

# Análisis y Caracterización Experimental de Sistemas de Tercer Orden.

**Delgado Merchán, Daniel Alejandro V025004191**

**Marquina Rojas Jhoan Alberto V026749097**

*Escuela de Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela*

## Resumen:

Este trabajo presenta el diseño, simulación e implementación experimental de sistemas de tercer orden, enfocándose en la relación directa entre la ubicación de los polos en el plano complejo y la respuesta temporal resultante. Se diseñaron y caracterizaron dos sistemas distintos: uno con tres polos reales negativos diferentes y otro con tres polos reales negativos iguales. La metodología incluyó la definición de los polos deseados, la derivación del polinomio característico y su correspondiente matriz en forma canónica controlable. Posteriormente, se desarrollaron los diagramas de bloques en Simulink para la simulación y se implementaron físicamente los circuitos utilizando amplificadores operacionales.

**Palabras clave:** Sistema de Tercer Orden, Espacio de Estados, Polos de un Sistema, Forma Canónica Controlable, Amplificadores Operacionales.

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos de tercer orden representan una clase intermedia entre los modelos simples y los altamente complejos. Estos sistemas permiten modelar fenómenos físicos y tecnológicos con mayor precisión que los de primer o segundo orden, sin llegar al nivel de complejidad de modelos de mayor dimensión. Son especialmente relevantes en el diseño de filtros avanzados, en la regulación de procesos industriales, y en el estudio de sistemas electromecánicos o electrónicos con múltiples variables de estado.

Un sistema de tercer orden está caracterizado por una ecuación diferencial de tercer grado, o de forma equivalente, por un conjunto de tres ecuaciones de primer orden en espacio de estados. La ubicación de sus polos en el plano complejo determina el comportamiento dinámico del sistema: estabilidad, velocidad de respuesta, presencia o ausencia de oscilaciones, entre otros aspectos. Por esta razón, la comprensión y manipulación de la ubicación de polos es una herramienta clave para el diseño de sistemas de control robustos y eficientes.

El presente trabajo tiene como objetivo diseñar e implementar experimentalmente dos sistemas dinámicos de tercer orden con ubicaciones de polos específicas: el primero con tres polos reales negativos distintos, y el segundo con tres polos reales negativos iguales. Para ello, se emplea la representación en espacio de estados en forma canónica controlable, a partir de la cual se obtienen los parámetros necesarios para el modelado. Posteriormente, se realiza el montaje físico de los sistemas utilizando circuitos analógicos con amplificadores operacionales, y se contrastan los resultados obtenidos mediante

simulación (en Simulink) con los datos registrados experimentalmente a través del osciloscopio.

Este enfoque permite observar directamente la influencia de la ubicación de los polos sobre la respuesta temporal del sistema, validando tanto los modelos teóricos como su factibilidad en implementación práctica.

## MARCO TEORICO

### Representación de Sistemas en Espacio de Estados

La representación en espacio de estados es un enfoque moderno y general para modelar sistemas dinámicos, especialmente útil cuando se trata de sistemas de orden superior o con múltiples entradas y salidas. En lugar de trabajar directamente con ecuaciones diferenciales de alto orden, se describe el sistema mediante un conjunto de ecuaciones de primer orden que relacionan el vector de estado, la entrada y la salida.

La forma general de un sistema lineal e invariante en el tiempo en espacio de estados es:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Donde:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas,
- $A, B, C, D$  son matrices que caracterizan la dinámica del sistema.

Esta representación permite un análisis más estructurado del comportamiento del sistema, facilitando el diseño de controladores, observadores y la implementación computacional o física del modelo.

### Polos de un Sistema

Los polos de un sistema dinámico lineal están determinados por los valores propios (o eigenvalores) de la matriz  $A$ . Matemáticamente, los polos se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\det(sI - A) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los valores de  $s$  para los cuales el sistema tiene una solución no trivial sin necesidad de entrada externa; es decir, definen la respuesta natural del sistema.

