

Soal 4 :

Tampilkan $x(t)$; $X(f)$; $x[n]$; $X(e^{j\omega})$; $h[n]$; $|H(e^{j\omega})|$; $\arg H(e^{j\omega})$; $y[n]$; $Y(e^{j\omega})$; $y(t)$, $Y(f)$ untuk kasus berikut:

Sinyal kontinu mempunyai frekuensi 10 Hz, 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz, dan 200 Hz yang dinyatakan dengan persamaan berikut:

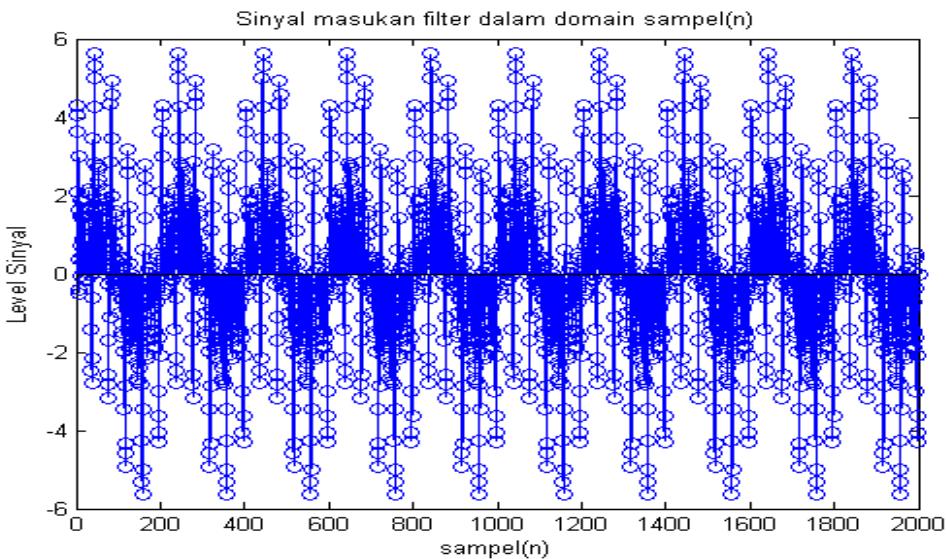
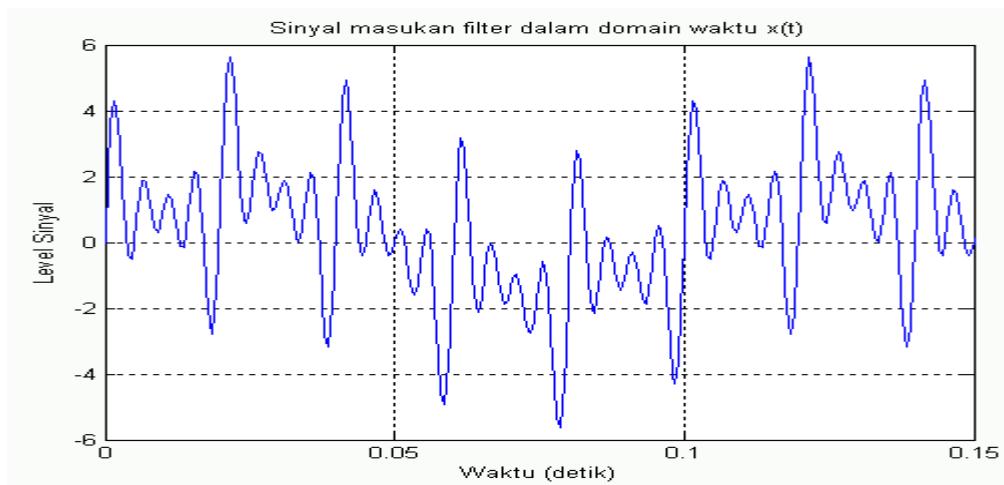
$$X(t) = 1,5 \sin 2\pi \cdot 10 \cdot t + \sin 2\pi \cdot 50 \cdot t + \sin 2\pi \cdot 100 \cdot t + 1,5 \sin 2\pi \cdot 150 \cdot t + 1,5 \sin 2\pi \cdot 200 \cdot t$$

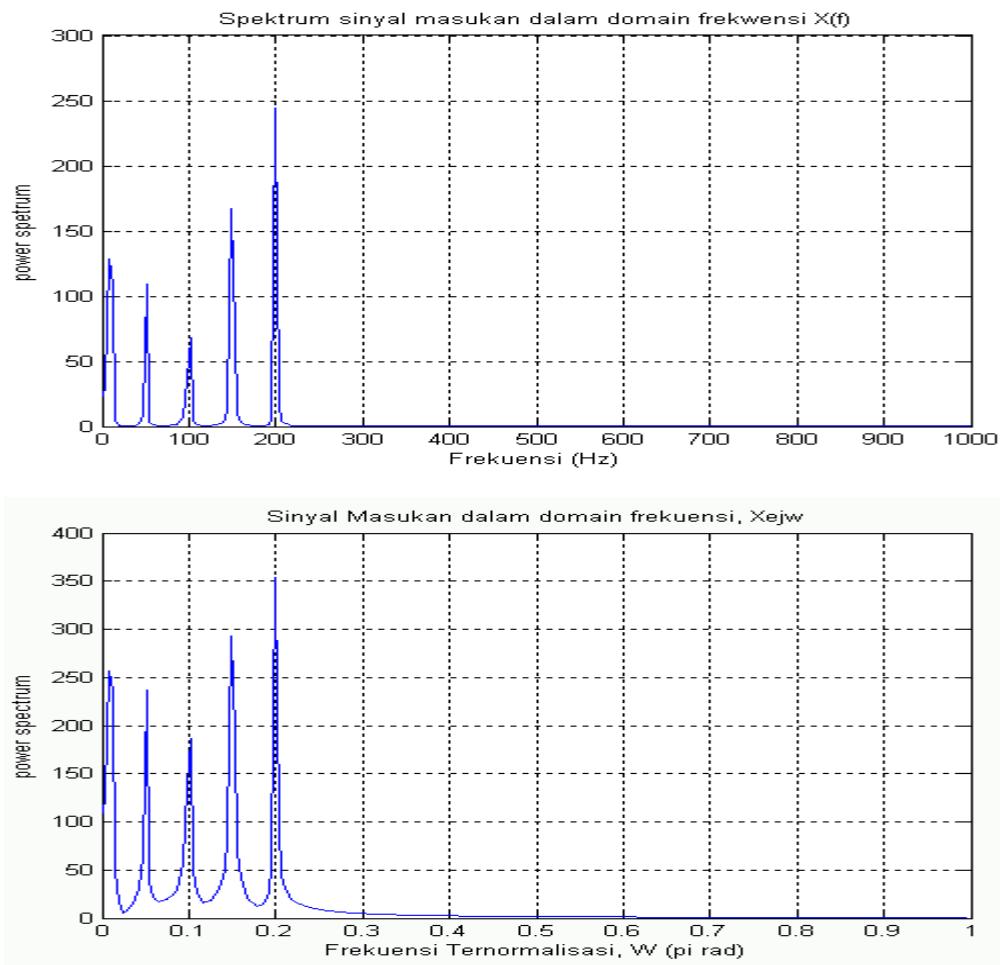
Rencanakan FILTER FIR dan IIR untuk mendapatkan sinyal **150 Hz**.

