



Politechnika Wrocławska

Sterowanie adaptacyjne

Raport 3

Mikołaj Nowak 280082
Mateusz Mulewicz 280073
2 lutego 2026

1 Wstęp

Celem projektu było przeprowadzenie odpowiednich symulacji dla różnych typów sterowania:

- proporcjonalnego,
- LQR
- z obserwatorem Luenbergera.

Otrzymane wyniki były później ze sobą porównywane.

Całość została przeprowadzona dla obiektu

$$K(s) = \frac{-s + \alpha}{(s + 1)(s + \beta)}$$

Gdzie α oraz β były ostatnimi, niezerowymi cyframi indeksu:

- α - 3,
- β - 2.

Na potrzeby dalszych obliczeń, równanie $K(s)$ zostało przekształcone do postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad , y(t) = \mathbf{C}^T\mathbf{x}(t)$$

2 Przekształcenie opisu do równania stanu

Pierwszym zadaniem do wykonania było rozpisanie i rozwiązywanie równań stanu dla równania $\dot{\mathbf{x}}$. Równanie to można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)$$

Gdzie w naszym przypadku:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & -(1+\beta) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}^T\mathbf{x}(t) &= [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obliczenia prowadzące do wyznaczenia wartości macierz:

$$K(s) = \frac{-s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \rightarrow K(s) = \frac{-s + 3}{s^2 + 3s + 2} \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Mnożąc na krzyż:

$$Y(s) \cdot (s^2 + 3s + 2) = U(s) \cdot (-s + 3)$$

Przechodząc na pochodną w czasie:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = -\dot{u} + 3u$$

$$\ddot{y} = -3\dot{y} - 2y - \dot{u} + 3u$$

Równania pomocnicze:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dot{y} + 3y + u \\ x_2(t) = y \end{cases}$$

Różniczkowanie:

$$\dot{x}_1(t) = \ddot{y} + 3\dot{y} + \dot{u}$$

Podstawianie \ddot{y} :

$$\dot{x}_1(t) = (-3\dot{y} - 2y - \dot{u} + 3u) + 3\dot{y} + \dot{u}$$

Wyznaczenie:

$$\dot{x}_1(t) = -2y + 3u \rightarrow -2x_2(t) + 3u$$

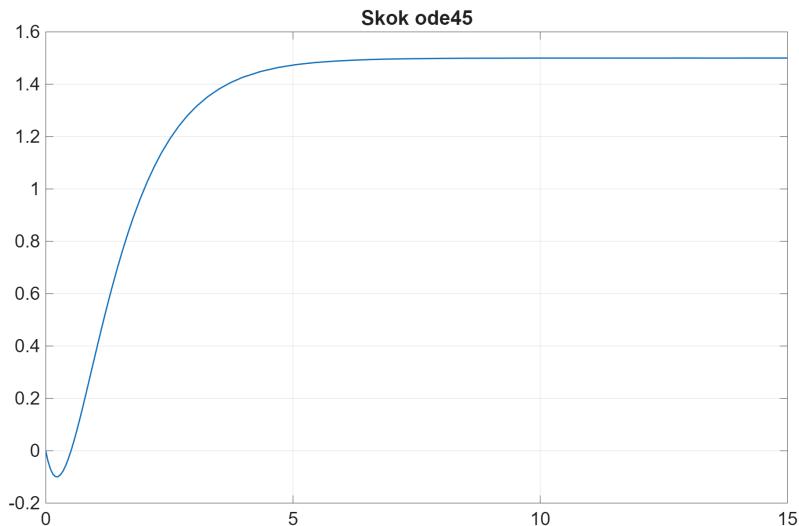
Końcowe wartości:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \cdot x_1(t) - 2x_2(t) + 3u \\ \dot{x}_2(t) = 1 \cdot x_1(t) - 3x_2(t) - 1u \\ y = 0 \cdot x_1(t) + 1 \cdot x_2(t) \end{cases}$$

Całość zgadza się z wartościami przedstawionymi w macierzach.

3 Ode45

Kolejnym krokiem projektu było przeprowadzenie skoku na powyższym obiekcie z wykorzystaniem wbudowanej funkcji ode45.



