15. Calcule $\log_3 5$ sabendo que $\log_3 45 = 3{,}464974$.

Resolução

$\log_3 5$ pode ser escrito como:

$$\log_3 \frac{45}{9}$$

Portanto,

$$\log_3 5 = \log_3 \frac{45}{9}$$

Pela propriedade dos logaritmos, podemos escrever:

$\log_3 5 = \log_3 45 - \log_3 9$

$\log_3 9 = 2$

Portanto,

$\log_3 5 = \log_3 45 - \log_3 9$

$\log_3 5 = 3{,}464974 - 2$

$\log_3 5 = 1{,}464974$

Exemplo 16. Sabendo que $\log_x 2 = a$ e $\log_x 3 = b$, calcule $\log_x \sqrt[3]{12}$.

Resolução

Primeiramente, utilizaremos propriedades de potência e de logaritmos e escrever $\log_x \sqrt[3]{12}$. como:

$$\log_x \sqrt[3]{12} = \log_x 12^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_x 12$$

Vamos escrever 12 como um produto entre 4 e 3. Assim:

$$\frac{1}{3}\log_x 12 = \frac{1}{3}\log_x 4 \cdot 3$$

Utilizando a propriedade dos logaritmos, que diz que um produto pode ser separado numa soma, temos:

$$\frac{1}{3}\log_x 4\,.\,3 = \frac{1}{3}\log_x 4 + \frac{1}{3}\log_x 3$$

$$\frac{1}{3}\log_x 4 = \frac{1}{3}\log_x 2^2 = \frac{2}{3}\log_x 2$$

Portanto:

$$\frac{1}{3}\log_x 4\,.\,3 = \frac{2}{3}\log_x 2 + \frac{1}{3}\log_x 3$$

Como $\log_x 2 = a$ e $\log_x 3 = b$, temos:

$$\log_x \sqrt[3]{12} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$$

Portanto:

$$\log_x \sqrt[3]{12} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$$

Exemplo 17. Calcule $\log 101,23$ sabendo que $\log 10123 = 4,0053$.

Resolução

Queremos calcular $\log 101,23$, então vamos escrevê-lo como:

$\log 101,23 = \log(10123\ .\ 10^{-2})$

Utilizando a propriedade, temos:

$\log(10123\ .\ 10^{-2}) = \log 10123 + \log 10^{-2}$

Como $\log 10123 = 4,0053$ e $\log_{10} 10^{-2} = -2$, temos:

$\log 101,23 = 4,0053 + (-2)$

$\log 101,23 = 4,0053 - 2$

$\log 101,23 = 2,0053$