Penyelesaian :

Untuk memenuhi syarat nyquist, maka frekuensi sampling minimal 2 kali dari frekuensi maksimum yaitu 200Hz, dalam hal ini diambil $fs = 2$ KHz. Untuk memfilter sinyal $x(t)$ agar didapatkan hanya sinyal 150 Hz maka diperlukan filter BPF.

Mula-mula digambarkan sinyal $x(t)$, $x(n)$, $x(f)$, dan $x(e^{j\omega})$ dengan (plot_sinyal_input.m) pada lampiran A.





A. Perencanaan BPF digital FIR

Karakteristik filter :

- Frekuensi yang dilewatkan = 150 Hz, dengan redaman < 1 dB
- *Band Pass Filter* dengan redaman > 3dB pada frekuensi *Cutoff* 140 Hz dan 160 Hz
- Band transisi tidak lebih dari 30 Hz, sehingga $f_r = 110$ Hz dan 190 Hz dengan redaman minimum 40 dB utk frekuensi < 110 Hz dan > 190 Hz
- Sampling pada 2000 Hz

1. Tipe window yang digunakan adalah Hamming, karena stopband 40 dB.
2. Menentukan jumlah titik window *Hamming* untuk memenuhi lebar transisi yang diperlukan :

$$f_s = 1500 \text{ Hz}$$

$$\omega_{c1} = \frac{\Omega_{c1}}{fs} = 2\pi f_1 \cdot \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 140}{2000} = 0,14\pi \text{ rad}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\Omega_{c2}}{fs} = 2\pi f_2 \cdot \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 160}{2000} = 0,16\pi \text{ rad}$$

$$\omega_{r1} = \frac{\Omega_{r1}}{fs} = 2\pi f_1 \cdot \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 110}{2000} = 0,11\pi \text{ rad}$$

$$\omega_{r2} = \frac{\Omega_{r2}}{fs} = 2\pi f_2 \cdot \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 190}{2000} = 0,19\pi \text{ rad}$$

$$\Delta\omega_1 = \omega_{c1} - \omega_{r1} = 0,14\pi - 0,11\pi = 0,03\pi \text{ rad}$$

$$\Delta\omega_2 = \omega_{r2} - \omega_{c2} = 0,19\pi - 0,16\pi = 0,03\pi \text{ rad}$$

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2}{2} = 0,03\pi \text{ rad}$$

$$N \geq \frac{K \cdot 2\pi}{\Delta\omega} \Rightarrow \text{dimana } K = 4$$

$$N \geq \frac{4 \cdot 2\pi}{0,03\pi} = 266,7 \text{ ambil N} = 267$$

3. Menentukan ω_c dan α

$$\omega_{c1} = 0,14\pi \text{ dan } \omega_{c1} = 0,16\pi$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = \frac{267-1}{2} = 133$$

4. Untuk mendapatkan Respon h(n) Untuk window hamming

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\{ \frac{\sin \omega_{c2}(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin \omega_{c1}(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \right\} \cdot \omega(n), \quad 0 \leq n \leq 266 \\ &= \left\{ \frac{\sin[0,16\pi(n-133)]}{\pi(n-133)} - \frac{\sin[0,14\pi(n-133)]}{\pi(n-133)} \right\} \cdot \left[0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{266}\right) \right] \end{aligned}$$

Dibuat program (cari_hn_fir.m) pada lampiran A file untuk mencari h(n), dimana hd dicari dalam 3 bagian, yaitu hd untuk n = 0 s/d 132, untuk n = 133, dan untuk n = 134 s/d 266

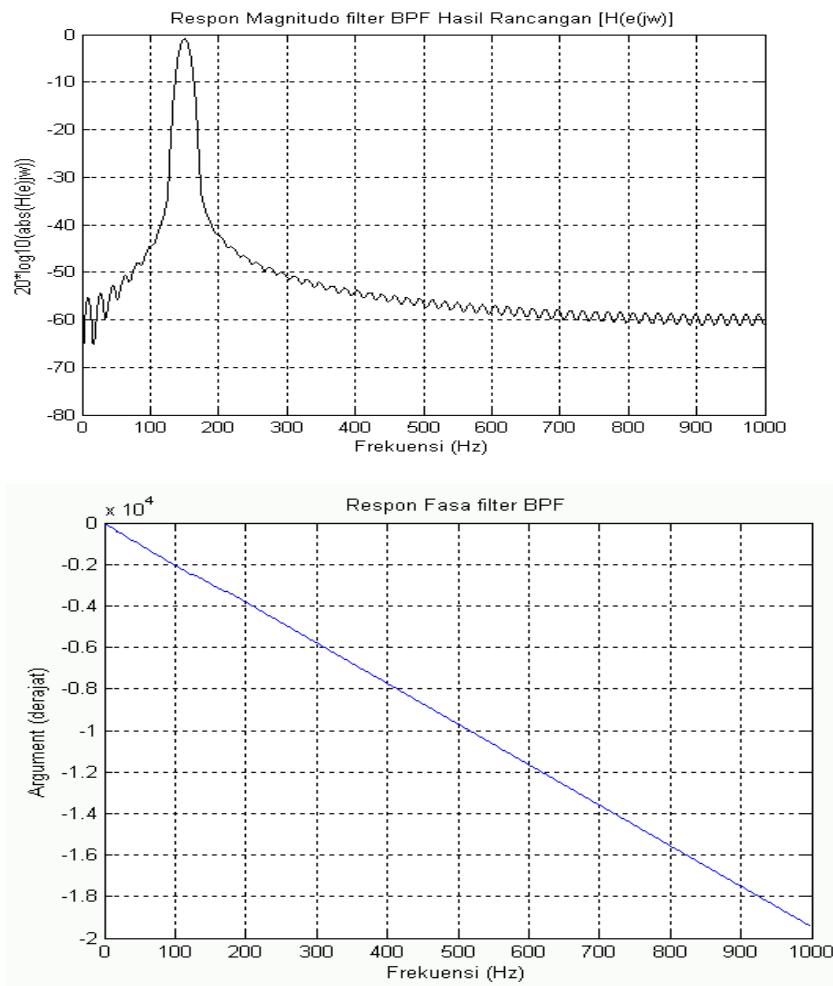
Respon frekuensi :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{266} h(n) e^{j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = h(0)e^{-j0} + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} + h(3)e^{-j3\omega} + \dots + h(40)e^{-j266\omega}$$