Rysunek 1: Wykres skoku ode45

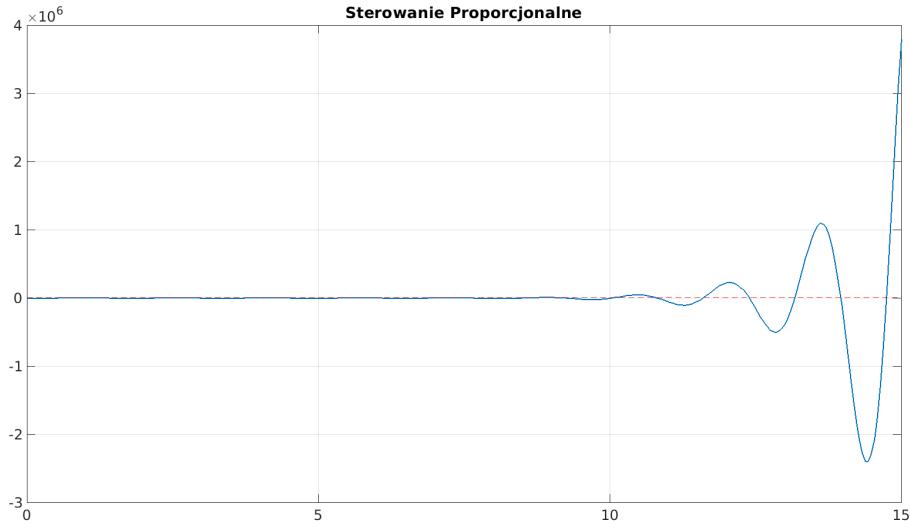
Charakterystycznym zachowaniem dla układów nieminimalnofazowych jest początkowy spadek wartości poniżej osi X, co można zauważać na powyższym wykresie, lecz zgodnie z założeniami, otrzymany wynik dąży do stabilizacji na wartości $\frac{\alpha}{\beta} = 1,5$.

4 Sterowanie proporcjonalne

W tym etapie celem było zastosowanie sterowania w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego dla regulatora proporcjonalnego. W naszym przypadku wartość wzmacnienia $K_p = 1 + \beta + \beta = 5$, od progu $K_p > \beta$ wartość dąży do nieskończoności, poniżej tego progu wartość ustabilizuje się poniżej wartości zadanej.

Do tego zadania również został użyty solver ode45, jednak ze zmianą do równania \dot{x} :

$$u(t) = K_p \cdot (1 - x_2(t))$$



Rysunek 2: Wykres odpowiedzi sterowania proporcjonalnego dla $K_p=5$

Odpowiedź obiektu snie stabilizuje się, a dąży do nieskończoności, co jest zamierzonym efektem. Taki obiekt nie powinien być w stanie ustabilizować się na wartości zadanej $y_z = 1$.

5 Sterowanie LQR

Celem tego etapu było zaimplementowanie optymalnego regulatora kwadratowego. Koszt sterowania zdefiniowany jest wzorem:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + u^T(t) R u(t)) dt$$

Gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} &= [x_1(t) \quad x_2(t)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \\ u^T(t) R u(t) &= u(t) \cdot 1 \cdot u(t) = u^2(t) \end{aligned}$$

Dlatego całość sprowadza się do:

$$J = \int_0^\infty (x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u^2(t)) dt$$

Do tego zadania została wykorzystana funkcja (lqr(A,B,Q,R), która pozwoliła na wyznaczenie optymalnego:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$$

Sprowadza to sygnał sterujący do postaci:

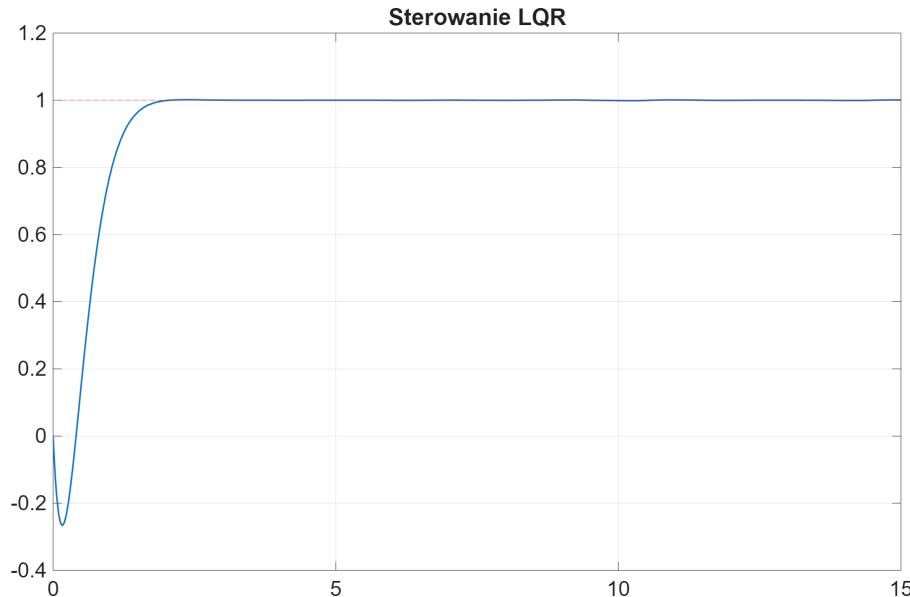
$$u(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t)$$

