

Informatyczne Zastosowanie Statystyki — Lista 1

Rozkład i dystrybuanta zmiennej losowej

 prowadzący: M. Filiński

1 Wstęp

1.1 Rozkład dyskretny

Jeśli X jest dyskretną zmienną losową o wartościach x_1, x_2, \dots, x_n , wówczas funkcja masy prawdopodobieństwa ma następujące własności:

$$f(x_i) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) = 1 \tag{2}$$

$$f(x_i) = P(X = x_i) \tag{3}$$

Dystrybuanta $F(x)$ rozkładu zmiennej losowej dyskretnej X dana jest wzorem

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \tag{4}$$

gdzie f jest funkcją masy prawdopodobieństwa. Własności dystrybuanty dyskretnej są następujące:

1. $P(X = x_i) = F(x_i^+) - F(x_i)$, gdzie $F(x_i^+)$ oznacza granicę prawostronną w punkcie x_i
2. $0 \leq F(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}$
3. $F(x)$ jest funkcją skokową i niemalejącą

1.2 Rozkład ciągły

Jeśli X jest ciągłą zmienną losową, wówczas gęstości ma następujące własności:

$$f(x) \geq 0 \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \tag{6}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \tag{7}$$

Jeśli X jest ciągłą zmienną losową wówczas dla dowolnej realizacji x tej zmiennej $P(X = x) = 0$

Jeśli $f(x)$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, to funkcję określoną wzorem

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du, x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

nazywamy dystrybuantą rozkładu ciągłego. Własności dystrybuanty ciągłej są następujące:

1. $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$
2. $0 \leq F(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}$
3. $F(x)$ jest ciągła i niemalejąca

2 Lista zadań

1. Niech $f(x) = \frac{2x+1}{25}, x = 0, 1, 2, 3, 4$,
 - (a) Sprawdź czy funkcja $f(x)$ jest funkcją masy prawdopodobieństwa.
 - (b) Oblicz $P(X \leq 1), P(X \leq 0)$ i $P(X < 0)$
 - (c) Oblicz $P(2 \leq X < 4)$ i $P(X > -10)$
2. Optyczny system kontroli ma za zadanie rozróżnienie pomiędzy różnymi typami części. Prawdopodobieństwo prawidłowej klasyfikacji każdej części jest równe 0.97. Załóżmy, że trzy części są sprawdzane i że klasyfikacje są niezależne. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę części, które zostały prawidłowo zaklasyfikowane. Określ funkcję masy prawdopodobieństwa X .
3. Zespół składa się z trzech elementów mechanicznych. Załóżmy, że prawdopodobieństwo, że pierwszy drugi i trzeci element spełnia wymagania są odpowiednio równe 0.92, 0.93 i 0.98. Załóżmy, że elementy są niezależne. Określ funkcję masy prawdopodobieństwa liczby komponentów w zespole, które spełniają wymagania.
4. Prawdopodobieństwo tego, że statystyczny student nie jest przygotowany do ćwiczeń, jest równe $\frac{1}{3}$. Prowadzący ćwiczenia wybiera przypadkowe 4 osoby. Niech X oznacza liczbę osób spośród wybranych, które nie są przygotowane do ćwiczeń. Znaleźć:
 - (a) $P(X \leq 3)$
 - (b) $P(X > 2)$
5. Inżynier obsługuje cztery jednakowe maszyny niezależne od siebie. Prawdopodobieństwo, że automat będzie wymagał interwencji wynosi 0.2. Oblicz prawdopodobieństwo, że pracownik będzie musiał naprawić więcej niż jedną maszynę.
6. Zmienna losowa X , dla której $P(X = x_i) = p_i$ ma rozkład podany w tabeli

x_i	1	2	3	6	7	8
p_i	0.1	0.1	0.2	0.3	0.05	p

Wyznacz parametr p , narysuj dystrybucję wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję.

7. Niech ciągła zmienna losowa X oznacza natężenie prądu w miliamperach mierzone w cienkim drucie miedzianym. Załóżmy, że zakres X to $[0, 20]$ i funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest dana wzorem $f(x) = 0.05$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że natężenie prądu jest:
 - (a) mniejsze niż 10 mA
 - (b) większe niż 15 mA
 - (c) równe 10 mA
 - (d) w przedziale $[9.9, 10.1]$ mA
8. Niech funkcja $f(x) = \frac{x}{8}, 3 \leq x \leq 5$ będzie funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Wyznacz prawdopodobieństwo:

- (a) sprawdź czy funkcja jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa
 - (b) wyznacz dystrybuantę rozkładu
 - (c) $P(X < 4)$ i $P(X > 3.5)$
 - (d) $P(4 < X < 5)$ i $P(X < 3.5 \vee X > 4.5)$
9. Niech funkcja $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$, $-1 \leq x \leq 1$ będzie funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Wyznacz prawdopodobieństwo:
- (a) sprawdź czy funkcja jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa
 - (b) wyznacz dystrybuantę rozkładu
 - (c) $P(X < 0.2)$ i $P(X \geq 0.5)$
 - (d) $P(X > 0)$ i $P(|X| < 0.1)$
10. Wyznacz funkcję gęstości prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X , której dystrybuanta dana jest wzorem
- $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0.2x & 0 < x \leq 4 \\ 0.04x + 0.64 & 4 < x \leq 9 \\ 1 & x > 9 \end{cases}$$
11. Funkcja gęstości zmiennej losowej X dana jest wzorem $f(x) = 0.5x - 1$ dla $2 < x \leq 4$.
- (a) Oblicz dystrybuantę i ją narysuj, a następnie wyznacz prawdopodobieństwo $P(X < 2.5)$
 - (b) Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X