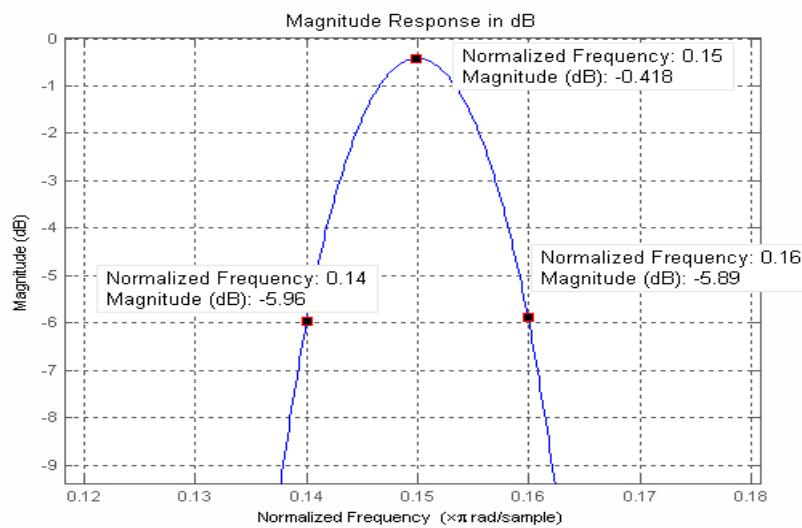
$$H(e^{j\omega}) = -0,0041 e^{-j0} - 0,0033 e^{-j\omega} - 0,0018 e^{-j2\omega} + \dots + 0,02 e^{-j133\omega} + \dots - 0,0041 e^{-j266\omega}$$

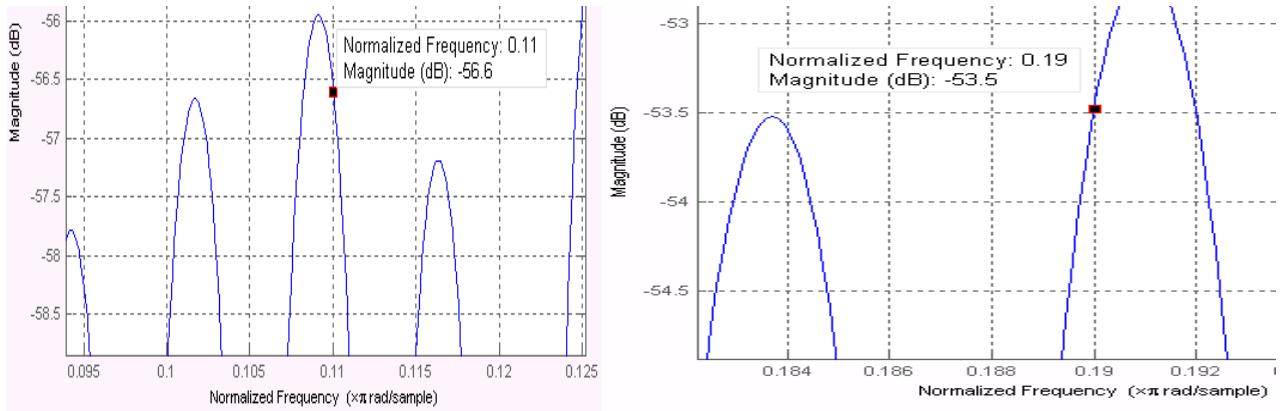
Plot respon magnitudo dan fasa menggunakan resp_frek_fir.m pada lamp. A:



Dapat terlihat respon fasa linier

Gambar diperbesar untuk melihat titik kritis, untuk kepentingan analisa dan presentasi gambar yang lebih fleksibel, digunakan fvtool:





Terlihat pada frekuensi 150 Hz, dilewatkan dengan redaman 0,418 dB, sedangkan pada frekuensi cutoff 140 dan 160 Hz, mengalami redaman 5,96 dan 5,89 dB. Selain itu pada stopband 110 Hz dan 190 Hz mengalami redaman 55,6 dB dan 53,5 dB. Dengan spesifikasi ini, sudah memenuhi syarat untuk BPF, dengan pass band 150 Hz. Kenaikan frekuensi *cutoff* adalah *trade-off* redaman antara frekuesi passband 150 Hz dan frekuensi stopband. Pada stopband, redaman sudah cukup besar, sehingga dapat diturunkan sedikit dengan menaikkan frekuensi cutoff. Kenaikan ini akan menurunkan redaman pada passband. Untuk itu kita turunkan frekuensi cutoff ω_{c1} menjadi $0,139\pi$ dan naikkan frekuensi ω_{c2} menjadi $0,161\pi$.

5. Pengurangan N:

Setelah beberapa percobaan, penurunan nilai N yang tetap memenuhi spesifikasi yang diinginkan adalah N = 216. Diperoleh redaman 0,934 dB pada frekuensi 150 Hz, dan redaman -42,2 dB dan 40,2 dB pada cutoff.

Berikut koefisien h(n) untuk N=216, sebagai catatan koefisien yang ditampilkan dibawah dalam format short (4 digit belakang koma).

| |
|--|
| Columns 1 through 14 |
| -0.0002 -0.0002 -0.0002 -0.0002 -0.0001 0.0000 0.0001 0.0002 0.0002 0.0002 0.0001 0.0000 -0.0000 -0.0001 |
| Columns 15 through 28 |
| -0.0001 -0.0001 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0001 -0.0002 -0.0002 -0.0002 -0.0002 -0.0001 0.0001 0.0003 0.0005 |
| Columns 29 through 42 |
| 0.0007 0.0007 0.0005 0.0002 -0.0003 -0.0009 -0.0013 -0.0015 -0.0013 -0.0008 0.0000 0.0010 0.0019 0.0026 |
| Columns 43 through 56 |
| 0.0027 0.0021 0.0010 -0.0005 -0.0022 -0.0036 -0.0043 -0.0041 -0.0028 -0.0008 0.0017 0.0041 0.0058 0.0063 |
| Columns 57 through 70 |
| 0.0055 0.0032 -0.0000 -0.0036 -0.0066 -0.0085 -0.0085 -0.0066 -0.0030 0.0016 0.0062 0.0097 0.0113 0.0104 |
| Columns 71 through 84 |
| 0.0071 0.0020 -0.0040 -0.0094 -0.0130 -0.0139 -0.0117 -0.0068 0.0000 0.0071 0.0130 0.0162 0.0159 0.0121 |
| Columns 85 through 98 |
| 0.0054 -0.0028 -0.0107 -0.0164 -0.0188 -0.0170 -0.0114 -0.0031 0.0061 0.0142 0.0194 0.0203 0.0168 0.0095 |
| Columns 99 through 112 |
| -0.0000 -0.0097 -0.0174 -0.0213 -0.0206 -0.0154 -0.0068 0.0034 0.0129 0.0196 0.0220 0.0178 0.0117 0.0031 |
| Columns 113 through 126 |
| -0.0061 -0.0140 -0.0188 -0.0194 -0.0158 -0.0088 0.0000 0.0087 0.0154 0.0186 0.0177 0.0130 0.0056 -0.0028 |

Columns 127 through 140
-0.0105 -0.0156 -0.0173 -0.0152 -0.0099 -0.0026 0.0050 0.0113 0.0148 0.0151 0.0121 0.0067 -0.0000 -0.0064