La ubicación de los polos en el plano complejo es crucial para entender el comportamiento del sistema:

- Polos con parte real negativa  $\rightarrow$  el sistema es estable (respuesta decreciente acotada).
- Polos con parte real positiva  $\rightarrow$  el sistema es inestable (no acotado).
- Polos reales generan respuestas exponenciales (sobreamortiguadas o críticas).
- Polos complejos conjugados generan respuestas oscilatorias (subamortiguadas).
- Polos imaginarios puros implican oscilaciones no

amortiguadas.

Por lo tanto, la posición de los polos determina el tipo de comportamiento transitorio del sistema: oscilatorio, amortiguado o una combinación. También define la rapidez de respuesta y el tipo de decaimiento de las señales naturales: exponenciales, senoidales amortiguadas, etc.

### Forma Canónica Controlable

La forma canónica controlable (F.C.C.) es una estructura específica de representación en espacio de estados que facilita el diseño de sistemas con polos predefinidos. En esta forma, la matriz  $A_{cc}$  contiene directamente los coeficientes del polinomio característico del sistema en su última fila, lo que permite implementar fácilmente el método de asignación de polos.

Para un sistema de orden  $n$ , la matriz  $A_{cc}$  tiene la forma:

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Donde el polinomio característico asociado es:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

Esta forma es especialmente útil para la síntesis de controladores mediante ubicación de polos, ya que permite construir sistemas cuyas dinámicas internas responden exactamente a los requerimientos definidos por el diseñador.

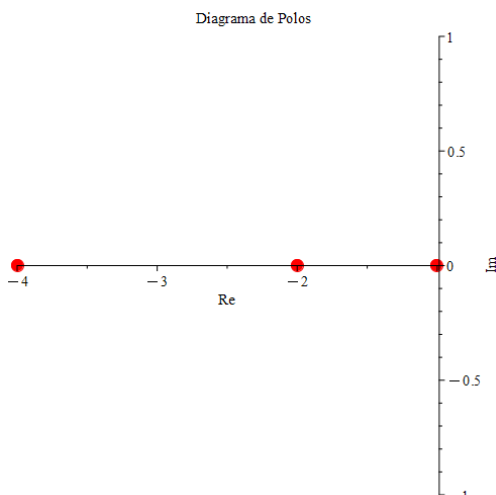
## METODOLOGIA

### Diseño de los sistemas

#### Especificación de los Polos:

- Sistema 1:** Se eligieron tres polos reales negativos diferentes, específicamente:

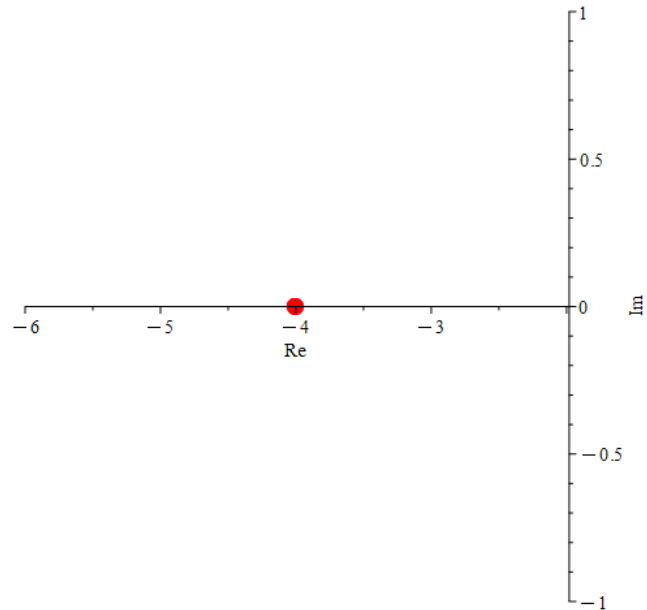
$$p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -4$$



