Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Invarianten zusammenhängender Gruppen und die Cohen-Macaulay Eigenschaft

Diplomarbeit von Martin Kohls

Aufgabensteller: Prof. Dr. Gregor Kemper

Betreuer: Prof. Dr. Gregor Kemper

Abgabetermin: 1. April 2005

Ich erkläre hiermit, dass ich die Diplomarbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Garching, den 1. April 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Ein	leitung	1
2	Gru	ındlagen	3
	2.1	Varietäten und Moduln	3
	2.2	Standardkonstruktionen mit Moduln	5
		2.2.1 Homomorphismen von G - Moduln	5
		2.2.2 Der Dual eines G - Moduls	6
		2.2.3 Faktormoduln	7
		2.2.4 Tensorprodukte	7
		2.2.5 Verheftung an Untermoduln	11
		2.2.6 Symmetrische Potenzen	13
	2.3	Beispiele für Moduln	15
		2.3.1 Tabelle mit Darstellungen verschiedener Moduln	19
	2.4	Invariantentheorie	20
		2.4.1 Algebren, Polynomringe, Invariantenringe	20
		2.4.2 Die Cohen-Macaulay Eigenschaft	23
		2.4.3 Reguläre Sequenzen	25
		2.4.4 Linear reduktive Gruppen	30
3	Ein	Test auf die Cohen-Macaulay Eigenschaft	31
•	3.1	v	
	3.2	Bemerkungen zur Implementierung in MAGMA	33
	J	3.2.1 Berechnung homogener Invarianten	35
		3.2.2 Bestimmung eines phsop	36
		3.2.3 Berechnung des Erzeugendensystems	37
		3.2.4 Berechnung der Hilbertreihe	37
	3.3	Erkennung nicht-regulärer Sequenzen	38
4	Das	s Hauptkonstruktionsverfahren	39
_	4.1	Exakte Sequenzen	39
	4.2	Erste Kohomologie algebraischer Gruppen	40
	4.3	Der Hauptsatz	47
5	Nic	httriviale Kozyklen für $\mathbf{SL}_n(K)$ und $\mathbf{GL}_n(K)$	50
6	Beis	spiele für $\mathbf{SL}_2(K)$ und $\mathbf{GL}_2(K)$ sowie $\mathbf{SO}_2(K)$	55
	6.1	Kozyklen im Grad 2	55
	6.2	Beispiele für $\mathrm{SL}_2(K)$ in Charakteristik $2 \ldots \ldots \ldots$	56
		6.2.1 Beispiele mit dem Kozyklus in $\langle X^2, Y^2 \rangle$	56
		6.2.2 Beispiele mit dem Kozyklus in $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$	

		6.2.3	Kozyklus und Invariante in einem	63			
		6.2.4	Verheftung an Invarianten	65			
	6.3	Beispi	ele für $\mathrm{SL}_2(K)$ in Charakteristik 3	67			
	6.4						
		6.4.1	Beispiele für $\operatorname{GL}_2(K)$ in Charakteristik $2 \ldots \ldots$	74			
		6.4.2	Beispiele für $\operatorname{GL}_2(K)$ in Charakteristik $3 \ldots \ldots$	78			
	6.5	Beispi	ele für $SO_2(K)$ in Charakteristik 2 und endliche Gruppen				
		6.5.1	Beispiele für $SO_2(K)$ und Z_2	83			
		6.5.2					
\mathbf{A}	Zus	ammeı	nfassung der wichtigsten Beispiele	87			
\mathbf{A}			nfassung der wichtigsten Beispiele				
\mathbf{A}	A.1	Notati		87			
\mathbf{A}	A.1 A.2	Notati Beispi	on	87 88			
\mathbf{A}	A.1 A.2 A.3	Notati Beispi Beispi	on	87 88 91			
A	A.1 A.2 A.3 A.4	Notati Beispi Beispi Beispi	on	87 88 91 92			
	A.1 A.2 A.3 A.4 A.5	Notati Beispi Beispi Beispi Beispi	on	87 88 91 92 93			
	A.1 A.2 A.3 A.4 A.5	Notati Beispi Beispi Beispi Beispi ktions	on	87 88 91 92 93			
	A.1 A.2 A.3 A.4 A.5 Fun B.1	Notati Beispi Beispi Beispi ktions Berech	on	87 88 91 92 93			

1 Einleitung

Das wichtigste Ziel der Invariantentheorie ist es, den Invariantenring einer linearen algebraischen Gruppe, die linear auf einem Polynomring operiert, zu kennen. Dies ist nicht immer möglich, aber es gibt verschiedene Ansätze, den Invariantenring zumindest bis zu einem bestimmten Grad zu bestimmen. Mit den Algorithmen von Bayer [1] oder Kemper [8] kann man u.a. eine Vektorraumbasis des Invariantenrings zu gegebenem Grad berechnen. Die Berechnung des Invariantenrings vereinfacht sich jedenfalls erheblich, wenn dieser Cohen-Macaulay ist. Dann ist er nämlich frei über der von einem homogenen Parametersystem erzeugten Unteralgebra. Wählt man nun eine homogene Basis dieses freien Moduls, so erhält man eine Vektorraumbasis des Invariantenrings zu gegebenem Grad d als die Menge aller Produkte aus einem homogenen Basiselement des Moduls mit Monomen in den Elementen des Parametersystems, so dass der entstehende (Total-)grad gleich d ist. In diesem Sinne ist dann also der Invariantenring vollständig bekannt (wobei die Bestimmung eines Parametersystems aber ebenso ein schwieriges Problem ist). Nach dem Satz von Hochster und Roberts [6] ist der Invariantenring einer linear reduktiven Gruppe stets Cohen-Macaulay. Dagegen bemerken Hochster und Eagon [7], dass ihnen kein Beispiel eines nicht Cohen-Macaulay Invariantenrings einer zusammenhängenden Gruppe bekannt ist:

We know of no example in which G is reductive or connected and semireductive [...] and R^G is not Cohen-Macaulay.

Kemper [9] hat jedoch gezeigt, dass zu jeder reduktiven, aber nicht linear reduktiven Gruppe ein solcher *existiert* - also eine gewisse Umkehrung des Satzes von Hochster und Roberts.

In dieser Arbeit werden nun zum ersten Mal überhaupt (konkret!) Invariantenringe zusammenhängender algebraischer Gruppen angegeben, die nicht Cohen-Macaulay sind.

Genau genommen habe ich in meinem Projekt [13] mit Hilfe des Beweises aus [9] für die (zusammenhängenden und reduktiven) Gruppen $SL_n(K)$ und $GL_n(K)$ (und ihre reduktiven Zwischengruppen) mit einem algebraisch abgeschlossenen Körper K in positiver Charakteristik p die ersten konkreten Beispiele mit nicht Cohen-Macaulay Invariantenring konstruiert. Der Vollständigkeit halber habe ich jedoch alle wesentlichen Resultate des Projekts (einschließlich der Beweise) in diese Arbeit mit aufgenommen.

2 1 EINLEITUNG

Speziell für n=2 ergab sich für die Dimension des konstruierten Moduls 8p-5, also 11 für p=2 und 19 für p=3. Der Nachweis, dass die entstehenden Invariantenringe nicht Cohen-Macaulay sind geht nach [9] über die Angabe eines partiellen homogenen Parametersystems aus drei Elementen, das keine reguläre Sequenz bildet, und daher der Cohen-Macaulay Eigenschaft widerspricht. Ein direktes Anwenden der Methode aus [9] (wie in meinem Projekt [13]) liefert ein partielles homogenenes Parametersystems im Grad 1. In dieser Arbeit dagegen wird versucht, das Parametersystem bzw. der von diesem annullierte Kozyklus in einen höheren Grad zu legen, wodurch sich eine Dimensionsersparnis ergibt. Gelungen ist dabei eine Dimensionsreduktion für die Gruppen $\mathrm{SL}_2(K)$ und $\mathrm{GL}_2(K)$ von 11 auf 10 für p=2, von 19 auf 13 für p=3 und von 8p-5 auf 7p-2 für p>3.

Kommen wir zur Gliederung. Die Arbeit beginnt mit den Grundlagen über Darstellungen und einer Einführung in die Invariantentheorie. Beweise werden nur angegeben, sofern sie elementar führbar sind. Danach wird das für diese Arbeit geschriebene Magma Programm IsNotCohenMacaulay und der zugrundeliegende Algorithmus vorgestellt. Magma wurde mir dabei freundlicherweise vom Centre de Calcul MEDICIS zur Verfügung gestellt. Sämtliche angegebenen Beispiele können mit diesem verifiziert werden. Falls man Computer-Beweise zulässt, ist ein true dieses Programms gleichwertig mit einem Beweis auf Papier - dennoch wird ein letzterer hier immer gegeben. Dann wird das Hauptverfahren angegeben, welches aus der Arbeit [9] stammt. Der nächste Abschnitt enthält die Zusammenfassung aller Ergebnisse meines Projekts (mit Beweisen). Es folgt das Kernstück - die Konstruktion konkreter Beispiele in kleiner Dimension. Zu jedem Beispiel findet sich auch eine Datei auf Diskette, um es mit Magma zu testen.

Der erste Anhang fasst die hier konstruierten Beispiele lediglich in Form kurzer Tabellen zusammen. Zwischentexte skizzieren nochmals, wie die einzelnen Beispiele erhalten wurden. Der zweite Anhang beschreibt, wie der Bayer-Algorithmus, welcher zur Berechnung der Invarianten innerhalb des Programms *IsNotCohenMacaulay* verwendet wird, für die uns interessierenden Gruppen beschleunigt werden kann.

Damit bleibt nur noch, mich bei meinem Betreuer, Prof. Gregor Kemper, herzlichst für die hilfsbereite Beantwortung aller meiner Fragen und das interessante Thema zu bedanken.

2 Grundlagen

Wir stellen im Folgenden die benötigten Grundlagen der Invariantentheorie zusammen. Auf die Beweise der zitierten, oft sehr tiefliegenden Sätze können wir hier - bis auf einige Ausnahmen - nicht eingehen. Der Einfachheit halber vereinbaren wir für die **gesamte Arbeit** folgende

Standardvoraussetzung. Im Folgenden bezeichnet K stets einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit Charakteristik p.

2.1 Varietäten und Moduln

Definition 2.1 Eine (affine) Varietät $V \subseteq K^n$ ist die Nullstellenmenge eines (endlichen) Systems von Polynomen $f_1, ..., f_m \in K[X_1, ..., X_n], d.h.$

$$V := \{x = (x_1, ..., x_n) \in K^n : f_i(x) = 0 \quad \forall i = 1..m\}.$$

Da nach dem Hilbertschen Basissatz $K[X_1, ..., X_n]$ noethersch ist, sind auch Nullstellenmengen beliebig vieler Polynome oder von Idealen in $K[X_1, ..., X_n]$ affine Varietäten.

Definition 2.2 Ein Morphismus von affinen Varietäten $V \subseteq K^n, W \subseteq K^m$ ist eine Abbildung $f: V \to W$, die durch Polynome $f_1, ..., f_m \in K[X_1, ..., X_n]$ gegeben ist, d.h. für alle $x = (x_1, ..., x_n) \in V$ ist

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) \in W.$$

Für die folgende Definition bemerken wir, dass für Varietäten $V \subseteq K^n, W \subseteq K^m$, die Nullstellenmengen von $f_1, ..., f_r \in K[X_1, ..., X_n]$ bzw. $g_1, ..., g_s \in K[Y_1, ..., Y_m]$ sind, auch $V \times W \subseteq K^{n+m}$ eine affine Varietät ist, nämlich Nullstellenmenge von $f_1, ..., f_m, g_1, ..., g_s \in K[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m]$.

Definition 2.3 Eine lineare algebraische Gruppe ist eine Varietät $G \subseteq K^r$ zusammen mit Morphismen $\circ: G \times G \to G$ und $^{-1}: G \to G$, so dass (G, \circ) zusammen mit der Inversenbildung $^{-1}$ eine Gruppe ist.

Von nun an bezeichnen wir mit G stets eine lineare algebraische Gruppe.

Die wichtigsten Beispiele für lineare algebraische Gruppen in dieser Arbeit sind

$$\operatorname{SL}_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^4 : ad - bc = 1 \right\}$$

und

$$GL_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_e := (a, b, c, d, e) \in K^5 : (ad - bc)e = 1 \right\}.$$

In $GL_2(K)$ muss man das Inverse e der Determinante der Matrix hinzunehmen, um die Gruppenelemente algebraisch invertieren zu können; es ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{e}^{-1} = \begin{pmatrix} ed & -eb \\ -ec & ea \end{pmatrix}_{ad-bc}.$$

Definition 2.4 Ein G-Modul ist ein endlichdimensionaler K-Vektorraum V zusammen mit einer linearen, durch Polynome gegebene Operation \cdot : $G \times V \to V$; D.h. zu einer Basis $(e_1, ..., e_n)$ von V gibt es Polynome $a_{ij} \in K[X_1, ..., X_r], i, j = 1...n$ (wobei $G \subseteq K^r$) so dass die Darstellungsmatrix der von $\sigma \in G$ durch Linksmultiplikation auf V induzierten linearen Abbildung bzgl. der Basis $(e_1, ..., e_n)$ durch die Matrix $A_{\sigma} := (a_{ij}(\sigma))_{i,j=1...n}$ gegeben ist:

$$\sigma \cdot e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}(\sigma)e_i \quad \forall j = 1..n, \sigma \in G.$$

Der Morphismus $G \to K^{n \times n}$, $\sigma \mapsto A_{\sigma}$ heißt dann eine Darstellung von G. Ein Untermodul ist ein Untervektorraum U von V, der zusätzlich Ginvariant ist, d.h. für alle $u \in U$ und $\sigma \in G$ ist auch $\sigma \cdot u \in U$.

Man beachte, dass die Forderung nach polynomialen Einträgen in A_{σ} sehr stark ist. Beispielsweise ist zwar durch

$$\mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \log|a| \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus gegeben, aber da die Einträge der Matrix sicher keine Polynome in a und a^{-1} sind (als algebraische Gruppe ist $\mathbb{C}^{\times} \cong \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : ab = 1\}$), handelt es sich hier nicht um die Darstellung eines \mathbb{C}^{\times} -Moduls.

In der Invariantentheorie interessiert man sich nun dafür, welche Elemente des Moduls unter der Operation von G fix bleiben. Die Menge dieser Elemente,

$$V^G := \{v \in V : \sigma \cdot v = v \quad \forall \sigma \in G\}$$

bildet offenbar einen Untermodul von V, den Fixmodul.

2.2 Standardkonstruktionen mit Moduln

Es gibt mehrere Verfahren, aus einem bzw. mehreren gegebenen Moduln einen neuen zu konstruieren. Am häufigsten verwendet wird natürlich die direkte Summe, die genau wie für Vektorräume mit zusätzlich komponentenweiser G-Operation definiert ist und wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf. Wir besprechen hier noch Homomorphismen, den Dual, Faktormoduln, Tensorprodukte und symmetrische Potenzen.

2.2.1 Homomorphismen von G- Moduln

Für zwei G-Moduln V und W bildet die Menge aller K-Homomorphismen von V nach W,

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) := \{ f : V \to W \text{ linear} \}$$

einen G-Modul mit der Operation

$$(\sigma \cdot f)(v) := \sigma \cdot f(\sigma^{-1} \cdot v) \quad \forall v \in V$$

für alle $\sigma \in G$ und $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$. Bei Identifizierung von $\sigma \in G$ mit den induzierten linearen Abbildungen auf V bzw. W schreibt sich das schlampig als

$$\sigma \cdot f = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$$
.

Sind A_{σ} bzw. B_{σ} die Darstellungsmatrizen von $\sigma \in G$ auf V bzw. W bezüglich der Basen (v_1, \ldots, v_n) bzw. (w_1, \ldots, w_m) und hat $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ bezüglich dieser Basen die Darstellungsmatrix $X \in K^{m \times n}$, so hat $\sigma \cdot f$ die Darstellungsmatrix

$$\sigma \cdot X := B_{\sigma} X A_{\sigma^{-1}}. \tag{1}$$

Wir bestimmen den Fixmodul von $\operatorname{Hom}_K(V, W)$: Es ist

$$f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)^G \Leftrightarrow f \circ \sigma = \sigma \circ f \forall \sigma \in G \Leftrightarrow f(\sigma v) = \sigma f(v) \quad \forall \sigma \in G, v \in V,$$

d.h. es ist

$$\operatorname{Hom}_K(V,W)^G =: \operatorname{Hom}_G(V,W)$$

gleich der Menge der G-Homomorphismen von V nach W.

Definition 2.5 Zwei G-Moduln V und W heißen isomorph, in Zeichen $V \cong W$, wenn es einen bijektiven G-Homomorphismus $f: V \to W$ gibt, und f heißt dann ein Isomorphismus von G-Moduln. Sind $\sigma \mapsto A_{\sigma}$ bzw. $\sigma \mapsto B_{\sigma}$ Darstellungen bzgl. Basen \mathcal{B}_V bzw. \mathcal{B}_W von V bzw. W, so sind V und W offenbar genau dann isomorph, wenn es eine invertierbare Matrix S mit

$$SA_{\sigma}S^{-1} = B_{\sigma} \quad \forall \sigma \in G$$

gibt, und S ist dann Darstellungsmatrix eines Isomorphismus $f: V \to W$ bezüglich der Basen \mathcal{B}_V bzw. \mathcal{B}_W .

2.2.2 Der Dual eines G- Moduls

Insbesondere für W=K mit trivialer (d.h. konstanter) Operation von G heißt

$$V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$$

der *Dual* von V. Mit der Basis $\{1\}$ von W=K und obigen Bezeichnungen haben wir dann (wegen $B_{\sigma}=(1)$) nach Gleichung (2.10)

$$\sigma \cdot X := X A_{\sigma^{-1}}$$

mit $X \in K^{1 \times n}$ einem Zeilenvektor. Schreiben wir durch Transponieren diesen Koordinatenvektor eines Elements aus V^* als Spalte, so erhalten wir aus $(XA_{\sigma^{-1}})^T = A_{\sigma^{-1}}^T X^T$ das wichtige

Lemma 2.6 Hat $\sigma \in G$ die Darstellungsmatrix A_{σ} bezüglich einer gegebenen Basis von V, so ist $A_{\sigma^{-1}}^T$ die Darstellungsmatrix von σ bezüglich der zugehörigen Dualbasis von V^* .

Korollar 2.7 Ein G-Modul V ist zu seinem Bidual V** isomorph,

$$V \cong V^{**}$$
.

Beweis. Sei $\sigma \mapsto A_{\sigma}$ eine Darstellung von V. Dann hat V^* eine Darstellung $\sigma \mapsto B_{\sigma} := A_{\sigma^{-1}}^T$ und damit V^{**} eine Darstellung $\sigma \mapsto B_{\sigma^{-1}}^T = (A_{(\sigma^{-1})^{-1}}^T)^T = A_{\sigma}$. Daher haben V und V^{**} zwei gleiche Darstellungen und sind daher isomorph.

2.2.3 Faktormoduln

Neben der direkten Summe sind Faktormodul
n die nächst häufige Konstruktion. Sei dazu U ein Untermodul eine
sG-Moduls V. Der Faktorraum (Quotientenvektorraum) V/U wird zu einem G-Modul, dem Faktormodul von V nach U durch

$$\sigma \cdot (v + U) := (\sigma v) + U \quad \forall \sigma \in G, v \in V.$$

Da $\sigma(U) \subseteq U$, ist die Operation wohldefiniert. Bei geeigneter Wahl der Basis von V kann man die Darstellung von V/U leicht an der Darstellung von V ablesen:

Lemma 2.8 Sei V ein G-Modul mit Basis $\mathcal{B}_V = (v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n)$ so, dass $\mathcal{B}_U = (v_1, ..., v_k)$ eine Basis des Untermoduls U von V ist. Ist dann durch

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} A_{\sigma} & B_{\sigma} \\ 0 & C_{\sigma} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}, \quad \forall \sigma \in G$$

die Darstellung auf V bzgl. \mathcal{B}_V gegeben (wobei $A_{\sigma} \in K^{k \times k}, B_{\sigma} \in k^{k \times (n-k)}, C_{\sigma} \in K^{(n-k)\times(n-k)}$), so ist $\sigma \mapsto A_{\sigma}$ die Darstellung von U bzgl. \mathcal{B}_U und $\sigma \mapsto C_{\sigma}$ die Darstellung von V/U bzgl. der Basis $(v_{k+1} + U, ..., v_n + U)$.

2.2.4 Tensorprodukte

In bekannter Weise wird für zwei G-Moduln V und W das Tensorprodukt der Vektorräume $V \otimes_K W$ über K konstruiert - dieser Vektorraum wird dann mittels

$$\sigma \cdot (v \otimes w) := (\sigma v) \otimes (\sigma w) \qquad \forall \sigma \in G, v \in V, w \in W$$

und linearer Fortsetzung zu einem G-Modul gemacht. Für die Details, insbesondere die Wohldefiniertheit, verweisen wir auf Lehrbücher der Darstellungstheorie. Informationen über die Darstellung auf $V\otimes W$ liefert das folgende

Lemma 2.9 Seien V bzw. W zwei G-Moduln mit Basen (v_1, \ldots, v_m) bzw. (w_1, \ldots, w_n) und Darstellungsmatrizen A_{σ} bzw. B_{σ} bezüglich dieser Basen für $\sigma \in G$. Schreibt man den Koordinatenvektor eines Elements

$$u = x_{11} \cdot v_1 \otimes w_1 + \ldots + x_{mn} \cdot v_m \otimes w_n \in V \otimes W$$

mit $x_{ij} \in K$ bezüglich der Basis $(v_1 \otimes w_1, \ldots, v_m \otimes w_n)$ von $V \otimes W$ als Matrix $X = (x_{ij})_{i=1..m,j=1..n} \in K^{m \times n}$, so hat $\sigma \cdot u$ bezüglich dieser Basis die Koordinatenmatrix

$$\sigma \cdot X := A_{\sigma} X B_{\sigma}^{T} \quad \forall \sigma \in G. \tag{2}$$

Beweis. Mit $A_{\sigma} = (a_{ij}) \in K^{m \times m}$ und $B_{\sigma} = (b_{kl}) \in K^{n \times n}$ ist

$$\sigma \cdot u = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{jk} \cdot (\sigma v_j) \otimes (\sigma w_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{jk} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i\right) \otimes \left(\sum_{l=1}^{n} b_{lk} w_l\right)$$

$$= \sum_{i,l} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} x_{jk} b_{lk}\right) v_i \otimes w_l,$$

woran man die behauptete Koordinatenmatrix abliest.

Korollar 2.10 Für zwei G-Moduln V und W gilt die Isomorphie

$$Hom_K(V, W) \cong W \otimes V^*$$
.

Beweis. Sind die Darstellungen von V bzw. W durch A_{σ} bzw. B_{σ} gegeben, so wird nach Gleichung (2.10) $\operatorname{Hom}_{K}(V, W)$ beschrieben durch

$$\sigma \cdot X := B_{\sigma} X A_{\sigma^{-1}} = B_{\sigma} X (A_{\sigma^{-1}}^T)^T.$$

Nach den Lemmata 2.6 und 2.9 wird so jedoch auch die Darstellung auf $W \otimes V^*$ beschrieben.

Wir kommen nun zu der für diese Arbeit wichtigsten Konstruktion. In Satz 5.1 wird sie zur Angabe einer Serie von nicht Cohen-Macaulay Invariantenringen führen. Im folgenden Satz geben wir noch zusätzlich eine Isomorphie an, mit deren Hilfe sich die Struktur der auf Basis dieses Satzes konstruierten Beispiele für p>2 wesentlich vereinfachen lässt, indem der nichttriviale Kozyklus in Grad 2 geschoben wird, und die für p>3 zu der Dimensionsreduktion von 8p-5 auf 7p-2 führen wird.

Satz 2.11 Sei U Untermodul des G-Moduls V. Durch

$$Hom_K(V, U)_0 := \{ f \in Hom_K(V, U) : f|_U = 0 \}$$

wird ein Untermodul von $Hom_K(V, U)$ definiert, und es gilt

$$Hom_K(V,U)_0 \cong U \otimes (V/U)^*$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen von Lemma 2.8. Eine lineare Abbildung $f \in \text{Hom}_K(V, U)_0$ hat dann bzgl. der Basis \mathcal{B}_V eine Darstellungsmatrix der Form

$$(0_{k \times k} \ X)$$
 mit $X \in K^{k \times (n-k)}$.

Zu $\sigma \cdot f = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$ gehört daher die Darstellungsmatrix

$$A_{\sigma} \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\sigma^{-1}} & B_{\sigma^{-1}} \\ 0 & C_{\sigma^{-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & A_{\sigma} X C_{\sigma^{-1}} \end{pmatrix},$$

d.h. die Operation auf $\operatorname{Hom}_K(V,U)_0$ lässt sich mit Matrizen beschreiben durch

$$\sigma \cdot X = A_{\sigma} X (C_{\sigma^{-1}}^T)^T.$$

Nach den Lemmata 2.6, 2.8 und 2.9 ist dies eine Beschreibung der Operation auf $U \otimes (V/U)^*$.

Wir wollen den hier konstruierten Isomorphismus noch basisfrei angeben: Für $v \in V$ sei $\rho: V \to V/U, v \mapsto [v]$ der kanonische Epimorphismus. Durch

$$U \times (V/U)^* \to \operatorname{Hom}_K(V, U)_0, \quad (u, \varphi) \mapsto u \cdot \varphi \circ \rho : v \mapsto \varphi([v])u$$

ist dann eine wohldefinierte bilineare Abbildung gegeben. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es dann genau eine lineare Abbildung $U \otimes (V/U)^* \to \operatorname{Hom}_K(V,U)_0$ mit $u \otimes \varphi \mapsto u \cdot \varphi \circ \rho$, und diese ist der gesuchte Isomorphismus, wie man sich leicht überzeugen kann.

Alternativ kann man sich auch überlegen, dass durch $\operatorname{Hom}_K(V/U,U) \to \operatorname{Hom}_K(V,U)_0$, $f \mapsto f \circ \rho$ ein Isomorphismus gegeben ist. Mit Korollar 2.10 angewendet auf $\operatorname{Hom}_K(V/U,U)$ hat man dann ebenfalls

$$\operatorname{Hom}_K(V,U)_0 \cong \operatorname{Hom}_K(V/U,U) \cong U \otimes (V/U)^*$$
.

Das Tensorprodukt von Matrizen

Wir können zwar nach Gleichung (2) bereits mit Tensorprodukten rechnen, aber wir haben noch keine Darstellungsmatrix des Tensorproduktes. Dazu definieren wir für Matrizen $A = (a_{ij}) \in K^{m \times m}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{n \times n}$ ihr Tensorprodukt oder Kronecker-Produkt

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix} \in K^{mn \times mn}.$$

Für $A,C\in K^{m\times m}$ sowie $B,D\in K^{n\times n}$ und $E\in K^{k\times k}$ gelten dann die folgenden Regeln:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

$$(A \otimes B)^{T} = A^{T} \otimes B^{T}$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad \text{für } A, B \text{ invertierbar}$$

$$(A \otimes B) \otimes E = A \otimes (B \otimes E).$$
(3)

Der Beweis des nächsten Lemmas ergibt sich durch einfaches Nachrechnen.

Lemma 2.12 Seien V bzw. W zwei G-Moduln mit Basen (v_1, \ldots, v_m) bzw. (w_1, \ldots, w_n) und Darstellungsmatrizen A_{σ} bzw. B_{σ} bezüglich dieser Basen für $\sigma \in G$. Dann ist

$$A \otimes B : \sigma \mapsto A_{\sigma} \otimes B_{\sigma}$$

die Darstellung von $V \otimes W$ bezüglich der Basis $(v_1 \otimes w_1, \dots, v_1 \otimes w_n, \dots, v_m \otimes w_1, \dots, v_m \otimes w_n)$.

Damit und mit der Gleichungsgruppe (3) kann man auch sehen, wie zueinander ähnliche Darstellungen von V und W eine ähnliche Darstellung von $V\otimes W$ liefern: Für invertierbare Matrizen S und T gilt

$$(S^{-1}A_{\sigma}S)\otimes (T^{-1}B_{\sigma}T)=(S\otimes T)^{-1}(A_{\sigma}\otimes B_{\sigma})(S\otimes T).$$

Korollar 2.13 Für G-Moduln U, V, W gilt die Isomorphie

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$$

und ein Isomorphismus ist gegeben durch lineare Fortsetzung von

$$(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w) \quad \forall u \in U, v \in V, w \in W.$$

Beweis. Dies folgt aus der Regel $(A_{\sigma} \otimes B_{\sigma}) \otimes C_{\sigma} = A_{\sigma} \otimes (B_{\sigma} \otimes C_{\sigma})$ für Darstellungen A, B, C von U, V, W.

Korollar 2.14 Für zwei G-Moduln V und W gilt

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*.$$

Beweis. Seien durch A_{σ} bzw. B_{σ} Darstellungen auf V bzw. W gegeben. Dann hat $(V \otimes W)^*$ eine Darstellung, die durch $(A \otimes B)_{\sigma^{-1}}^T \stackrel{\text{(3)}}{=} A_{\sigma^{-1}}^T \otimes B_{\sigma^{-1}}^T$ gegeben ist, und eine solche Darstellung hat nach den Lemmata 2.6 und 2.12 auch der Modul $V^* \otimes W^*$.

2.2.5 Verheftung an Untermoduln

Manchmal benötigt man verschiedene Moduln als Untermoduln in einem größeren Modul. In der Regel wird man den größeren dann einfach als direkte Summe der benötigten Untermoduln definieren. Es kann jedoch sein, dass man von den Untermoduln nur einen bestimmten Teil explizit braucht, und den anderen Teil, der vielleicht auch bei den anderen Untermoduln vorkommt, irgendwie gemeinsam nutzen will, um Dimension einzusparen. Dafür ist der folgende Satz hilfreich.

