数値解析　第８回

<u>数値積分</u>

　関数$f(x)$の定積分

$$I=\int_{x=a}^{b} f(x)dx$$

を数値的に求めることを考える。右図のように積分する領域を台形の集合で近似する方法を台形則といい，積分区間をN等分する場合の台形則による近似値の計算式

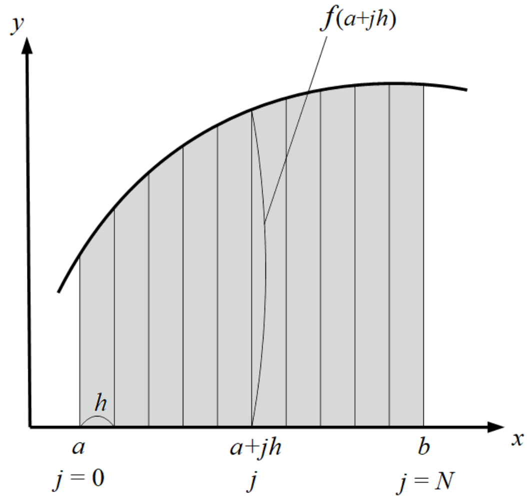

図１　台形の集合による領域の近似

$$T=\sum_{j=0}^{N-1}\frac{h}{2}\{f(a+jh)+f(a+(j+1)h)\}$$
$$=h\left\{\frac{f(a)}{2}+\sum_{j=1}^{N-1}f(a+jh)+\frac{f(b)}{2}\right\}$$

ただし，N=1 のときは，　$T=h\left\{\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}\right\}$

を台形公式という。台形公式で$f(x)$の値を計算する各点$x_j=a+jh$ (j = 0, 1, 2, …, N) を分点という。

【練習問題】　台形公式を用いて次の積分値を求めよ。

$$I=\int_{x=0}^{\pi/2}\sin(x)dx$$

ただし，分割数を 128 とする。

積分区間を N 等分したときの台形公式による計算結果 T_N が分かっているとき，分割数を 2 倍にしたときの台形公式の値 T_{2N} は，

$$T_{2N}=\frac{T_N}{2}+h_{2N}\sum_{i=0}^{N-1} f\left(a+(2i+1)h_{2N}\right)$$

ここに，　$h_{2N}=\dfrac{h_N}{2}$

で求められる。分割幅 h_N は N 等分のときの値である。新たな T を求めるとき，元の T の分点の中間の $f(x)$ のみを計算すればよい。ゆえに，分割数 $2N$ の T を台形公式で直接計算しても，まず分割数 N の T を計算して次に分割数を 2 倍にした T を計算しても，$f(x)$ を計算する回数は同じである。

このことから，初めに N=1 の T を計算し，順次 N=2, 4, 8, …の T を計算することで台形則による積分の近似値を効率よく求めることができる。関数 $f(x)$ を区間[a,b] で積分するとき，台形則による数値積分の手順をまとめると以下のようになる。

① N=1 の T を計算

$$h_1=b-a \quad , \quad T_1=h_1\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

② 分割数 $2N$ の T を計算

$$h_{2N}=\frac{h_N}{2} \quad , \quad T_{2N}=\frac{T_N}{2}+h_{2N}\sum_{i=0}^{N-1} f\left(a+(2i+1)h_{2N}\right)$$

③ 収束判定

(1) T_{N} と T_{2N} の差が求められる精度に比べて小さければ，計算終了。T_{2N} を計算結果とする。

(2) T_{N} と T_{2N} の差が求められる精度に比べて大きければ，$2N$ を新たな N として（$N \leftarrow 2N$, $h_N \leftarrow h_{2N}$, $T_N \leftarrow T_{2N}$ に更新）②に戻り計算を繰り返す。

〔収束判定の補足〕

有効数字 n 桁が求められるとき，$T_{\mathrm{N}}-T_{2N}$ の大きさが T_{2N} の大きさの 10^{-n} 未満であれば，更に分割数を倍増しても n 桁目の値は変動しない。すなわち，

$$\left|\frac{T_{2N}-T_N}{T_{2N}}\right|<10^{-n}$$

の条件を満たせば，有効数字 n 桁の答が求められたといえる。