数値解析　第４回

連立１次方程式の解法

N元連立１次方程式

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,N}x_N&=y_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,N}x_N&=y_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{N,1}x_1+a_{N,2}x_2+\cdots+a_{N,N}x_N&=y_N \end{aligned} \tag{1}$$

は，係数行列A（N行×N列）とベクトル$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$（いずれもN行）

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N}\\ \vdots & & \cdots & \vdots\\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_N \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N \end{pmatrix} \tag{4}$$

を用いて，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \tag{5}$$

と表すことができる。 係数行列Aとベクトル$\boldsymbol{y}$とが与えられたとき，式(5)を満たすベクトル$\boldsymbol{x}$を求めることを連立方程式(1)を解くといい，$\boldsymbol{x}$を連立方程式の解という。Aの逆行列A^{-1}が計算できれば，式(5)の両辺に左からA^{-1}を掛けて，

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

により解が求められる。

　Aが逆行列を持たない，すなわち $|A|=0$ となる場合，連立方程式は解なし（式(1)を満たす$\boldsymbol{x}$が存在しない），もしくは解は不定（式(1)を満たす$\boldsymbol{x}$が無数に存在する）となる。

　Aが逆行列を持つ，すなわち $|A|\neq 0$ となる場合，連立方程式の解$\boldsymbol{x}$は一意に定まる。A^{-1}は逆行列の定義に従って計算できるが，Nが大きくなると急激に計算量が増加する。このため，一般の連立１次方程式の解法には以下に述べるガウスの消去法がよく用いられる。

ガウスの消去法

この方法では，連立方程式の各等式について，（１）両辺に同じ値を掛ける。（２）両辺に同値の式を加える。をしても解は変わらないことを利用して，順次 A，$\boldsymbol{y}$ を置き換えて A の対角要素以外を消去していき，最終的に A が単位行列 I になるまで A，$\boldsymbol{y}$ を更新する。

多元連立１次方程式

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,N}x_N&=y_1 \quad ① \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,N}x_N&=y_2 \quad ② \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots& \\ a_{N,1}x_1+a_{N,2}x_2+\cdots+a_{N,N}x_N&=y_N \quad Ⓝ \end{aligned} \tag{7}$$

に対し，「前進消去」「後退代入」の２段階で計算を進める。

[第１段階；前進消去]

$i=1$；１行目の式を使って，

①÷ $a_{1,1}$ → ①''

② – ①'' × $a_{2,1}$ → ②'，…，Ⓝ – ①'' × $a_{N,1}$ → Ⓝ'

この操作により，

$a_{1,1}=1$，$a_{i,1}=0$ $(i=2,3,\cdots,N)$

となる。

$$\begin{aligned} 1\times x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,N}x_N&=y_1 \quad ①'' \\ 0\times x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,N}x_N&=y_2 \quad ②' \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots& \\ 0\times x_1+a_{N,2}x_2+\cdots+a_{N,N}x_N&=y_N \quad Ⓝ' \end{aligned} \tag{8}$$

$i=2$；２行目の式を使って，

②'÷ $a_{2,2}$ → ②''

③' - ②'' × $a_{3,2}$ → ③'，…，Ⓝ' - ②'' × $a_{N,2}$ → Ⓝ'

以降，$i=3,\cdots,N\text{-}1$ についても同様の操作を行い，最後に

Ⓝ'÷ $a_{N,N}$ → Ⓝ'''

この操作により，

$a_{i,i}=1$ $(i=1,2,\cdots,N)$，$a_{i,j}=0$ (ただし，$i>\mathrm{j}$) $(i,j=1,2,\cdots,N)$

となる。

$$\begin{aligned} 1\times x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,N}x_N&=y_1 \quad ①'' \\ 0\times x_1+1\times x_2+\cdots+a_{2,N}x_N&=y_2 \quad ②'' \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots& \\ 0\times x_1+0\times x_2+\cdots+1\times x_N&=y_N \quad Ⓝ''' \end{aligned} \tag{9}$$

[第２段階：後退代入]

$i = N$; N行目の式を使って,

$\boxed{N\text{-}1}''$ − Ⓝ''' × $a_{N\text{-}1,N}$ → $\boxed{N\text{-}1}'''$, $\boxed{N\text{-}2}''$ − Ⓝ''' × $a_{N\text{-}2,N}$ → $\boxed{N\text{-}2}''$, …, ①'' − Ⓝ''' × $a_{\mathrm{N},1}$ → ①''

以降, $i = N\text{-}1, N\text{-}2, \cdots, 2$ についても同様の操作を行う。

この操作により,

$a_{i,i} = 1$ $(i=1,2,\cdots,N)$, $a_{i,j} = 0$ (ただし, $i \neq \mathrm{j}$) $(i, j=1,2,\cdots,N)$

となる。

$$\begin{array}{ll} 1\times x_1+0\times x_2+\cdots+0\times x_N=y_1 & ①''' \\ 0\times x_1+1\times x_2+\cdots+0\times x_N=y_2 & ②''' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 0\times x_1+0\times x_2+\cdots+1\times x_N=y_N & Ⓝ''' \end{array} \qquad (10)$$

これにより得られた右辺の値が解になる。

$\{x_1, x_2, \cdots, x_N\} = \{y_1, y_2, \cdots, y_N\}$

【練習問題】 次の連立１次方程式を数値的に解くことを考える。

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3&=-2 \\ 2x_1-x_2-x_3&=-2 \\ x_1-x_2-2x_3&=-5 \end{aligned} \qquad (11)$$

ガウスの掃き出し法を用いて小数点以下３桁まで求めよ。