- Sistema 2:** Se utilizaron tres polos reales negativos iguales:

$$p_1 = p_2 = p_3 = -4$$

Diagrama de Polos



### Obtención de la Ecuación Característica:

- Sistema 1:** A partir de los polos deseados, se construyó el polinomio característico multiplicando los factores  $(s - p_i)$  correspondientes:

$$(s + 1)(s + 2)(s + 4) = s^3 + 7s^2 + 14s + 8$$

- Sistema 2:** De igual manera, la ecuación característica se obtuvo como:

$$(s + 4)^3 = s^3 + 12s^2 + 48s + 64$$

### Derivación de la Matriz Canónica Controlable

La matriz  $A_{cc}$  en forma canónica controlable se construye a partir de los coeficientes del polinomio característico de la forma:

$$s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

- Sistema 1:** Con la ecuación característica  $s^3 + 7s^2 + 14s + 8$ , se obtuvo:

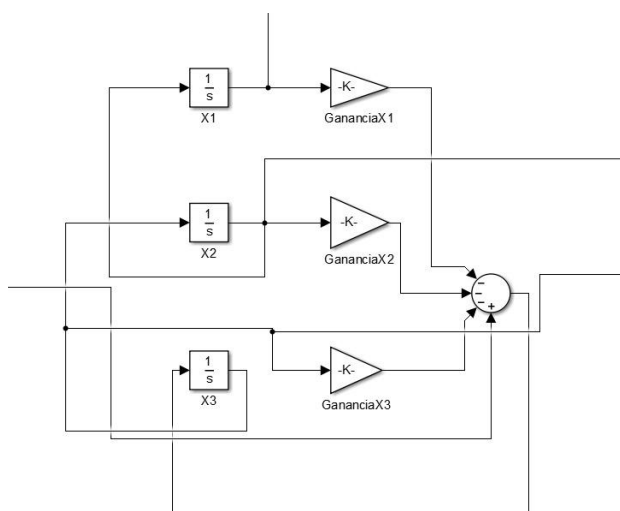
$$A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

- **Sistema 2:** Con la ecuación característica  $(s + 4)^3 = s^3 + 12s^2 + 48s + 64$ , se obtuvo:

$$\mathbf{A}_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -64 & -48 & -12 \end{bmatrix}$$

### Diagrama de Bloques

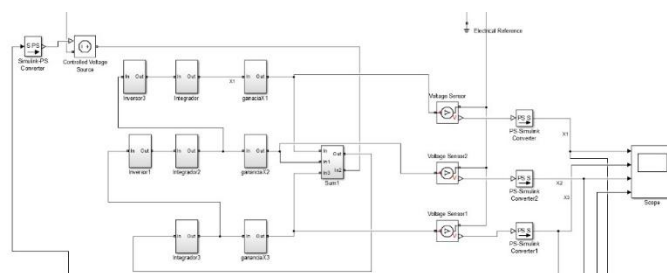
A continuación, se presenta el diagrama de bloques general para el sistema de tercer orden, implementado en Simulink. Consiste en una cadena de tres integradores ( $1/s$ ) conectados en cascada, cuyas salidas representan las variables de estado  $X_1, X_2, X_3$ . Las salidas de los integradores  $X_1, X_2, X_3$  son multiplicadas por ganancias  $-K_1, -K_2$  y  $-K_3$  (donde  $K_1 = a_0$ ,  $K_2 = a_1$  y  $K_3 = a_2$ , los coeficientes del polinomio característico  $s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$ ). Estas señales retroalimentadas son sumadas y restadas de la señal de entrada.



### Diagrama Circuital con Op-Amps

En la siguiente imagen, se muestra el circuito implementado con **amplificadores operacionales (Op-Amps)**. El diseño se basa en la implementación de integradores, inversores y un sumador utilizando Op-Amps. Cada bloque integrador del diagrama de bloques se implementa con un Op-Amp integrador, y la retroalimentación con ganancias negativas se implementa con resistencias adecuadamente seleccionadas.