Satz 2.15 Seien V und W G-Moduln, die beide einen zu U isomorphen Untermodul besitzen. Dann gibt es einen G-Modul X, der (isomorphe Bilder von) V und W als Untermoduln enthält, von V und W erzeugt wird, und es gilt $V \cap W \cong U$. Sind durch

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} A_{\sigma} & B_{\sigma} \\ 0 & C_{\sigma} \end{pmatrix} \quad bzw. \quad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} A_{\sigma} & D_{\sigma} \\ 0 & E_{\sigma} \end{pmatrix}$$

Darstellungen auf V bzw. W gegeben, wobei die Basen so gewählt sind, dass sie eine Basis des jeweils zu U isomorphen Untermodul enthalten und so, dass die Darstellungen auf diesen isomorphen Untermoduln gleich sind, so ist X gegeben durch die Darstellung

$$\sigma \mapsto \left(\begin{array}{ccc} A_{\sigma} & B_{\sigma} & D_{\sigma} \\ 0 & C_{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & E_{\sigma} \end{array} \right).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die angegebene Abbildung ein Gruppen-Homomorphismus ist, da der zu dieser Darstellung gehörige Modul dann offenbar alle behaupteten Eigenschaften besitzt. Wir verwenden dazu die Homomorphie-Eigenschaft der Darstellungen von V und W, also

$$\begin{pmatrix} A_{\sigma} & B_{\sigma} \\ 0 & C_{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\tau} & B_{\tau} \\ 0 & C_{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma}A_{\tau} & A_{\sigma}B_{\tau} + B_{\sigma}C_{\tau} \\ 0 & C_{\sigma}C_{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma\tau} & B_{\sigma\tau} \\ 0 & C_{\sigma\tau} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} A_{\sigma} & D_{\sigma} \\ 0 & E_{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\tau} & D_{\tau} \\ 0 & E_{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma}A_{\tau} & A_{\sigma}D_{\tau} + D_{\sigma}E_{\tau} \\ 0 & E_{\sigma}E_{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma\tau} & D_{\sigma\tau} \\ 0 & E_{\sigma\tau} \end{pmatrix}$$

für alle $\sigma, \tau \in G$. Damit berechnen wir

$$\begin{pmatrix} A_{\sigma} & B_{\sigma} & D_{\sigma} \\ 0 & C_{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & E_{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\tau} & B_{\tau} & D_{\tau} \\ 0 & C_{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & E_{\tau} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{\sigma}A_{\tau} & A_{\sigma}B_{\tau} + B_{\sigma}C_{\tau} & A_{\sigma}D_{\tau} + D_{\sigma}E_{\tau} \\ 0 & C_{\sigma}C_{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & E_{\sigma}E_{\tau} \end{pmatrix}$$

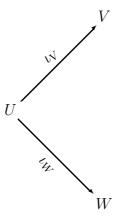
$$\stackrel{\text{S.O.}}{=} \begin{pmatrix} A_{\sigma\tau} & B_{\sigma\tau} & D_{\sigma\tau} \\ 0 & C_{\sigma\tau} & 0 \\ 0 & 0 & E_{\sigma\tau} \end{pmatrix} .$$

Also liefert die Konstruktion tatsächlich eine Darstellung.

Wir wollen noch zwei weitere Konstruktionsmöglichkeiten für die Verheftung skizzieren, die wir jedoch im Folgenden nicht benötigen (da wir mit Verheftungen rechnen wollen, ist für uns vor allem die im Satz angegebene Darstellung von X wichtig, weniger eine abstrakte Konstruktion):

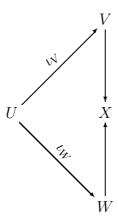
Zum einen kann man X mittels $\tilde{U} := \{(u,0) - (0,u) : u \in U\} \leq V \oplus W$ als Faktorraum $X := (V \oplus W)/\tilde{U}$ definieren.

Alternativ kann man X als pushout oder Fasersumme (siehe etwa [14], S. 258) des Diagramms

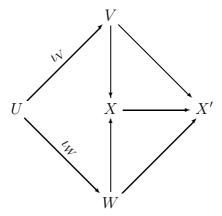


mit den Injektionen ι_V bzw. ι_W von U in V bzw. W definieren. Dann ist der pushout dieses Diagramms ein Modul X zusammen mit Homomorphismen

von V bzw. W in X derart, dass das folgende Diagramm kommutativ wird,



und es für jeden weiteren Modul X' mit einem solchen kommutativen Diagramm genau einen Homomorphismus von X in X' gibt, der das folgende Diagramm kommutativ macht:



Geht man den Beweis des Satzes über die Existenz der Fasersumme durch, sieht man, dass X dann genau als $(V \oplus W)/\tilde{U}$ wie oben definiert wird.

2.2.6 Symmetrische Potenzen

Gegeben sei ein G-Modul V mit Basis $X=(X_1,...,X_n)$. Wir wollen für $k \in \mathbb{N}_0$ einen G-Modul $S^k(V)$ mit einer Basis $\left(X_1^{i_1}X_2^{i_2}\ldots X_n^{i_n}:i_1+\ldots+i_n=k\right)$ konstruieren, so dass die Operation auf $S^k(V)$ durch

$$\sigma \cdot X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n} := (\sigma X_1^{i_1})(\sigma X_2^{i_2}) \dots (\sigma X_n^{i_n})$$

und formales ausmultiplizieren wie bei Polynomen der rechts auftretenden Linearkombinationen gegeben ist. Wie bei Polynomen üblich soll dabei die Reihenfolge der Variablen X_i keine Rolle spielen. Man fasst also die Elemente

aus V als Polynome ersten Grades in K[X] auf und die Elemente aus $S^k(V)$ als homogene Polynome k-ten Grades in K[X]. (Insbesondere soll $S^0(V) := K$ mit der trivialen Operation sein). Dabei werden die Basiselemente $X_i \in V$ mit den Variablen eines Polynomringes gleichgesetzt.

Die obigen Ziele lassen sich durch folgende Definition realisieren:

Definition 2.16 Die k-te symmetrische Potenz $S^k(V)$ mit $k \geq 1$ ist der Faktormodul

$$S^k(V) := \left(\bigotimes_{i=1}^k V\right)/N$$

mit dem von allen symmetrischen Differenzen

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_k - v_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(k)} \quad v_1, \ldots, v_n \in V, \pi \in S_k$$

erzeugten Untermodul N.

Damit ist die Existenz symmetrischer Potenzen gesichert; im wesentlichen werden wir mit ihnen aber einfach formal so rechnen, wie oben beschrieben, wobei wir auf den Beweis, dass obige Definition dies tatsächlich erlaubt, verzichten wollen.

Wir geben noch ein häufig verwendete Isomorphie an: Für G-Moduln U und V gilt

$$S^2(U \oplus V) \cong S^2(U) \oplus S^2(V) \oplus U \otimes V.$$

2.3 Beispiele für Moduln

Wir geben hier die im Folgenden häufig verwendeten Grundmoduln an. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass G eine (algebraische) Untergruppe von $\operatorname{GL}_2(K)$ ist. Wir geben einen Modul meist in Form $V = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ mit einer Darstellungsmatrix A_σ an, wobei die Notation andeuten soll, dass A_σ bezüglich der geordneten Basis (X_1, \ldots, X_n) gegeben ist. Ist $W = \langle Y_1, \ldots, Y_m \rangle$ ein weiterer Modul mit Darstellung B_σ , so geben wir die Konstruktionen des letzten Abschnitts oft durch Kombination der Basiselemente an, also bezeichnen wir beispielsweise mit $\langle X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \rangle$ die direkte Summe $V \oplus W$ mit Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} A_\sigma & 0 \\ 0 & B_\sigma \end{pmatrix}$.

Analog bezeichnen wir z.B. für m=n=2, also $V=\langle X_1,X_2\rangle$ und $W=\langle Y_1,Y_2\rangle$, mit $\langle X_1\otimes Y_1,X_1\otimes Y_2,X_2\otimes Y_1,X_2\otimes Y_2\rangle$ das Tensorprodukt $V\otimes W$ mit Darstellungsmatrix $A_\sigma\otimes B_\sigma$. Manchmal kann es aber von Vorteil sein, die Darstellungsmatrix des Tensorprodukts bezüglich einer anderen Basis zu berechnen. Dann schreiben wir z.B. $V\otimes W=\langle X_1\otimes Y_1,X_2\otimes Y_2,X_1\otimes Y_2-X_2\otimes Y_1,X_2\otimes Y_1\rangle$, wenn wir andeuten wollen, dass die Darstellungsmatrix des Tensorprodukts bezüglich der angedeuteten Basis berechnet wird. In diesem Fall wäre also die Darstellungsmatrix, mit der im Folgenden gerechnet werden soll, gegeben durch

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}^{-1} (A_{\sigma} \otimes B_{\sigma}) \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$
(4)

Genauso gehen wir bei symmetrischen Potenzen vor. So bezeichnen wir z.B. die zweite symmetrische Potenz von $V = \langle X, Y \rangle$ mit $S^2(V) = \langle X^2, Y^2, XY \rangle$. Falls es Verwechslungen bzgl. der entstehenden Notation für die Basiselemente geben kann, muss geklammert werden, also z.B.

$$S^2\left(\langle X^2,Y^2,XY\rangle\right) = \langle (X^2)^2,(Y^2)^2,(XY)^2,(X^2)(Y^2),(X^2)(XY),(Y^2)(XY)\rangle.$$

Wir reservieren nun einige Bezeichnungen von Basis-Elementen, die immer zu den gleichen Darstellungen gehören sollen (bis auf seltene Ausnahmen, wo wir das vermerken). Es sei also G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$. Mit $\langle X,Y\rangle$ bezeichnen wir ab jetzt stets den G-Modul mit der natürlichen Darstellung

$$\sigma \mapsto A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
 für $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{e} \in G$, d.h.
$$\sigma \cdot X = aX + cY$$
$$\sigma \cdot Y = bX + dY.$$

(Wir geben diese und einige weitere im Folgenden verwendeten Bezeichnungen für Moduln in Form einer Tabelle am Ende des Abschnitts an).

Für den Dual $\langle X, Y \rangle^* =: \langle X^*, Y^* \rangle$ erhalten wir aus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{e}^{-1} = \begin{pmatrix} ed & -eb \\ -ec & ea \end{pmatrix}_{ad-bc}$$

und transponieren die Darstellung

$$\sigma \mapsto \left(\begin{array}{cc} ed & -ec \\ -eb & ea \end{array} \right).$$

Speziell für $SL_2(K)$, also e=1 erhalten wir so bzgl. der Basis $(-Y^*,X^*)$ wieder die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und können daher notieren

Bemerkung 2.17 Für die Gruppe $SL_2(K)$ ist der natürliche Modul $\langle X, Y \rangle$ selbstdual,

$$\langle X, Y \rangle \cong \langle -Y^*, X^* \rangle$$

Im Fall einer Charakteristik p>0 enthält die p-te symmetrische Potenz $S^p\left(\langle X,Y\rangle\right)$ den Untermodul $\langle X^p,Y^p\rangle$ mit der Darstellung $\sigma\mapsto\begin{pmatrix} a^p&b^p\\c^p&d^p\end{pmatrix}$. In der Tat gilt mit dem Frobenius-Homomorphismus

$$\sigma \cdot X^p = (aX + cY)^p = a^p X^p + c^p Y^p$$

$$\sigma \cdot Y^p = (bX + dY)^p = b^p X^p + d^p Y^p.$$

Dieser Modul ist ebenfalls selbstdual für $\mathrm{SL}_2(K)$.

Das Tensorprodukt $\langle X, Y \rangle \otimes \langle X, Y \rangle =: \langle X \otimes X, X \otimes Y, Y \otimes X, Y \otimes Y \rangle$ hat eine Darstellung gegeben durch

$$A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ c^2 & cd & cd & d^2 \end{pmatrix}.$$
 (5)

Nach der letzten Bemerkung und Korollar 2.14 ist dieses Tensorprodukt für $SL_2(K)$ ebenfalls selbstdual.

Für später benötigen wir die Darstellung bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = (X \otimes X, Y \otimes Y, X \otimes Y - Y \otimes X, Y \otimes X)$$

gemäß Gleichung (4) explizit:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^{2} & ab & ab & b^{2} \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ c^{2} & cd & cd & d^{2}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
a^{2} & b^{2} & 0 & ab \\
ac & bd & ad - bc & bc \\
ac & bd & -(ad - bc) & ad \\
c^{2} & d^{2} & 0 & cd
\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
a^{2} & b^{2} & 0 & ab \\
c^{2} & d^{2} & 0 & cd \\
ac & bd & ad - bc & bc \\
2ac & 2bd & 0 & ad + bc
\end{pmatrix}.$$
(6)

Für die zweite symmetrische Potenz $S^2\left(\langle X,Y\rangle\right)=\langle X^2,Y^2,XY\rangle$ erhalten wir aus

$$\sigma \cdot X^{2} = (aX + cY)^{2} = a^{2}X^{2} + c^{2}Y^{2} + 2acXY$$

$$\sigma \cdot Y^{2} = (bX + dY)^{2} = b^{2}X^{2} + d^{2}Y^{2} + 2bdXY$$

$$\sigma \cdot XY = (aX + cY)(bX + dY) = abX^{2} + cdY^{2} + (ad + bc)XY$$

die Darstellungsmatrix

$$A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 2ac & 2bd & ad + bc \end{pmatrix} \quad \text{mit } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_e. \tag{7}$$

Man kann die Darstellungsmatrix einer zweiten symmetrischen Potenz auch aus der Ihres Tensorprodukts mit sich selbst erhalten, was an diesem Beispiel demonstriert sei: Wir erhalten die zweite Potenz ja aus dem Tensorprodukt durch Identifizierung von $X^2 \leftrightarrow X \otimes X$ sowie $Y^2 \leftrightarrow Y \otimes Y$ und $XY \leftrightarrow X \otimes Y$, $Y \otimes X$. Daher erhalten wir durch zusammenfassen (Addieren) der zweiten und dritten Spalte und streichen der zweiten oder dritten Zeile aus (5) die Matrix (7) (allerdings bzgl. der Basis (X^2, XY, Y^2)). Genau diese Überlegung hat übrigens den Basiswechsel motiviert, der zur Darstellung (6)

geführt hat. Die Untermatrix von (6) die zu den Zeilen/Spalten 1,2,4 gehört, liefert daher ebenfalls eine Darstellung der zweiten Potenz als Faktormodul $\langle X, Y \rangle \otimes \langle X, Y \rangle / \langle X \otimes Y - Y \otimes X \rangle$, vgl. auch Lemma 2.8.

Speziell im Fall der Charakteristik p=2 und der Gruppe $\mathrm{SL}_2(K)$ wird (7) zu

$$A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung des häufig verwendeten Duals, der die extra Bezeichnung $\langle \mu, \nu, \pi \rangle := \langle X^2, Y^2, XY \rangle^*$ mit $\mu := (X^2)^*, \nu = (Y^2)^*, \pi := (XY)^*$ bekommt, erhalten wir dann durch transponieren obiger Matrix und auswerten an der

Stelle
$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$
 zu

$$A_{\sigma^{-1}}^{T} = \begin{pmatrix} d^2 & c^2 & 0 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ bd & ac & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist π eine Invariante von $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$. Da $\langle X^2, Y^2, XY \rangle$ keine Invariante hat, sieht man, dass die symmetrische Potenz eines selbstdualen Moduls nicht mehr selbstdual sein muss.

19

2.3.1 Tabelle mit Darstellungen verschiedener Moduln

Bezeichnung	Darstellungsmatrix	G	p
$\langle X,Y \rangle$	$\left(egin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} ight)$	$\mathrm{GL}_2(K)$	*
$\langle X^p,Y^p angle$	$\left(\begin{array}{cc} a^p & b^p \\ c^p & d^p \end{array}\right)$	$\mathrm{GL}_2(K)$	p > 0 *
$\langle X \otimes X, X \otimes Y, Y \otimes X, Y \otimes Y \rangle$	$ \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ c^2 & cd & cd & d^2 \end{pmatrix} $	$\mathrm{GL}_2(K)$	*
$\langle X^2, Y^2, XY \rangle$	$ \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 2ac & 2bd & ad + bc \end{pmatrix} $	$\mathrm{GL}_2(K)$	
$\langle X^2, Y^2, XY \rangle$	$ \left(\begin{array}{ccc} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $	$\mathrm{SL}_2(K)$	2
$\langle \mu, \nu, \pi \rangle = \langle X^2, Y^2, XY \rangle^*$	$ \begin{pmatrix} d^2 & c^2 & 0 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ bd & ac & 1 \end{pmatrix} $	$\mathrm{SL}_2(K)$	2

Tabelle 1: Einige Moduln mit ihren Darstellungen. Ein * in der letzten Spalte bedeutet, dass der Modul für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(K)$ selbstdual ist.

2.4 Invariantentheorie

In der Invariantentheorie interessiert man sich weniger für die Invarianten eines einzelnen Moduls, sondern möglichst gleich für die Invarianten aller symmetrischen Potenzen dieses Moduls (bzw. genauer seines Duals). Diese bilden einen Ring, den Invariantenring. Jedoch kann man dies in ein allgemeineres Konzept einfügen.

2.4.1 Algebren, Polynomringe, Invariantenringe

Definition 2.18 (a) Eine K-Algebra ist ein K-Vektorraum R mit einer zusätzlichen Multiplikation \cdot , so dass $R(+,\cdot)$ zu einem kommutativen Ring mit Eins 1 wird, so dass gilt

$$\lambda(v \cdot w) = (\lambda v) \cdot w = v \cdot (\lambda w) \quad \forall \lambda \in K, v, w \in R.$$

(b) R heißt graduiert, wenn es eine direkte Summenzerlegung in K-Vektorräume

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$$

 $mit \ R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j} \quad \forall i, j \ge 0 \ gibt.$

Ein Element $f \in R$ heißt homogen, wenn es ein i mit $f \in R_i$ gibt. Jedes $f \in R$ besitzt eine eindeutige Zerlegung in seine homogenen Komponenten, $f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$ mit $f_i \in R_i$ $\forall i$, wobei nur endlich viele $f_i \neq 0$ sind. Ist $f \neq 0$ und d die größte Zahl mit $f_d \neq 0$, so schreibt man auch $\deg f = d$ und nennt d den Grad von f.

- (c) R heißt zusammenhängend wenn zusätzlich $R_0 = K \cdot 1$ gilt.
- (d) Ist R eine graduierte Algebra mit $\dim_K(R_d) < \infty \quad \forall d$, so heißt die formale Potenzreihe

$$H(t) := \sum_{d=0}^{\infty} \dim_K(R_d) t^d \in \mathbb{Z}[[t]]$$

die Hilbertreihe von R.

Das Standardbeispiel ist der Polynomring $K[X] = K[X_1, ..., X_n]$ in n Variablen. Die Graduierung ist dabei durch Zerlegung in homogene Polynome bezüglich des (total-)Grads gegeben.

Sei nun V ein G-Modul und $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Basis des $Duals V^*$. Wie im Abschnitt über symmetrische Potenzen beschrieben, fasst man nun die Basisvektoren X_i als Variablen eines Polynomrings K[V] := K[X] =

 $K[X_1, ..., X_n]$ auf, und lässt hierauf G wie induziert linear operieren (da dim $K[V] = \infty$ handelt es sich aber um keinen G-Modul). Die Graduierung ist dabei durch die symmetrischen Potenzen des Duals gegeben, also

$$K[V] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S^d(V^*) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} K[V]_d$$

wobei $S^0(V^*) := K$ die triviale Operation trägt. Man nennt K[V] den Polynomring von V. Entsprechend definieren wir den Invariantenring von V als

$$K[V]^G := \{ f \in K[V] : \sigma \cdot f = f \quad \forall \sigma \in G \}$$
$$= \bigoplus_{d=0}^{\infty} S^d(V^*)^G = \bigoplus_{d=0}^{\infty} K[V]_d^G.$$

Ein wichtiges Ziel der Invariantentheorie ist es, den Invariantenring bzw. seine Struktur möglichst gut zu bestimmen.

Bemerkung 2.19 Eine zusammenhängende graduierte Algebra R ist genau dann noethersch, wenn sie endlich erzeugt ist, d.h. wenn es $f_1, \ldots, f_n \in R$ gibt mit $R = K[f_1, \ldots, f_n]$.

Beweis. Siehe Lang [16], Proposition X.5.2, S. 427.

Satz und Definition 2.20 (Noether-Normalisierung) Sei R eine noethersche, zusammenhängende graduierte (und kommutative!) K-Algebra. Dann gibt es homogene Elemente $f_1, \ldots, f_n \in R$, die algebraisch unabhängig über K sind, so dass R endlich erzeugt ist als Modul über $A := K[f_1, \ldots, f_n]$, d.h. es gibt $g_1, \ldots, g_m \in R$ (O.E.) homogen mit

$$R = \sum_{i=1}^{m} Ag_i.$$

Dann heißt $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ein homogenes Parametersystem (hsop), wobei die Zahl $n =: \dim(R)$ eindeutig bestimmt ist und die Krull-Dimension von R heißt.

Eine Menge von Elementen aus R heißt ein partielles homogenes Parametersystem (phsop) wenn sie sich zu einem hsop ergänzen lässt.

Falls R ein Integritätsring ist, gilt n = trdeg(Q(R)/K), wobei Q(R) der Quotientenkörper zu R ist.

Beweis. Siehe Derksen/Kemper [5], Definition 2.4.6, Corollary 2.4.8 auf S. 61 und Proposition 3.3.1 auf S. 80, sowie Eisenbud [4], Chapter 13, Theorem A, S. 290. Siehe auch Kemper [11] S. 4-5.

Damit wir diesen Satz stets voll verwenden können, vereinbaren wir ab jetzt

Standardvoraussetzung. Im Folgenden bezeichnen wir mit R stets eine noethersche, zusammenhängende graduierte und nullteilerfreie (kommutative) K-Algebra.

Die Voraussetzungen dieses Satzes werden z.B. offenbar von K[V] erfüllt. Eine hinreichende Bedingung, dass $K[V]^G$ als Algebra endlich erzeugt ist (Hilberts 14. Problem, vgl. Kemper [11], S. 2), ist dass G reduktiv (siehe später) ist (und in dieser Arbeit interessieren wir uns nur für redukive Gruppen). Nach obiger Bemerkung ist dann jedenfalls $K[V]^G$ noethersch, so dass der letzte Satz anwendbar ist. Man nennt f_1, \ldots, f_n dann auch Primärinvarianten und g_1, \ldots, g_m Sekundärinvarianten. Kennt man beide, so kann man für jeden gegebenen Grad d ein Erzeugendensystem von $K[V]_d^G$ als K-Vektorraum angeben: Offenbar ist

$$K[V]_d^G = \langle f_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot f_n^{\alpha_n} g_i : \sum_{j=1}^n \alpha_j \deg(f_j) + \deg(g_i) = d, \quad \alpha_j \ge 0, i = 1..m \rangle.$$

Dann hat man natürlich erst recht ein Erzeugendensystem von $K[V]^G$ als K-Algebra, es folgt dann nämlich

$$K[V]^G = K[f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m].$$

(Dasselbe gilt natürlich entsprechend auch für eine beliebige Algebra R. Wir formulieren die meisten Aussagen ab jetzt meist für $K[V]^G$, da wir nur an diesem Fall interessiert sind, vermerken aber, wenn sie auch für R beliebig im Sinne unserer Standardvoraussetzung gelten. Sprechweisen wie Polynome und $Prim \ddot{a}r$ - bzw. $Sekund \ddot{a}rinvarianten$ sind dann natürlich entsprechend zu modifizieren). Damit kennt man den Invariantenring also schon recht gut. Obiges Erzeugendensystem ist jedoch im Allgemeinen keine Basis. Damit dies der Fall ist, benötigt man eine zusätzliche Eigenschaft:

23

2.4.2 Die Cohen-Macaulay Eigenschaft

Satz und Definition 2.21 In der Situation von Satz 2.20 heißt R (z.B. $K[V]^G$) Cohen-Macaulay (CM) wenn R sogar frei ist als Modul über A, d.h. man kann die (Sekundärinvarianten) g_i so wählen, dass

$$R = \bigoplus_{i=1}^{m} Ag_i$$

gilt. Gilt diese Eigenschaft für ein A definierendes homogenes Parametersystem, so auch für jedes andere (also ist der Begriff Cohen-Macaulay wohldefiniert).

Beweis. Siehe Derksen/Kemper [5], Proposition 2.5.3 (a),(c) und (d), S. 63. □

Satz 2.22 Ist $K[V]^G$ (bzw. R) Cohen-Macaulay, so ist mit obigen Bezeichnungen

$$\left\{ f_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot f_n^{\alpha_n} g_i : \sum_{j=1}^n \alpha_j \deg(f_j) + \deg(g_i) = d, \quad \alpha_j \ge 0, i = 1..m \right\}$$

eine K-Basis von $K[V]_d^G$ (bzw. R_d).

Beweis. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es Polynome $F_1, \ldots, F_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ nicht alle gleich 0, mit

$$\sum_{i=1}^{m} F_i(f_1,\ldots,f_n)g_i = 0.$$

Da die Summe $\bigoplus_{i=1}^{m} Ag_i$ direkt ist folgt daraus aber

$$F_i(f_1, \dots, f_n) = 0 \quad \forall i = 1..m.$$

Da ein $F_i \neq 0$ wäre das ein Widerspruch zur algebraischen Unabhängigkeit von f_1, \ldots, f_n .

Korollar 2.23 Ist der Invariantenring $K[V]^G$ (bzw. R) Cohen-Macaulay, so berechnet sich seine Hilbertreihe mit obigen Bezeichnungen zu

$$H(t) = \frac{t^{\deg(g_1)} + \ldots + t^{\deg(g_m)}}{(1 - t^{\deg(f_1)}) \cdots (1 - t^{\deg(f_n)})}.$$

Beweis. Durch entwickeln in die geometrische Reihe erhalten wir für die rechte Seite

$$\left(t^{\deg(g_1)} + \ldots + t^{\deg(g_m)}\right) \cdot \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} t^{\alpha_1 \deg(f_1)}\right) \cdots \left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} t^{\alpha_n \deg(f_n)}\right).$$

Der Koeffizient von t^d dieser ausmultiplizierten Reihe ist gleich der Mächtigkeit der in Satz 2.22 angegebenen Basis von $K[V]_d^G$, also gleich der Koeffizient der Hilbertreihe.

Ein vollständiges hsop lässt sich für einen Invariantenring nur in den wenigsten Fällen bestimmen, meist kennt man nur ein phsop. Daher ist folgende Aussage von Bedeutung, um gegebenenfalls (bei Nichterfüllung) die Cohen-Macaulay Eigenschaft zu widerlegen.

Bemerkung 2.24 Ist R Cohen-Macaulay und ist mit den Bezeichnungen von Definition 2.21 und Satz 2.20 f_1, \ldots, f_k ein phsop, so ist R auch frei (aber für k < n nicht mehr endlich erzeugt) über $\tilde{A} := K[f_1, \ldots, f_k]$, und zwar mit Basis

$$\{f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdot \dots \cdot f_n^{\alpha_n} g_i : \alpha_j \ge 0, \ j = (k+1), \dots, n, \ i = 1, \dots, m\}$$

Die Umkehrung hiervon gilt natürlich nicht - z.B. ist für k=0 der Vektorraum R stets frei über $\tilde{A}=K,$ ohne dass R dazu Cohen-Macaulay sein müsste.

Beweis. Dass es sich um ein Erzeugendensystem handelt, ist klar. Die Annahme, dass das angegebene System nicht linear unabhängig über \tilde{A} ist, führt man genau wie im Beweis zum Satz 2.22 zum Widerspruch.

Aufgrund dieser und weiterer Eigenschaften ist man natürlich an Kriterien für die Cohen-Macaulay Eigenschaft interessiert. Da wir ja in dieser Arbeit nicht Cohen-Macaulay Invariantenringe konstruieren wollen, sind wir vor allem auch an notwendigen Bedingungen interessiert, um dann Beispiele anzugeben, die diese notwendigen Bedingungen verletzen.

2.4.3 Reguläre Sequenzen

Definition 2.25 Eine endliche Folge von Elementen $f_1, \ldots, f_r \in R$ der Länger heißt reguläre Sequenz, falls für das von ihnen erzeugte Ideal $(f_1, \ldots, f_r) \neq R$ gilt und für alle i = 1...r die Multiplikation mit f_i injektiv auf $R/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ ist, d.h. für $q \in R$ gilt

$$f_i \cdot g \in (f_1, \dots, f_{i-1}) \Rightarrow g \in (f_1, \dots, f_{i-1}).$$

Um zu entscheiden, ob eine gegebene homogene Sequenz regulär ist, ist folgende Bemerkung hilfreich.

Bemerkung 2.26 Bildet die Folge aus homogenen Elementen $f_1, \ldots, f_r \in R$ mit $(f_1, \ldots, f_r) \neq R$ keine reguläre Sequenz, dann gibt es homogene Elemente $a_1, \ldots, a_i \in R$, $i \leq r$ mit

$$a_1 f_1 + \ldots + a_i f_i = 0$$
 und $a_i \notin (f_1, \ldots, f_{i-1}).$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es $i \leq r, b_i \in R$ mit $b_i \not\in (f_1, \ldots, f_{i-1})$ und $f_i \cdot b_i \in (f_1, \ldots, f_{i-1})$, d.h. es gibt b_1, \ldots, b_{i-1} mit $b_1 f_1 + \ldots + b_i f_i = 0$. Ist $b_i = h_1 + \ldots + h_d$ die Zerlegung von b_i in homogene Elemente $h_j \in R_j$, so gibt es wegen $b_i = h_1 + \ldots + h_d \not\in (f_1, \ldots, f_{i-1})$ einen Index j mir $h_j \not\in (f_1, \ldots, f_{i-1})$. Setze dann $a_i := h_j$ und wähle nun für k < i jeweils a_k als diejenige homogene Komponente von b_k mit deg $a_k + \deg f_k = \deg a_i + \deg f_i$ bzw. $a_k = 0$, falls dies nicht möglich ist. Da $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \ldots$ (direkte Summe) gilt dann wegen $b_1 f_1 + \ldots + b_i f_i = 0$ auch für die homogenen Komponente $a_1 f_1 + \ldots + a_i f_i = 0$.

Satz 2.27 Sei $n = \dim(R)$ die Krull-Dimension von R.

- (a) Für jede reguläre Sequenz aus homogenen Elementen f_1, \ldots, f_r und jedes $\pi \in S_r$ ist auch die Permutation $f_{\pi(1)}, \ldots, f_{\pi(r)}$ eine reguläre Sequenz
- (b) Jede homogene reguläre Sequenz ist ein phsop. Insbesondere gibt es keine homogene reguläre Sequenz einer Länge > n.
- (c) R ist genau dann Cohen-Macaulay, wenn jedes phsop eine reguläre Sequenz ist.
- (d) R ist Cohen-Macaulay genau dann, wenn eine homogene reguläre Sequenz der Länge n existiert.

Beweis. (a) Kunz [15], Korollar E.16 und Satz E.17, S. 257.

- (b) Kemper [12], Lemma 1.5b, S. 337.
- (c) Derksen/Kemper [5], Proposition 2.5.3 (a) und (b), S. 63.
- (d) ist eine häufig verwendete alternative Definition der Cohen-Macaulay Eigenschaft, siehe etwa Benson [2], Definition 4.3.1 und Theorem 4.3.5, S. 50f. \Box

Interessant für uns ist Teil (c) dieses Satzes. Wir werden einen Invariantenring mit einem phsop konstruieren, das keine reguläre Sequenz ist - nach (c) kann dieser dann nicht Cohen-Macaulay sein. Dabei muss man jedoch vorsichtig sein: Wir benötigen ein phsop in $K[V]^G$ (und nicht in K[V]), das dort keine reguläre Sequenz ist. Für sogenannte reduktive Gruppen ist dieses Problem aber handhabbar - die Eigenschaft reduktiv wollen wir jedoch hier nicht genauer definieren (siehe hierfür etwa Derksen/Kemper [5], Abschnitt 2.2, S. 44-50), sondern wir begnügen uns damit, dass die uns interessierenden Gruppen $SL_n(K)$ und $GL_n(K)$ diese Eigenschaft haben (ebenda, S. 44 unten), so dass für sie folgendes Resultat gilt:

Lemma 2.28 Sei G eine reduktive Gruppe und V ein G-Modul. Wenn $a_1, ..., a_k \in K[V]^G$ ein phsop in K[V] bilden, dann auch in $K[V]^G$.