Columns 141 through 154
-0.0111 -0.0132 -0.0124 -0.0090 -0.0038 0.0019 0.0068 0.0101 0.0109 0.0094 0.0060 0.0015 -0.0030 -0.0065

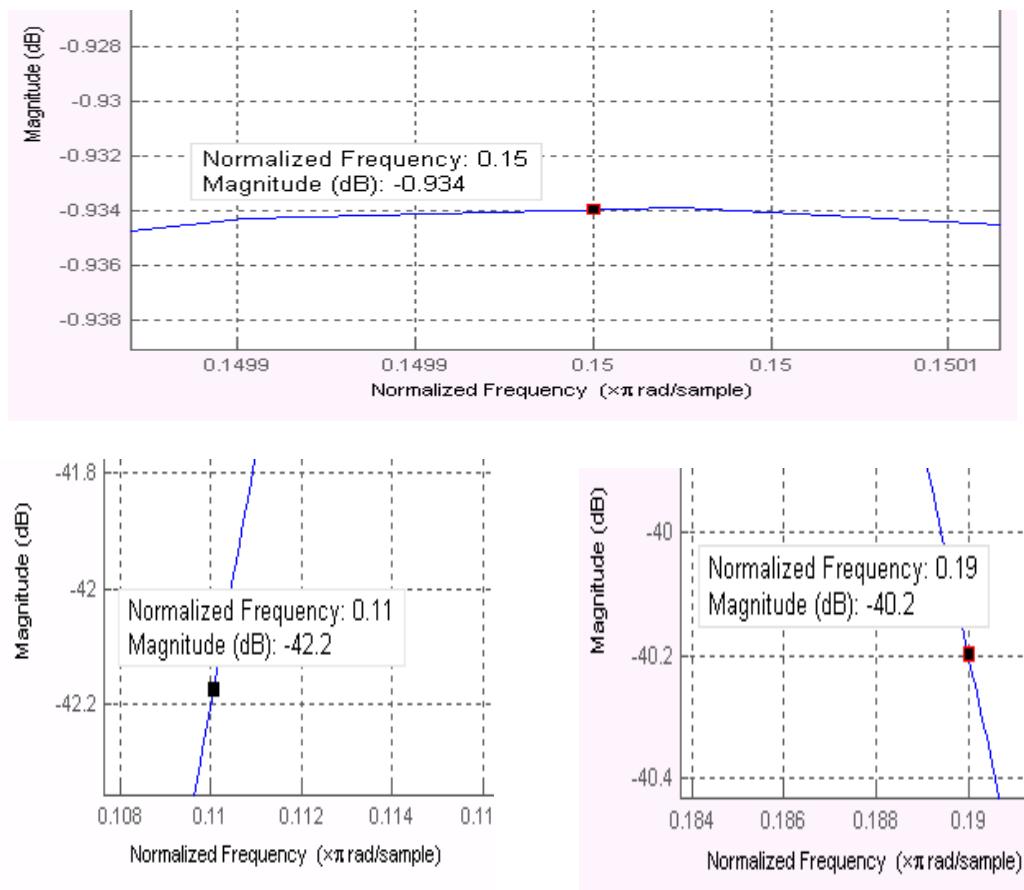
Columns 155 through 168
-0.0084 -0.0084 -0.0066 -0.0036 0.0000 0.0033 0.0056 0.0065 0.0060 0.0043 0.0018 -0.0009 -0.0030 -0.0044

Columns 169 through 182
-0.0046 -0.0039 -0.0024 -0.0006 0.0011 0.0024 0.0031 0.0030 0.0023 0.0012 -0.0000 -0.0010 -0.0017 -0.0019

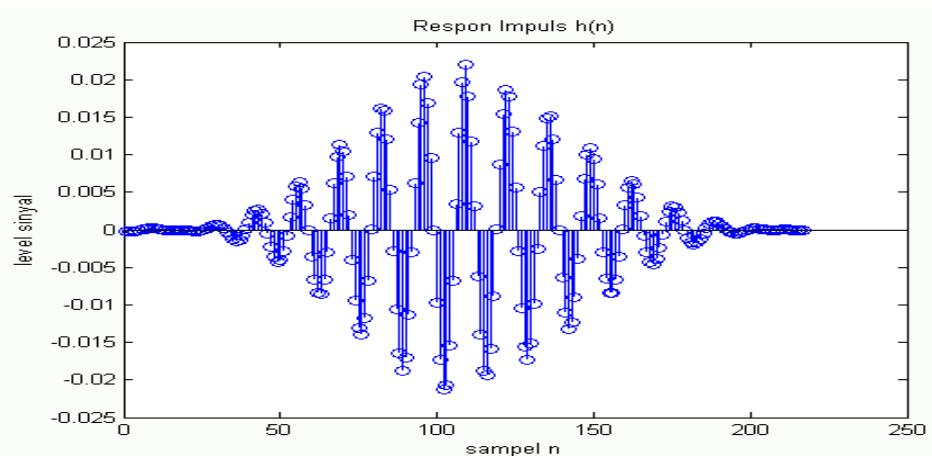
Columns 183 through 196
-0.0017 -0.0012 -0.0005 0.0002 0.0007 0.0010 0.0010 0.0008 0.0005 0.0001 -0.0002 -0.0004 -0.0005 -0.0005

Columns 197 through 210
-0.0003 -0.0002 0.0000 0.0001 0.0002 0.0001 0.0001 0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000

Columns 211 through 217
0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0001 -0.0001 -0.0001



Dapat juga diplot respon impuls $h(n)$ dengan fungsi stem:



Persamaan Fungsi Transfer dan Persamaan Beda

Persamaan fungsi transfer :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{216} h(n) \cdot z^{-n}$$

$$H(z) = h(0)z^{-0} + h(1)z^{-1} + h(2)e^{-2n} + h(3)e^{-3n} + \dots + h(40)e^{-40x}$$

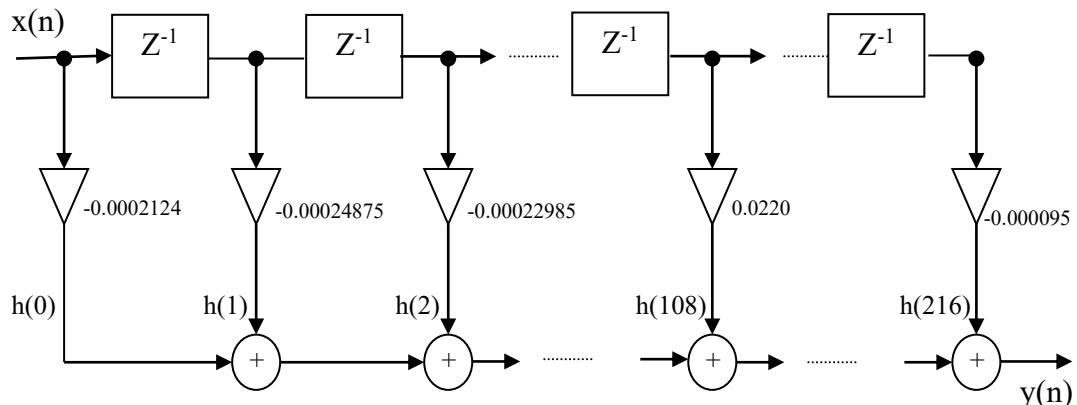
$$H(z) = -0.000212452 - 0.00024875z^{-1} - 0.0002298z^{-2} + \dots + 0.0220z^{-108} + \dots - 0.00009487725788z^{-216}$$