El circuito se mantiene estructuralmente idéntico para ambos sistemas; sin embargo, los valores de las resistencias (que definen las ganancias de retroalimentación) se modifican para generar los polos deseados.



### Implementación Experimental

#### Equipamiento Utilizado:

Para la implementación física del sistema, se utilizaron los siguientes elementos:

- Amplificadores operacionales modelo **LM324**
- **Protoboard** para el montaje del circuito
- **Generador de señales** para aplicar la entrada al sistema
- **Osciloscopio** para la visualización y medición de las señales internas  $X_1, X_2, X_3$
- **Resistencias** fijas de 1 k y 1 M $\Omega$  y **cajas decádicas** para ajustar las ganancias según los valores del polinomio característico
- **Capacitores** de 1  $\mu$ F, uno por cada etapa integradora
- **Fuentes de alimentación** duales ( $\pm 12$ V) para alimentar los Op-Amps

#### Montaje Físico:

El montaje del sistema se realizó sobre una protoboard, siguiendo fielmente el diagrama circuital basado en integradores y sumadores con Op-Amps. Cada etapa del sistema (correspondiente a una derivada del estado) fue implementada mediante un integrador con retroalimentación negativa, y se conectaron en cascada para replicar el comportamiento dinámico del sistema de tercer orden. Las resistencias de retroalimentación se ajustaron cuidadosamente con las cajas decádicas para garantizar que el circuito replicara los polos deseados.

#### Procedimiento de Medición

Para analizar la respuesta del sistema, se aplicó una **señal cuadrada** como entrada utilizando un generador de funciones. Esta señal permite observar claramente la dinámica del sistema ante un cambio abrupto, similar a una entrada tipo escalón.

La salida del sistema se obtuvo observando las tensiones correspondientes a los tres estados ( $X_1, X_2, X_3$ ) mediante el osciloscopio. Esto permitió verificar visualmente el comportamiento del sistema frente a la entrada aplicada y confirmar que la implementación física corresponde con el modelo teórico simulado previamente.

## RESULTADOS Y DISCUSION

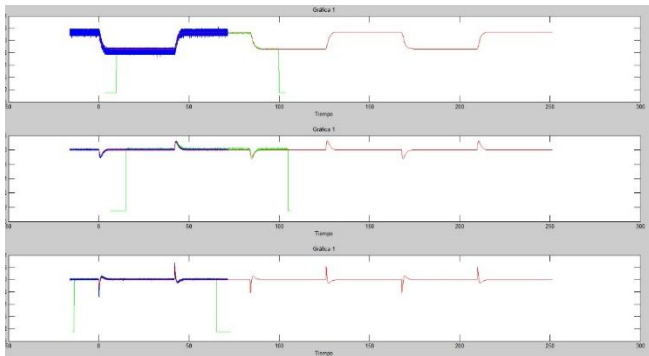
### Sistema 1: Tres Polos Reales Negativos Diferentes

#### Valores de los Polos y Polinomio Característico:

Para este sistema, se seleccionaron tres polos reales negativos distintos, garantizando una respuesta estable y sin oscilaciones. Los polos utilizados fueron:

$$p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -4$$

#### Gráficas y Comparación Simulación vs. Experimental:



La Figura muestra la respuesta temporal del sistema para una entrada escalón. Se observa una superposición entre la simulación (línea roja) y la señal medida experimentalmente (línea azul). Las mediciones corresponden a las variables de estado ( $X_1, X_2$  y  $X_3$ ).

#### Análisis de la Respuesta:

- **Comportamiento Monótono y Estable:** Tal como se anticipa en sistemas con polos reales negativos, no se observa sobrepaso ni oscilaciones. Las respuestas transitan suavemente hacia el estado estacionario.
- **Correlación entre Simulación y Experimento:** Existe una buena correspondencia entre las curvas simuladas y experimentales en cuanto a forma general, tiempo de establecimiento y tendencia.