Do osiągnięcia pracy na wartości zadanej $y_z = 1$ potrzebne było również rozwiązanie następującego układu równań:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ref} \\ u_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie, rozwiążanie tego równania sprowadza sygnał sterujący $u(t)$ do postaci:

$$u(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}) + u_{ref}$$



Rysunek 3: Odpowiedź obiektu z zaimplementowanym sterowaniem LQR

W przeciwieństwie do regulatora proporcjonalnego, regulator LQR był w stanie wyeliminować błąd ustalony i ustabilizować się na wartości zadanej $y_z = 1$.

6 Obserwator Luenbergera

Ostatnim etapem projektu było zaprojektowanie i zaimplementowanie obserwatora stanu. Pozwala on na estymację wektora stanów ($\mathbf{x}(t)$) na podstawie sygnału sterującego ($\mathbf{u}(t)$) i wyjścia obiektu ($\mathbf{y}(t)$).

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

Gdzie:

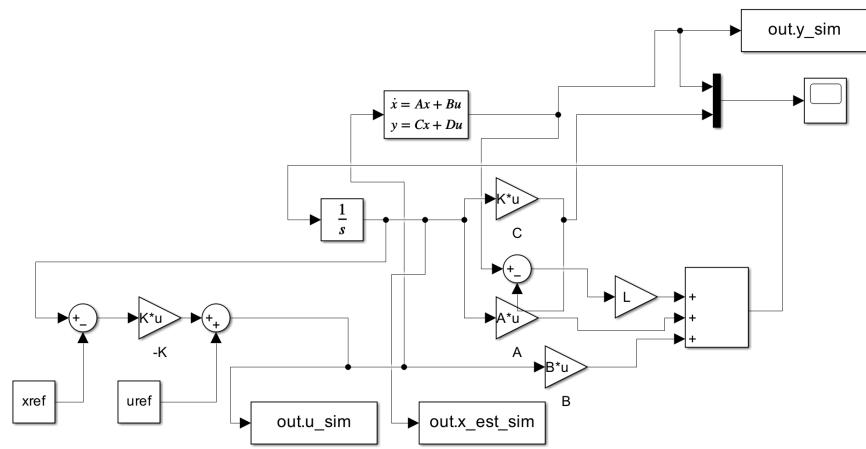
- $\hat{\mathbf{x}}$ - estymowany wektor stanu,
- $\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)$ - przewidywane wyjście,
- \mathbf{L} - macierz wzmacniania obserwatora.

W projekcie zostały przyjęte następujące wartości:

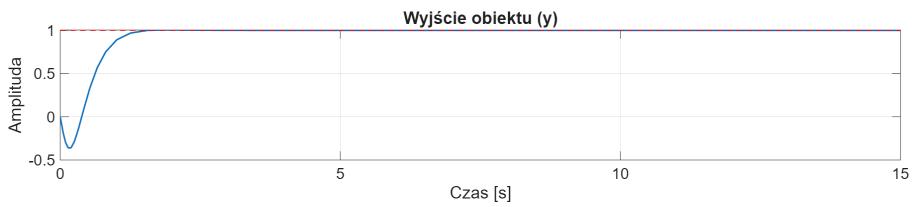
- $sys.poles = eig(\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot K)$ - biegunki układu zamkniętego,
- $obs.poles = 3 \cdot sys.poles$ - biegunki obserwatora,
- $\mathbf{L} = place(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}, obs.poles)$.