Beweis. Siehe Kemper [9], Lemma 4, S. 89.

Ob nun aber homogene Elemente a_1, \ldots, a_k ein phsop in K[V] bilden, lässt sich relativ leicht bestimmen:

Satz 2.29 Seien $a_1, \ldots, a_k \in R$ homogen vom $Grad \geq 1$. Dann sind äquivalent:

- (a) $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ist ein phop in R.
- (b) Für die Krulldimensionen gilt

$$\dim(a_1, \ldots, a_k) := \dim(R/(a_1, \ldots, a_k)) = \dim(R) - k.$$

Diese Dimension ist genau dann gleich 0, wenn es sich sogar um ein hsop handelt.

Beweis. Siehe Kemper [11], Proposition 2.3, S. 4. \Box

Für die Variablen X_1, \ldots, X_k eines Polynomrings $K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt beispielsweise

$$K[X_1, ..., X_n]/(X_1, ..., X_k) \cong K[X_{k+1}, ..., X_n]$$

und daher

$$\dim(X_1, ..., X_k) = \dim K[X_{k+1}, ..., X_n] = \operatorname{trdeg} K(X_{k+1}, ..., X_n)/K = n-k$$

d.h. X_1, \ldots, X_k ist ein phsop. Für k = n haben wir ein hsop und wir sehen, dass ein Polynomring Cohen-Macaulay ist (frei über sich selbst mit Basis $g_1 = 1$).

Wie an diesem Beispiel angedeutet, liegt der Nutzen der letzten beiden Resultate darin, dass man damit im Polynomring relativ leicht entscheiden kann, ob ein ph
sop vorliegt. (Und da wir die Gruppe G stets als reduktiv voraussetzen wollen, haben wir dann aufgrund des Lemmas auch ein ph
sop im Invariantenring. In dieser Arbeit ist dies die einzig verwendete Methode, in diesem ein solches zu konstruieren.)

Es lässt sich nämlich die Dimension in (b) für einen Polynomring R = K[V] algorithmisch bestimmen, siehe etwa Derksen/Kemper [5], Algorithm 1.2.4, S. 17.

Ein solcher Algorithmus ist auch in vielen Computeralgebrasystemen implementiert, etwa kann man mit dem Befehl Dimension des Computeralgebrasystems MAGMA die Dimension eines Ideals direkt berechnen, so dass man die Suche nach phsops mit relativ wenig Aufwand automatisieren kann. (Wir geben dafür im nächsten Abschnitt ein sehr einfaches "Greedy"-Verfahren an).

Auch die Überprüfung auf Regularität des gefundenen phsops werden wir automatisieren. Dabei stellt sich später eine Frage, deren Antwort wir schon jetzt in Form eines Lemmas geben:

Lemma 2.30 Seien $f_1, \ldots, f_k \in R$ homogen und $p_1, \ldots, p_k \geq 1$.

- 1. Dann sind äquivalent:
 - (a) $\{f_1, \ldots, f_k\}$ ist ein phsop.
 - (b) $\{f_1^{p_1},\ldots,f_k^{p_k}\}$ ist ein phsop.
- 2. Ebenfalls äquivalent sind:
 - (a) f_1, \ldots, f_k ist eine reguläre Sequenz.
 - (b) $f_1^{p_1}, \ldots, f_k^{p_k}$ ist eine reguläre Sequenz.

oder negativ ausgedrückt:

$$f_1, \ldots, f_k$$
 nicht regulär $\Leftrightarrow f_1^{p_1}, \ldots, f_k^{p_k}$ nicht regulär.

Beweis. Zu 1. Es gelte (a). Wir ergänzen $\{f_1,\ldots,f_k\}$ zu einem hsop $\{f_1,\ldots,f_k,f_{k+1},\ldots,f_n\}$, d.h. diese Elemente sind algebraisch unabhängig über K und R ist endlich erzeugt als Modul über $A:=K[f_1,\ldots,f_k,f_{k+1},\ldots,f_n]$, wobei $\mathcal B$ das Erzeugendensystem sei. Dann sind aber auch $f_1^{p_1},\ldots,f_k^{p_k},f_{k+1},\ldots,f_n$ algebraisch unabhängig über K, und R ist endlich erzeugt als Modul über

$$\tilde{A} := K[f_1^{p_1}, \dots, f_k^{p_k}, f_{k+1}, \dots, f_n]$$

mit dem Erzeugendensystem

$$\{f_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot f_k^{e_k} \cdot b : 0 \le e_i < p_i, i = 1..k, b \in \mathcal{B}\}$$

Also ist $f_1^{p_1}, \ldots, f_k^{p_k}, f_{k+1}, \ldots, f_n$ ein hsop und daher $f_1^{p_1}, \ldots, f_k^{p_k}$ ein phsop. Nun gelte (b). Wir ergänzen das phsop $f_1^{p_1}, \ldots, f_k^{p_k}$ zu einem hsop

$$f_1^{p_1}, \ldots, f_k^{p_k}, f_{k+1}, \ldots, f_n,$$

d.h. diese Elemente sind algebraisch unabhängig über K und R ist endlich erzeugt als Modul über

$$A := K[f_1^{p_1}, \dots, f_k^{p_k}, f_{k+1}, \dots, f_n].$$

Dann ist R erst recht endlich erzeugt als Modul über

$$\tilde{A} := K[f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n],$$

und es sind (nichttrivialerweise) auch

$$f_1,\ldots,f_k,f_{k+1},\ldots,f_n$$

algebraisch unabhängig über K. Da nämlich die Körpererweiterung

$$K(f_1,...,f_n)/K(f_1^{p_1},...,f_k^{p_k},f_{k+1},...,f_n)$$

algebraisch ist, sind die Transzendenzgrade beider Körper über K gleich, und der kleinere Körper wird von einer Transzendenzbasis erzeugt, also

$$n = \operatorname{trdeg}_{K} K \left(f_{1}^{p_{1}}, \dots, f_{k}^{p_{k}}, f_{k+1}, \dots, f_{n} \right) = \operatorname{trdeg}_{K} K \left(f_{1}, \dots, f_{n} \right).$$

Da sich aber aus dem Erzeugendensystem f_1, \ldots, f_n einer Körpererweiterung eine (algebraisch unabhängige) Transzendenzbasis (der Länge des Transzendenzgrades n) auswählen lässt, sind f_1, \ldots, f_n ebenfalls algebraisch unabhängig. (Vgl. [3], Abschnitt 7.1, insb. Lemma 4). Also ist $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ein hsop und damit $\{f_1, \ldots, f_k\}$ ein phsop.

Zu 2. Gelte (a), sei also f_1, \ldots, f_k eine reguläre Sequenz. Dann ist auch $f_1, \ldots, f_{k-1}, f_k^{p_k}$ eine reguläre Sequenz: Sei nämlich $g \in R$ mit

$$gf_k^{p_k} = (gf_k^{p_k-1})f_k \in (f_1, \dots, f_{k-1}).$$

Da f_1, \ldots, f_k regulär, folgt also auch $(gf_k^{p_k-1}) \in (f_1, \ldots, f_{k-1})$ und damit sukzessive $(gf_k^{p_k-2}), \ldots, g \in (f_1, \ldots, f_{k-1})$. Da f_1, \ldots, f_{k-1} regulär bleibt, ist also auch $f_1, \ldots, f_{k-1}, f_k^{p_k}$ eine reguläre Sequenz, und nach Satz 2.27 (a) dann auch $f_k^{p_k}, f_1, \ldots, f_{k-1}$. Dieselbe Argumentation hierauf wiederholt angewandt liefert (b).

Gelte nun also (b). Dann ist auch $f_1^{p_1},\ldots,f_{k-1}^{p_{k-1}},f_k$ regulär: Denn für $g\in R$ mit

$$gf_k \in (f_1^{p_1}, \dots, f_{k-1}^{p_{k-1}})$$

gilt natürlich erst recht

$$gf_k^{p_k} \in (f_1^{p_1}, \dots, f_{k-1}^{p_{k-1}})$$

und wegen der Regularität dann

$$g \in (f_1^{p_1}, \dots, f_{k-1}^{p_{k-1}})$$
.

Damit ist also $f_1^{p_1}, \ldots, f_{k-1}^{p_{k-1}}, f_k$ regulär und wegen der Unabhängigkeit dieser Eigenschaft von der Reihenfolge auch $f_k, f_1^{p_1}, \ldots, f_{k-1}^{p_{k-1}}$. Die obige Argumentation hierauf wiederholt angewandt liefert schließlich (a).

2.4.4 Linear reduktive Gruppen

Das stärkste Resultat für die Cohen-Macaulay Eigenschaft stammt von Hochster und Roberts für eine besondere Klasse von Gruppen.

Definition 2.31 Eine lineare algebraische Gruppe G heißt linear reduktiv, wenn für jeden G-Modul V zu jedem Untermodul U von V ein G-invariantes Komplement existiert, d.h. ein Untermodul W von V mit $V = U \oplus W$.

Es gilt nun der berühmte

Satz 2.32 (Hochster und Roberts [6]) Ist G linear reduktiv, so ist $K[V]^G$ Cohen-Macaulay für jeden G-Modul V.

Damit ist klar, dass wir nicht Cohen-Macaulay Invariantenringe nur für nicht linear reduktive Gruppen konstruieren können. Da wir aber bei der Konstruktion in jedem Fall Lemma 2.28 verwenden wollen, muss die untersuchte Gruppe zumindest reduktiv sein. Daher ist folgendes Resultat von Bedeutung.

Bemerkung 2.33 In Charakteristik 0 ist eine lineare algebraische Gruppe genau dann linear reduktiv, wenn sie reduktiv ist.

Beweis. Siehe Derksen/Kemper [5], Theorem 2.2.13, S. 50.

Aufgrund dieser Bemerkung und des Satzes von Hochster und Roberts können wir also mit unseren Methoden in Charakteristik 0 keinen nicht Cohen-Macaulay Invariantenring konstruieren.

3 Ein Test auf die Cohen-Macaulay Eigenschaft

Wir wollen in diesem Abschnitt einen Algorithmus angeben, der $K[V]^G$ auf die Cohen-Macaulay Eigenschaft testet. Der Algorithmus kann dabei auf zwei Weisen enden:

- Es kann keine Aussage gemacht werden, oder
- $K[V]^G$ ist (definitiv) nicht Cohen-Macaulay.

Der Algorithmus basiert auf folgendem Prinzip: Die Hilbertreihe wird bis zu einem gegebenen Grad d_{max} sowohl berechnet als auch geschätzt. Für Cohen-Macaulay Ringe stimmen die geschätzte und tatsächliche Hilbertreihe überein - bei nicht übereinstimmen ist der Ring also nicht Cohen-Macaulay.

Die Schätzung geschieht dabei durch Berechnung eines phsops und danach durch Berechnung eines Erzeugendensystems bis zum Grad d_{max} von $K[V]^G$ als A = K[phsop]-Modul. Im Falle eines Cohen-Macaulay Ringes wird das bestimmte Erzeugendensystem sogar linear unabhängig über A sein, so dass sich die ersten $d_{max} + 1$ Koeffizienten der Hilbertreihe wie folgt berechnen lassen:

Lemma 3.1 Sei $K[V]^G$ Cohen-Macaulay mit einem phsop f_1, \ldots, f_r . Ist $\{g_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ eine homogene Basis von $K[V]^G$ als $A = K[f_1, \ldots, f_r]$ -Modul mit $\deg g_1 \leq \deg g_2 \leq \deg g_3 \leq \ldots$ und ist $d_{max} < \deg g_{m+1}$, so stimmen die Koeffizienten von $1, t, t^2, \ldots, t^{d_{max}}$ der Reihe

$$\frac{t^{\deg(g_1)} + \ldots + t^{\deg(g_m)}}{(1 - t^{\deg(f_1)}) \cdots (1 - t^{\deg(f_r)})}$$

$$\tag{8}$$

(Hilbertreihe des A-Moduls $Ag_1 \oplus \ldots \oplus Ag_m$) mit denen der Hilbertreihe von $K[V]^G$ überein.

Beweis. Wie im Beweis von Korollar 2.23 sieht man, dass der Koeffizient von t^d , $d = 0, \ldots, d_{max}$ der angegebenen Reihe gleich der Mächtigkeit der Menge

$$\left\{ f_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{\alpha_n} g_i : \sum_{j=1}^r \alpha_j \deg(f_j) + \deg(g_i) = d, \quad \alpha_j \ge 0, i = 1..m \right\}$$

ist, und diese ist aufgrund der Voraussetzungen eine K-Basis von $K[V]_d^G$. \square

3.1 Das Gerüst des Algorithmus IsNotCohenMacau-lay

Damit können wir nun das Gerüst des angesprochenen Algorithmus formulieren. Die einzelnen Schritte werden später noch genauer erläutert.

Algorithmus IsNotCohenMacaulay Eingabe:

- ullet Eine reduktive Gruppe G (in Form des definierenden Gleichungssystems von G als affine Varietät bzw. das von diesen Gleichungen erzeugte Ideal)
- Ein G-Modul V (in Form einer Darstellungsmatrix des Duals V^*).
- Der Grad d_{max} bis zu welchem die Hilbertreihe geschätzt werden soll.

Ausgabe:

- true, falls $K[V]^G$ als (definitiv!) nicht Cohen-Macaulay erkannt wurde.
- false, falls keine Aussage möglich.

BEGIN

- 1. Berechne für $d = 1, ..., d_{max}$ ein K-Basis Inv_d von $K[V]_d^G$ mit Hilfe des Bayer-Algorithmus (siehe Anhang).
- 2. Wähle ein (möglichst großes) phsop $\{f_1, \ldots, f_r\}$ von K[V] aus $Inv_1 \cup \ldots \cup Inv_{d_{max}}$ aus.
- 3. Berechne Elemente g_1, \ldots, g_m , die den Ring $K[V]^G$ bis zum Grad d_{max} als $A := K[f_1, \ldots, f_r]$ Modul erzeugen, auf folgende Weise:
 - (a) Setze $g_1 := 1 \in K[V]_0^G = K, m := 1$.
 - (b) Für $d = 1, ..., d_{max}$ durchlaufe f die Basis Inv_d:
 - Falls $f \notin Ag_1 + \ldots + Ag_m$, setze $m := m + 1, g_m := f$.
- 4. Vergleiche die Koeffizienten von $1, t, t^2, \ldots, t^{d_{max}}$ der durch Gleichung (8) gegebenen geschätzten Hilbertreihe mit denen der tatsächlichen; diese sind gegeben durch dim $K[V]_d^G = |\text{Inv}_d|$.
 - Sind alle Koeffizienten gleich, so ist keine Aussage möglich. Gib false aus.

• Stimmt ein Koeffizient der geschätzten nicht mit dem der echten Hilbertreihe überein, so ist $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay. Gib true aus.

END

Die Korrektheit dieses Algorithmus folgt nun aus der

Bemerkung 3.2 Ist $K[V]^G$ Cohen-Macaulay, so ist nach dem homogenen Nakayama Lemma (siehe Derksen/Kemper [5], Lemma 3.5.1, S. 89) jedes minimale homogene Erzeugendensystem von $K[V]^G$ als A-Modul eine Basis insbesondere ist das in Schritt 3. des Algorithmus Grad für Grad konstruierte (partielle) Erzeugendensystem A-linear unabhängig. Daher sind die Voraussetzungen von Lemma 3.1 erfüllt, und die geschätzte und tatsächliche Hilbertreihe stimmen bis zum Grad d_{max} überein.

3.2 Bemerkungen zur Implementierung in MAGMA

Der angegebene Algorithmus lässt sich sehr einfach in MAGMA implementieren. Allerdings kann MAGMA nur mit endlichen (also nicht algebraisch abgeschlossenen) Körpern rechnen. Aufgrund der Funktionsweise des Algorithmus macht dies jedoch jedoch letztlich für das Endergebnis keinen Unterschied, solange die Darstellungsmatrix nur Koeffizienten aus einem endlichen Körper - in der Regel dem Primkörper - enthält. Den Körper mit 2 Elementen definiert man z.B. in MAGMA durch K:=GF(2);

Als nächstes wird die algebraische Gruppe G als mittels des von den die Varietät definierenden Polynomen erzeugten Ideals angegeben. Für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(K)$ definiert man also zunächst einen Polynomring in vier Variablen, z.B.

```
Pa<a,b,c,d>:=PolynomialRing(K,4);
und in diesem dass die Gruppe definierende Ideal
IG:=ideal<Pa|[a*d-b*c-1]>;
```

Der Modul V^* wird nun durch Angabe seiner Darstellungsmatrix in Form einer Liste ihrer Spalten definiert. Die Elemente dieser Liste sind dann Polynome aus Pa. So definiert man also den Modul $V^* = \langle X^2, Y^2, XY \rangle$ durch (siehe Tabelle 1)

```
A := [[a^2, c^2, 0], [b^2, d^2, 0], [a*b, c*d, 1]];
```

Da IsNotCohenMacaulay noch einige weitere Ausgaben macht, möchte man vielleicht die Variablen des Polynomrings K[V] benennen. Dazu definiert

man einen weiteren Polynomring, der mit K[V] identifiziert werden soll. In diesem Beispiel empfiehlt sich z.B.

P<x2,y2,xy>:=PolynomialRing(K,3);.

Der Aufruf von von *IsNotCohenMacaulay* geschieht dann durch IsNotCohenMacaulay(IG,A,dmax: P:=P);,

wobei dmax angibt, bis zu welchem Grad Invarianten berechnet werden. (IsNotCohenMacaulay befindet sich in der Datei CMTest.txt, die vorher in MAGMA geladen werden muss).

Es sei noch auf eine Besonderheit für Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(K)$ hingewiesen, die den Torus

$$T := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{array} \right) : a \in K \setminus \{0\} \right\}$$

umfassen. In den meisten Fällen reduziert sich für $\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in T$ die Darstellungsmatrix A_{σ} auf die Form

$$A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a^{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^{w_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^{w_n} \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_1, \dots, w_n \in \mathbb{Z} \text{ (fest)}.$$

Man kann sogar genauer zeigen, dass sich die Darstellung auf dem Torus durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation immer auf diese Form bringen lässt, doch in keinem der von mir untersuchten Beispiele wurde dies nötig. Bei zusätzlicher Übergabe des $Gewichtsvektors\ w := (w_1, w_2, \dots, w_n)$ an Is-NotCohenMacaulay wird ein modifizierter Algorithmus zur Berechnung der Invarianten aufgerufen (wir beschreiben sein Prinzip im Anhang), der erheblich (bis zu 500 mal) schneller ist. Für $V^* = \langle X^2, Y^2, XY \rangle$ mit w = (2, -2, 0) erfolgt der Aufruf dann durch

IsNotCohenMacaulay(IG,A,dmax: P:=P, w:=[2,-2,0]);.

Der vollständige Kopf von *IsNotCohenMacaulay* lautet IsNotCohenMacaulay:=function(IG,A,dmax: P:=1, mdp:=1, maxdp:=dmax, w:=[]);

Der optionale Parameter maxdp gibt dabei an, bis zu welchem Grad überhaupt phsop-Elemente bestimmt werden sollen. Normalerweise möchte man hier natürlich in allen berechneten Invarianten suchen (also Standardwert dmax), da diese Suche aber bei großen Beispielen recht lange dauern kann und weil die interessierenden Grade für das phsop meist ≤ 3 sind, kann man hier den Grad runtersetzen.

Der optionale Parameter mdp kann in der Regel auf 1 gesetzt werden. Das Programm macht bei der phsop-Bestimmung mdp Durchläufe $i=1,\ldots,mdp$, wobei das phsop dann erst aus Invarianten vom Grad i aufwärts ausgewählt wird. Damit sollte gegebenfalls eine höhere Vielfalt an phsops erreicht werden. Meine Experimente haben jedoch zu keinem Beispiel geführt, bei dem diese Variation notwendig wurde. Ein Grund hierfür liegt auch in Lemma 2.30, worauf wir noch zurückkommen werden.

Wir gehen nun kurz auf die Implementierung der einzelnen Schritte des Algorithmus ein.

3.2.1 Berechnung homogener Invarianten

Die genauere Beschreibung dieses ersten Schritts verschieben wir auf den Anhang, wo wir das Prinzip des Algorithmus von Bayer [1] mit einer Modifikation beschreiben. Vorerst sehen wir diesen als "Black-Box" an und demonstrieren die Funktionsweise nur an einem Beispiel. Wir wollen eine Basis der Invarianten zweiten Grades von K[V] mit $V^* = \langle X_1, Y_1 \rangle \oplus \langle X_2, Y_2 \rangle$ für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(K)$ in Charakteristik 2 berechnen:

```
K:=GF(2);
Pa<a,b,c,d>:=PolynomialRing(K,4);
IG:=ideal < Pa | [a*d-b*c-1] >;
// < X1, Y1> + < X2, Y2>
A := [[a,c,0,0],[b,d,0,0],[0,0,a,c],[0,0,b,d]];
P<X1,Y1,X2,Y2>:=PolynomialRing(K,4);
HomogeneousInvariantsBayerTORUS(IG,A,2: P:=P, w:=[1,-1,1,-1]);
liefert als Ausgabe
X1*Y2 + Y1*X2
٦.
Der vollständige Kopf der Funktion lautet
HomogeneousInvariantsBayerTORUS:=function(IG,A,d: P:=1, w:=[])
wobei die Parameter wie bei IsNotCohenMacaulay sind: IG gibt die Gruppe
an, A den Modul V^*, d den Grad, in welchem eine K-Basis von Invarian-
ten berechnet werden soll und mit P (optional) benennt man die Variablen
von K[V]. Die Angabe des Gewichtsvektors w ist ebenfalls optional, führt
```

Die gefundene Invariante $X_1Y_2 + X_2Y_1$ wird in dieser Arbeit noch ein

aber zum Aufruf des schnelleren, modifizierten Algorithmus (was bei diesem

kleinen Beispiel natürlich nicht spürbar ist).

großes Abenteuer erleben.

3.2.2 Bestimmung eines phsop

Wir bestimmen ein phsop in K[V] nach folgendem "Greedy"- Vefahren:

Algorithmus *ChoosePhsop* **Eingabe:**

- Eine endliche Folge $M = (f_1, ..., f_m)$ von (paarweise verschiedenen) Elementen aus einem Polynomring K[V] in n Variablen, aus der ein phsop in K[V] ausgewählt werden soll. Elemente mit kleinerem Index sollen dabei bevorzugt werden.
- In unserem Fall besteht M aus einer nach Grad geordneten Auflistung der im Schritt 1. des Algorithmus berechneten Invarianten Inv_1, \ldots, Inv_d .

Ausgabe

• Ein phoop in K[V]

BEGIN

- 1. Setzte $phsop := \{\}$
- 2. Für i = 1, ..., m
 - Falls $phsop \cup \{f_i\}$ noch ein phsop ist, also falls

$$\dim (\langle phsop \cup \{f_i\}\rangle) = n - |phsop| - 1$$

(vgl. Lemma 2.29), dann setze

$$phsop := phsop \cup \{f_i\}.$$

END

Es ist klar, dass dieses Verfahren ein phsop liefert. Die Dimensionen in Schritt zwei des Algorithmus berechnet man in MAGMA für eine Sequenz $phsop:=[p1,p2,\ldots,pr]$ von Elementen in einem Polynomring P(=K[V]) (Bezeichnungen wie bisher) mit dem Befehl Dimension(ideal<P|phsop>). Da wir die Gruppe G als reduktiv vorausgesetzt haben und in unserem Fall die f_i Invarianten sind, erhalten wir nach Lemma 2.28 mit diesem Algorithmus sogar ein phsop in $K[V]^G$.

3.2.3 Berechnung des Erzeugendensystems

Dieser Schritt wurde schon im Algorithmus *IsNotCohenMacaulay* genau beschrieben. Allerdings bleibt noch die Frage, wie man für gegebene homogene Elemente (MAGMA Notation) g:=[g1,...gm], ein gegebenes phsopphsop:=[f1,...,fr] und ein homogenes Element f aus P, prüfen kann, ob

$$f \in Ag_1 + \ldots + Ag_m \quad \text{mit } A := K[f_1, \ldots, f_r]$$

gilt. Dies geht mit dem Befehl HomogeneousModuleTest(phsop,g,[f]), der true liefert, falls ja, sonst false. Intern wird dabei f als K-Linearkombination von Elementen der Form $f_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{p_r} \cdot g_i$ angesetzt, die denselben Grad wie f haben. Dies sind nur endlich viele, und durch Koeffizientenvergleich erhält man ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, welches genau dann eine Lösung hat, wenn f im von den g_i erzeugten Untermodul liegt.

3.2.4 Berechnung der Hilbertreihe

Es bleibt noch die Frage, wie man die Koeffizienten der geschätzten Hilbertreihe (8) berechnen kann. Dies geht deshalb, weil man formale Potenzreihen nach einem gegebenen Grad d abschneiden kann. Mit den verbleibenden Koeffizienten kann man dann wie früher weiter rechnen. Für $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in K[[X]]$ schreibt man dann

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_d X^d + O(X^{d+1}).$$

Kennt man nun $g \in K[[X]]$ ebenfalls nur bis zum Grad d, so kann man trotzdem f + g und $f \cdot g$ berechnen, aber auch nur bis zum Grad d. Abstrakt gesprochen rechnet man also in dem Restklassenring $K[[X]]/(X^{d+1})$, und obige Schreibweise wird korrekt, wenn man "=" durch " \in " ersetzt und $O(X^{d+1}) := (X^{d+1})$ liest, also das von X^{d+1} in K[[X]] erzeugte Ideal.

In Magma kann man dies für $d=d_{max}$ mittels

Qt<t>:=PowerSeriesAlgebra(Rationals(),dmax+1);

realisieren. Man berechnet nun die geschätzte Reihe (8) als abgeschnittene Potenzreihe H in Qt. Den i-ten Koeffizient von H erhält man dann mit dem Befehl Coefficient (H,i).

3.3 Erkennung nicht-regulärer Sequenzen

Mit IsNotCohenMacaulay konnten alle von mir konstruierten nicht Cohen-Macaulay Invariantenringe als solche erkannt werden. Denn wenn das gefundene phsop keine reguläre Sequenz ist, so wird dies erkannt falls d_{max} genügend groß ist (Bezeichnungen wie in Abschnitt 3.1).

Satz 3.3 Falls das in Schritt 2 von IsNotCohenMacaulay bestimmte phsop keine reguläre Sequenz in $K[V]^G$ ist, d.h. wenn es (O.E. homogene, vgl. Bemerkung 2.26) Elemente $a_1, \ldots, a_i \in K[V]^G$, $i \leq r$ gibt mit

$$a_1 f_1 + \ldots + a_i f_i = 0, \quad a_i \notin (f_1, \ldots, f_{i-1})_{K[V]^G}$$

wobei $O.E. \operatorname{deg} a_1 f_1 = \ldots = \operatorname{deg} a_i f_i$, dann stimmen die geschätzte Hilbertreihe (8) mit der tatsächlichen nicht überein, und zwar spätestens nicht mehr ab dem Grad $\operatorname{deg} a_i f_i$. Setzt man also d_{max} größer gleich diesem Grad, so erkennt IsNotCohenMacaulay $K[V]^G$ als nicht Cohen-Macaulay.

Beweis. Nach der Arbeitsweise von IsNotCohenMacaulay ist das System

$$f_1^{j_1} \cdots f_r^{j_r} g_j : 1 \le j \le m, \quad \deg(f_1^{j_1} \cdots f_r^{j_r} g_j) \le d_{max}$$
 (9)

jedenfalls ein K-Erzeugendensystem von $K[V]_0^G \oplus \ldots \oplus K[V]_{d_{max}}^G$, und die geschätzte Hilbertreihe stimmt mit der echten bis zum Grad d_{max} genau dann überein, wenn dieses System sogar eine K-Basis ist. Wir zeigen, dass es unter den gemachten Voraussetzungen aber K-linear abhängig ist: Da $a_j \in K[V]^G$ (j=1..i) und deg $a_j \leq \deg a_j f_j \leq d_{max}$, liegt a_j in dem von dem System (9) erzeugten K-Vektorraum, d.h. es gibt $h_{jk} \in K[f_1, \ldots, f_r]$, k=1..m mit

$$a_j = h_{j1}g_1 + \ldots + h_{jm}g_m.$$
 (10)

Da nach Voraussetzung $a_i \notin (f_1, \ldots, f_{i-1})_{K[V]^G}$, gibt es wenigstens einen Index k, so dass das Polynom h_{ik} (in den algebraisch unabhängigen Elementen f_1, \ldots, f_r) wenigstens einen Term der Form $f_1^0 \cdots f_{i-1}^0 f_i^{s_i} \cdots f_r^{s_r}$ enthält. Damit enthält auch $h_{ik}f_i$ einen solchen Term, jedoch keines der Polynome $h_{jk}f_j$ für $j \leq i-1$ (denn f_j kommt mit mindestens Grad 1 vor), und damit auch a_jf_j nicht für $j \leq i-1$. In der Linearkombination $a_1f_1+\ldots+a_if_i=0$ kommt also (nach Zerlegung der a_j gemäß (10)) der Vektor $f_1^0 \cdots f_{i-1}^0 f_i^{s_{i+1}} \cdots f_r^{s_r} g_k$ des Erzeugendensystems (9) nur im Term zu a_if_i mit Koeffizient $\neq 0$ vor. Damit ist also das System (9) linear abhängig. Die geschätzte Hilbertreihe stimmt dann mit der tatsächlichen nicht überein und IsNotCohenMacaulay gibt true aus.

4 Das Hauptkonstruktionsverfahren

In diesem Abschnitt beschreiben wir das Verfahren aus [9] zur Konstruktion eines pshop (in einem Invariantenring), das keine reguläre Sequenz bildet, und damit das Verfahren zur Konstruktion eines nicht Cohen-Macaulay Invariantenrings. Die benötigten Resultate aus [9] habe ich bereits in meinem Projekt [13] zusammengefasst, für eine selbsttragende Darstellung soll dies hier aber nochmal wiederholt werden, teilweise mit etwas anderen, unserer einfacheren Situation besser angepassten Beweisen.

4.1 Exakte Sequenzen

In dieser Arbeit betrachten wir nur exakte Sequenzen von G-Moduln; Dies ist eine Folge von G-Homomorphismen von G-Moduln

$$\dots \longrightarrow U \xrightarrow{\varepsilon} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow \dots$$

so, dass das Bild des Vorgängers stets der Kern des Nachfolgers ist, also

Bild
$$\varepsilon = \text{Kern } \pi$$
.