#### Discusión de Discrepancias:

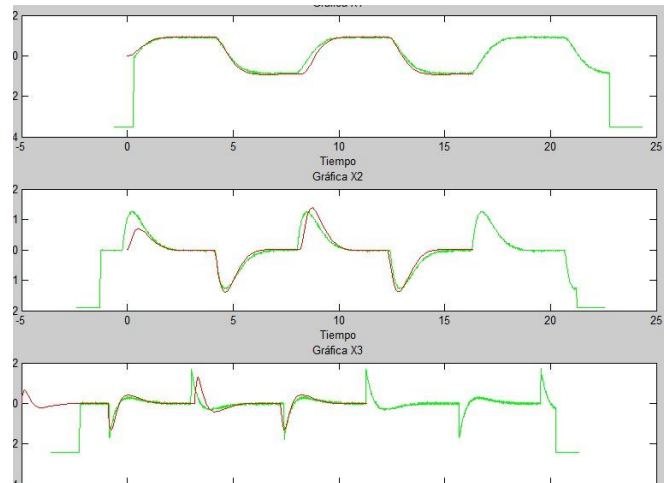
- **Ruido Experimental:** Las señales medidas (especialmente  $X_1$ ) presentan un pequeño nivel de ruido, característico de implementaciones prácticas con Op-Amps reales.

### Sistema 2: Tres Polos Iguales

En este caso, se definió un sistema con tres polos reales e iguales:

$$p_1 = p_2 = p_3 = -4,$$

#### Gráficas y Comparación Simulación vs. Experimental:



La presenta la comparación entre la simulación (línea roja) y la señal medida (línea verde). Se muestran las tres variables de estado: ( $X_1, X_2$  y  $X_3$ )

#### Análisis de la Respuesta:

- **Mayor Pendiente Inicial:** La respuesta del sistema muestra un cambio más abrupto al inicio, lo cual es característico de la acumulación de polos idénticos.
- **Comportamiento Monótono:** Aunque más rápida, la respuesta sigue siendo no oscilatoria.
- **Concordancia de Formas:** Las formas generales de las señales simuladas y experimentales coinciden bastante bien, en particular en  $X_1$  y  $X_2$ .

#### Discusión de Discrepancias:

- **Sensibilidad a Perturbaciones:** Este sistema, al tener polos múltiples en la misma ubicación, es más sensible a pequeñas variaciones o errores de implementación (ej. leves desbalances en componentes).
- **Ruido y Offset:** Se mantiene la presencia de ruido leve y desplazamientos de nivel, comunes en la medición con Op-Amps reales.

#### Consideraciones Generales

#### Impacto de la Ubicación de los Polos:

- En el **Sistema 1**, la ubicación de polos bien separados generó una respuesta gradual, con tiempos de transición largos y comportamiento más suave.
- En el **Sistema 2**, al concentrar los polos en un único valor, se aceleró la respuesta, pero se incrementó la sensibilidad a variaciones y se observaron mayores perturbaciones en las mediciones.

## CONCLUSIONES

Ambos sistemas se comportaron acorde a las predicciones teóricas. Las diferencias entre simulación y práctica son

atribuibles a condiciones reales de implementación: tolerancias, ruidos, limitaciones del Op-Amp y condiciones de medición. No obstante, el modelo se valida en términos generales, y se destaca la influencia decisiva de la ubicación de los polos en la forma de la respuesta temporal.

## REFERENCIAS

- Dulhoste, J.-F. (s.f.). *Tema 8. Controlabilidad y Observabilidad*. Facultad de Ingeniería, Teoría de Control. Universidad de Los Andes. Recuperado de [https://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/djean/index\\_archivos/Documentos/TC8\\_Controlabilidad\\_Observabilidad.pdf](https://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/djean/index_archivos/Documentos/TC8_Controlabilidad_Observabilidad.pdf)
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna* (5a ed.). Pearson Education.