Persamaan beda :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{216} h(k) \cdot x(n-k)$$

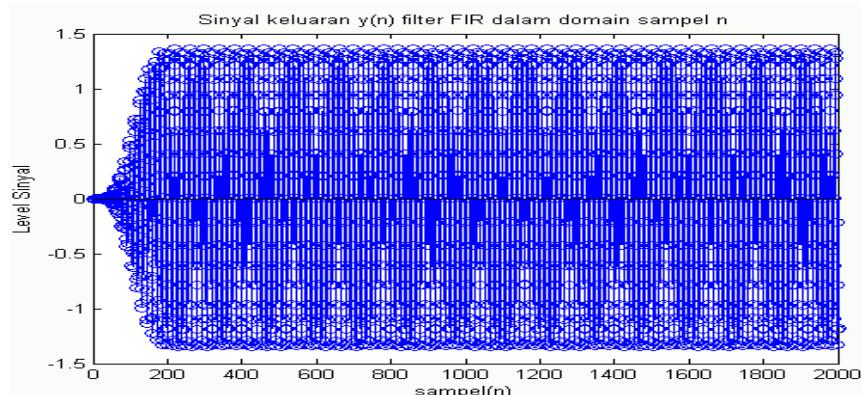
$$y(n) = -0.000212452 x(n) - 0.00024875 x(n-1) - 0.00022986 x(n-2) + \dots + 0.022 x(n-108) + \dots - 0.00009487725788 x(n-216)$$

Gambar realisasi rangkaian filter

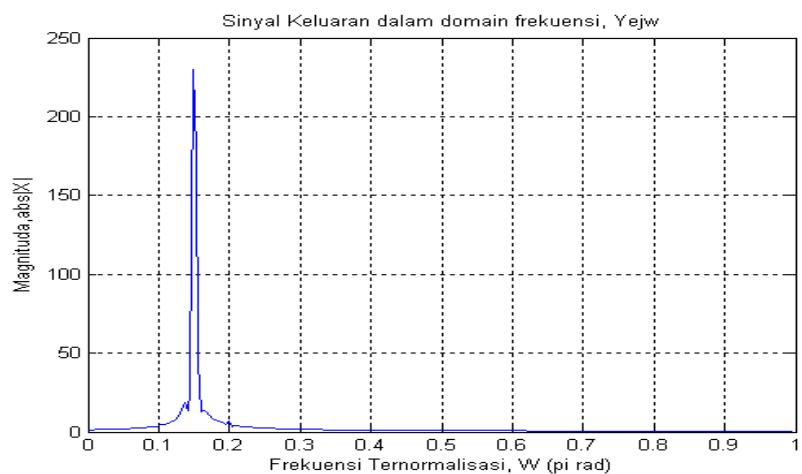
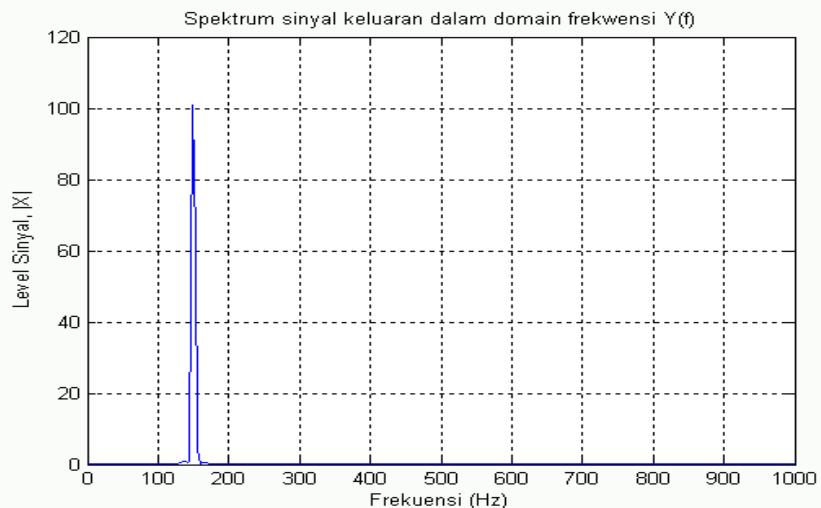


Pemfilteran sinyal x(n):

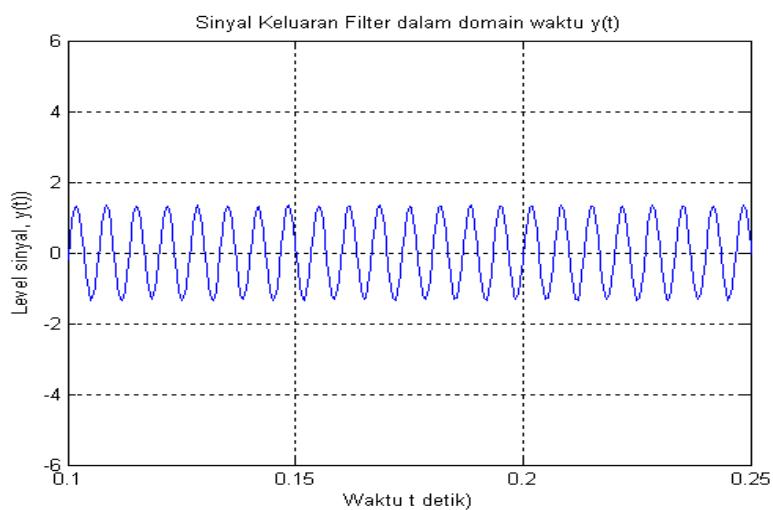
Program matlab (filter_fir.m) dapat dilihat pada lampiran A. Filtering pada prinsipnya adalah proses konvolusi antara sinyal x(n) dengan filter h(n) untuk mendapatkan y(n) yaitu $x(n)*h(n) = y(n)$.



Untuk plotting sinyal $Y(f)$, $Y(e^{j\omega})$, dan $y(t)$ dibuat program `sinyal_output_yn_fir.m`, pada lampiran A.



Dari domain frekuensi terlihat hanya sinyal $f = 150$ Hz yang dilewatkan.