Wir interessieren uns hier vor allem für kurze exakte Sequenzen; das sind exakte Sequenzen der Form

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\varepsilon} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0.$$

Der triviale Homomorphismus $0 \longrightarrow U$ hat dabei Bild $\{0\}$, und damit hat ε trivialen Kern und muss daher injektiv sein. Man kann daher ε auch als Injektion $U \hookrightarrow V$ ansehen. Der triviale Homomorphismus $W \longrightarrow 0$ hat ganz W als Kern, und dies ist das Bild des damit surjektiven Homomorphismus π . Aufgrund des Homomorphiesatzes gilt dann $W \cong V/U$.

Satz und Definition 4.1 Man sagt, dass eine kurze exakte Sequenz von G-Moduln

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\varepsilon} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$$

zerfällt, wenn eine der folgenden drei äquivalenten Eigenschaften gilt:

- (a) Es qibt einen G-Homomorphismus $\varphi: W \to V$ mit $\pi \circ \varphi = id_W$.
- (b) Es gibt ein Komplement zu $\varepsilon(U)$ in V.
- (c) Es gibt einen G-Homomorphismus $\psi: V \to U$ mit $\psi \circ \varepsilon = id_U$.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

 $(a) \Rightarrow (b)$. Wir zeigen $V = \varepsilon(U) \oplus \text{Bild } \varphi$. Für $v \in V$ ist $v = (v - \varphi \circ \pi(v)) + \varphi \circ \pi(v)$ mit $\pi(v - \varphi \circ \pi(v)) = \pi(v) - \pi(v) = 0$, also liegt der erste Summand in Kern $\pi = \text{Bild } \varepsilon$. Der zweite Summand liegt offenbar in $\varphi(W)$, also $v \in \varepsilon(U) + \text{Bild } \varphi$.

Ist $v \in \varepsilon(U) \cap \text{Bild } \varphi$, so ist $v = \varphi(w)$ mit $w \in W$, und wegen $v \in \varepsilon(U) = \text{Kern } \pi \text{ ist } 0 = \pi(v) = \pi \circ \varphi(w) = w$, also $v = \varphi(0) = 0$.

- $(b) \Rightarrow (c)$. Sei $V = \varepsilon(U) \oplus W'$. Für $v = \varepsilon(u) + w'$ mit $u \in U, w' \in W'$ definiere $\psi(v) := u$. Da die Summe direkt, ε injektiv und ein G-Homomorphismus ist, ist ψ wohldefiniert, erfüllt $\psi \circ \varepsilon = \operatorname{Id}_U$ und ist ebenfalls G-Homomorphismus.
- $(c)\Rightarrow (a)$. Da π surjektiv, gibt es zu $w\in W$ ein Urbild $v\in V$ mit $\pi(v)=w$. Wir definieren $\varphi(w):=v-\varepsilon\circ\psi(v)$ und zeigen zunächst die Wohldefiniertheit: Ist auch $\pi(v')=w$ mit $v'\in V$, so ist $v-v'\in \mathrm{Ker}\ \pi=\varepsilon(U)$, also $v-v'=\varepsilon(u)$ mit $u\in U$. Es folgt $(v-v')-\varepsilon\circ\psi(v-v')=(v-v')-\varepsilon\circ\psi(\varepsilon(u))=(v-v')-\varepsilon(u)=0$, also die Wohldefiniertheit. Ferner gilt dann wegen $\pi\circ\varepsilon=0$ auch $\pi\circ\varphi(w)=\pi(v-\varepsilon\circ\psi(v))=\pi(v)=w$, also $\pi\circ\varphi=\mathrm{Id}_W$. Man prüft auch leicht nach, dass φ ein G-Homomorphismus ist.

4.2 Erste Kohomologie algebraischer Gruppen

Im Folgenden wollen wir besonders einfache kurze exakte Sequenzen untersuchen. Als Hilfsmittel verwenden wir dafür sogenannte Kozyklen. Sei dazu V ein G-Modul.

Ein Morphismus von affinen Varietäten $g:G\to V,\quad \sigma\mapsto g_\sigma$ heißt 1-Kozyklus, falls

$$g_{\sigma\tau} = \sigma(g_{\tau}) + g_{\sigma}$$
 für alle $\sigma, \tau \in G$.

Die additive Gruppe aller 1-Kozyklen (die zugleich ein K-Vektorraum ist) wird mit $Z^1(G, V)$ bezeichnet.

Für ein $v \in V$ ist durch $\sigma \mapsto (\sigma - 1)v := \sigma(v) - v$ ein spezieller 1-Kozyklus gegeben. Die Untergruppe dieser so gebildeten 1-Kozyklen, die Menge der 1-Koränder, wird mit $B^1(G,V)$ bezeichnet, und die zugehörige Faktorgruppe $Z^1(G,V)/B^1(G,V)$ mit $H^1(G,V)$.

In dieser Arbeit bezeichnen wir einen Korand manchmal als trivialen Kozyklus, wobei wir einen Kozyklus, der kein Korand ist dann auch als nichttrivialen Kozyklus bezeichnen.

Bemerkung 4.2 Sei

$$0 \to V \hookrightarrow \tilde{V} \overset{\pi}{\to} K \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von G-Moduln (K soll dabei stets triviale G-Operation haben). Diese zerfällt genau dann, wenn für ein (und dann alle) $v_0 \in \pi^{-1}(1)$ und den durch $g_{\sigma} := (\sigma - 1)v_0$ definierten Kozyklus $g \in Z^1(G, V)$ gilt, dass g sogar in $B^1(G, V)$ liegt.

Beweis. Wenn die Sequenz zerfällt, so hat V ein Komplement W in \tilde{V} , das wegen dim $\tilde{V} = \dim$ Bild $\pi + \dim$ Kern $\pi = 1 + \dim$ V eindimensional ist. Ist $v_0 = v + w$ mit $v \in V, w \in W$, so gibt es also zu $\sigma \in G$ ein $\lambda \in K$ mit $\sigma w = \lambda w$. Aus $1 = \pi(v_0) = \pi(w) = \sigma \pi(w) = \pi(\sigma w) = \pi(\lambda w) = \lambda \pi(w)$ folgt $\lambda = 1$, und w ist G-invariant. Es folgt $g_{\sigma} = (\sigma - 1)v$, also $g \in B^1(G, V)$.

Ist umgekehrt $g \in B^1(G, V)$, also $g_{\sigma} = (\sigma - 1)v$ mit $v \in V$, so ist $K(v_0 - v)$ ein G-invariantes Komplement zu V.

Es ist nützlich, sich mit der Darstellung von G auf \tilde{V} vertraut zu machen: Wir ergänzen v_0 mit Hilfe einer Basis von V zu einer Basis von \tilde{V} . Ist dann A_{σ} die Darstellung von σ auf V und identifizieren wir g_{σ} mit seinem Koordinatenvektor bzgl. der Basis von V, so hat σ bzgl. der Basis von \tilde{V} die Darstellung $\begin{pmatrix} A_{\sigma} & g_{\sigma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Insbesondere finden wir in der Identität

$$\begin{pmatrix} A_{\sigma\tau} & g_{\sigma\tau} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma} & g_{\sigma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{\tau} & g_{\tau} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma}A_{\tau} & A_{\sigma}g_{\tau} + g_{\sigma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Kozyklus-Eigenschaft von g wieder. Daher kann man aus gegebenem $g \in Z^1(G,V)$ durch $\tilde{V} := V \oplus K$ (hier direkte Summe von K-Vektorräumen) und $\sigma(v,\lambda) := (\sigma v + \lambda g_\sigma,\lambda) \cong \left(\begin{array}{c} A_\sigma & g_\sigma \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v \\ \lambda \end{array} \right)$ sowie $\pi(v,\lambda) := \lambda$ eine kurze exakte Sequenz definieren. Wir sagen, \tilde{V} bzw. die kurze exakte Sequenz wird von g induziert. Ist $(v,1) \in \pi^{-1}(1)$, so ist $(\sigma-1)(v,1) = (g_\sigma + \sigma(v) - v,0)$, so dass man aus dieser Sequenz die Restklasse von g in $H^1(G,V)$ zurückgewinnen kann.

Was passiert wenn man V mittels eines trivialen Kozyklus $g_{\sigma} = (\sigma - 1)v_0$ mit $v_0 \in V$ zu \tilde{V} erweitert? Um dieser Frage nachzugehen, ergänzen wir v_0 zu einer Basis von V. Ist dann $\sigma \mapsto A_{\sigma}$ die Darstellung bezüglich dieser Basis, so ist die Koordinatendarstellung des Kozyklus bezüglich dieser Basis durch $(A_{\sigma} - I)e_1$ gegeben, wobei $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ der erste Einheitsvektor der Länge $n = \dim V$ ist. Ist $a_{\sigma} := A_{\sigma}e_1$ die erste Spalte von A_{σ} , so hat also \tilde{V}

die Darstellung

$$\left(\begin{array}{cc} A_{\sigma} & g_{\sigma} \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A_{\sigma} & a_{\sigma} - e_{1} \\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation (Basiswechsel)

$$\begin{pmatrix} I_n & e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\sigma} & a_{\sigma} - e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei I_n die $n \times n$ Einheitsmatrix, erkennt man die Isomorphie $\tilde{V} \cong V \oplus K$ (direkte Summe (von Moduln) mit dem trivialen G-Modul) - die Erweiterung mit einem Korand bringt also nichts neues.

Man beachte auch, dass man einen Modul nur einmal nichttrivial mit dem gleichen Kozyklus erweitern kann, denn

$$\begin{pmatrix} g_{\sigma} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\sigma} & g_{\sigma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I_{n+1} \end{pmatrix} e_{n+1},$$

d.h. der Kozyklus $\sigma \mapsto (g_{\sigma}, 0)$ wird in \tilde{V} trivial.

Man kann Kozyklen bzw. kurze exakte Sequenzen benutzen, um zu entscheiden ob ein Untermodul ein Komplement besitzt:

Proposition 4.3 Sei W Untermodul eines G-Moduls V, sowie $\iota \in Hom_K(V, W)$ mit $\iota|_W = id_W$. Dann ist durch $\sigma \mapsto g_{\sigma} := (\sigma - 1)\iota$ ein Kozyklus in $Hom_K(V, W)_0$ (siehe Satz 2.11) gegeben, welcher genau dann ein Korand ist, wenn W ein (G-invariantes) Komplement hat.

 \ddot{A} quivalent dazu ist dann natürlich auch die Bedingung, dass die von g induzierte kurze exakte Sequenz

$$0 \to Hom_K(V, W)_0 \hookrightarrow \widetilde{Hom_K(V, W)_0} = Hom_K(V, W)_0 \oplus K\iota \stackrel{\pi}{\to} 0$$

 $mit \ \pi(f + \lambda \cdot \iota) := \lambda \ f\ddot{u}r \ f \in Hom_K(V, W)_0, \quad \lambda \in K \ zerf\ddot{a}llt.$

Beweis. Zunächst ist $g_{\sigma} \in \operatorname{Hom}_K(V, W)_0$ für $\sigma \in G$ zu zeigen: Für $w \in W$ ist

$$g_{\sigma}(w) = ((\sigma - 1)\iota)(w) = \sigma \left(\iota(\sigma^{-1}w)\right) - w \stackrel{\iota|_{W} = \mathrm{id}_{W}}{=} \sigma \sigma^{-1}w - w = 0, \quad (11)$$

also $g_{\sigma}|_{W} = 0$ und damit $g_{\sigma} \in \operatorname{Hom}_{K}(V, W)_{0}$.

Sei nun g ein Korand, d.h. es gibt $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)_0$ mit $g_{\sigma} = (\sigma - 1)\iota = (\sigma - 1)f$. Für $h := \iota - f$ folgt dann $\sigma \cdot h = h$, also $h \in \operatorname{Hom}_G(V, W)$, und ker h ist damit ein Untermodul (G-invarianter Untervektorraum) von V. Für $w \in W$ gilt ferner $h(w) = \iota(w) - f(w) = w - 0 = w$, also $h|_W = id_W$. Da

dann h(V) = W folgt also $h(h(v)) = h(v) \forall v \in V$. Also ist h Projektion auf W, und in üblicher Weise folgt nun $V = W \oplus \ker h$:

$$\forall v \in V : \quad v = \underbrace{(v - h(v))}_{\in \ker h} + \underbrace{h(v)}_{\in W},$$

denn h(v-h(v))=h(v)-h(h(v))=h(v)-h(v)=0. Ferner gilt für $v \in W \cap \ker h$, dass $v \stackrel{h|_W=\mathrm{id}_W}{=} h(v)=0$, also ist die Summe direkt.

Gilt umgekehrt $V=W\oplus U$ mit einem G-invarianten Teilraum U, so wähle

$$f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)_0 \text{ mit } f|_W = 0, \ f|_U = \iota|_U.$$

Wir zeigen $g_{\sigma} = (\sigma - 1)f$: Für $w \in W, u \in U$ ist

$$g_{\sigma}(w+u) \stackrel{(11)}{=} g_{\sigma}(u) = ((\sigma-1)\iota)(u) = \sigma(\iota(\sigma^{-1}u)) - \iota(u) \stackrel{f|_{U}=\iota|_{U}}{=} \sigma(f(\sigma^{-1}u)) - f(u) = ((\sigma-1)f)(u) \stackrel{f|_{W}=0}{=} ((\sigma-1)f)(w+u),$$

also Gleichheit auf $V = W \oplus U$, und g ist ein Korand.

Im Zusammenhang mit diesem Satz ist folgendes Ergebnis nützlich:

Bemerkung 4.4 Sei $U \leq V \leq W$ eine Kette von Moduln. Wenn U kein Komplement in V hat, so auch nicht in W.

Beweis. Angenommen, $W = U \oplus U'$. Dann gilt auch $V = U \oplus (U' \cap V)$, im Widerspruch zur Voraussetzung: Für $v \in V \leq W$ gibt es nämlich $u \in U, u' \in U'$ mit v = u + u', also $u' = v - u \in U' \cap V$. Ausserdem ist $U \cap (U' \cap V) \subseteq U \cap U' = \{0\}$.

Korollar 4.5 G ist genau dann linear reduktiv, wenn $H^1(G, V) = 0$ für jeden G-Modul V gilt.

Beweis. Sei G linear reduktiv. Dann hat jeder Untermodul eines jeden Moduls V ein Komplement, also zerfällt nach Satz 4.1 (b) insbesondere auch jede von einem Kozyklus induzierte kurze exakte Sequenz, was nach Bemerkung 4.2 bedeutet, dass jeder Kozyklus ein Korand ist, also $H^1(G, V) = 0$.

Falls umgekehrt $H^1(G, V) = 0$ für jeden G-Modul V, so ist jeder Kozyklus ein Korand, was nach voriger Proposition aber heißt, dass jeder Untermodul eines jeden G-Moduls ein Komplement hat, also ist G linear reduktiv (einen K-Homomorphismus ι wie in Proposition 4.3 gibt es immer).

Sei $g \in Z^1(G, V)$, wobei wir die zugehörige Restklasse von g in $H^1(G, V)$ ebenfalls mit g bezeichnen. Ist W ein weiterer G-Modul, $w \in W^G$, so ist $\sigma \mapsto w \otimes g_{\sigma}$ wegen $\sigma w = w \quad \forall \sigma \in G$ aus $Z^1(G, W \otimes V)$, denn

$$w \otimes g_{\sigma\tau} = w \otimes (\sigma g_{\tau} + g_{\sigma}) \stackrel{w \in W^G}{=} \sigma(w \otimes g_{\tau}) + w \otimes g_{\sigma}.$$

Die zugehörige Restklasse in $H^1(G, W \otimes V)$ bezeichnen wir mit $w \otimes g$. Sie ist unabhängig von dem Repräsentanten von g in $Z^1(G, V)$, da

$$w \otimes (g_{\sigma} + \sigma(v) - v) = w \otimes g_{\sigma} + \sigma(w \otimes v) - w \otimes v$$

wegen $w \in W^G$.

Proposition 4.6 Sei V ein G-Modul, $g \in H^1(G, V)$ und

$$0 \to V \hookrightarrow \tilde{V} \stackrel{\pi}{\to} K \to 0$$

die von einem Repräsentanten von g in $Z^1(G,V)$ induzierte kurze exakte Sequenz. Dann gibt es einen G-Modul W (nämlich $W = \tilde{V}^*$) und ein $0 \neq w \in W^G$ (nämlich $w = \pi$) mit $w \otimes g = 0$ in $H^1(G, W \otimes V)$. (Man sagt, g wird von w annulliert).

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\sigma \mapsto \pi \otimes g_{\sigma}$ ein Korand in $\tilde{V}^* \otimes V$ ist, dass es also ein $x \in \tilde{V}^* \otimes V$ mit $\pi \otimes g_{\sigma} = (\sigma - 1)x \forall \sigma \in G$ gibt. Sei dazu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ (mit $v_{n+1} \in \pi^{-1}(1)$) eine Basis von \tilde{V} , so dass \tilde{V} die Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} A_{\sigma} & g_{\sigma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 bzgl. $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$

hat (wir identifizieren g_{σ} wieder mit seinem Koordinaten(spalten)vektor). Die duale Basis von \mathcal{B} ist gegeben durch $\mathcal{B}' := \{v_1^*, \dots, v_n^*, v_{n+1}^* = \pi\}$ (denn $\pi(V) = 0$), und die Darstellung auf \tilde{V}^* ist nach Lemma 2.6 gegeben durch

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} A_{\sigma^{-1}}^T & 0 \\ g_{\sigma^{-1}}^T & 1 \end{pmatrix} \text{ bzgl. } \{v_1^*, \dots, v_n^*, v_{n+1}^* = \pi\}.$$

An dieser Darstellung sehen wir auch nochmals $\pi \in (\tilde{V}^*)^G$ (was auch folgt, weil π ein G-Homomorphismus ist). Gemäß Lemma 2.9 ordnen wir einem Vektor

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} (v_i^* \otimes v_j) =: \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} (v_i^* \otimes v_j) + \sum_{j=1}^{n} y_j (\pi \otimes v_j) \in \tilde{V}^* \otimes V$$

45

(mit $x_{ij}, y_j \in K$) die Koordinaten-Matrix

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}$$

zu. Nun setzen wir

$$x := -\left(v_1^* \otimes v_1 + \ldots + v_n^* \otimes v_n\right)$$
(12)

mit der Koordinatenmatrix

$$\left(\begin{array}{c} -I_n \\ 0_{1\times n} \end{array}\right),\,$$

und behaupten, dass dies das gesuchte x ist - wir haben also

$$\pi \otimes g_{\sigma} = (\sigma - 1)x \quad \forall \sigma \in G$$
(13)

zu zeigen. Während $\pi \otimes g_{\sigma}$ die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0_{n\times n} \\ g_{\sigma}^T \end{pmatrix}$$

besitzt, hat $(\sigma - 1)x$ nach Lemma 2.9 die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} A_{\sigma^{-1}}^T & 0 \\ g_{\sigma^{-1}}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n \\ 0_{1\times n} \end{pmatrix} A_{\sigma}^T - \begin{pmatrix} -I_n \\ 0_{1\times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} \\ -g_{\sigma^{-1}}^T A_{\sigma}^T \end{pmatrix},$$

welche zu dem Vektor $\pi \otimes (-\sigma g_{\sigma^{-1}})$ gehört. Wir müssen also nur noch $-\sigma g_{\sigma^{-1}} = g_{\sigma}$ zeigen: Wegen der Kozyklus-Eigenschaft $g_{\sigma\tau} = \sigma g_{\tau} + g_{\sigma}$ gilt zunächst für das neutrale Element ι von G

$$g_{\iota} = g_{\iota\iota} = \iota g_{\iota} + g_{\iota} = g_{\iota} + g_{\iota},$$

also $g_{\iota} = 0$, und daher

$$0 = g_{\iota} = g_{\sigma\sigma^{-1}} = \sigma g_{\sigma^{-1}} + g_{\sigma},$$

also die Behauptung.

Schärfere Varianten dieser Proposition findet man in den Originalarbeiten [9] und [10]; die Zusammenfassung der dortigen Beweise findet sich auch in meinem Projekt [13].

Wir haben also zu jedem (nichttrivialen) Kozyklus eine annullierende Invariante. Kann man umgekehrt zu einer Invarianten einen nichttrivialen Kozyklus finden, der von dieser annulliert wird? Wir lesen dazu einfach die bisherige Konstruktionskette rückwärts: Bei gegebenem Kozyklus g in V haben wir zunächst \tilde{V} konstruiert, und \tilde{V}^* enthält dann eine annullierende Invariante π . Sei nun umgekehrt ein Modul \tilde{V}^* mit einer Invarianten π gegeben (wobei wir den Modul wegen $W^{**}\cong W$ als Dual seines Duals schreiben können). In dem wir π als letztes Element einer Basis nehmen, hat \tilde{V}^* die Darstellung

$$\sigma \mapsto \left(\begin{array}{cc} B_{\sigma} & 0 \\ h_{\sigma}^T & 1 \end{array} \right),$$

wobei h_{σ} als Spalte geschrieben sei. Die Invariante π erzeugt den eindimensionalen Untermodul (!) $K\pi$. Gemäß Proposition 4.3 betrachten wir

$$\iota \in \operatorname{Hom}_K(\tilde{V}^*, K\pi) \cong \tilde{V}^{**} \cong \tilde{V}$$

mit der Darstellungsmatrix

$$J := (0, \dots, 0, 1)$$

bezüglich der betrachteten Basis von \tilde{V}^* (π ist das letzte Element dieser Basis). Der nach Proposition 4.3 zugehörige Kozyklus $g_{\sigma} = (\sigma - 1)\iota$ in $\operatorname{Hom}_K(\tilde{V}^*, K\pi)_0$ hat dann die Darstellungsmatrix

$$(1) \cdot (0, \dots, 0, 1) \begin{pmatrix} B_{\sigma^{-1}} & 0 \\ h_{\sigma^{-1}}^T & 1 \end{pmatrix} - (0, \dots, 0, 1) = (h_{\sigma^{-1}}^T, 0).$$

Dabei sind die Koordinatenvektoren von $\operatorname{Hom}_K(\tilde{V}^*, K\pi)$ als Zeilen geschrieben. Schreiben wir sie als Spalte und beachten dass $\tilde{V}^{**} = \tilde{V}$ die Darstellung

$$\sigma \mapsto \left(\begin{array}{cc} B_{\sigma} & 0\\ h_{\sigma}^{T} & 1 \end{array}\right)^{-T} = \left(\begin{array}{cc} B_{\sigma^{-1}}^{T} & h_{\sigma^{-1}}\\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

hat, sehen wir dass dieser Kozyklus in offensichtlicher Weise einem Kozyklus in einem Untermodul V von \tilde{V} entspricht. Nach Proposition 4.3 ist dieser genau dann nichttrivial, wenn $K\pi$ kein Komplement in \tilde{V}^* hat. Zusammengefasst und griffig formuliert also:

Bemerkung 4.7 Der aus einer Invarianten konstruierte Kozyklus ist genau dann nichttrivial, wenn die Invariante kein Komplement besitzt. □

Dieses Verfahren ist deshalb interessant, weil man für die Berechnung von Invarianten gute Algorithmen hat, für die Berechnung von Kozyklen jedoch nur unpraktikable. Um einen nichttrivialen Kozyklus zu finden kann man also so vorgehen, dass man einen beliebigen Modul nimmt, die Invarianten berechnet und dann prüft, ob die zugehörigen Kozyklen nichttrivial sind.

Ein Beispiel, wo dieses Verfahren erfolgreich angewendet wird, findet sich in Abschnitt 6.2.2. Es war das erste neue Resultat dieser Arbeit und führte durch Lenkung meiner Aufmerksamkeit auf das dort betrachtete Tensorprodukt auch zum Hauptresultat dieser Arbeit.

4.3 Der Hauptsatz

Der folgende Satz von Kemper [9] wird später ständig für die Konstruktion von nicht Cohen-Macaulay Invariantenringen benutzt.

Hauptsatz 4.8 Sei G eine reduktive Gruppe und V ein G-Modul, der ein $0 \neq g \in H^1(G, K[V])$ enthält, sowie $a_1, a_2, a_3 \in K[V]^G$ ein phsop in K[V], das g annulliert, also $a_i g = 0 \in H^1(G, K[V])$ für i = 1, 2, 3. Dann ist a_1, a_2, a_3 ein phsop in $K[V]^G$, aber dort keine reguläre Sequenz. Insbesondere ist $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay.

Beweis. Nach Lemma 2.28 ist a_1, a_2, a_3 auch ein phsop in $K[V]^G$. Wir zeigen, dass es dort keine reguläre Sequenz ist. Nach Voraussetzung sind die Kozyklen $\sigma \mapsto a_i g_{\sigma}, i = 1, 2, 3$ in K[V] dort sogar Koränder, also gibt es $b_i \in K[V]$ mit

$$(\sigma - 1)b_i = a_i g_\sigma \quad \forall \sigma \in G, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Sei

$$u_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \text{ für } 1 \le i < j \le 3.$$
 (15)

Offenbar ist $u_{ij} \in K[V]^G$ $(\sigma u_{ij} = a_i(b_j + a_j g_\sigma) - a_j(b_i + a_i g_\sigma) = u_{ij})$, und es gilt

$$\begin{vmatrix} u_{23}a_1 - u_{13}a_2 + u_{12}a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Annahme: a_1, a_2, a_3 ist eine reguläre Sequenz in $K[V]^G$.

Dann liegt u_{12} in dem von a_1, a_2 erzeugten Ideal in $K[V]^G$, d.h. es gibt $f_1, f_2 \in K[V]^G$ mit

$$u_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = f_1 a_1 + f_2 a_2. (16)$$

Weiter sind a_1, a_2 teilerfremde Polynome, denn a_1, a_2 bilden ein phsop in dem Cohen-Macaulay Ring K[V], also dort sogar eine reguläre Sequenz; Ist nun $d \in K[V]$ ein gemeinsamer Teiler, $a_1 = dk$ so folgt $a_2k \in (a_1)_{K[V]}$, also gilt mit der Regularität $k \in (a_1)_{K[V]}$, d.h. d ist Einheit. Aus $a_1(b_2 - f_1) = a_2(f_2 + b_1)$ folgt dann, dass a_1 Teiler von $f_2 + b_1$ ist, also $f_2 + b_1 = a_1 \cdot h$ mit $h \in K[V]$. Nun ist

$$a_1 \cdot (\sigma - 1)h = (\sigma - 1)(a_1h) = (\sigma - 1)(f_2 + b_1) = (\sigma - 1)b_1 = a_1g_{\sigma} \quad \forall \sigma \in G,$$

also $g_{\sigma} = (\sigma - 1)h$. Damit ist die Restklasse von g in $H^1(G, K[V])$ gleich 0, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also war die Annahme falsch, und a_1, a_2, a_3 ist nicht regulär.

Falls IsNotCohenMacauly dann a_1, a_2, a_3 in seiner phsop-Liste hat, so erkennt es $K[V]^G$ nach Satz 3.3 als nicht Cohen-Macaulay, wenn man im Fall homogener a_i und g_{σ} (also $g_{\sigma} \in K[V]_d^G \quad \forall \sigma \in G$ für ein festes $d =: \deg(g)$) $d_{\max} \geq \deg(u_{12}a_3) = \deg a_1 + \deg b_2 + \deg a_3$, also

$$d_{\text{max}} \ge \deg(a_1) + \deg(a_2) + \deg(a_3) + \deg(g)$$
 (17)

setzt. (Da G graderhaltend operiert, ist $\deg b_i = \deg a_i + \deg g$).

Die einfachste Möglichkeit, mit dem Hauptsatz einen nicht Cohen-Macaulay Invariantenring zu konstruieren, wird durch folgendes Korollar gegeben. Kozyklus und annullierendes ph
sop finden sich dabei im Grad 1, was zu einer relativ hohen Dimension für V führt. Ziel dieser Arbeit war es, die Summanden des nächsten Korollars (für konkrete Beispiele) in höheren Potenzen von (kleineren) Moduln wiederzufinden und so die Dimension zu reduzieren.

Korollar 4.9 Ist $0 \to U \to \tilde{U} \to K \to 0$ eine nicht zerfallende kurze exakte Sequenz von G-Moduln, so ist mit

$$V \ := \ U^* \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U}$$

 $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay.

Beweis. Es ist

$$V^* = U \oplus \tilde{U}^* \oplus \tilde{U}^* \oplus \tilde{U}^* \tag{18}$$

und

$$K[V] = S(V^*) = V^* \oplus S^2(V^*) \oplus S^3(V^*) \oplus \dots,$$

also sind U und \tilde{U}^* direkte Summanden von K[V]. Der Modul U enthält einen Kozyklus g, der kein Korand in U ist (Bemerkung 4.2). Mittels Einbettung ist g dann auch Kozyklus in K[V]. Da U ein direkter Summand von K[V]

ist, ist dann g auch kein Korand in K[V]: Denn ist etwa $K[V] = U \oplus W$ und wäre

$$g_{\sigma} = (\sigma - 1)(u + w) \quad \forall \sigma \in G \text{ mit } u \in U, w \in W$$

so folgte wegen der direkten Summe und $g_{\sigma} \in U$ jedenfalls $(\sigma - 1)w = 0 \forall \sigma$, also doch $g_{\sigma} = (\sigma - 1)u$ im Widerspruch dazu, dass g kein Korand in U ist. Die drei Kopien der nach Proposition 4.6 annullierenden Elemente $\pi \in \tilde{U}^{*G}$ in $K[V]^G$ bezeichnen wir mit a_1, a_2, a_3 . Da sie als Elemente einer Basis und damit als unabhängige Variablen im Polynomring dienen können, bilden sie ein phsop in K[V]. Da

$$U \otimes \tilde{U}^* \le S^2 \left(U \oplus \tilde{U}^* \right)$$

ein Untermodul ist, sind die a_i nach Proposition 4.6 Annullatoren von g, d.h. $a_i g = 0$ in $H^1(G, K[V])$ - die Voraussetzungen des Hauptsatzes sind also erfüllt und $K[V]^G$ ist nicht Cohen-Macaulay.

Damit können wir auch das Hauptresultat aus [9] beweisen, eine Umkehrung des Satzes von Hochster und Roberts:

Korollar 4.10 (Kemper [9]) Sei G reduktiv und $K[V]^G$ Cohen-Macaulay für jeden G-Modul V. Dann ist G sogar linear reduktiv.

Beweis. Wäre G nicht linear reduktiv, so gäbe es nach Korollar 4.5 eine nicht zerfallende kurze exakte Sequenz $0 \to U \to \tilde{U} \to K \to 0$ von G-Moduln, und nach vorigem Korollar dann einen nicht Cohen-Macaulay Invariantenring – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Man kann diesen Satz auch so formulieren: Wenn G reduktiv, aber nicht linear reduktiv ist, so gibt es einen G-Modul V mit nicht Cohen-Macaulay Invariantenring $K[V]^G$.