Całość symulacji została przeprowadzona w środowisku MATLAB oraz Simulink. Jako warunki początkowe zostało przyjęte:

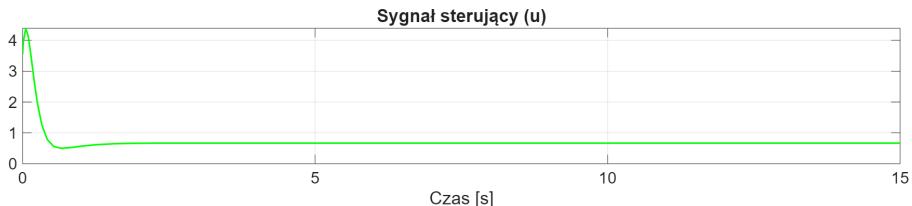
$$\mathbf{x}_0 = [0, 5 \quad 0, 5]$$



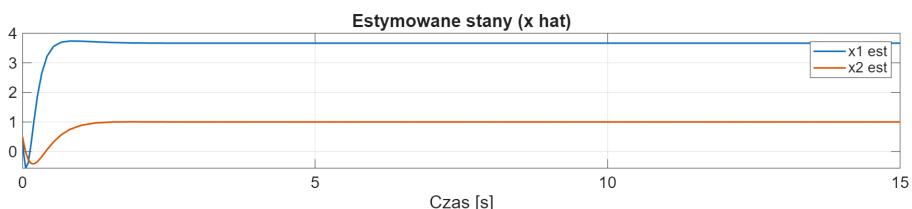
Rysunek 4: Model simulink zaimplementowanego obserwatora Luenbergera



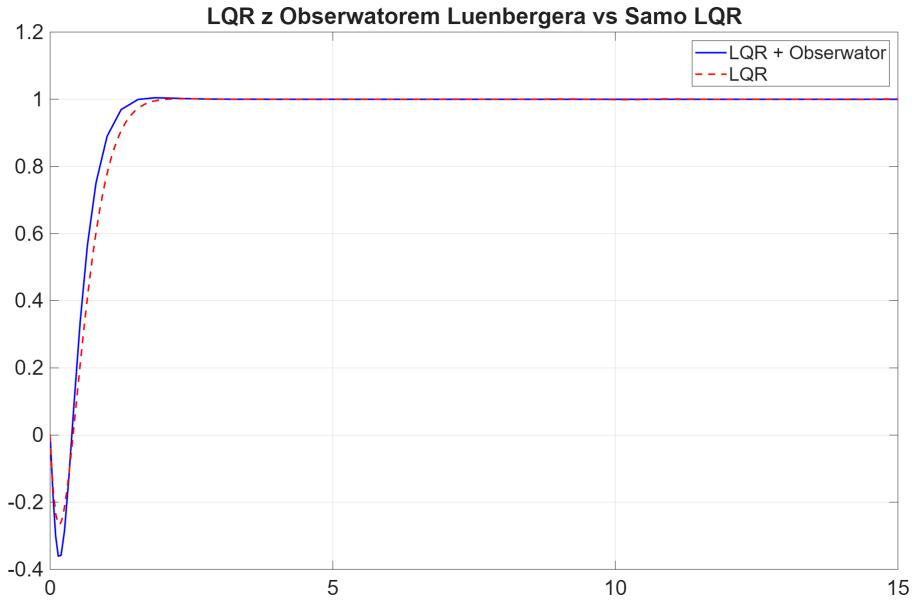
Rysunek 5: Wykres zmiany sygnału wyjścia obiektu



Rysunek 6: Wykres zmiany sygnału sterującego



Rysunek 7: Wykres zmiany estymowanego stanu



Rysunek 8: Porównanie samego regulatora LQR z obserwatorem Luenbergera

Poprzez użycie obserwatora Luenbergera, możemy zauważać lekko szybsze ustabilizowanie się sygnału na wartości zadanej $y_z = 1$.

7 Wnioski

Po przeprowadzeniu wszystkich badań i symulacji można wysnuć następujące wnioski:

- Obiekt jest stabilny, a równania stanu do niego wyznaczone są prawidłowe.
- Skok przy użycia solvera ode45 wykonał się pomyślnie, tworząc oczekiwany wynik w postaci stabilizacji na poziomie $\frac{\alpha}{\beta}$.
- Sterowanie proporcjonalne pomimo swojej prostoty, okazuje się niewystarczające i błędnie w porównaniu do kolejno przedstawionych regulatorów. Nie był on w stanie ustawić swoją wartość na wartości zadanej.
- Regulator LQR, tak jak początkowo zakładano, okazał się o wiele lepszy od regulatora proporcjonalnego. Był on w stanie wyeliminować błąd ustalony i ustabilizować się na wartości zadanej.
- Zaimplementowanie obserwatora Luenbergera dodatkowo przyspieszyło proces stabilizacji w dobrze już działającym regulatorze LQR.