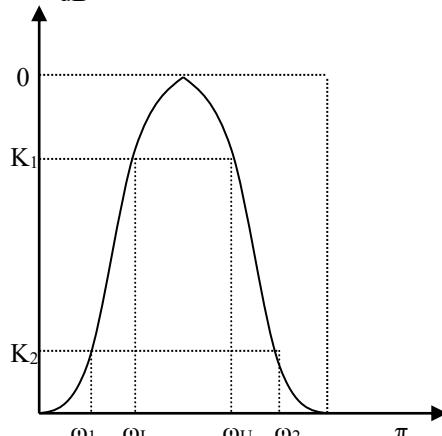
Dapat terlihat sinyal $y(t) = 1.5 \sin(2 \pi 150 t)$

B. Perencanaan BPF digital IIR (Metode transformasi bilinier pendekatan analog butterworth).

Spesifikasi Digital:

Dari spesifikasi Filter FIR pada pembahasan sebelumnya telah diperoleh spesifikasi digital sebagai berikut:

$$K_1 \leq -3 \text{ dB}; K_2 \leq 40 \text{ dB}; \omega_{\text{L}} = 0,11\pi \text{ rad}; \omega_{\text{U}} = 0,14\pi \text{ rad} \text{ dan } \omega_2 = 0,19\pi \text{ rad}$$



Digital to analog:
(Prewarping T=1)

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_1}{2} = \frac{2}{1} \tan \frac{0,11\pi}{2} = 0,34919921 \text{ rad}$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_2}{2} = \frac{2}{1} \tan \frac{0,19\pi}{2} = 0,61554334 \text{ rad}$$

$$\Omega_L = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_L}{2} = \frac{2}{1} \tan \frac{0,14\pi}{2} = 0,447238843 \text{ rad}$$

$$\Omega_U = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_U}{2} = \frac{2}{1} \tan \frac{0,16\pi}{2} = 0,513728382 \text{ rad}$$

LPF normalisasi:

$$\Omega_r = \min \{|A|, |B|\}$$

$$|A| = \frac{(-\Omega_1^2 + \Omega_L \Omega_U)}{[\Omega_1(\Omega_U - \Omega_L)]} = \frac{[-0,34919921^2 + (0,447238843 \times 0,513728382)^2]}{[0,34919921 (0,513728382 - 0,447238843)]} = 15,14764162$$

$$|B| = \frac{(\Omega_2^2 - \Omega_L \Omega_U)}{[\Omega_2(\Omega_U - \Omega_L)]} = \frac{[0,61554334^2 + (0,447238843 \times 0,513728382)^2]}{[0,61554334 (0,513728382 - 0,447238843)]} = 3,6438931$$

maka :

$$\Omega_r = \min \{|A|, |B|\} = 3,6438931$$

Orde LPF butterworth:

$$n = \frac{\log[(10^{-K_1/10} - 1) / 10^{-K_2/10} - 1]}{2 \log(\frac{1}{\Omega_r})} = \frac{\log[(10^{0,3} - 1) / 10^4 - 1]}{2 \log(\frac{1}{3,6438931})} = 3,563269199 \approx 4$$

Fungsi transfer H(S) LPF:

$$H_{\text{LPF}}(S) = \frac{1}{(s^2 + 0,76536s + 1)(s^2 + 1,84776s + 1)} = \frac{1}{s^4 + 2,6131s^3 + 3,4142s^2 + 2,6131s + 1}$$

Fungsi transfer H(S)_{BPF} analog :

$$\begin{aligned}
 H_a(s) &= H_{LPF}(s) \Big|_{s=\frac{s^2+\Omega_L\Omega_U}{s(\Omega_U-\Omega_L)}} = \\
 &= \frac{1}{\left[\frac{s^2+0.229759}{s 0.06649} \right]^4 + 2.6131 \left[\frac{s^2+0.229759}{s 0.06649} \right]^3 + 3.4142 \left[\frac{s^2+0.229759}{s 0.06649} \right]^2 + 2.6131 \left[\frac{s^2+0.229759}{s 0.06649} \right] + 1} \\
 &= \frac{0.0000195 s^4}{s^8 + 0.1737 s^7 + 0.9341 s^6 + 0.1205 s^5 + 0.3237 s^4 + 0.0277 s^3 + 0.0493 s^2 + 0.0021 s + 0.0028}
 \end{aligned}$$

fungsi transfer H(z) BPF digital:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= H_{BPF}(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \\
 &= \frac{0.0000195 \left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^4}{\left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^8 + 0.1737 \left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^7 + 0.9341 \left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^6 + 0.1205 \left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^5 + 0.3237 \left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^4} \\
 &\quad \dots\dots + 0.0277 \left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^3 + 0.0493 \left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]^2 + 0.0021 \left[2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right] + 0.0028 \\
 &\quad \frac{0.000313 (1-z^{-1})^4 (1+z^{-1})^4}{256(1-z^{-1})^8 + 22.239208 (1-z^{-1})^7 (1+z^{-1}) + 59.784397 (1-z^{-1})^6 (1+z^{-1})^2 + 3.8568247 (1-z^{-1})^5 (1+z^{-1})^3 + \\
 &\quad 5.1790638 (1-z^{-1})^4 (1+z^{-1})^4 + 0.22153533 (1-z^{-1})^3 (1+z^{-1})^5 + 0.19724866 (1-z^{-1})^2 (1+z^{-1})^6 \\
 &\quad + 0.0042146 (1-z^{-1})(1+z^{-1})^7 + 0.0027867 (1+z^{-1})^8}
 \end{aligned}$$