5 Nichttriviale Kozyklen für $SL_n(K)$ und $GL_n(K)$

Wir kommen nun zu den eigentlichen Resultaten meiner Arbeit, nämlich der Konstruktion konkreter Beispiele für die zusammenhängenden (und reduktiven) Gruppen $SL_n(K)$ und $GL_n(K)$. In meinem Projekt habe ich dazu lediglich Korollar 4.9 verwandt, wozu es also genügte, nichttriviale Kozyklen anzugeben. Da diese auch für die Resultate dieser Diplomarbeit verwendet werden, sollen in diesem Abschnitt nochmal die Hauptergebnisse des Projekts samt Beweisen angegeben werden.

Hier also das Hauptresultat aus meinem Projekt [13]:

Satz 5.1 Sei K ein (algebraisch abgeschlossener) Körper mit char K = p > 0, $n \ge 2$ und G eine Untergruppe von $GL_n(K)$ mit

(a) Falls
$$p = 2$$
: $\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} \in G$ für wenigstens drei verschiedene Werte von $a \in K$ ($a = 1$ ist stets ein solcher).

Sei weiter V der Raum aller homogenen Polynome vom Grad p in den Variablen $X_1, ..., X_n$,

$$V := K[X_1, \dots, X_n]_p.$$

Ist $(a_{ij}) \in G$, so ist durch $(a_{ij}) \cdot X_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} X_i$ die kanonische Operation von G auf V gegeben, wodurch V zu einem G-Modul wird. Sei

$$W := < X_1^p, \dots, X_n^p > < V$$

(Untermodul nach Frobenius) und

$$U := Hom_K(V, W)_0 = \{ f \in Hom_K(V, W) : f|_W = 0 \}.$$

U ist G-Modul nach Satz 2.11. Sei ferner $\iota \in Hom_K(V, W)$ gegeben durch

$$\iota|_W = id_W$$

und

ι gleich 0 auf allen Monomen, die nicht in W liegen.

Sei $\tilde{U} := U \oplus K\iota$ und $\pi : \tilde{U} \to K$ gegeben durch $\pi(u + \lambda \cdot \iota) := \lambda$ für $u \in U, \lambda \in K$. Dann ist durch

$$0 \to U \to \tilde{U} \xrightarrow{\pi} K \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz gegeben, die nicht zerfällt. Äquivalent dazu ist nach Bemerkung 4.2, dass durch

$$q_{\sigma} := (\sigma - 1)\iota$$

ein nichttrivialer Kozyklus in U gegeben ist.

Ebenfalls äquivalent ist nach Proposition 4.3, dass der Untermodul W von V kein G-invariantes Komplement hat - insbesondere sind also die betrachteten Gruppen nicht linear reduktiv.

Beweis. Wir verwenden für V eine monomiale Basis \mathcal{B} , wobei wir die Reihenfolge der ersten n+1 bzw. n+2 Monome in den Fällen (a) bzw. (b) vorgeben, und zwar

im Fall (a):

$$\mathcal{B} = \{X_1^2, ..., X_n^2, X_1X_2, ...\}$$

im Fall (b):

$$\mathcal{B} = \{X_1^p, ..., X_n^p, X_1^{p-1}X_2, X_1^{p-2}X_2^2, ...\}$$

Als Basis von W dienen die ersten n Einträge von \mathcal{B} . Sei $N:=|\mathcal{B}|=\binom{n+p-1}{p}$. Wir bezeichnen mit $f_p:\operatorname{GL}_n(K)\to\operatorname{GL}_n(K)$ den koeffizientenweisen Frobenius-Homomorphismus, also $f_p(a_{ij})=(a_{ij}^p)$. Ist $A_{\sigma}\in K^{N\times N}$ die Darstellungsmatrix von $\sigma\in G$ bzgl. der Basis \mathcal{B} , so hat diese die Form

$$A_{\sigma} = \left(\begin{array}{cc} f_p(\sigma) & * \\ 0 & * \end{array}\right).$$

Weiter haben wir bzgl. der Basis \mathcal{B}

$$U \cong \{ (0_{n \times n} \mid B) \in K^{n \times N} \text{ mit } B \in K^{n \times (N-n)} \},$$

und für $U\ni f\cong \left(\begin{array}{cc}0_{n\times n}&B\end{array}\right)$ bzgl. $\mathcal B$ haben wir die Operation gegeben durch

$$\sigma \cdot f = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1} \cong f_p(\sigma) \cdot (0_{n \times n} \ B) \cdot A_{\sigma^{-1}}.$$

Die Darstellungsmatrix von ι ist gegeben durch

$$\iota \cong (I_n \ 0) =: J \in K^{n \times N}.$$

Da

$$\sigma \cdot \iota = \sigma \circ \iota \circ \sigma^{-1} \cong f_p(\sigma) \left(\begin{array}{cc} I_n & 0 \end{array} \right) \underbrace{\left(\begin{array}{cc} f_p(\sigma^{-1}) & * \\ 0 & * \end{array} \right)}_{A_{\sigma^{-1}}} = \left(\begin{array}{cc} I_n & * \end{array} \right)$$

ist $\sigma\iota - \iota \in U$. Damit ist π als G-Homomorphismus wohldefiniert, und mit $g_{\sigma} := (\sigma - 1)\iota$ ist $g \in Z^1(G, U)$ (wir haben dies ohne Matrizen auch schon im Beweis von Proposition 4.3 eingesehen). Wir müssen zeigen, dass $g \notin B^1(G, U)$. Wir nehmen das Gegenteil an, also die Existenz eines

$$U \ni u \cong Z = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \hat{Z} \end{pmatrix} \in K^{n \times N}, \qquad \hat{Z} = (z_{ij}) \in K^{n \times (N-n)}$$

mit $g_{\sigma} = (\sigma - 1)\iota \stackrel{!}{=} (\sigma - 1)u$ für alle $\sigma \in G$ bzw.

$$f_p(\sigma)JA_{\sigma^{-1}} - J \stackrel{!}{=} f_p(\sigma)ZA_{\sigma^{-1}} - Z \quad \forall \sigma \in G.$$
 (19)

Diese letzte Gleichung führen wir nun in beiden Fällen zum Widerspruch.

(a) Mit

$$\sigma := \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} = \sigma^{-1}$$

berechnen wir die (n+1)te Spalte von $A_{\sigma^{-1}}$

$$\sigma^{-1} \cdot X_1 X_2 = (aX_1 + (a+1)X_2)((a+1)X_1 + aX_2)$$

= $(a^2 + a)X_1^2 + (a^2 + a)X_2^2 + X_1 X_2$
 $\cong (a^2 + a, a^2 + a, 0_{n-2}, 1, 0)^T.$

Damit vergleichen wir nun auf beiden Seiten von (19) den Eintrag in der ersten Zeile und (n+1)ten Spalte: Links:

$$(a^{2}, a^{2} + 1, 0_{n-2}) \begin{pmatrix} I_{n} & 0_{n \times (N-n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{2} + a \\ a^{2} + a \\ 0_{n-2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a^{2} + a$$

Rechts:

$$(a^{2}, a^{2} + 1, 0_{n-2}) \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \hat{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{2} + a \\ a^{2} + a \\ 0_{n-2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z_{11} = a^{2} z_{11} + (a^{2} + 1) z_{21} - z_{11}$$
$$= (a^{2} + 1)(z_{11} + z_{21})$$

Setzen wir $c := z_{11} + z_{21}$, so sehen wir, dass $ca^2 + c = a^2 + a$ bzw.

$$(c+1)a^2 + a + c = 0$$

für wenigstens drei verschiedene Werte $a \in K$ erfüllt sein muss. Dies ist ein Widerspruch.

(b) Wir betrachten

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}, \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix} \in G$$

und berechnen die (n+1)te und (n+2)te Spalte von $A_{\sigma^{-1}}$: (n+1)te Spalte:

$$\begin{array}{rcl} \sigma^{-1} \cdot X_1^{p-1} X_2 & = & X_1^{p-1} (-X_1 + X_2) \\ & = & -X_1^p + X_1^{p-1} X_2 \\ & \cong & (-1, 0_{n-1}, 1, 0)^T \end{array}$$

(n+2)te Spalte:

$$\begin{array}{rcl} \sigma^{-1} \cdot X_1^{p-2} X_2^2 & = & X_1^{p-2} (X_1^2 - 2X_1 X_2 + X_2^2) \\ & = & X_1^p - 2X_1^{p-1} X_2 + X_1^{p-2} X_2^2 \\ & \cong & (1, 0_{n-1}, -2, 1, 0)^T \end{array}$$

Wir vergleichen nun wieder beide Seiten von (19):

(i) erste Zeile, (n+1)te Spalte

$$(1 \ 1 \ 0_{n-2}) (I_n \ 0_{n \times (N-n)}) \begin{pmatrix} -1 \\ 0_{n-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

Rechts:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \hat{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0_{n-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z_{11} = z_{11} + z_{21} - z_{11} = z_{21}$$

Da Gleichheit gelten soll, haben wir

$$z_{21} = -1. (20)$$

(ii) zweite Zeile, (n + 2)te Spalte Links:

$$(0 \ 1 \ 0_{n-2}) (I_n \ 0_{n \times (N-n)}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Rechts:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0_{n-2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0_{n\times n} & \hat{Z} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0_{n-1} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) - z_{22} = -2z_{21} + z_{22} - z_{22} = -2z_{21}$$

Da $p \geq 3$ ist $2 \neq 0$, und der Vergleich beider Seiten liefert

$$z_{21} = 0,$$

im Widerspruch zu (20).

Mit Korollar 4.9 ist dann also mit obiger Notation mit

$$\begin{array}{rcl} X &:= & U^* \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U} \\ \text{bzw.} & X^* &:= & U \oplus \tilde{U}^* \oplus \tilde{U}^* \oplus \tilde{U}^* \end{array}$$

durch $K[X]^G$ ein nicht Cohen-Macaulay Invariantenring gegeben, falls G reduktiv ist. Insbesondere haben wir also Beispiele für die Gruppen $\mathrm{SL}_n(K)$ und $\mathrm{GL}_n(K)$ mit p>0 und $n\geq 2$ beliebig. Wir interessieren uns ab jetzt nur noch für den Fall n=2. Für die Dimension des Moduls gilt dann offenbar dim $X=4\cdot\dim U+3=4\cdot(2(p+1-2))+3$, d.h.

$$\dim X = 8p - 5,$$

also 11 für p=2 und 19 für p=3. Diese Dimensionen wollen wir reduzieren.

6 Beispiele für $SL_2(K)$ und $GL_2(K)$ sowie $SO_2(K)$

Wir wollen nun Beispiele möglichst kleiner Dimension konstruieren, wobei wir das Konstruktionsverfahren aus Korollar 4.9 leicht abändern. Nach dem Hauptsatz, den wir stets für die Konstruktion verwenden, benötigen wir einen nichttrivialen Kozyklus, der sich in einem Modul U befindet, und drei Annullatoren, die sich jeweils in Kopien von \tilde{U}^* befinden. Damit sich diese Zutaten in $S(V^*)$ wiederfinden, haben wir V^* in 4.9 einfach als die direkte Summe all dieser Zutaten definiert. Für den Beweis von 4.9 reicht es jedoch aus, wenn $S(V^*)$ diese Zutaten enthält, genau genommen brauchen wir Folgendes:

- Der Modul mit dem nichttrivialen Kozyklus U ist ein Untermodul von $S(V^*) = K[V]$ und hat ein G-invariantes Komplement U', also $S(V^*) = U \oplus U'$. Dieses Komplement wird gebraucht, damit der Kozyklus auch in $S(V^*)$ nichttrivial bleibt (vgl. den Beweis von Korollar 4.9).
- Es gibt drei (nicht notwendig disjunkte) Untermoduln W_1, W_2, W_3 von $S(V^*)$, die isomorph zu \tilde{U}^* sind, und deren Kopien π_1, π_2, π_3 des Annullators $\pi \in \tilde{U}^*$ bilden ein phsop in K[V].

In diesem Fall lässt sich nämlich der Hauptsatz genau wir im Beweis von Korollar 4.9 anwenden, d.h. das phsop π_1, π_2, π_3 ist keine reguläre Sequenz in $K[V]^G$, und $K[V]^G = S(V^*)^G$ ist damit nicht Cohen-Macaulay.

Die einfachste Möglichkeit, diese beiden Punkte umzusetzen, gibt sich, wenn sich die Moduln U oder \tilde{U}^* als Tensorprodukt schreiben lassen, denn das Tensorprodukt zweier Moduln ist Untermodul (mit Komplement) der zweiten Potenz der direkten Summe. Dieses Verfahren werden wir in den folgenden Abschnitten durchführen.

6.1 Kozyklen im Grad 2

Wir betrachten den Modul mit dem Kozyklus, $U = \operatorname{Hom}_K(V, W)_0$ in Satz 5.1 und der Dimension dim $W \cdot (\dim V - \dim W) = 2(p+1-2) = 2(p-1)$ (für n=2). Nach Satz 2.11 gilt nun aber

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)_0 \cong W \otimes (V/W)^* \leq S^2 (W \oplus (V/W)^*),$$

und wir können U in (18) in Korollar 4.9 durch diese direkte Summe der Dimension 2 + (p+1-2) = p+1 ersetzen - mit der Notation im Text nach dem Beweis von Satz 5.1 also X^* durch

$$X^* := W \oplus (V/W)^* \oplus \tilde{U}^* \oplus \tilde{U}^* \oplus \tilde{U}^*$$

(und $K[X]^G$ dann nicht Cohen-Macaulay). Dies ergibt eine Dimensionsersparnis von 2(p-1)-(p+1)=p-3, oder wie schon angekündigt die Dimensionsreduktion von 8p-5 auf (8p-5)-(p-3)=7p-2. Ab $p\geq 5$ handelt es sich hier um eine echte Ersparnis. Für diese Primzahlen konnte ich ansonsten keine weiteren Beispiele finden. Wir notieren unser Ergebnis:

Satz 6.1 Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik p > 0 und einer reduktiven Zwischengruppe G von $SL_2(K)$ und $GL_2(K)$ gibt es einen G-Modul V der Dimension 7p-2 mit nicht Cohen-Macaulay Invariantenring $K[V]^G$. Dabei liegt der nichttriviale Kozyklus im Grad 2 und das annullierende phsop im Grad 1.

6.2 Beispiele für $SL_2(K)$ in Charakteristik 2

Der Ausgangspunkt für die Konstruktion ist meist ein Modul mit nichttrivialem Kozyklus. Von diesem ausgehend versucht man, möglichst kleine Moduln mit Annullatoren dazu zu addieren. Daher ist dieser Abschnitt nach den verwendeten Kozyklen gegliedert.

6.2.1 Beispiele mit dem Kozyklus in $\langle X^2, Y^2 \rangle$

Wir wollen zunächst die in Satz 5.1 und im vorigen Abschnitt auftretenden Moduln für den Fall p=n=2 etwas expliziter angeben. Setzen wir $X:=X_1,Y:=Y_2$ so ist mit den Bezeichnungen aus 5.1

$$\begin{array}{rcl} V & = & \langle X^2, Y^2, XY \rangle \\ W & = & \langle X^2, Y^2 \rangle. \end{array}$$

Die Darstellung des Moduls $U = \operatorname{Hom}_K(V, W)_0$, welcher durch 2×3 Matrizen mit Einträgen nur in der letzten Spalte beschrieben wird, erhält man aus

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

zu

$$\sigma = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{array}\right),$$

denn von der rechten Matrix wirkt blos die letzte Zeile auf die Koeffizienten x_1, x_2 . Damit ist also

$$U = \langle X^2, Y^2 \rangle,$$

vgl. Tabelle 1 (S. 19). Für \tilde{U} müssen wir noch die Operation auf $\iota \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ bestimmen. Diese erhalten wir mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ aus

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 \\ c^2 & d^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 & b^2 & bd \\ c^2 & a^2 & ac \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & ab(ad + bc) \\ 0 & 1 & cd(ad + bc) \end{pmatrix}$$

und ad + bc = 1 zu $\sigma \iota = abX^2 + cdY^2 + \iota$. Wieder anhand von Tabelle 1 erkennen wir

$$\tilde{U} = \langle X^2, Y^2, XY \rangle,$$

und der nichttriviale Kozyklus in U ist gegeben durch

$$q_{\sigma} = (\sigma - 1)XY \cong (\sigma - 1)\iota$$
.

Weiter ist dann

$$\tilde{U}^* = \langle \mu, \nu, \pi \rangle$$

(siehe wieder Tabelle 1), und π ist nach Proposition 4.6 die annullierende Invariante.

Wie steht es mit der im vorigen Abschnitt genannten Darstellung von U als Tensorprodukt? Anhand der Darstellungen von V und W sieht man sofort, dass hier $V/W \cong K$ der triviale Modul ist. Also ist

$$U = \operatorname{Hom}_K(V, W)_0 \cong W \otimes (V/W)^* \cong W \otimes K \cong W.$$

Zum einen haben wir hier nochmals ohne Rechnung U=W gesehen, zum anderen sehen wir, dass es hier keinen Sinn macht U durch die direkte Summe $U \oplus K$ zu ersetzen, weil dies offenbar keine Dimensionsersparnis gibt.

Insgesamt erhalten wir jedenfalls mit Korollar 4.9

Beispiel 6.2 (Das Beispiel nach Satz 5.1) Für Charakteristik p=2 ist mit

$$\begin{array}{cc} V^* = \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle \mu, \nu, \pi \rangle \\ bzw. & V = \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X^2, Y^2, XY \rangle \end{array}$$

der Invariantenring $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, dim V=11. Der Kozyklus im Grad 1 liegt in $\langle X^2, Y^2 \rangle$, und die drei Kopien von π bilden ein annullierendes phsop im Grad 1, welches nach dem Hauptsatz keine reguläre Sequenz ist.

Dieses Beispiel kann natürlich auch mit IsNotCohenMacaulay untersucht werden (Datei Beispiel-6.02.txt.) Nach der Abschätzung (17) (S. 48) genügt es, dmax=1+1+1+1=4 zu setzen. Der Aufruf von IsNotCohenMacaulay zeigt nach wenigen Sekunden tatsächlich, dass die Hilbertreihe bis zum grad 3 richtig geschätzt wird, aber im Grad 4 werden 33 Invarianten geschätzt, während es nur 32 sind (insbesondere wird $K[V]^G$ also wie nach Satz 3.3 erwartet als nicht Cohen-Macaulay erkannt). Dies zeigt, dass die im Hauptsatz angegebene nichttriviale Relation in diesem Fall auch (im wesentlichen) die einzige (bis zum Grad 4) ist.

Wir wollen dieses Beispiel modifizieren. Zunächst suchen wir den Modul $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ mit dem Annullator des Kozyklus als Untermodul eines einfacheren Moduls. Wir betrachten dazu das Tensorprodukt von $\langle X, Y \rangle$ mit sich selbst, welches nach Gleichung (6) auf S. 17 bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = (X \otimes X, Y \otimes Y, X \otimes Y - Y \otimes X, Y \otimes X)$$

die Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 & ab \\ c^2 & d^2 & 0 & cd \\ ac & bd & 1 & bc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (21)

besitzt (für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(K)$ mit p=2) - insbesondere erkennen wir $X\otimes Y-Y\otimes X$ als eine Invariante. In Tabelle 1 (S. 19) finden wir die Darstellung von $\langle \mu,\nu,\pi\rangle$ bzgl. der angedeuteten Basis. Vertauschen der ersten beiden Zeilen und Spalten liefert die Darstellung bzgl. der Basis (ν,μ,π) , nämlich

$$\sigma \mapsto \left(\begin{array}{ccc} a^2 & b^2 & 0 \\ c^2 & d^2 & 0 \\ ac & bd & 1 \end{array}\right).$$

Damit ist $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ Untermodul des Tensorprodukts $\langle X \otimes X, \dots, Y \otimes Y \rangle$. Die Invariante π entspricht dabei der Invarianten $X \otimes Y - Y \otimes X$, d.h. dies ist der neue Annullator. Wie wir in Abschnitt 2.3 gesehen haben, ist das Tensorprodukt selbstdual. Damit haben wir also

Beispiel 6.3 Mit

$$V^* = \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X \otimes X, X \otimes Y, Y \otimes X, Y \otimes Y \rangle$$

ist der der Invariantenring $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay. V ist selbstdual. Es ist dim V=14 und phsop und Kozyklus liegen im Grad 1, wobei die annullierenden Invarianten die drei Kopien von $X\otimes Y+Y\otimes X$ sind. \square

(siehe auch Datei Beispiel-6.03.txt).

Man kann nun natürlich hier ein bisschen rumspielen, und ein Tensorprodukt durch den Modul $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ austauschen, so dass man verschiedene, jedoch sehr ähnliche Beispiele hat (für ein Beispiel dieser Art siehe die Bemerkungen am Ende dieses Abschnitts). Interessanter ist jedoch folgende Uberlegung: Das Tensorprodukt ist ja Untermodul der zweiten symmetrischen Potenz $S^{2}(\langle X,Y\rangle \oplus \langle X,Y\rangle)$. Wir können das Tensorprodukt also durch $\langle X,Y\rangle \oplus$ $\langle X, Y \rangle$ ersetzen, bekommen dann also annullierende Invarianten im Grad 2. Wir müssen nun aber nicht jedes der drei Tensorprodukte durch solch eine direkte Summe ersetzen, denn es reicht ja, wenn wir ein phsop an annullierenden Invarianten haben. Die zweite Potenz von $\langle X, Y \rangle \oplus \langle X, Y \rangle \oplus \langle X, Y \rangle$ enthält z.B. schon drei Kopien des Tensorprodukts (jeweils für die zweite Potenz von zwei Summanden), aber leider bilden die Invarianten hier kein phsop, wie man sich z.B. leicht mit MAGMA überzeugt. Erst bei vier Summanden von $\langle X, Y \rangle$ (wo die zweite Potenz dann 6 Kopien des Tensorprodukts enthält), bilden drei der Invarianten der Form $X_1Y_2 + X_2Y_1$ ein annullierendes phsop (wie man wieder mit MAGMA bestätigen kann). Aus dem Hauptsatz folgt dann eines der Hauptresultate dieser Arbeit:

Beispiel 6.4 (Das Hauptbeispiel in Dimension 10) Mit

$$V^* = \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle$$

ist der der Invariantenring $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay. V ist selbst-dual. Es ist dim V=10 und der Kozyklus liegt im Grad 1 im Untermodul $\langle X^2, Y^2 \rangle$. Ein phsop an annullierenden Invarianten im Grad 2 ist beispielsweise gegeben durch f_{12} , f_{23} , f_{34} mit $f_{ij}=X_iY_j+X_jY_i$, und dieses ist nach dem Hauptsatz nicht regulär.

Wenn man dieses Beispiel mit IsNotCohenMacaulay untersucht (Datei Beispiel-6.04.txt), muss man nach (17) mindestens dmax:=1+2+2+2=7 setzen, denn das phsop liegt nun im Grad 2. Man muss also Invarianten bis zum Grad 7 berechnen! Mit dem nicht modifizierten Bayer-Algorithmus dauert das sehr lange (IsNotCohenMacaulay rechnet dann etwa 3 Stunden). Übergibt man jedoch den Gewichtsvektor w und berechnet also vorab die Invarianten des Torus, so erkennt IsNotCohenMacaulay dieses Beispiel in etwa einer halben Minute als nicht Cohen-Macaulay. Bis zum Grad 6 stimmt dann die geschätzte mit der tatsächlichen Hilbertreihe überein, für den Grad 7 dagegen werden 77 Basis-Invarianten geschätzt, wobei es nur 76 sind. Wieder ein Indiz, dass die im Hauptsatz angegebene Relation bis zum untersuchten Grad die einzige ist.

Hier noch eine Interpretation der verwendeten Invariante als Determinante: Wir betrachten die zweifache Summe des natürlichen Moduls, $\langle X_1, Y_1 \rangle \oplus \langle X_2, Y_2 \rangle$, und bilden über dem Polynomring $K[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ die 2×2 -Matrix $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$ mit Determinante $X_1Y_2 - X_2Y_1$. Linksmultiplikation dieser Matrix mit $\sigma^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(K)$ liefert die Matrix $\begin{pmatrix} \sigma X_1 & \sigma X_2 \\ \sigma Y_1 & \sigma Y_2 \end{pmatrix}$ mit Determinante $(\sigma X_1)(\sigma Y_2) - (\sigma X_2)(\sigma Y_1) = \sigma(X_1Y_2 - X_2Y_1)$. Da jedoch det $\sigma = 1$, hat sich nach dem Determinantenmultiplikationssatz die Determinante nicht verändert, d.h. $X_1Y_2 - X_2Y_1$ ist invariant.

Wir geben noch eine der bereits erwähnten Spielereien an: Mit

$$V^* = \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X, Y \rangle \oplus \langle \mu, \nu, \pi \rangle$$

ist der der Invariantenring $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay - zwei der annullierenden Invarianten liegen in zweiter Potenz und eine in der Ersten. Die Dimension dieses Beispiels ist 11.

6.2.2 Beispiele mit dem Kozyklus in $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$

Wir konstruieren aus dem zu Bemerkung 4.7 gehörigen Verfahren einen Kozyklus aus der Invarianten $X \otimes Y - Y \otimes X$ des Tensorprodukts. Zunächst sei die Charakteristik p hier noch beliebig. Wir beschreiben das Tensorprodukt $\langle X,Y\rangle \otimes \langle -Y,X\rangle$ gemäß Lemma 2.9 durch Matrizen, wobei wir für den ersten Faktor die Basis (X,Y) und für den zweiten die Basis (-Y,X) (entspricht

der Dualbasis (X^*, Y^*) und damit die Darstellung

$$\sigma \mapsto \left(\begin{array}{cc} d & -c \\ -b & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)^{-T}$$

verwenden wollen. Auf den Koordinatenmatrizen des Tensorprodukts haben wir dann nach Lemma 2.9 die Operation

$$\sigma \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-TT}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}.$$

Der Invarianten $X\otimes Y-Y\otimes X=-X\otimes (-Y)-Y\otimes X$ entspricht die Koordinatenmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I_2$. Da die Einheitsmatrix unter Konjugation mit Matrizen invariant ist, sieht man hier auch nochmal schön, dass $X\otimes Y-Y\otimes X$ invariant ist. Die Spur einer Matrix X ist unter Konjugation ebenfalls invariant, daher bilden die Matrizen mit Spur 0 einen $\mathrm{SL}_2(K)$ - invarianten Unterraum der Kodimension 1. Im Falle $p\neq 2$ ist $\mathrm{Spur}(-I_2)=-2\neq 0$, und die spurlosen Matrizen bilden ein $\mathrm{SL}_2(K)$ -invariantes Komplement zu $K\cdot I_2$. Dies bedeutet nach Bemerkung 4.7, dass der aus der Invarianten $X\otimes Y-Y\otimes X$ konstruierte Kozyklus trivial ist. Im Fall p=2 hat die zu dieser Invarianten gehörende Koordinatenmatrix ebenfalls Spur 0 - es gibt also eine Chance, dass sie kein Komplement hat. Wir zeigen nun einfach direkt, dass der entstehende Kozyklus nichttrivial ist: Wie wir gesehen haben, hat das Tensorprodukt

$$\tilde{V}^* := (X \otimes X, Y \otimes Y, X \otimes Y - Y \otimes X, Y \otimes X)$$

bzgl. der angedeuteten Basis die Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 & ab \\ c^2 & d^2 & 0 & cd \\ ac & bd & 1 & bc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit die Invariante das letzte Basiselement ist, vertauschen wir die letzten beiden Zeilen und Spalten und erhalten

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab & 0 \\ c^2 & d^2 & cd & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ac & bd & bc & 1 \end{pmatrix}.$$
 (22)

Wir gehen zum Dual \tilde{V} über, indem wir invertieren (d.h. an der Stelle $\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ auswerten) und transponieren; das ergibt

$$\begin{pmatrix}
d^2 & c^2 & 0 & cd \\
b^2 & a^2 & 0 & ab \\
bd & ac & 1 & bc \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$
(23)

Vertauschen der ersten beiden Zeilen und Spalten liefert wieder die Ausgangsmatrix. Die letzte Spalte beschreibt dann jedenfalls einen nichttrivialen Kozyklus im Untermodul $V = \langle \mu, \nu, \pi \rangle$ des (selbstdualen) Tensorprodukts: Sonst gäbe es nämlich $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in K^3$ mit

$$\left(\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 \\ c^2 & d^2 & 0 \\ ac & bd & 1 \end{pmatrix} - I_3 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ cd \\ bc \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(K).$$

Betrachtet man hiervon nur die ersten beiden Zeilen, so wäre auch der Kozyklus $\sigma \mapsto (\sigma - 1)XY$ in $U := \langle X^2, Y^2 \rangle$ trivial - siehe die Darstellung von $\tilde{U} = \langle X^2, Y^2, XY \rangle$ in Tabelle 1. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, ist dies jedoch nicht der Fall, also ein Widerspruch.

Es gibt noch zwei andere Möglichkeiten einzusehen, dass der betrachtete Kozyklus nichttrivial ist (die aber letztendlich auf dieselbe Rechnung hinausführen):

Zum einen kann man den Kozyklus auch im Faktormodul $\langle X^2, Y^2 \rangle = \langle \mu, \nu, \pi \rangle / \langle \pi \rangle$ von $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ betrachten. Da er hier nichttrivial ist (wieder aufgrund des vorigen Abschnitts), ist er es erst recht in $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$.

Oder man stellt fest, dass der betrachtete Kozyklus gemäß Lemma 4.7 zu der Invarianten $\pi\cong X\otimes Y-Y\otimes X$ im Tensorprodukt gehört. Diese hat jedoch bereits im Untermodul $\langle \mu,\nu,\pi\rangle$ des Tensorprodukts kein Komplement, denn der der Invarianten π in $\langle \mu,\nu,\pi\rangle$ nach Lemma 4.7 zugehörige Kozyklus in $\langle X^2,Y^2\rangle$ ist ja (wieder nach vorigem Abschnitt) nichttrivial. Also hat π nach Bemerkung 4.4 erst recht kein Komplement im größeren Modul, dem Tensorprodukt, und wieder nach Lemma 4.7 ist dann der zugehörige Kozyklus in $\langle \mu,\nu,\pi\rangle$ nichttrivial.

Zusammengefasst: Der Modul $V = \langle \mu, \nu, \pi \rangle$ enthält einen nichttrivialen Kozyklus, der V erweitert zum Tensorprodukt $\tilde{V} = \langle X \otimes X, \dots, Y \otimes Y \rangle$. Der Annullator im Dual $\tilde{V}^* = \tilde{V}$ ist gegeben durch $X \otimes Y - Y \otimes X$.

