数値解析　第５回

<u>連立１次方程式の解法②</u>

前回は，N 元連立１次方程式

$$\begin{array}{c} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,N}x_N=y_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,N}x_N=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{N,1}x_1+a_{N,2}x_2+\cdots+a_{N,N}x_N=y_N \end{array} \qquad (1)$$

をガウスの消去法で解くことを学んだ。この方法では，連立方程式の各等式について，（１）両辺に同じ値を掛ける。（２）両辺に同値の式を加える。を しても解は変わらないことを利用して，順次係数行列 A と右辺のベクトル $\boldsymbol{y}$ を置き換えて A の対角要素以外を消去していき，最終的に A が単位行列 I になるまで A，$\boldsymbol{y}$ を更新する。

ところで，ガウスの消去法の第１段階，「前進消去」で消去が i 行目まで進んだときに，$a_{i,i}$ の値が０になると以降の計算が不可能になる。このことは元の係数行列 A が正則（すなわち $|A|\neq 0$ ）であっても偶然生じることがある。また，$a_{i,i}$ の値が０にならなくても，$a_{i,i}$ の絶対値が非常に小さい場合，以降の計算で誤差が大きくなることがある。そこで，連立方程式の各等式に関する第３の性質，（３）等式の順番を入れ替えても解は変わらないことを利用して，計算の破綻を回避する方法をピボットとよぶ。

<u>ピボット付ガウスの消去法</u>

多元連立１次方程式

$$\begin{array}{cc} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,N}x_N=y_1 & ① \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,N}x_N=y_2 & ② \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{N,1}x_1+a_{N,2}x_2+\cdots+a_{N,N}x_N=y_N & Ⓝ \end{array} \qquad (2)$$

をガウスの消去法で解く際，「前進消去」の計算にピボットの操作を追加する。

[第１段階；前進消去]
$i=1$；１行目の式に関して，

ピボット操作：
　　$a_{1,1}$，$a_{2,1}$，$\cdots$，$a_{N,1}$ のうち，絶対値が最大のものを探す。 $|a_{k,1}|$ が最大のとき，
　　１行目の式①と k 行目の式ⓚを入れ替える。

ピボット操作の後，
①÷ $a_{1,1}$ → ①"
② − ①" × $a_{2,1}$ → ②'，⋯，Ⓝ − ①" × $a_{N,1}$ → Ⓝ'
この操作により，
$a_{1,1}=1$，$a_{i,1}=0$ $(i=2,3,\cdots,N)$
となる。

$$
\begin{aligned}
1\times x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,N}x_N&=y_1 \quad ①''\\
0\times x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,N}x_N&=y_2 \quad ②'\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0\times x_1+a_{N,2}x_2+\cdots+a_{N,N}x_N&=y_N \quad Ⓝ'
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$i=2$；２行目の式に関して，

ピボット操作：

$a_{2,2}$，$a_{3,2}$，…，$a_{N,2}$ のうち，絶対値が最大のものを探す。 $|a_{k,2}|$ が最大のとき，２行目の式②と k 行目の式ⓚを入れ替える。

ピボット操作の後，

②'÷ $a_{2,2}$ → ②"

③' - ②" × $a_{3,2}$ → ③'，…，Ⓝ' - ②" × $a_{N,2}$ → Ⓝ'

以降，$i=3, \cdots, N\text{-}1$ についても同様の操作を行い，最後に

Ⓝ'÷ $a_{N,N}$ → Ⓝ'''

この操作により，

$a_{i,i}=1$ $(i=1,2,\cdots,N)$，$a_{i,j}=0$ (ただし，$i>j$) $(i,j=1,2,\cdots,N)$

となる。

$$
\begin{aligned}
1\times x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,N}x_N&=y_1 \quad ①''\\
0\times x_1+1\times x_2+\cdots+a_{2,N}x_N&=y_2 \quad ②''\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0\times x_1+0\times x_2+\cdots+1\times x_N&=y_N \quad Ⓝ'''
\end{aligned}
\tag{4}
$$

第２段階の後退代入は前回のガウスの消去法と変わらない。

なお，係数行列 A が正則でない場合，ピボット操作を行っても対角要素が０以外にならない（$a_{i,i}=a_{i+1,i}=a_{i+2,i}=\cdots=0$ となる）行が現れ，以降の計算が不可能になる。

【練習問題】 次の連立１次方程式を数値的に解くことを考える。

$$
\begin{aligned}
x_2+x_3+2x_4&=5\\
x_1+2x_2-x_3-x_4&=-6\\
-x_1-x_2+2x_3-2x_4&=6\\
-2x_1+3x_2-x_3-2x_4&=-1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ピボット付ガウスの消去法を用いて小数点以下３桁まで求めよ。