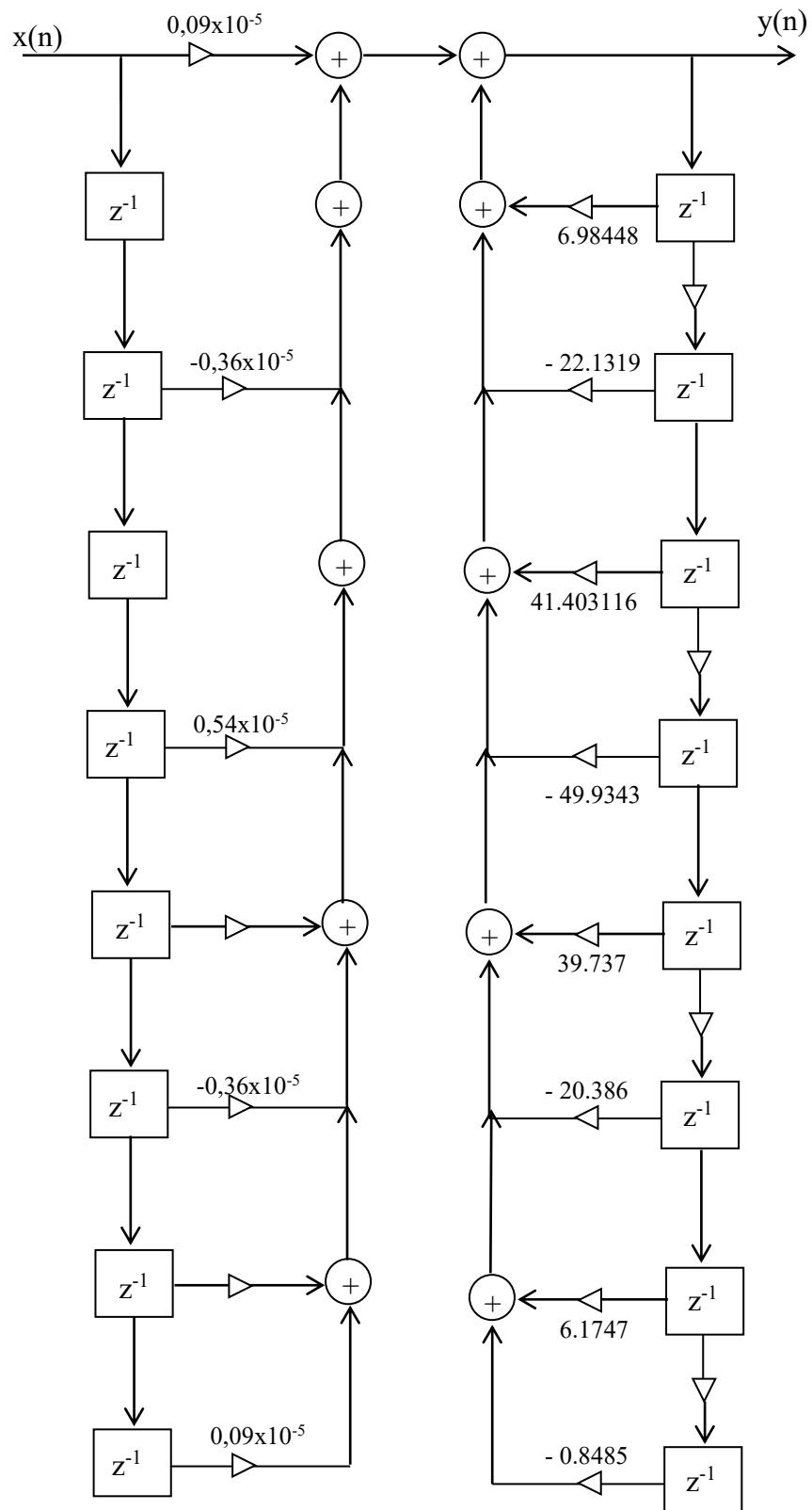
$$H(z) = \frac{0.000313 - 0.001252 z^{-2} + 0.001878 z^{-4} - 0.001252 z^{-6} + 0.000313 z^{-8}}{347.485279 - 2427.00684 z^{-1} + 7690.53955 z^{-2} - 14386.9735 z^{-3} + 17351.453 z^{-4} - 13808.0171 z^{-5} \\
 + 7084.03715 z^{-6} - 2145.64575 z^{-7} + 294.841713 z^{-8}}$$

$$\begin{aligned}
 347.485279 Y(z) &= 2427.00684 z^{-1} Y(z) - 7690.53955 z^{-2} Y(z) + 14386.9735 z^{-3} Y(z) - \\
 &\quad 17351.453 z^{-4} Y(z) + 13808.0171 z^{-5} Y(z) - 7084.03715 z^{-6} Y(z) + \\
 &\quad 2145.64575 z^{-7} Y(z) - 294.841713 z^{-8} Y(z) + 0.000313 X(z) - \\
 &\quad 0.001252 z^{-2} X(z) + 0.001878 z^{-4} X(z) - 0.001252 z^{-6} X(z) + \\
 &\quad 0.000313 z^{-8} X(z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= 6.984488 z^{-1} Y(z) - 22.131986649 z^{-2} Y(z) + 41.4031166 z^{-3} Y(z) - \\
 &\quad 49.93435419 z^{-4} Y(z) + 39.7369846 z^{-5} Y(z) - 20.386582 z^{-6} Y(z) + \\
 &\quad 6.174781746 z^{-7} Y(z) - 0.8485013 z^{-8} Y(z) + 0.09 \times 10^{-5} X(z) - \\
 &\quad 0.3603 \times 10^{-5} z^{-2} X(z) + 0.54045 \times 10^{-5} z^{-4} X(z) - 0.3603 \times 10^{-5} z^{-6} X(z) + \\
 &\quad 0.09 \times 10^{-5} z^{-8} X(z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(n) &= 6.984488 y(n-1) - 22.131986649 y(n-2) + 41.4031166 y(n-3) - \\
 &\quad 49.93435419 y(n-4) + 39.7369846 y(n-5) - 20.386582 y(n-6) + \\
 &\quad 6.174781746 y(n-7) - 0.8485013 y(n-8) + 0.09 \times 10^{-5} x(n) - \\
 &\quad 0.3603 \times 10^{-5} x(n-2) + 0.54045 \times 10^{-5} x(n-4) - 0.3603 \times 10^{-5} x(n-6) + \\
 &\quad 0.09 \times 10^{-5} x(n-8)
 \end{aligned}$$

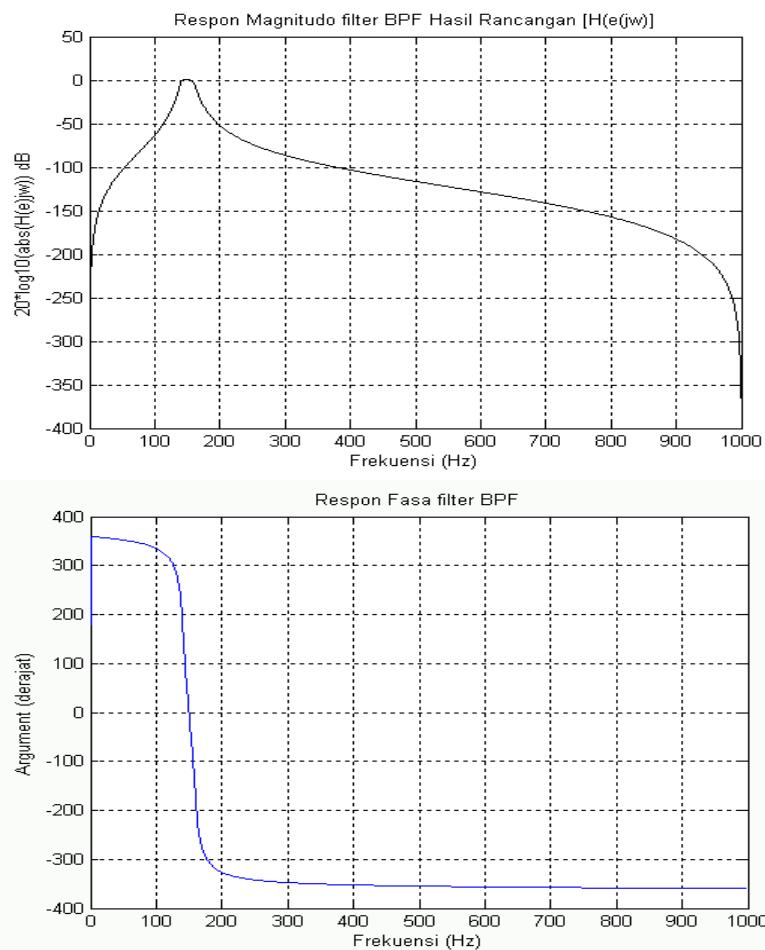
Realisasi rangkaian dari persamaan beda di atas dapat dilihat pada gambar dibawah