Aus Korollar 4.9 erhalten wir also sofort

Beispiel 6.5 Für Charakteristik p=2 ist mit

$$V^* = \langle \mu, \nu, \pi \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X \otimes X, X \otimes Y, Y \otimes X, Y \otimes Y \rangle$$
 bzw.
$$V = \langle X^2, Y^2, XY \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X \otimes X, X \otimes Y, Y \otimes X, Y \otimes Y \rangle$$

der Invariantenring $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, wobei dim V=15. Der Kozyklus liegt im Grad 1 im Untermodul $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$, und ein phsop an annullierenden Invarianten im Grad 1, (welches keine reguläre Sequenz ist), bilden die drei Kopien der $X \otimes Y - Y \otimes X$.

Für IsNotCohenMacaulay (siehe Datei Beispiel-6.05.txt) muss man (nach (17 auf S. 48) also wieder dmax:=4 setzen. Der Koeffizient der Hilbertreihe zum Grad 4 wird geschätzt zu 143, während er nur 142 ist.

Mit der Diskussion im vorigen Abschnitt, wo wir das Tensorprodukt in einer zweiten Potenz wiederfanden, erhalten wir aus dem Hauptsatz

Beispiel 6.6 Für Charakteristik p=2 ist mit

$$V^* = \langle \mu, \nu, \pi \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle$$
bzw.
$$V = \langle X^2, Y^2, XY \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle$$

der Invariantenring $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay. Es ist dim V=11 und der Kozyklus liegt im Untermodul $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ im Grad 1. Ein phsop an annullierenden Invarianten im Grad 2, welches keine reguläre Sequenz ist, ist beispielsweise gegeben durch f_{12} , f_{23} , f_{34} mit $f_{ij} = X_i Y_j + X_j Y_i$.

Da das ph
sop im Grad 2 liegt, muss man bei *IsNotCohenMacaulay* (siehe Datei Beispiel-6.06.txt) nun also dmax:=7 setzen. Auch hier führt die Angabe des Gewichtsvektors w wieder zu einer enormen Beschleunigung. Der Koeffizient der Hilbertreihe zum Grad 7 wird dann geschätzt zu 193, während er nur 192 ist.

6.2.3 Kozyklus und Invariante in einem

Wir wollen noch einmal das Verfahren nach Bemerkung 4.7 anwenden, ausgehend von einer Invarianten einen Modul mit nichttrivialem Kozyklus zu konstruieren. Wir betrachten die zweite symmetrische Potenz \tilde{U}^* des Moduls $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$, wobei π^2 die annullierende Invariante werden soll. Ausgehend von der Darstellung von $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$,

$$\sigma \mapsto \left(\begin{array}{ccc} d^2 & c^2 & 0 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ bd & ac & 1 \end{array}\right)$$

berechnen wir die Darstellung von $\langle \mu\nu, \mu^2, \nu^2, \mu\pi, \nu\pi, \pi^2 \rangle$:

$$\sigma(\mu\nu) = (d^{2}\mu + b^{2}\nu + bd\pi)(c^{2}\mu + a^{2}\nu + ac\pi)
= \mu\nu + c^{2}d^{2}\mu^{2} + a^{2}b^{2}\nu^{2} + (acd^{2} + bc^{2}d)\mu\pi + (acb^{2} + a^{2}bd)\nu\pi + abcd\pi^{2}
\cong (1, c^{2}d^{2}, a^{2}b^{2}, cd, ab, abcd)^{T}$$

$$\begin{array}{rcl}
\sigma(\mu^2) & = & (d^2\mu + b^2\nu + bd\pi)^2 \\
& = & d^4\mu^2 + b^4\nu^2 + b^2d^2\pi^2 \\
& \cong & (0, d^4, b^4, 0, 0, b^2d^2)^T
\end{array}$$

$$\sigma(\nu^2) = (c^2\mu + a^2\nu + ac\pi)^2
= c^4\mu^2 + a^4\nu^2 + a^2c^2\pi^2
\cong (0, c^4, a^4, 0, 0, a^2c^2)^T$$

Die Berechnung der letzten drei Spalten ist einfach, denn $\langle \mu, \nu, \pi \rangle \cong \langle \mu \pi, \nu \pi, \pi^2 \rangle$. Also hat $\tilde{U}^* = \langle \mu \nu, \mu^2, \nu^2, \mu \pi, \nu \pi, \pi^2 \rangle$ die Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^2 d^2 & d^4 & c^4 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 b^2 & b^4 & a^4 & 0 & 0 & 0 \\ cd & 0 & 0 & d^2 & c^2 & 0 \\ ab & 0 & 0 & b^2 & a^2 & 0 \\ abcd & b^2 d^2 & a^2 c^2 & bd & ac & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Invertieren (auswerten an $\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$) und Transponieren gehen wir zum Dual \tilde{U} über, mit der Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a^2c^2 & b^2d^2 & ac & bd & abcd \\ 0 & a^4 & b^4 & 0 & 0 & a^2b^2 \\ 0 & c^4 & d^4 & 0 & 0 & c^2d^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & b^2 & ab \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Spalte gehört dabei wieder zu einem nichttrivialen Kozyklus. Dies sieht man mit dem selben Argument wie im letzten Abschnitt durch betrachten der letzten drei Zeilen: Wäre der Kozyklus ein Korand, so wäre erst recht der Kozyklus $\sigma \mapsto (\sigma-1)XY$ in $\langle X^2, Y^2 \rangle$ ein Korand, was dieser aber nicht ist.

Vertauschen wir in der Darstellung von \tilde{U} jeweils die Zeilen/Spalten $1\leftrightarrow 6, 2\leftrightarrow 3, 4\leftrightarrow 5$, so erhalten wir wieder die Darstellung von \tilde{U}^* - dieser Modul ist also selbstdual.

Damit ist durch $\sigma \mapsto (\sigma - 1)\mu\nu$ ein nichttrivialer Kozyklus in $U := \langle \mu^2, \nu^2, \mu\pi, \nu\pi, \pi^2 \rangle$ gegeben, der von der Invarianten π^2 in $\tilde{U}^* = S^2 \left(\langle \mu, \nu, \pi \rangle \right)$ annulliert wird. Da die zweite Potenz von U wegen $\langle \mu, \nu, \pi \rangle \cong \langle \mu\pi, \nu\pi, \pi^2 \rangle$ einen zu \tilde{U}^* isomorphen Untermodul enthält, genügt es also diesmal, blos zwei Annullatoren von aussen dazu zu addieren. Insgesamt folgt also mit dem Hauptsatz:

Beispiel 6.7 Für Charakteristik p=2 ist mit

$$V^* = \langle \mu_1^2, \nu_1^2, \mu_1 \pi_1, \nu_1 \pi_1, \pi_1^2 \rangle \bigoplus_{i=2}^3 \langle \mu_i, \nu_i, \pi_i \rangle$$

der Invariantenring $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, wobei $\dim V = 11$. Der Kozyklus liegt im Grad 1 im Untermodul $\langle \mu_1^2, \nu_1^2, \mu_1 \pi_1, \nu_1 \pi_1, \pi_1^2 \rangle$, und ein phsop an annullierenden Invarianten im Grad 2 (welches keine reguläre Sequenz ist), ist gegeben durch $(\pi_1^2)^2, \pi_2^2, \pi_3^2$.

Wir überprüfen dieses Beispiel wieder mit IsNotCohenMacaulay (Datei Beispiel-6.07.txt). Hier ist Folgendes zu beachten: Das phsop, das keine reguläre Sequenz ist, ist gegeben durch $(\pi_1^2)^2, \pi_2^2, \pi_3^2$. Da jedoch auch $(\pi_1^2), \pi_2, \pi_3$ invariant ist, wird IsNotCohenMacaulay nun diese Elemente in sein phsop mit aufnehmen (und die zweiten Potenzen sind damit fürs phsop blockiert). Eine Möglichkeit, dies zu umgehen, wäre den Parameter mdp (den ich ursprünglich aufgrund dieses Beispiels eingeführt hatte) von IsNotCohen-Macaulay auf 2 zu setzen, damit gegebenenfalls erst das phop ab Grad 2 gesucht wird. Allerdings ist dies nicht nötig: Nach Lemma 2.30 ist nämlich auch das phop in erster Potenz keine reguläre Sequenz (was von IsNotCohenMacaulay erkannt wird, sofern es das phop findet - und das tut es). Es ist hier nicht von vorneherein klar, wir groß man nun dmax setzen muss, denn die im Hauptsatz gegebene Relation war ja für das phsop im Grad 2 nichttrivial, jedoch zeigt sich, dass auch hier Grad 7 = 1 + 2 + 2 + 2 genügt. Der entsprechende Koeffizient der Hilbertreihe wird dann zu 120 geschätzt, während er nur 119 ist.

6.2.4 Verheftung an Invarianten

Anstatt benötigte Untermoduln einfach als direkte Summanden dazu zu nehmen, kann man sie auch durch verheften (siehe Abschnitt 2.2.5) hinzunehmen. Dabei muss man jedoch aufpassen, dass man die phsop-Eigenschaft der annullierenden Invarianten nicht zerstört (wenn man zwei annullierende Invarianten durch Verheften zu einer verschmilzt, hat man offenbar eine

weniger!) bzw. dass nichttriviale Kozyklen dies auch nach der Verheftung bleiben. Wir geben ein Beispiel für dieses Verfahren:

Wir starten mit dem 13-dimensionalen Modul

$$V^* = \langle \mu, \nu, \pi \rangle \oplus \langle X \otimes X, ..., Y \otimes Y \rangle \bigoplus_{i=1}^{3} \langle X_i, Y_i \rangle$$

mit $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay; der nichttriviale Kozyklus liegt dabei im ersten Summanden, und die drei Annullatoren sind gegeben durch $X \otimes Y + Y \otimes X, X_1Y_2 + X_2Y_1, X_2Y_3 + X_3Y_2$. Die Invariante π des ersten Summanden wird jedoch nicht zur Annullation benötigt. Wir können daher die ersten beiden Summanden an ihren Invarianten (genauer: an dem von den Invarianten erzeugten eindimensionalen Untermoduln) zu einem einzigen Modul verheften. Die Verheftung der beiden Darstellungen

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} d^2 & c^2 & 0 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ bd & ac & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab & 0 \\ c^2 & d^2 & cd & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ac & bd & bc & 1 \end{pmatrix}$$

(siehe Tabelle 1 bzw. (22) auf S. 61) an der gemeinsamen Invarianten führt dann zu einem Modul U mit der Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} d^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^2 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & b^2 & ab & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & d^2 & cd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ bd & ac & ac & bd & bc & 1 \end{pmatrix}.$$

Um zu sehen, dass der Kozyklus nichttrivial bleibt, erweitern wir U mit Hilfe des Kozyklus (siehe (23) auf S. 62) zu \tilde{U} mit der Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} d^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & cd \\ b^2 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & a^2 & b^2 & ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & d^2 & cd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ bd & ac & ac & bd & bc & 1 & bc \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dass dieser Kozyklus nichttrivial ist, sehen wir wieder sofort durch Betrachtung der ersten beiden Zeilen, denn bereits $\sigma \mapsto (\sigma - 1)XY$ ist nichttrivial in $\langle X^2, Y^2 \rangle$. Wir erhalten also

67

Beispiel 6.8 Für Charakteristik p=2 ist mit

$$V^* = U \bigoplus_{i=1}^{3} \langle X_i, Y_i \rangle$$

 $der\ Invariantenring\ K[V]^{SL_2(K)}\ nicht\ Cohen-Macaulay,\ wobei\ dim\ V=12.$ Dabei ist U die Verheftung von $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ und $\langle X \otimes X, ..., Y \otimes Y \rangle$ an den Invarianten π bzw. $X \otimes Y + Y \otimes X$. Der Kozyklus liegt im Grad 1 im Untermodul U, und dort liegt auch eine der annullierenden Invarianten. Zwei weitere annullierende Invarianten im Grad 2 sind gegeben durch $X_1Y_2+X_2Y_1, X_2Y_3+X_3Y_2$.

Gegenüber dem Ausgangsmodul haben wir also eine Dimension gespart.

Aufgrund des phsop in den Graden 1, 2, 2 muss man dmax:=1+1+2+2=6 für IsNotCohenMacaulay setzen (Datei Beispiel-6.08.txt). Im Grad 6 werden dann 137 Invarianten erwartet, während es nur 136 sind.

6.3 Beispiele für $SL_2(K)$ in Charakteristik 3

Wir beginnen wieder damit, dass wir den nach Satz 5.1 gegebenen Modul mit nichttrivialem Kozyklus explizit berechnen. Wir verwenden die dortige Notation bis auf $X := X_1$ und $Y := X_2$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} V &:=& S^3(\langle X,Y\rangle) = \langle X^3,Y^3,X^2Y,XY^2\rangle \\ \text{und } W &:=& \langle X^3,Y^3\rangle. \end{array}$$

Als erstes berechnen wir die Darstellung auf V. Mit $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{array}{rcl} \sigma \cdot X^3 & = & (aX + cY)^3 = a^3X^3 + c^3Y^3 \\ & \cong & (a^3, c^3, 0, 0)^T \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma \cdot Y^3 & = & (bX + dY)^3 = b^3 X^3 + d^3 Y^3 \\ & \cong & (b^3, d^3, 0, 0)^T \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma \cdot X^2 Y & = & (aX+cY)^2(bX+dY) = (a^2X^2+c^2Y^2-acXY)(bX+dY) \\ & = & (a^2bX^3+c^2dY^3+a(ad-bc)X^2Y-c(ad-bc)XY^2) \\ & \cong & (a^2b,c^2d,a,-c)^T \end{array}$$

$$\sigma \cdot XY^{2} = (aX + cY)(bX + dY)^{2} = (aX + cY)(b^{2}X^{2} + d^{2}Y^{2} - bdXY)
= (ab^{2}X^{3} + cd^{2}Y^{3} - b(ad - bc)X^{2}Y + d(ad - bc)XY^{2})
\cong (ab^{2}, cd^{2}, -b, d)^{T},$$
(24)

so dass die Darstellung auf V gegeben ist durch

$$\sigma \mapsto A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a^3 & b^3 & a^2b & ab^2 \\ c^3 & d^3 & c^2d & cd^2 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \end{pmatrix}.$$

Die linke obere Teilmatrix beschreibt dabei die Darstellung auf W, die rechte untere Teilmatrix die auf V/W. Durch auswerten an

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array}\right)$$

und transponieren erhalten wir für $(V/W)^*$ die Darstellung $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$, was die Darstellung von $\langle Y, X \rangle$ ist. Damit haben wir also $(V/W)^* \cong \langle X, Y \rangle$, und für den Modul mit dem Kozyklus U nach Satz 5.1 gilt dann mit Satz 2.11

$$U = \operatorname{Hom}_K(V, W)_0 \cong W \otimes (V/W)^* = \langle X^3, Y^3 \rangle \otimes \langle X, Y \rangle.$$

Da wir das Tensorprodukt als Untermodul der zweiten Potenz der direkten Summe wiederfinden, also später U durch $\langle X^3,Y^3\rangle \oplus \langle X,Y\rangle$ ersetzen können, erhalten wir so einen Kozyklus in Grad 2 - leider hat die Summe hier jedoch dieselbe Dimension wie das Tensorprodukt, nämlich 4. Dies führt hier also nur zu einer Strukturvereinfachung und noch nicht zu einer niedrigeren Dimension. Wir berechnen nun die Darstellungen von U und \tilde{U} . Dazu identifizieren wir

$$U := \mathrm{Hom}_K(V, W)_0 = \{ f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) : f|_W = 0 \}$$

mit Darstellungsmatrizen der Form

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{array}\right).$$

Die entsprechende Operation hierauf ist dann gegeben durch

$$\sigma \cdot \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{array} \right) A_{\sigma^{-1}}.$$

Von $A_{\sigma^{-1}}$ ist hierfür nur der rechte untere Block interessant, so dass wir letztendlich die Operation

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}^T$$

erhalten. Wir haben also nach Lemma 2.9 eine Darstellung von $\langle X^3, Y^3 \rangle \otimes \langle Y, X \rangle$, wobei die Koordinaten $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ zu $x_1 X^3 \otimes Y + x_2 X^3 \otimes X + x_3 Y^3 \otimes Y + x_4 Y^3 \otimes X$ gehören. Bezüglich dieser Koordinaten hat dann jedenfalls U nach Lemma 2.12 die Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3d & a^3c & b^3d & b^3c \\ a^3b & a^4 & b^4 & ab^3 \\ c^3d & c^4 & d^4 & cd^3 \\ bc^3 & ac^3 & bd^3 & ad^3 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Dies ist auch die Darstellungsmatrix des Untermoduls $\langle X^3Y, X^4, Y^4, XY^3 \rangle$ von $S^4(\langle X, Y \rangle)$, wie man anhand des durch $X^3 \otimes Y \mapsto X^3Y$, $X^3 \otimes X \mapsto X^4$, $Y^3 \otimes Y \mapsto Y^4$, $Y^3 \otimes X \mapsto XY^3$ gegebenen Isomorphismus erkennt. Wir benötigen noch die Darstellung des Kozyklus, die wir gemäß Satz 5.1 aus

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{\sigma^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} a^3 & b^3 & 0 & 0 \\ c^3 & d^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^3 & -b^3 & -bd^2 & b^2d \\ -c^3 & a^3 & ac^2 & -a^2c \\ 0 & 0 & d & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & ab^3c^2 - a^3bd^2 & a^3b^2d - a^2b^3c \\ 0 & 1 & ac^2d^3 - bc^3d^2 & b^2c^3d - a^2cd^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -ab(ad + bc) & a^2b^2 \\ 0 & 1 & c^2d^2 & -cd(ad + bc) \end{pmatrix}$$

zu

$$g_{\sigma} \cong (-ab(ad+bc), a^2b^2, c^2d^2, -cd(ad+bc))^T$$

erhalten. Für die Darstellung auf \tilde{U} erhalten wir damit

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a^{3}d & a^{3}c & b^{3}d & b^{3}c & -ab(ad+bc) \\ a^{3}b & a^{4} & b^{4} & ab^{3} & a^{2}b^{2} \\ c^{3}d & c^{4} & d^{4} & cd^{3} & c^{2}d^{2} \\ bc^{3} & ac^{3} & bd^{3} & ad^{3} & -cd(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (26)

Um diesen Kozyklus in $\langle X^3Y, X^4, Y^4, XY^3 \rangle$ zu interpretieren, berechnen wir in $S^4(\langle X, Y \rangle)$

$$\begin{split} \sigma \cdot X^2 Y^2 &= (aX + cY)^2 (bX + dY)^2 \\ &= (a^2 X^2 + c^2 Y^2 - acXY) (b^2 X^2 + d^2 Y^2 - bdXY) \\ &= -(ab^2 c + a^2 bd) X^3 Y + a^2 b^2 X^4 + c^2 d^2 Y^4 + \\ &- (acd^2 + bc^2 d) XY^3 + (a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd) X^2 Y^2 \\ &= -ab(ad + bc) X^3 Y + a^2 b^2 X^4 + c^2 d^2 Y^4 - cd(ad + bc) XY^3 + X^2 Y^2. \end{split}$$

Der Kozyklus entspricht also $\sigma \mapsto (\sigma - 1)X^2Y^2$.

Zusammenfassung 6.9 Der Untermodul $U := \langle X^4, X^3Y, XY^3, Y^4 \rangle$ von $\tilde{U} = \langle X^4, X^3Y, X^2Y^2, XY^3, Y^4 \rangle = S^4(\langle X, Y \rangle)$ hat einen nichttrivialen Kozyklus, der durch $g_{\sigma} := (\sigma - 1)X^2Y^2$ gegeben ist. Es ist

$$U \cong \langle X^3, Y^3 \rangle \otimes \langle X, Y \rangle \leq S^2 \left(\langle X^3, Y^3 \rangle \oplus \langle X, Y \rangle \right).$$

U ist selbstdual, da es die Faktoren $\langle X^3, Y^3 \rangle$ und $\langle X, Y \rangle$ des Tensorprodukts sind. Eine Darstellung von \tilde{U} ist gegeben durch (26).

Nach Satz 4.9 ist dann also mit

$$\begin{array}{rcl} V^* &:= & \langle X^4, X^3Y, XY^3, Y^4 \rangle \oplus_{i=1}^3 \tilde{U}^* \\ \text{bzw. } V^* &:= & \langle X^3, Y^3 \rangle \oplus \langle X, Y \rangle \oplus_{i=1}^3 \tilde{U}^* \end{array}$$

 $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, wobei der Kozyklus im Grad 1 bzw. 2 liegt und die Invarianten beide Male im Grad 1. Die Dimension ist ebenfalls in beiden Fällen gleich 19. Dies alles stellt bis jetzt blos das Beispiel aus Satz 6.1 in expliziter Form dar. Wir testen wieder mit IsNotCohenMacaulay (Datei Beispiel-6.09.txt). Im Fall der Kozyklen im Grad 1 (dmax:=4) gibt es keine große Überraschung - im Grad 4 werden 60 Invarianten geschätzt, während es nur 59 sind. Bei dem Beispiel mit Kozyklus im Grad 2 (also dmax:=5 nach (17), S. 48) werden im Grad 5 dagegen 102 (Basis-)Invarianten geschätzt, aber es sind nur 98! Es muss hier also weitere Relationen geben. Für dieses Beispiel benötigt IsNotCohenMacaulay übrigens bereits gut eine viertel Stunde.

Wir wollen nun die Dimension weiter reduzieren, indem wir \tilde{U}^* in einer zweiten Potenz suchen. Zunächst berechnen wir die Darstellung von \tilde{U}^* , indem wir (26) invertieren (an der Stelle $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ auswerten) und transponieren zu

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} ad^3 & -bd^3 & -ac^3 & bc^3 & 0\\ -cd^3 & d^4 & c^4 & -c^3d & 0\\ -ab^3 & b^4 & a^4 & -a^3b & 0\\ b^3c & -b^3d & -a^3c & a^3d & 0\\ bd(ad+bc) & b^2d^2 & a^2c^2 & ac(ad+bc) & 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Als nächste betrachten wir den Modul $M:=\langle X^2,Y^2,XY\rangle.$ Dieser hat nach Tabelle 1 die Darstellung

$$\sigma \mapsto \left(\begin{array}{ccc} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ -ac & -bd & ad + bc \end{array} \right).$$

Die Darstellung des Duals ist damit gegeben durch

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} d^2 & c^2 & cd \\ b^2 & a^2 & ab \\ -bd & -ac & ad + bc \end{pmatrix}.$$

Durch Vertauschen der ersten beiden Zeilen und Spalten erhält man wieder die Darstellung von M, so dass dieser Modul selbstdual ist. Wir berechnen nun

$$S^{2}(M) = \langle (XY)Y^{2}, -(Y^{2})^{2}, -(X^{2})^{2}, (XY)X^{2}, X^{2}Y^{2} - (XY)^{2}, (XY)^{2} \rangle$$

bezüglich der angedeuteten Basis (man unterscheide hier $(XY)^2$ und X^2Y^2 !). Wir erhalten

$$\begin{split} \sigma \cdot (XY)Y^2 &= (abX^2 + cdY^2 + (ad + bc)XY)(b^2X^2 + d^2Y^2 - bdXY) \\ &= (XY)Y^2(ad^3 + bcd^2 - bcd^2) - (Y^2)^2(-cd^3) - (X^2)^2(-ab^3) + \\ &+ (XY)X^2(ab^2d + b^3c - ab^2d) + (X^2Y^2)(abd^2 + b^2cd) + \\ &- (XY)^2(abd^2 + b^2cd) \\ &\cong (ad^3, -cd^3, -ab^3, b^3c, bd(ad + bc), 0)^T \end{split}$$

$$\begin{array}{lll} \sigma \cdot - (Y^2)^2 & = & -(b^2 X^2 + d^2 Y^2 - b d X Y)^2 \\ & = & (XY) Y^2 (-b d^3) - (Y^2)^2 (d^4) - (X^2)^2 (b^4) + (XY) X^2 (-b^3 d) + \\ & & + X^2 Y^2 (b^2 d^2) - (XY)^2 (b^2 d^2) \\ & \cong & (-b d^3, d^4, b^4, -b^3 d, b^2 d^2, 0)^T \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sigma \cdot - (X^2)^2 & = & -(a^2X^2 + c^2Y^2 - acXY)^2 \\ & = & (XY)Y^2(-ac^3) - (Y^2)^2(c^4) - (X^2)^2(a^4) + (XY)X^2(-a^3c) + \\ & & + X^2Y^2(a^2c^2) - (XY)^2(a^2c^2) \\ & \cong & (-ac^3, c^4, a^4, -a^3c, a^2c^2, 0)^T \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sigma \cdot (XY)X^2 &=& (abX^2 + cdY^2 + (ad + bc)XY)(a^2X^2 + c^2Y^2 - acXY) \\ &=& (XY)Y^2(ac^2d + bc^3 - ac^2d) - (Y^2)^2(-c^3d) - (X^2)^2(-a^3b) + \\ && + (XY)X^2(a^3d + a^2bc - a^2bc) + (X^2Y^2)(abc^2 + a^2cd) + \\ && - (XY)^2(a^2cd + abc^2) \\ &\cong& (bc^3, -c^3d, -a^3b, a^3d, ac(ad + bc), 0)^T \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sigma \cdot (X^2Y^2 - (XY)^2) &=& (a^2X^2 + c^2Y^2 - acXY)(b^2X^2 + d^2Y^2 - bdXY) + \\ &- (abX^2 + cdY^2 + (ad + bc)XY)^2 \\ &=& (X^2)^2(a^2b^2 - (ab)^2) + (Y^2)^2(c^2d^2 - (cd)^2) + \\ &+ (XY)^2(4abcd - (ad + bc)^2) + \\ &+ X^2Y^2(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd) \\ &+ (XY)X^2(-a^2bd - ab^2c + a^2bd + ab^2c) + \\ &+ (XY)Y^2(-acd^2 - bc^2d + acd^2 + bc^2d) + \\ &\cong& (0,0,0,0,1,0)^T \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sigma \cdot (XY)^2 &=& (abX^2 + cdY^2 + (ad+bc)XY)^2 \\ &=& (XY)Y^2(-cd(ad+bc)) - (Y^2)^2(-c^2d^2) - (X^2)^2(-a^2b^2) + \\ && + (XY)X^2(-ab(ad+bc)) + \\ && + (X^2Y^2 - (XY)^2)(-abcd) + (XY)^2((ad+bc)^2 - 4abcd) \\ &\cong& (-cd(ad+bc), -c^2d^2, -a^2b^2, -ab(ad+bc), -abcd, 1)^T. \end{array}$$

Eine Darstellung auf $S^2(M)$ ist damit gegeben durch

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} ad^3 & -bd^3 & -ac^3 & bc^3 & 0 & -cd(ad+bc) \\ -cd^3 & d^4 & c^4 & -c^3d & 0 & -c^2d^2 \\ -ab^3 & b^4 & a^4 & -a^3b & 0 & -a^2b^2 \\ b^3c & -b^3d & -a^3c & a^3d & 0 & -ab(ad+bc) \\ bd(ad+bc) & b^2d^2 & a^2c^2 & ac(ad+bc) & 1 & -abcd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Durch Vergleich mit (27) erkennen wir \tilde{U}^* als Untermodul von $S^2(\langle X^2, Y^2, XY \rangle)$.

Außerdem ist mit der letzten Spalte ein neuer Kozyklus entstanden. Er ist nichttrivial, wie man durch betrachten der ersten vier Zeilen sieht: Vertauscht man nämlich in (26) (mit nichttrivialen Kozyklus) die Zeilen/Spalten $1\leftrightarrow 4, 2\leftrightarrow 3$ und multipliziert dann die Zeilen/Spalten 2,3 mit -1, so erhält man dieselben vier Zeilen wie hier - und da dort der Kozyklus nichttrivial ist, muss er es auch hier sein. Aufgrund der hohen Dimension dieses Moduls wird dies jedoch hier nicht weiter verfolgt.

Übrigens ist $S^2(M)$ selbstdual. Denn vertauscht man in der invertierten und transponierten Darstellungsmatrix die Zeilen/Spalten $1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3, 5 \leftrightarrow 6$ und Multipliziert die Zeilen/Spalten 2, 3 mit -1, so erhält man wieder die Ausgangsmatrix.

Man kann die ganze Rechnung auch für allgemeines p durchführen: Dabei ist stets $X^2Y^2-(XY)^2$ eine Invariante. Für $p\neq 3$ ist der zugehörige Kozyklus jedoch trivial. Rechts unten in der obigen Matrix steht dann außerdem keine 1 mehr, so dass auch kein neuer Kozyklus entsteht.

Nach all diesen negativ-Berichten nun aber zurück zu unserem positiven Ergebnis - wir haben den Modul \tilde{U}^* mit der annullierenden Invariante in der zweiten Potenz von $\langle X^2, Y^2, XY \rangle$ wiedergefunden! Damit können wir das

vielleicht interessanteste Resultat dieser Arbeit formulieren:

Beispiel 6.10 (phsop und Kozyklus im Grad 2) Für Charakteristik p = 3 ist mit

$$V^* := \langle X, Y \rangle \oplus \langle X^3, Y^3 \rangle \oplus_{i=1}^3 \langle X^2, Y^2, XY \rangle \quad (\cong V)$$

der Invariantenring $K[V]^{SL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, wobei dim V=13. Da alle Summanden selbstdual sind, ist auch $V=V^*$ selbstdual. Der nichttriviale Kozyklus liegt im Grad 2 im zum Tensorprodukt isomorphen Untermodul von $S^2(\langle X,Y\rangle \oplus \langle X^3,Y^3\rangle)$. Das annullierende phsop liegt ebenfalls im Grad 2 und ist durch die drei Kopien der $X^2Y^2-(XY)^2$ gegeben.

Wenn wir dieses Beispiel mit IsNotCohenMacaulay untersuchen wollen (Datei Beispiel-6.10.txt), müssen wir bereits dmax:=8=2+2+2+2 setzen, denn nun liegen sowohl phsop als auch Kozyklus in Grad 2. Ohne den beschleunigten Algorithmus zur Berechnung der Invarianten ist es völlig undenkbar, hier in akzeptabler Zeit ein Ergebnis zu erhalten - denn selbst der beschleunigte Algorithmus (der bei den bisherigen Beispielen bis zu 500 mal schneller war) benötigt hier gut eineinhalb Stunden! Als weitere Beschleunigungsmaßnahme wurde übrigens der Parameter maxdp:=2 gesetzt, d.h. ein phsop wird blos bis zum Grad 2 gesucht (die Berechnung der Dimensionen geschieht nämlich über Gröbner-Basen und ist bei diesem großen Beispiel ebenfalls recht langsam). Im Grad 8 werden dann 366 Invarianten geschätzt, während es nur 362 sind - also gibt es wieder mehrere Relationen.