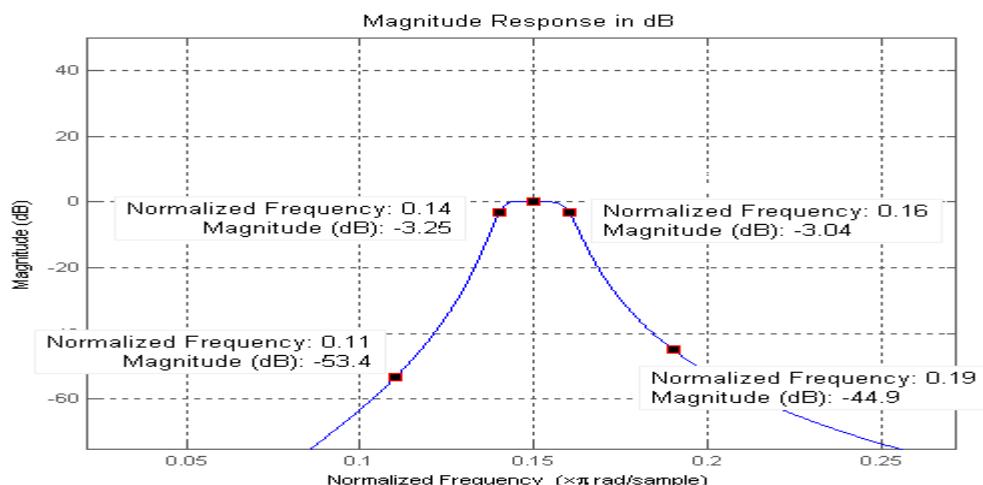
$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} =$$

$$\frac{0.000313 - 0.001252 e^{-2j\omega} + 0.001878 e^{-4j\omega} - 0.001252 e^{-6j\omega} + 0.000313 e^{-8j\omega}}{347.485279 - 2427.00684 e^{-j\omega} + 7690.53955 e^{-2j\omega} - 14386.9735 e^{-3j\omega} + 17351.453 e^{-4j\omega} - 13808.0171 e^{-5j\omega} + 7084.03715 e^{-6j\omega} - 2145.64575 e^{-7j\omega} + 294.841713 e^{-8j\omega}}$$

Gambar dari respon magnitude, program resp_frek_iir.m pada lamp.B

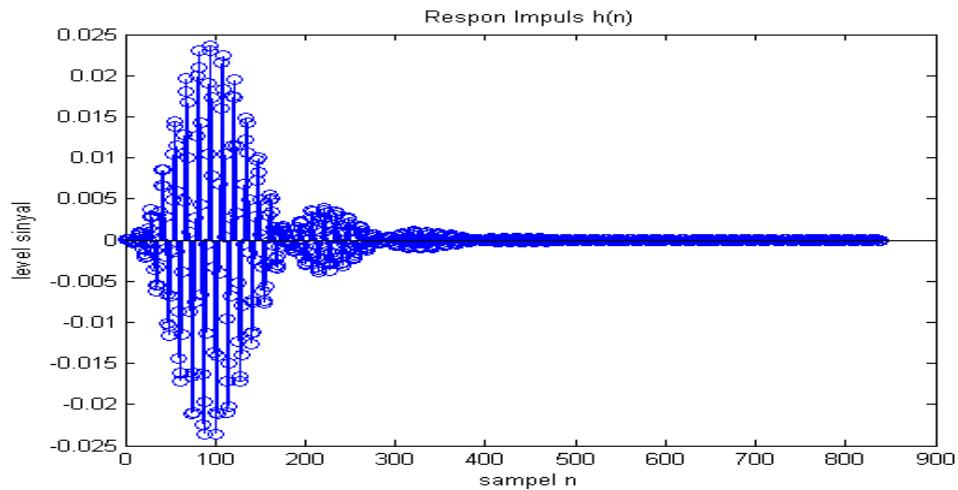


Dapat terlihat respon fasa linier pada daerah passband. Untuk melihat titik kritis gambar diperbesar, dan menggunakan fungsi fvtool pada matlab agar dapat mengolah presentasi dengan lebih baik.

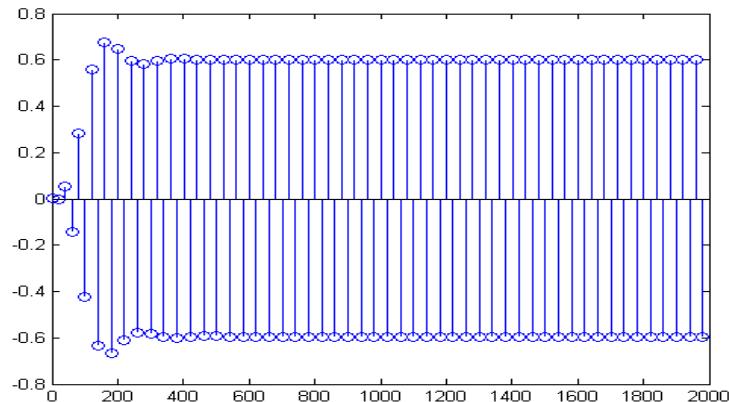


Terlihat filter sudah memenuhi spesifikasi yang diinginkan, frekuensi 150 Hz dilewatkannya tanpa redaman. Frekuensi cutoff 140Hz dan 160Hz mengalami redaman sebesar 3,25 dB dan 3,04 dB. Sedangkan frekuensi stopband 110 Hz dan 190 Hz mengalami redaman sebesar 53,4 dB dan 44,9 dB.

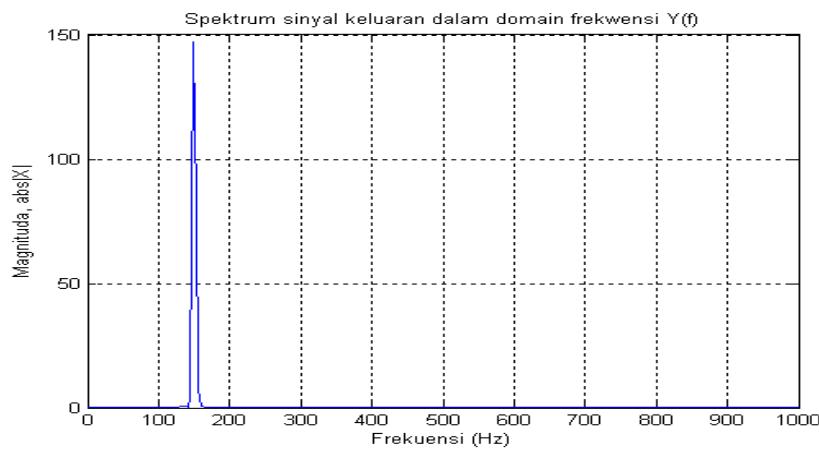
Dapat digambarkan respon impuls $h(n)$, respon_hn_iir.m, lampiran B:



Setelah melalui filtering diperoleh $y(n)$, program pada lampiran B, filter_iir.m



Dapat diplot $Y(f)$, $Y(e^{j\omega})$, $y(t)$, lampiran B:plot_sinyal_yn_iir.m



Dapat terlihat frekuensi yang dilewatkan adalah 150 Hz



$$\text{Sinyal } y(t) = 1.5 \sin(2\pi 150 t)$$