6.4 Beispiele für $GL_2(K)$

In diesem Abschnitt wollen wir die Beispiele für $\operatorname{SL}_2(K)$ so modifizieren, dass daraus Beispiele für $\operatorname{GL}_2(K)$ werden. Zunächst wollen wir nochmal daran erinnern, dass die Elemente der algebraischen Gruppe $\operatorname{GL}_2(K)$ (vorerst char K=p beliebig) gegeben sind durch $\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}_e$ mit (ad-bc)e=1. Das Inverse ist dann gegeben durch $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}_e=\begin{pmatrix}ed&-eb\\-ec&ea\end{pmatrix}_{ad-bc}$. Wir definieren den eindimensionalen Modul $\langle E\rangle$ durch die Operation, die durch Multiplikation mit der Inversen der Determinanten gegeben ist, also

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)_e \cdot E := e \cdot E = \frac{1}{ad - bc} E.$$

Beim Versuch der Übertragung von Beispielen für $\operatorname{SL}_2(K)$ auf $\operatorname{GL}_2(K)$ kommt es oft vor, dass bei der Berechnung der Darstellungsmatrix ein Eintrag der Form ad-bc (evtl. in höhere Potenz) auftaucht. Für $\operatorname{SL}_2(K)$ kann man dies durch 1 ersetzen, und gegebenenfalls erhält man so einen Kozyklus oder eine Invariante. Als Beispiel betrachte man für p=2 die Darstellung von $\langle X^2, Y^2, XY \rangle$ für $\operatorname{SL}_2(K)$ und $\operatorname{GL}_2(K)$ in Tabelle 1. Der Trick, hier eine 1 zu erzeugen, besteht aus Tensorierung mit $\langle E \rangle$. Für p=2 hat dann zum Beispiel

$$\langle X^2, Y^2, XY \rangle \otimes \langle E \rangle = \langle X^2 \otimes E, Y^2 \otimes E, XY \otimes E \rangle$$

für $\operatorname{GL}_2(K)$ die Darstellung

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_e \mapsto \begin{pmatrix} ea^2 & eb^2 & eab \\ ec^2 & ed^2 & ecd \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Damit erhält man dann einen Kozyklus in $\langle X^2, Y^2 \rangle \otimes \langle E \rangle$, der nichttrivial ist, da ja bereits die Beschränkung auf $\mathrm{SL}_2(K)$ (also e=1) nichttrivial ist.

Kozyklen im Grad 1 und (zugehörige annullierende Invarianten) werden für die uns interessierenden Beispiele jedoch sowieso von Satz 5.1 geliefert, denn dort war ja auch $\mathrm{GL}_2(K)$ als Gruppe zugelassen. Wir müssen uns hier also nur noch damit beschäftigen, wie die im vorigen Abschnitt gefundenen Beispiele mit phsop bzw. Kozyklen in höheren Potenzen zu Tensorieren sind, so dass auch hier wieder die höheren Potenzen Untermoduln der in Satz 5.1 gefundenen Moduln mit Kozyklus bzw. annullierender Invarianten sind. Wir werden dies im Folgenden lediglich für die beiden 10 bzw. 13-dimensionalen Hauptbeispiele in Charakteristik 2 bzw. 3 durchführen.

6.4.1 Beispiele für $GL_2(K)$ in Charakteristik 2

Wir exerzieren Satz 5.1 für p = 2 und $GL_2(K)$ durch, um den dort versprochenen nichttrivialen Kozyklus zu erhalten: Wir setzen

$$V := \langle X^2, Y^2, XY \rangle$$

mit Darstellung

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_e \mapsto A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & ad + bc \end{pmatrix}$$

und Untermodul $W:=\langle X^2,Y^2\rangle$, und $U:=\operatorname{Hom}_K(V,W)_0$. Wir berechnen die Darstellung von \tilde{U} ; Dabei beachten wir, dass wir A_{σ}^{-1} durch auswerten an $\begin{pmatrix} ed & eb \\ ec & ea \end{pmatrix}_{ad+bc}$ erhalten. Damit erhalten wir aus

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{\sigma^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 d^2 & e^2 b^2 & e^2 bd \\ e^2 c^2 & e^2 a^2 & e^2 ac \\ 0 & 0 & e^2 ad + e^2 bc = e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ea^2 \\ 0 & 0 & ec^2 \end{pmatrix} \cong (ea^2, ec^2, 0)^T$$

sowie

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2d^2 & e^2b^2 & e^2bd \\ e^2c^2 & e^2a^2 & e^2ac \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2d^2 & e^2b^2 & e^2bd \\ e^2c^2 & e^2a^2 & e^2ac \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & eb^2 \\ 0 & 0 & ed^2 \end{pmatrix} \cong (eb^2, ed^2, 0)^T$$

und

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2d^2 & e^2b^2 & e^2bd \\ e^2c^2 & e^2a^2 & e^2ac \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 \\ c^2 & d^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2d^2 & e^2b^2 & e^2bd \\ e^2c^2 & e^2a^2 & e^2ac \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^2a^2bd + e^2ab^2c = e^2ab(ad + bc) = eab \\ 0 & 1 & e^2bc^2d + e^2acd^2 = e^2cd(ad + bc) = ecd \end{pmatrix} \cong (eab, ecd, 1)^T$$

für \tilde{U} die Darstellung (29) von $\langle X^2\otimes E,Y^2\otimes E,XY\otimes E\rangle$ - also genau dass, was wir erwartet haben. Insbesondere ist

$$U = \langle X^2 \otimes E, Y^2 \otimes E \rangle = \langle X^2, Y^2 \rangle \otimes \langle E \rangle.$$

Wir berechnen die Darstellung des Duals \tilde{U}^* , indem wir (29) transponieren

und an der Stelle $\begin{pmatrix} ed & eb \\ ec & ea \end{pmatrix}_{ad+bc}$ auswerten zu

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} e^2d^2(ad+bc) & e^2c^2(ad+bc) & 0 \\ e^2b^2(ad+bc) & e^2a^2(ad+bc) & 0 \\ e^2bd(ad+bc) & e^2ac(ad+bc) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ed^2 & ec^2 & 0 \\ eb^2 & ea^2 & 0 \\ ebd & eac & 1 = e(ad+bc) \end{pmatrix}.$$

Für $\operatorname{SL}_2(K)$ hatten wir \tilde{U}^* in der zweiten Potenz von $\langle X,Y\rangle \oplus \langle X,Y\rangle$ wiedergefunden. Da in obiger Darstellung e jeweils nur in erster Potenz vorkommt, liegt es nahe, einen der beiden Summanden mit $\langle E\rangle$ zu tensorieren. In Gleichung (6) auf S. 17 haben wir die Darstellung von $\langle X,Y\rangle \otimes \langle X,Y\rangle$ bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = (X \otimes X, Y \otimes Y, X \otimes Y + Y \otimes X, Y \otimes X)$$

berechnet. Wir tensorieren diese Darstellung nochmals mit $\langle E \rangle$ und erhalten nach Lemma 2.12 die Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} ea^2 & eb^2 & 0 & eab \\ ec^2 & ed^2 & 0 & ecd \\ eac & ebd & e(ad+bc) = 1 & ebc \\ 0 & 0 & 0 & e(ad+bc) = 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2.13 ist dies auch die Darstellung von $\langle X,Y\rangle\otimes(\langle X,Y\rangle\otimes\langle E\rangle)$ bzgl. der Basis

$$(X \otimes (X \otimes E), Y \otimes (Y \otimes E), X \otimes (Y \otimes E) + Y \otimes (X \otimes E), Y \otimes (X \otimes E))$$
.

Wir finden also \tilde{U}^* (nach Vertauschen der ersten beiden Zeilen/Spalten) in der zweiten Potenz von $\langle X,Y\rangle \oplus (\langle X,Y\rangle \otimes \langle E\rangle)$ wieder, wobei die annullierende Invariante gegeben ist durch $X(Y\otimes E)+Y(X\otimes E)$. Wir bemerken noch, dass $\langle X\otimes E,Y\otimes E\rangle$ isomorph ist zum Dual $\langle X^*,Y^*\rangle$ des natürlichen Moduls, mit Darstellung $\sigma\mapsto\begin{pmatrix}ed&ec\\eb&ea\end{pmatrix}$ - man hat also die Entsprechungen $X\otimes E\cong Y^*,Y\otimes E\cong X^*$. Damit haben wir also das Hauptresultat für p=2 und $\mathrm{GL}_2(K)$:

Beispiel 6.11 Für p = 2 und die Gruppe $GL_2(K)$ ist mit

$$V^* = (\langle X^2, Y^2 \rangle \otimes \langle E \rangle) \bigoplus_{i=1}^{2} (\langle X_i, Y_i \rangle \oplus \langle X_i^*, Y_i^* \rangle)$$

$$\cong (\langle X^2, Y^2 \rangle \otimes \langle E \rangle) \bigoplus_{i=1}^{2} (\langle X_i, Y_i \rangle \oplus (\langle X_i, Y_i \rangle \otimes E))$$

der Invariantenring $K[V]^{GL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, wobei dim V=10. Der Kozyklus liegt im Grad 1 im ersten Summanden, ein annullierendes phsop im Grad 2 ist etwa gegeben durch $X_1X_1^* + Y_1Y_1^*, X_2X_2^* + Y_2Y_2^*, X_1X_2^* + Y_1Y_2^*$. Die Summanden $\langle X_i, Y_i \rangle \oplus \langle X_i^*, Y_i^* \rangle$ sind selbstdual.

Anstatt mit $\langle E \rangle$ zu tensorieren, kann man auch einfach $\langle E \rangle$ hinreichend oft addieren - dann liegen der Kozyklus bzw. das phsop noch einen Grad höher. Allerdings bringt die Addition natürlich eine unerwünschte Dimensionserhöhung mit sich. Insbesondere muss man $\langle E \rangle$ so oft addieren, dass sich noch ein phsop ergibt. Bei dem Kozyklus ist dies dagegen nicht kritisch, es kann hier durchaus ein Summand $\langle E \rangle$ verwendet werden, der auch schon für eine Invariante verwendet wurde. Man kann also z.B.

$$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle E_i \rangle$$

setzen. Jedes Element im ph
sop bekommt hier ein E_i (deshalb braucht man drei Summanden), und ein E_i lässt sich für den Kozyklus im Grad 2 recyclen. Also

Beispiel 6.12 Mit

$$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle E_i \rangle$$

ist $K[V]^{GL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, $\dim V = 13$. Ein Kozyklus im Grad 2 liegt etwa in $S^2(\langle X^2, Y^2 \rangle \oplus \langle E_1 \rangle)$, und ein phsop an annullierenden Invarianten im Grad 3 (welches keine reguläre Sequenz ist), ist gegeben durch $X_iY_jE_k + X_jY_iE_k$ mit $(i,j,k) \in \{(1,2,1),(2,3,2),(3,4,3)\}$.

Man kann hier auch noch weiter kombinieren, etwa

Beispiel 6.13 Mit

$$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X_i, Y_i \rangle \bigoplus (\langle X_4, Y_4 \rangle \otimes \langle E \rangle) \bigoplus \langle E \rangle$$

ist $K[V]^{GL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, dim V=11. Hier liegt der Kozyklus im Grad 2 (in $S^2(\langle X^2, Y^2 \rangle \oplus \langle E \rangle)$, und ein phsop in den Graden 2, 2, 3 ist gegeben durch $X_1(Y_4 \otimes E) + Y_1(X_4 \otimes E), X_2(Y_4 \otimes E) + Y_2(X_4 \otimes E), X_2Y_3E + X_3Y_2E$.

Wir kommen zum Test dieser Beispiele mit *IsNotCohenMacaulay* (zusammengefasst in Datei Beispiel-6.11-13.txt). Im ersten Beispiel gibt es keine große Überraschung - man muss dmax:=7 setzen, und es wird sich dann um eine Invariante (17 statt 16 in Grad 7) verschätzt. Im zweiten Beispiel müsste man dmax:=2+3+3+3=11 setzen - zuviel für meine Geduld. Bei dem dritten Beispiel hat man dmax:=2+2+2+3=9 zu setzen - auch hier wird sich im Grad 9 um eine Invariante verschätzt (70 statt 69).

6.4.2 Beispiele für $GL_2(K)$ in Charakteristik 3

Auch für p=3 wollen wir die Beispiele für $\mathrm{SL}_2(K)$ übertragen. Die Verallgemeinerung des Moduls mit dem Kozyklus U liefert wieder Satz 5.1, der auch für $\mathrm{GL}_2(K)$ gilt. Der Vollständigkeit halber sind hier nochmals alle Rechnungen so weit nötig ausgeführt, auch wenn sie mit denen für $\mathrm{SL}_2(K)$ fast identisch sind. In den meisten Fällen genügt es, die Darstellungsmatrizen für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(K)$ mit geeigneten Potenzen von e zu multiplizieren. Wir gehen jedoch systematisch vor und exerzieren zunächst wieder Satz 5.1 durch:

$$\begin{array}{rcl} V &:=& S^3(\langle X,Y\rangle) = \langle X^3,Y^3,X^2Y,XY^2\rangle \\ \text{und } W &:=& \langle X^3,Y^3\rangle. \end{array}$$

Als erstes benötigen wir die Darstellung auf V. In (24) auf S. 67 haben wir bei der Berechnung der Darstellung für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(K)$ jeweils erst in der dritten Zeile jeder Gleichung von der Eigenschaft ad-bc=1 Gebrauch gemacht. Die Betrachtung der zweiten Zeilen liefert für die Darstellung auf V

$$\sigma \mapsto A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a^3 & b^3 & a^2b & ab^2 \\ c^3 & d^3 & c^2d & cd^2 \\ 0 & 0 & a(ad-bc) & -b(ad-bc) \\ 0 & 0 & -c(ad-bc) & d(ad-bc) \end{pmatrix}.$$

Die linke obere Teilmatrix beschreibt dabei die Darstellung auf W, die rechte untere Teilmatrix die auf V/W. Durch Auswerten an

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{e}^{-1} = \begin{pmatrix} ed & -eb \\ -ec & ea \end{pmatrix}_{ad-bc}$$

und transponieren erhalten wir für $(V/W)^*$ die Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} ed(e^2ad - e^2bc) & ec(e^2ad - e^2bc) \\ eb(e^2ad - e^2bc) & ea(e^2ad - e^2bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2d & e^2c \\ e^2b & e^2a \end{pmatrix}, \tag{30}$$

was die Darstellung von $\langle Y, X \rangle \otimes \langle E^2 \rangle$ ist (wobei $\langle E^2 \rangle := S^2(\langle E \rangle)$). Damit haben wir also $(V/W)^* \cong \langle X, Y \rangle \otimes \langle E^2 \rangle$, und für den Modul mit dem Kozyklus U nach Satz 5.1 gilt dann mit Satz 2.11

$$U = \operatorname{Hom}_K(V, W)_0 \cong W \otimes (V/W)^* = \langle X^3, Y^3 \rangle \otimes (\langle X, Y \rangle \otimes \langle E^2 \rangle).$$

Dieses Tensorprodukt werden wir wieder durch die direkte Summe ersetzen, so dass wir wieder einen Kozyklus im Grad 2 erhalten. Den Faktor $\langle E^2 \rangle$ können wir dabei auch auf die andere Seite bringen, symmetrisch aufspalten (also beide Seiten mit $\langle E \rangle$ tensorieren) oder auch als zusätzlichen direkten Summand dazu nehmen. Dies liefert dann einen Kozyklus im Grad 3 oder 4 (falls man nur $\langle E \rangle$ addiert statt $\langle E^2 \rangle$), aber natürlich auch eine höhere Dimension.

Wir berechnen nun die Darstellungen von U und \tilde{U} . Dazu identifizieren wir

$$U := \text{Hom}_K(V, W)_0 = \{ f \in \text{Hom}_K(V, W) : f|_W = 0 \}$$

wieder mit Darstellungsmatrizen der Form

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{array}\right).$$

Die entsprechende Operation hierauf ist dann gegeben durch

$$\sigma \cdot \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{array} \right) A_{\sigma^{-1}}.$$

Von $A_{\sigma^{-1}}$ ist hierfür nur der rechte untere Block interessant (und das transponierte dieses Blocks haben wir in (30) berechnet), so dass wir letztendlich die Operation

$$\sigma \cdot \left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} e^2 d & e^2 c \\ e^2 b & e^2 a \end{array}\right)^T$$

erhalten. Wir haben also nach Lemma 2.9 eine Darstellung von $\langle X^3, Y^3 \rangle \otimes (\langle Y, X \rangle \otimes \langle E^2 \rangle)$. Nach Lemma 2.12 erhalten wir also die folgende Darstellung bezüglich der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 , die wir einfach durch Multiplikation der Darstellung (25) (S. 69) der Gruppe $SL_2(K)$ mit e^2 erhalten:

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^2d & e^2c \\ e^2b & e^2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2a^3d & e^2a^3c & e^2b^3d & e^2b^3c \\ e^2a^3b & e^2a^4 & e^2b^4 & e^2ab^3 \\ e^2c^3d & e^2c^4 & e^2d^4 & e^2cd^3 \\ e^2bc^3 & e^2ac^3 & e^2bd^3 & e^2ad^3 \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir den Kozyklus:

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{\sigma^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} a^3 & b^3 & 0 & 0 \\ c^3 & d^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 d^3 & -e^3 b^3 & -e^3 b d^2 & e^3 b^2 d \\ -e^3 c^3 & e^3 a^3 & e^3 a c^2 & -e^3 a^2 c \\ 0 & 0 & e^2 d & e^2 b \\ 0 & 0 & e^2 c & e^2 a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^3 (ab^3 c^2 - a^3 b d^2) & e^3 (a^3 b^2 d - a^2 b^3 c) \\ 0 & 1 & e^3 (ac^2 d^3 - bc^3 d^2) & e^3 (b^2 c^3 d - a^2 c d^3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^2 ab(ad + bc) & e^2 a^2 b^2 \\ 0 & 1 & e^2 c^2 d^2 & -e^2 c d(ad + bc) \end{pmatrix}$$

Dies liefert schließlich die folgende Darstellung auf \tilde{U} :

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} e^2 a^3 d & e^2 a^3 c & e^2 b^3 d & e^2 b^3 c & -e^2 a b (ad+bc) \\ e^2 a^3 b & e^2 a^4 & e^2 b^4 & e^2 a b^3 & e^2 a^2 b^2 \\ e^2 c^3 d & e^2 c^4 & e^2 d^4 & e^2 c d^3 & e^2 c^2 d^2 \\ e^2 b c^3 & e^2 a c^3 & e^2 b d^3 & e^2 a d^3 & -e^2 c d (ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit hat \tilde{U}^* die Darstellung (transponieren und auswerten an der Stelle $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} ed & -eb \\ -ec & ea \end{pmatrix}_{cd-bc}$)

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} e^2ad^3 & -e^2bd^3 & -e^2ac^3 & e^2bc^3 & 0\\ -e^2cd^3 & e^2d^4 & e^2c^4 & -e^2c^3d & 0\\ -e^2ab^3 & e^2b^4 & e^2a^4 & -e^2a^3b & 0\\ e^2b^3c & -e^2b^3d & -e^2a^3c & e^2a^3d & 0\\ e^2bd(ad+bc) & e^2b^2d^2 & e^2a^2c^2 & e^2ac(ad+bc) & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $SL_2(K)$ haben wir \tilde{U}^* in zweiter Potenz von $\langle X^2, Y^2, XY \rangle$ wiedergefunden. Da hier nun der Faktor e^2 auftaucht, versuchen wir die zweite Potenz

von $M:=\langle X^2,Y^2,XY\rangle\otimes\langle E\rangle$, und zwar berechnen wie die Darstellung von $S^2(M)$ bezüglich derselben Basis wie für $\mathrm{SL}_2(K)$ (nur tensoriert mit E). Wir inspizieren die Berechnung der Darstellung von $S^2(M)$ auf Seite 71. Bei der Berechnung der Operation auf den ersten vier Basisvektoren haben wir die Eigenschaft ad-bc=1 gar nicht benutzt - die ersten vier Spalten der Darstellungsmatrix (28) können wir also einfach mit e^2 multipliziert übernehmen. Bei der Berechnung von $\sigma \cdot (X^2Y^2-(XY)^2)$ tritt der Faktor $(ad-bc)^2$ auf. Nach Multiplikation mit e^2 wird dieser wieder zu 1. Die Darstellung auf $S^2(M)$ ist also gegeben durch

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} e^2ad^3 & -e^2bd^3 & -e^2ac^3 & e^2bc^3 & 0 & * \\ -e^2cd^3 & e^2d^4 & e^2c^4 & -e^2c^3d & 0 & * \\ -e^2ab^3 & e^2b^4 & e^2a^4 & -e^2a^3b & 0 & * \\ e^2b^3c & -e^2b^3d & -e^2a^3c & e^2a^3d & 0 & * \\ e^2bd(ad+bc) & e^2b^2d^2 & e^2a^2c^2 & e^2ac(ad+bc) & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

und wir erkennen \tilde{U}^* als Untermodul von $S^2(M)$. Damit erhalten wir das Hauptresultat für $\operatorname{GL}_2(K)$ in Charakteristik 3:

Beispiel 6.14 $F\ddot{u}r p = 3$ ist mit

$$V^* := \left(\langle X, Y \rangle \otimes \langle E^2 \rangle \right) \oplus \langle X^3, Y^3 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \left(\langle X^2, Y^2, XY \rangle \otimes \langle E \rangle \right)$$

der Invariantenring $K[V]^{GL_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, dim V=13. Der Kozyklus liegt im Grad 2 im zum Tensorprodukt isomorphen Untermodul von $S^2((\langle X,Y\rangle\otimes\langle E^2\rangle)\oplus\langle X^3,Y^3\rangle)$. Ein annullierendes phsop im Grad 2 ist gegeben durch die drei Kopien der $(X^2\otimes E)(Y^2\otimes E)-(XY\otimes E)^2$.

Von IsNotCohenMacaulay (Datei Beispiel-6.14.txt, dmax:=2+2+2+2=8, maxdp:=2) wird dann im Grad 8 eine Basis aus 220 Invarianten geschätzt, während es nur 210 sind. An Rechenzeit sollte man etwa eine halbe Stunde einplanen. Überraschenderweise braucht das Beispiel für $SL_2(K)$ deutlich länger (und auch mehr Speicher).

6.5 Beispiele für $SO_2(K)$ in Charakteristik 2 und endliche Gruppen

Wir besprechen zum Ende noch einige Beispiele für nicht so interessante, weil nicht zusammenhängende oder endliche Gruppen. Zunächst zur Gruppe $\mathrm{SO}_2(K)$. Man kann zeigen, dass diese für p=3 linear reduktiv ist, dass es dort also nach Hochster und Roberts keine Beispiele geben kann. Wir betrachten daher nur den Fall p=2. Zunächst ist zu beachten, dass die $\mathrm{SO}_2(K)$ für diese Charakteristik anders definiert ist, nämlich als die Untergruppe der Elemente aus $\mathrm{SL}_2(K)$, für die das Element XY von $\langle X^2, Y^2, XY \rangle$ invariant ist, also $\sigma \cdot XY = XY$. Aus Tabelle 1 (S. 19) folgen damit die Bedingungen ab=cd=0. Damit ist $\mathrm{SO}_2(K)$ also eine lineare algebraische Gruppe mit den drei Relationen ad-bc-1=0, ab=0, cd=0. Falls a=0, folgt wegen ad-bc=1 jedenfalls bc=1, und damit d=0, also $\sigma=\begin{pmatrix}0&b\\b^{-1}&0\end{pmatrix}$. Analog folgt im Falle b=0 sofort ad=1 und c=0, also $\sigma=\begin{pmatrix}a&0\\b^{-1}&0\end{pmatrix}$. Folglich ist die $\mathrm{SO}_2(K)$ semidirektes Produkt des Torus mit der Gruppe Z_2 . Genauer ist durch

$$K^* \rtimes Z_2 \to \mathrm{SO}_2(K) : (a,0) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad (a,1) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ein Gruppenisomorphismus gegeben, wobei

$$\begin{array}{ll} (a,0)(b,0)=(ab,0) & (a,1)(b,0)=(ab^{-1},1) \\ (a,0)(b,1)=(ab,1) & (a,1)(b,1)=(ab^{-1},0). \end{array}$$

Ausserdem ist durch

$$SO_2(K) \to Z_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto bc \quad (\in \{0, 1\})$$

bzw.

$$K^* \rtimes Z_2 \to Z_2 : (a, x) \mapsto x$$

ein Gruppenhomomorphismus gegeben.

Nun ist aber K^* linear reduktiv, d.h. wenn wir ein nicht Cohen-Macaulay Beispiel für die Gruppe $SO_2(K)$ angeben, kommt das im wesentlichen von der (nicht interessanten, da endlichen) Gruppe Z_2 , und für diese sind bereits seit geraumer Zeit Beispiele bekannt. Dennoch wird sich hier ein interessanter Effekt im Zusammenhang mit dem Hauptsatz zeigen.

6.5.1 Beispiele für $SO_2(K)$ und Z_2

Wir betrachten die Darstellung des Tensorprodukt $\langle X \otimes X, \dots, Y \otimes Y \rangle$ in Gleichung (21) auf Seite 58 und schränken auf $SO_2(K)$ ein. Da für $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus $SO_2(K)$ in jedem Fall ab = cd = ac = bd = 0 gilt, erhalten wir für die Einschränkung die Darstellung

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 & 0 \\ c^2 & d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & bc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

und erkennen in der rechten unteren Teilmatrix die Darstellung eines Untermoduls, von nun an bezeichnet mit

$$M_{1bc} := \langle \pi, \tau \rangle$$
 und Darstellung $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & bc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Der triviale Modul $I := \langle \pi \rangle$ hat also einen nichttrivialen Kozyklus!

Da die linke obere 3×3 Teilmatrix von (31) die Einschränkung der Darstellung von $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ auf $\mathrm{SO}_2(K)$ beschreibt, erkennen wir, dass auch dieser Modul einen nichttrivialen Kozyklus enthält. Damit können wir schon mal alle Beispiele aus Abschnitt 6.2.2 (nach Einschränkung auf $\mathrm{SO}_2(K)$) übernehmen, was aber nicht sonderlich interessant ist.

Ausserdem sehen wir mittels des angegebenen Gruppenhomomorphismus auf die \mathbb{Z}_2 , dass es sich hier im Wesentlichen um eine Darstellung dieser Gruppe handelt.

Da offenbar $\tilde{I} = M_{1bc}$ selbstdual ist (Darstellung des Duals ist $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ bc & 1 \end{pmatrix}$), erhalten wir nach Korollar 4.9 folgendes Beispiel:

Beispiel 6.15 Für $SO_2(K)$ und p = 2 ist mit

$$V^* := \langle \pi \rangle \oplus_{i=1}^3 \langle \pi_i, \tau_i \rangle \quad (\cong V)$$

der Invariantenring $K[V]^{SO_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, dim V=7. Der Kozyklus liegt im trivialen Modul im Grad 1, und ein annullierendes phsop ist gegeben durch π_1, π_2, π_3 .

Ferner ist M_{1bc} als Untermodul des Tensorprodukts $\langle X \otimes X, \dots, Y \otimes Y \rangle$ auch Untermodul von $S^2(\langle X, Y \rangle)$, und wir erhalten

Beispiel 6.16 Für $SO_2(K)$ und p = 2 ist mit

$$V^* := \langle \pi \rangle \oplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle \quad (\cong V)$$

der Invariantenring $K[V]^{SO_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, dim V = 9. Der Kozyklus liegt im trivialen Modul im Grad 1, und ein annullierendes phsop im Grad 2 ist gegeben durch $X_iY_j + X_jY_i$ mit (i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 4).

Beim Testen mit IsNotCohenMacaulay (Datei Beispiel-6.15-18.txt) erleben wir zum ersten Mal eine Überraschung: Gemäß unserer Theorie sollte man jeweils dmax:=4 bzw. dmax:=7 setzen, aber IsNotCohenMacaulay verschätzt sich jeweils schon in den Graden 3 bzw. 6! (Derselbe Effekt tritt bei den Einschränkungen der Beispiele aus Abschnitt 6.2.2 auf $SO_2(K)$ auf). Da man den trivialen Modul $\langle \pi \rangle$ gefühlsmäßig sowieso als überflüssig empfindet, lassen wir ihn weg und überprüfen das mit IsNotCohenMacaulay wir erhalten tatsächlich ein positives Ergebnis, und es wird sich auch hier in den Graden 3 und 6 verschätzt. Damit erhalten wir die (einzigen!) auf rein experimentellem Weg gefundenen Beispiele - wir geben nachher noch die theoretische Begründung an.

Beispiel 6.17 Für $SO_2(K)$ und p = 2 ist mit

$$V^* := \bigoplus_{i=1}^3 \langle \pi_i, \tau_i \rangle \quad (\cong V)$$

der Invariantenring $K[V]^{SO_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, dim V=6. Es gibt keinen (konstruierten) Kozyklus mehr. Ein phsop, das keine reguläre Sequenz ist, ist gegeben durch π_1, π_2, π_3 .

Beispiel 6.18 Für $SO_2(K)$ und p=2 ist mit

$$V^* := \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle \quad (\cong V)$$

der Invariantenring $K[V]^{SO_2(K)}$ nicht Cohen-Macaulay, dim V=8. Ein phsop im Grad 2, das keine reguläre Sequenz ist, ist gegeben durch $X_iY_j+X_jY_i$ mit (i,j)=(1,2),(2,3),(3,4).

Wir müssen noch beweisen, warum die angegebenen phsops keine regulären Sequenzen sind (wir machen dies O.E. für das phsop im Grad 1. Sofern man MAGMA traut, ist natürlich auch das Ergebnis von IsNotCohenMacaulay ein Beweis). Unser Kozyklus in $I:=\langle v_1:=\pi_0\rangle$ ist von der Form $g_\sigma=(\sigma-1)\tau_0$, wobei $\tilde{I}=M_{1bc}=\langle v_1:=\pi_0,v_2:=\tau_0\rangle$. Dann ist $\tilde{I}^*=\langle v_1^*=\tau_i,v_2^*=\pi_i\rangle$ (i=1,2,3), und $v_2^*=\pi_i$ ist die annullierende Invariante. Im Beweis von

Proposition 4.6 (S. 44) haben wir genau berechnet, wie annulliert wird: Nach den Gleichungen (12) und (13) gilt nämlich mit $x := -v_1^* \cdot v_1 = \tau_i \cdot \pi_0$, dass

$$\pi_i \cdot g_{\sigma} = (\sigma - 1)x = (\sigma - 1)(\tau_i \pi_0). \tag{32}$$

Wir betrachten nun den Beweis des Hauptsatzes (S. 47), und setzen

$$V_1^* := \langle \pi_0 \rangle \oplus_{i=1}^3 \langle \tau_i, \pi_i \rangle$$

und

$$V_2^* := \bigoplus_{i=1}^3 \langle \tau_i, \pi_i \rangle \subseteq V_1^*.$$

Die a_i sind die π_i , und in Gleichung (14) (S. 47) werden die b_i nach Gleichung (32) definiert als $b_i = \tau_i \pi_0$. Als nächstes wird in (15) definiert

$$u_{ij} := \pi_i b_j - \pi_j b_i = \pi_0 (\pi_i \tau_j - \pi_j \tau_i) =: \pi_0 \cdot u'_{ij}.$$

Dabei sind die u_{ij} in $K[V_1]^G$ und die u'_{ij} in $K[V_2]^G \subseteq K[V_1]^G$ Als nächstes wird dann gezeigt, dass

$$u_{23}\pi_1 - u_{13}\pi_2 + u_{12}\pi_3 = 0$$

gilt - eine Relation in $K[V_1]^G$. Nach vorheriger Gleichung gilt dann nach Division durch π_0 jedenfalls auch

$$u_{23}'\pi_1 - u_{13}'\pi_2 + u_{12}'\pi_3 = 0,$$

was eine Relation in $K[V_2]^G$ ist. Wäre nun (π_1, π_2, π_3) regulär in $K[V_2]^G$, so gäbe es also $f_1', f_2' \in K[V_2]^G \subseteq K[V_1]^G$ mit

$$u_{12}' = f_1' \pi_1 + f_2' \pi_2.$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit π_0 und setzen von $f_i := \pi_0 f_i' \in K[V_1]^G$ erhalten wir daraus

$$u_{12} = f_1 \pi_1 + f_2 \pi_2.$$

Diese Annahme (siehe Gleichung (16)) wird jedoch dann im weiteren Beweis des Hauptsatzes zu einem Widerspruch geführt, indem gezeigt wird, dass dann der Kozyklus g trivial wäre. Also war unsere Annahme, dass das phsop π_1, π_2, π_3 in $K[V_2]^G$ eine reguläre Sequenz ist falsch - also ist $K[V_2]^G$ nicht Cohen-Macaulay. Da wir die nichttriviale Relation im Hauptsatz also durch π_0 kürzen können - also eine Relation einen Grad tiefer bekommen, kann man für IsNotCohenMacaulay auch jeweils dmax um einen Grad niedriger ansetzen.

6.5.2 Beispiele für $G = (\mathbb{F}_q, +)$

Wir verallgemeinern nun noch die Beispiele des letzten Abschnitts für die Gruppe $Z_2\cong (\mathbb{F}_2,+)$ auf die endliche, also reduktive Gruppe $G=(\mathbb{F}_q,+)$. Dabei ist $q=p^n$ und $p=\operatorname{char} K$. Man beachte, dass $(\mathbb{F}_q,+)$ als Nullstellenmenge von X^q-X über K (algebraisch abgeschlossen) tatsächlich algebraisch ist. Wir definieren den Modul $M:=\langle \pi,\tau\rangle$ durch die Darstellung

$$(\mathbb{F}_q,+) \to K^{2\times 2} : \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und erkennen, dass der triviale Modul $I:=\langle\pi\rangle$ einen nichttrivialen Kozyklus besitzt, und $\tilde{I}=M$. Die Darstellung von M^* ist gegeben durch $\sigma\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\-\sigma&1\end{pmatrix}$, und durch Multiplizieren der ersten Zeile/Spalte mit -1 und danach vertauschen der beiden Zeilen/Spalten erkennen wir M als selbstdual. Damit ist $\pi\in M=\tilde{I}^*$ die annullierende Invariante des Kozyklus in I. Mit (fast) wörtlich dem selben Beweis wie zuvor (man muss in ungerader Charakteristik einige Minuszeichen einfügen, die jedoch insgesamt nur einen unwesentlichen Proportionalitätsfaktor ergeben), können wir den Modul mit dem Kozyklus in Korollar 4.9 weglassen, und wir erhalten

Beispiel 6.19 Für $G = (\mathbb{F}_q, +)$ mit $q = p^n, p = char K$ ist mit

$$V^* := \bigoplus_{i=1}^3 \langle \pi_i, \tau_i \rangle \quad (\cong V)$$

der Invariantenring $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay, dim V=6. Es gibt keinen (konstruierten) Kozyklus mehr. Ein phsop, das keine reguläre Sequenz ist, ist gegeben durch π_1, π_2, π_3 .

Beim Test mit *IsNotCohenMacaulay* (Datei Beispiel-6.19.txt) genügt es wieder, dmax:=3 zu setzen. Für q kann man eine beliebige Primzahlpotenz wählen.

Man beachte, dass man dieses Beispiel *nicht* so ohne weiteres auf $G_a = (K, +)$ verallgemeinern kann, denn diese Gruppe ist nicht reduktiv!

A Zusammenfassung der wichtigsten Beispiele

Wie stellen in diesem Anhang die wichtigsten Beispiele tabellarisch zusammen und skizieren teilweise auch den Weg, wie wir sie erhalten haben. Zur schnelleren Übersicht geben wir auch nochmal kurz die verwendeten Notationen und Bezeichnungen an.

A.1 Notation

Wir bezeichnen mit K stets einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p>0. Ein Element der Gruppe $\operatorname{GL}_2(K)$ bezeichnen wir stets mit $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wollen wir betonen, dass es sich hierbei um ein Element aus einer linearen algebraischen Gruppe handelt, die Nullstellenmenge von (ad-bc)e-1=0 ist (also eine Teilmenge von K^5), so schreiben wir auch ausführlicher $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - die Inverse der Determinante e gehört zum Gruppenelement dazu. Im Folgenden bezeichnen wir mit G stets eine der klassischen Untergruppen von $\operatorname{GL}_2(K)$.

Mit $\langle X, Y \rangle$ bezeichnen wir dann den Modul mit der natürlichen Darstellung der Gruppe G, also

$$\sigma \cdot X = aX + cY$$
$$\sigma \cdot Y = bX + dY$$

Seine zweite symmetrische Potenz bezeichnen wir mit

$$\langle X^2, Y^2, XY \rangle := S^2(\langle X, Y \rangle)$$

und analog für höhere Potenzen. Den Dual von $\langle X^2, Y^2, XY \rangle$ für $G = \mathrm{SL}_2(K)$ in Charakteristik 2 bezeichnen wir mit

$$\langle \mu, \nu, \pi \rangle := \langle X^2, Y^2, XY \rangle^*,$$

wobe
i $\mu:=(X^2)^*, \nu:=(Y^2)^*, \pi:=(XY)^*.$ Er hat bzgl. dieser Basis die (Links-) Darstellung

$$\begin{pmatrix} d^2 & c^2 & 0 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ bd & ac & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. π ist eine Invariante.

Ist V ein G-Modul, so bezeichnen wir den zugehörigen Polynomring mit $K[V] := S(V^*)$, also die direkte Summe aller symmetrischen Potenzen des Duals. Daher geben wir für die folgenden Beispiele stets den Dual V^* an, so

dass der Invariantenring $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay ist. Gegebenenfalls Klammern wir die Basisvektoren aus V^* um anzuzeigen, dass es sich dabei um Monome ersten Grades in K[V] handelt. Beispielsweise sind für $V^* := \langle X^2, Y^2, XY \rangle$ durch $(X^2)(Y^2)$ und $(XY)^2$ zwei verschiedene Elemente in $S^2(V^*)$ gegeben.

A.2 Beispiele für $SL_2(K)$ in Charakteristik 2

Beispiel A.1 (Das Beispiel aus dem Projekt bzw. aus Satz 5.1)

Modul	$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle \mu_i, \nu_i, \pi_i \rangle$
Dimension	11
phsop	π_1,π_2,π_3
in Graden:	1, 1, 1
Kozyklus im Summanden	$\langle X^2, Y^2 \rangle$
im Grad	1

Der Kozyklus kann interpretiert werden als $g_{\sigma} := (\sigma - 1)(XY)$, wobei $\langle X^2, Y^2 \rangle$ als Untermodul von $\langle X^2, Y^2, XY \rangle$ zu sehen ist. Man findet $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ als Untermodul von $\langle X \otimes X, ..., Y \otimes Y \rangle$. Dies führt zu

Beispiel A.2 (Der Weg zum Hauptbeispiel)

Modul	$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X \otimes X,, Y \otimes Y \rangle$
Dimension	14
phsop	dreimal $X \otimes Y + Y \otimes X$
in Graden:	1, 1, 1
Kozyklus im Summanden	$\langle X^2, Y^2 \rangle$
im Grad	1

V ist selbstdual.

Es ist $\langle X \otimes X, ..., Y \otimes Y \rangle$ ein Untermodul von $S^2(\langle X, Y \rangle \oplus \langle X, Y \rangle)$. Damit gelangen wir zu

Beispiel A.3 (Das Hauptbeispiel in Dimension 10)

Modul	$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle$
Dimension	10
phsop	$X_i Y_j + X_j Y_i \text{ mit } (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
in Graden:	2, 2, 2
Kozyklus im Summanden	$\langle X^2, Y^2 \rangle$
im Grad	1

89

Man benötigt den Summanden $\langle X, Y \rangle$ viermal, weil man sonst kein phsop in K[V] erhalten würde.

V ist selbstdual (da alle Summanden es sind).

Beispiel A.4 (Das erste wesentlich neue Beispiel nach dem Projekt)

Modul	$V^* := \langle \mu, \nu, \pi \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X \otimes X,, Y \otimes Y \rangle$
Dimension	15
phsop in Graden:	$dreimal X \otimes Y + Y \otimes X$
in Graden:	1, 1, 1
Kozyklus im Summanden	$\langle \mu, u, \pi angle$
im Grad	1

Beispiel A.5 (... und die Abänderung)

Modul	$V^* := \langle \mu, \nu, \pi \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle$
Dimension	11
phsop in Graden:	$X_i Y_j + X_j Y_i \text{ mit } (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
in Graden:	2, 2, 2
Kozyklus im Summanden	$\langle \mu, u, \pi angle$
im Grad	1

Die Summanden mit den Invarianten kann man natürlich auch mischen, was aber mehr eine Spielerei ist. Damit bekommt man ein phosp in verschiedenen Graden. Wir geben nur ein

Beispiel A.6 (langweilig)

Modul	$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X_i, Y_i \rangle \bigoplus \langle X \otimes X,, Y \otimes Y \rangle$
Dimension	12
phsop	$X_1Y_2 + X_2Y_1, X_2Y_3 + X_3Y_2, X \otimes Y + Y \otimes X$
in Graden:	2, 2, 1
Kozyklus im Summanden	$\langle X^2, Y^2 \rangle$
im Grad	1

Die Invariante π^2 von $S^2(\langle \mu, \nu, \pi \rangle) =: \tilde{U}^*$ annulliert den Kozyklus von U, und es stellt sich heraus, dass $U \cong \langle \mu\pi, \nu\pi, \mu^2, \nu^2, \pi^2 \rangle$. Ferner ist

$$\langle \mu, \nu, \pi \rangle \cong \langle \mu \pi, \nu \pi, \pi^2 \rangle \le \langle \mu \pi, \nu \pi, \mu^2, \nu^2, \pi^2 \rangle.$$

Man kann sich also einen Summanden sparen, weil $\langle \mu \pi, \nu \pi, \mu^2, \nu^2, \pi^2 \rangle$ sowohl den Kozyklus als auch gleich in zweiter Potenz eine annullierende Invariante enthält. Dies liefert

Modul	$V^* := \langle \mu_1 \pi_1, \nu_1 \pi_1, \mu_1^2, \nu_1^2, \pi_1^2 \rangle \bigoplus_{i=2}^3 \langle \mu_i, \nu_i, \pi_i \rangle$
Dimension	11
phsop	$(\pi_1^2)^2, \pi_2^2, \pi_3^2$
in Graden:	2, 2, 2
Kozyklus im Summanden	$\langle \mu_1 \pi_1, \nu_1 \pi_1, \mu_1^2, \nu_1^2, \pi_1^2 \rangle$
im Grad	1

Beispiel A.7 (Kozyklus und Invariante in einem)

Falls der Summand mit dem Kozyklus eine nicht zur Annullation benötigte Invariante besitzt, und es eine annullierende Invariante in erster Potenz gibt, kann man diese Verheften: Sind

$$\begin{pmatrix} A_{\sigma} & 0 \\ g_{\sigma} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} B_{\sigma} & 0 \\ h_{\sigma} & 1 \end{pmatrix}$$

Darstellungen von Moduln mit einer Invarianten, so ist

$$\begin{pmatrix}
A_{\sigma} & 0 & 0 \\
0 & B_{\sigma} & 0 \\
g_{\sigma} & h_{\sigma} & 1
\end{pmatrix}$$

Darstellung eines Moduls, der die beiden anderen als Untermodul enthält, aber eine Dimension kleiner ist als die direkte Summe. Ausgehend von dem Modul

$$V^* := \langle \mu, \nu, \pi \rangle \oplus \langle X \otimes X, ..., Y \otimes Y \rangle \bigoplus_{i=1}^{3} \langle X_i, Y_i \rangle$$

mit nicht Cohen-Macaulay Invariantenring bezeichnen wir mit

$$U$$
 die Verheftung von $\langle \mu, \nu, \pi \rangle$ und $\langle X \otimes X, ..., Y \otimes Y \rangle$

an den Invarianten π bzw. $X \otimes Y + Y \otimes X$, wobei wir die Invariante von U wieder mit π bezeichnen. Damit haben wir

Beispiel A.8 (mit verhefteten Invarianten)

Modul	$V^* := U \bigoplus_{i=1}^3 \langle X_i, Y_i \rangle$
Dimension	12
phsop	$\pi, X_1Y_2 + X_2Y_1, X_2Y_3 + X_3Y_2$
in Graden:	1, 2, 2
Kozyklus im Summanden	U
im Grad	1

91

A.3 Beispiele für $SL_2(K)$ in Charakteristik 3

Wir erinnern zunächst nochmal an die Konstruktion aus Satz 5.1: Sei

$$M := \langle X^3, Y^3, X^2Y, XY^2 \rangle$$
 und $W := \langle X^3, Y^3 \rangle$ < M

sowie

$$U := \{ f \in \operatorname{Hom}_K(M, W) : f|_W = 0 \}$$

$$\iota \in \operatorname{Hom}_K(M, W) \text{ mit } \iota|_W = \operatorname{id}_W \text{ und } \iota(X^2Y) = \iota(XY^2) = 0$$

$$\tilde{U} := U \oplus K \cdot \iota.$$

Dies ergab dann folgendes

Beispiel A.9 (Das Beispiel aus dem Projekt bzw. nach Satz 5.1)

Modul	$V^* := U \bigoplus_{i=1}^3 \tilde{U}^*$
Dimension	19
phsop	π_1, π_2, π_3
in Graden:	1, 1, 1
Kozyklus im Summanden	U
im Grad	1

Nun findet man aber, wenn man obige Konstruktion von U für einen beliebigen Modul M mit Untermodul W durchführt, dass

$$U \cong W \otimes (M/W)^*$$

gilt. Dann ist jedoch

$$U \leq W \otimes (M/W)^* \bigoplus S^2(W) \bigoplus S^2((M/W)^*) \cong S^2(W \oplus (M/W)^*).$$

Da die Summe direkt ist, bleibt der Kozyklus nichttrivial, also kann man bei der Konstruktion für V^* schon mal U durch die direkte Summe $W \oplus (M/W)^*$ ersetzen, welche dann einen Kozyklus in zweiter Potenz enthält. Diese Konstruktion lässt sich bei allen nach Satz 5.1 konstruierten Beispielen für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(K)$ durchführen (für beliebiges char K=p). Dies ergibt eine Dimensionsreduktion von 8p-5 auf 7p-2. Im Falle p=2 ist dann aber der zweite Summand $(M/W)^*$ trivial (gibt also bei Tensorierung nichts neues), und im Falle p=3, dem wir uns nun wieder zuwenden, ist die Dimension immer noch $7\cdot 3-2=19$. Allerdings findet man dort

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}^* & \leq & S^2(\langle X^2, Y^2, XY \rangle) \\ \text{sowie} & (M/W)^* & \cong & \langle X, Y \rangle. \end{array}$$

Dies alles ergibt

Beispiel A.10	(Hauptbeispiel	mit Kozyklus ı	und Invarianten i	m Grad 2)
---------------	----------------	----------------	-------------------	-----------

Modul	$V^* := \langle X, Y \rangle \bigoplus \langle X^3, Y^3 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X_i^2, Y_i^2, X_i Y_i \rangle$
Dimension	13
phsop	$X_i^2 Y_i^2 - (X_i Y_i)^2$
in Graden:	2, 2, 2
Kozyklus in Potenz	$S^2(\langle X, Y \rangle \oplus \langle X^3, Y^3 \rangle)$
im Grad	2

 \overline{V} ist selbstdual.

A.4 Beispiele für $GL_2(K)$ mit p = 2, 3

Satz 5.1 liefert auch für $\operatorname{GL}_2(K)$ Moduln U mit nichttrivialem Kozyklus. Allerdings ist nicht ganz offensichtlich, wie man die Beispiele für $\operatorname{SL}_2(K)$ verändern muss, um wieder \tilde{U}^* in einer zweiten Potenz wiederzufinden. Im wesentlichen geht das durch Tensorieren mit Potenzen der Inversen der Determinante, aber die Frage ist, wo und mit welcher Potenz. Dazu etwas Notation: Wir bezeichnen mit $\langle E \rangle$ den Modul, auf dem $\operatorname{GL}_2(K)$ mit dem Inversen der Determinante operiert, also

$$\sigma \cdot E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_e \cdot E = \frac{1}{ad - bc} \cdot E = e \cdot E,$$

und wir sehen, dass die Operation tatsächlich algebraisch ist. Mit der leicht zu prüfenden Isomorphie

$$\langle X,Y\rangle \otimes \langle E\rangle \quad \cong \quad \langle X,Y\rangle^* \quad =: \quad \langle X^*,Y^*\rangle$$

(Dabei ist $X^* \to Y \otimes E, Y^* \to -X \otimes E$) kann man dann formulieren

Beispiel A.11 (Hauptbeispiel für $GL_2(K)$, char K=2)

Modul	$V^* := (\langle X^2, Y^2 \rangle \otimes \langle E \rangle) \bigoplus_{i=1}^2 (\langle X_i, Y_i \rangle \oplus \langle X_i^*, Y_i^* \rangle)$
Dimension	10
phsop	$X_i X_j^* + Y_i Y_j^* \text{ mit } (i, j) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$
in Graden:	2, 2, 2
Kozyklus im Summanden	$\langle X^2, Y^2 \rangle \otimes \langle E \rangle$
im Grad	1

93

Anstatt mit $\langle E \rangle$ zu tensorieren, kann man auch einfach $\langle E \rangle$ hinreichend oft addieren - dann liegen der Kozyklus bzw. das phsop noch einen Grad höher. Allerdings bringt die Addition natürlich eine unerwünschte Dimensionserhöhung mit sich. Insbesondere muss man $\langle E \rangle$ so oft addieren, dass sich noch ein phsop ergibt. Bei dem Kozyklus ist dies dagegen nicht kritisch, es kann hier durchaus ein Summand $\langle E \rangle$ verwendet werden, der auch schon für eine Invariante verwendet wurde. Man kann also z.B.

$$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle E_i \rangle$$

setzen. Jedes Element im ph
sop bekommt hier ein E_i (deshalb braucht man drei Summanden), und ein E_i lässt sich für den Kozyklus im Grad 2 recyclen. Also

Beispiel A.12 (Aufgeblähtes Beispiel für $GL_2(K)$, char K=2)

Modul	$V^* := \langle X^2, Y^2 \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle E_i \rangle$
Dimension	13
phsop	$X_i Y_j E_k + X_j Y_i E_k \text{ mit } (i, j, k) \in \{(1, 2, 1), (2, 3, 2), (3, 4, 3)\}$
in Graden:	3, 3, 3
Kozyklus in	$S^2(\langle X^2, Y^2 \rangle \oplus \langle E_1 \rangle)$
im Grad	2

Ähnlich gehen wir im Fall p = 3 vor:

Beispiel A.13 (Hauptbeispiel für $GL_2(K)$, char K=3)

Modul	$V^* := (\langle X, Y \rangle \otimes \langle E^2 \rangle) \bigoplus \langle X^3, Y^3 \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle X_i^2, Y_i^2, X_i Y_i \rangle \otimes \langle E_i \rangle$
Dimension	13
phsop	$(X_i^2 \otimes E_i)(Y_i^2 \otimes E_i) - (X_i Y_i \otimes E_i)^2$
in Graden:	2, 2, 2
Kozyklus in	$S^2(\langle X, Y \rangle \otimes \langle E^2 \rangle \bigoplus \langle X^3, Y^3 \rangle)$
im Grad	2

A.5 Beispiele für $SO_2(K)$, char K=2

Die Elemente von $SO_2(K)$ werden durch die Relation $\sigma \cdot XY = XY$ aus $SL_2(K)$ ausgesondert. Es folgt $\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ oder $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Damit hat diese Gruppe jedoch als Zusammenhangskomponente den Torus und ist daher nicht so interessant. Wir geben dennoch einige Beispiele an. Wir können Beispiel A.4 und A.5 übernehmen. Man findet nun im Tensorprodukt $\langle X \otimes X, ..., Y \otimes Y \rangle$ einen Untermodul, bezeichnet mit

$$M_{1bc} =: \langle \pi, \tau \rangle$$
 und der Darstellung $\begin{pmatrix} 1 & bc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Damit hat der triviale Modul $\langle \pi \rangle$ schon einen nicht trivialen Kozyklus, der von der Invariante von M_{1bc} (selbstdual) annulliert wird, und wir haben

Beispiel A.14 (Ein Beispiel in Dimension 9)

Modul	$V^* := \langle \pi \rangle \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle$
Dimension	9
phsop	$X_i Y_j + X_j Y_i \text{ mit } (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
in Graden:	2, 2, 2
Kozyklus im Summanden	$\langle \pi \rangle$
im Grad	1

Beispiel A.15 (Ein Beispiel in Dimension 7)

Modul	$V^* := \langle \pi \rangle \bigoplus_{i=1}^3 \langle \pi_i, \tau_i \rangle$
Dimension	7
phsop	π_1, π_2, π_3
in Graden:	1, 1, 1
Kozyklus im Summanden	$\langle \pi \rangle$
im Grad	1

Nach dem Beweis zum Hauptsatz kann man aber in der auftretenden Relation für das annullierende phsop die Koeffizienten durch π kürzen, so dass der triviale Modul für das Erzeugen dieser Relation gar nicht gebraucht wird. Er kann also weggelassen werden und wir erhalten:

Beispiel A.16 (Ein Beispiel in Dimension 8)

Modul	$V^* := \bigoplus_{i=1}^4 \langle X_i, Y_i \rangle$
Dimension	8
phsop	$X_i Y_j + X_j Y_i \text{ mit } (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
in Graden:	2, 2, 2
Kozyklus	-
im Grad	-

95

Beispiel A.17 (Ein Beispiel in Dimension 6)

Modul	$V^* := \bigoplus_{i=1}^3 \langle \pi_i, \tau_i \rangle$
Dimension	6
phsop	π_1,π_2,π_3
in Graden:	1, 1, 1
Kozyklus	-
im Grad	-

Im Prinzip kommt hier aber die nicht Cohen-Macaulay Eigenschaft von der Gruppe Z_2 , denn $\mathrm{SO}_2(K) \cong K^* \rtimes Z_2$, und K^* ist linear reduktiv.

B Funktionsweise des (modifizierten) Bayer-Algorithmus

Der Algorithmus von Bayer dient zur Berechnung einer K-Vektorraumbasis von $K[V]_d^G$ zu gegebenem Grad d. Dabei ist V durch eine Darstellung (des Duals) gegeben und die Gruppe G durch ihr zugehöriges Ideal. In diesem Anhang wollen wir nur kurz das Prinzip beschreiben, nach dem der Bayer-Algorithmus und seine Modifikation funktioniert. Die Idee für die Modifikation geht auf Kemper zurück, der diese zunächst für seinen Algorithmus [8] vorschlug (der denselben Zweck wie der Bayer-Algorithmus erfüllt). Da sich jedoch zumindest für die in dieser Arbeit untersuchten Moduln der Bayer-Algorithmus stets als um einiges schneller erwies, geben wir die Modifikation nur für diesen an. Für Einzelheiten und Beweise sei auf die Arbeit [1] verwiesen (die dortigen Beweise gehen auch für die Modifikation durch). Ausserdem sei nochmals betont, dass ohne die Modifikation die Mehrheit der Beispiele aufgrund einer dann viel zu langen Rechenzeit nicht mit IsNotCohenMacaulay hätte getestet werden können.

B.1 Berechnung von Torus-Invarianten

Der modifizierte Bayer-Algorithmus berechnet zuerst die Invarianten einer sehr einfachen Untergruppe der $\mathrm{SL}_2(K)$, nämlich des Torus

$$T:=\left\{\left(\begin{array}{cc}a&0\\0&a^{-1}\end{array}\right):a\in K\setminus\{0\}\right\}.$$

Wie bereits in Abschnitt 3.2 erwähnt, reduziert sich die Darstellungsmatrix eines G-Moduls (mit $T \subseteq G$) $V^* = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ für die Elemente $\sigma \in T$ sehr oft auf die Form

$$A_{\sigma} = \begin{pmatrix} a^{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^{w_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^{w_n} \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } \sigma \cdot X_i = a^{w_i} X_i,$$

mit $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{Z}$ fest, und kann ggf. mit Hilfe eines Basiswechsels stets auf diese Form gebracht werden. Der Gewichtsvektor $w = (w_1, \ldots, w_n)$ beschreibt die Einschränkung der Darstellung auf T vollständig. Sei nun

$$f = \sum f_{i_1,\dots,i_n} X^{i_1} \dots X^{i_n} \in K[V]_d^G \text{ oder } K[V]_d^T, \quad \text{ mit } f_{i_1,\dots,i_n} \in K.$$

Für $\sigma \in T \subseteq G$ gilt dann also $f = \sigma \cdot f$, oder

$$\sum f_{i_1,\dots,i_n} X^{i_1} \dots X^{i_n} = \sum f_{i_1,\dots,i_n} a^{w_1 i_1 + \dots + w_n i_n} X^{i_1} \dots X^{i_n}.$$

Es folgt $w_1i_1 + \ldots + w_ni_n = 0$ für $f_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0$ (denn K ist unendlich), oder anders ausgedrückt: Die Invarianten von $K[V]_d^G$ oder $K[V]_d^T$ sind eine Linearkombination monomialer Invarianten von $K[V]_d^T$, nämlich der $X^{i_1} \ldots X^{i_n}$ mit $w_1i_1 + \ldots + w_ni_n = 0$. Für $K[V]_d^T$ ist eine Basis also gegeben durch

$$\{X^{i_1} \dots X^{i_n}: i_1 + \dots + i_n = d, w_1 i_1 + \dots + w_n i_n = 0\}.$$

Diese lässt sich mit MAGMA am effizientesten durch Auswahl aus der Menge aller Monome vom Grad d bestimmen, etwa durch folgende Zeilen (P ist dabei ein Modell für K[V], also ein Polynomring in n Variablen):

mons:=MonomialsOfDegree(P,d);

mons:=[f: f in mons| &+[Exponents(f)[i]*w[i]: i in [1..n]] eq 0];
(Siehe die Funktion TorusInvariantsSL2 in der Datei CMTest.txt.)

B.2 Das Prinzip des Bayer-Algorithmus

Die Gruppe G sei gegeben als Nullstellenmenge eines (Radikal-)Ideals $I_G \leq K[S_1, \ldots, S_r]$. Die Operation auf $V^* = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ ist für $\sigma \in G \subseteq K^r$ gegeben durch eine Darstellungsmatrix $A_{\sigma} := (a_{ij}(\sigma))_{i,j=1..n}$ mit Polynomen $a_{ij} \in K[S_1, \ldots, S_r]$ mit i, j = 1..n. Die Polynome a_{ij} seien dabei homogen vom gleichen Grad (dies ist keine Einschränkung, denn mit einer zusätzlichen Variable S_{r+1} und der Hinzunahme der Polynoms $S_{r+1}-1$ zur Definition von I_G kann man die Polynome a_{ij} homogenisieren). Dann sind die Polynome

$$\Psi_i := \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \in K[S_1, ..., S_r, X_1, ..., X_n]$$

ebenfalls alle homogen mit einem gemeinsamen Grad δ . Ferner sei I_G^h die Homogenisierung des Ideals I_G . Dies ist dasjenige Ideal in $K[S_1, ..., S_r, h]$, das von den Homogenisierungen (zum kleinst möglichen Grad) jeden Elements aus I_G mittels der neuen Variablen h erzeugt wird. Sei nun

$$M := \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n : i_1 + \dots + i_n = d\}$$

die Menge aller Exponenten von Monomen vom Grad d. Bayer zeigt nun in Proposition 1 in [1] folgendes Resultat, nach welchem klar ist, wie der Algorithmus zur Berechnung der Invarianten auszusehen hat:

Ist $\{f_1, \ldots, f_k\}$ eine Gröbner-Basis des Ideals $I \cap K[X_1, \ldots, X_n, h]$ mit

$$I := \left\langle \left\{ \Psi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \Psi_n^{i_n} : (i_1, \ldots, i_n) \in M \right\} \cup I_G^h \right\rangle \le K[S, X, h],$$

so ist

$$\{f_i(X_1,\ldots,X_n,1): 1 \le i \le k, \deg f_i = d \cdot \delta\}$$

eine K-Vektorraumbasis von $K[X_1, \ldots, X_n]_d^G$.

Der dort gegebene Beweis funktioniert jedoch wörtlich auch dann, wenn man M durch die Menge

$$M_T := \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n : i_1 + \dots + i_n = d, \quad w_1 i_1 + \dots + w_n i_n = 0\}$$

der Exponenten der Torus-Invarianten ersetzt. Bei der Beweisrichtung \subseteq ändert sich gar nichts, und für \supseteq ist lediglich zu beachten, dass sich jede Invariante als Linearkombination der Torus-Invarianten berechnen lässt. Bei der Implementation in Magma ersetzt man für die Modifikation also lediglich die Zeile

mons:=MonomialsOfDegree(P,d);

bei der die zu den Exponenten M gehörigen Monome berechnet werden, durch die Zeile

mons:=TorusInvariantsSL2(w,d,P);

wo dann die zu M_T gehörigen Monome berechnet werden. Wie bereits erwähnt, führt dies zu einer enormen Geschwindigkeitssteigerung.

LITERATUR 99

Literatur

[1] T. Bayer, An algorithm for computing invariants of linear actions of algebraic groups up to a given degree, J. Symb. Comput. **35** (2003), 441-449.

- [2] D. J. Benson, Polynomial Invariants of Finite Groups, London Mathematical Society Lecture Note Series 190, Cambridge University Press 1993.
- [3] S. Bosch, Algebra, Springer Verlag, 4. Auflage 2001.
- [4] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1995.
- [5] H. Derksen, G. Kemper Computational Invariant Theory, Springer Verlag, 2002.
- [6] M. Hochster, J. Roberts, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, Adv. in Mat. 13 (1974), 115-175.
- [7] M. Hochster, J. A. Eagon, Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perdection of determinantal loci, Amer. J. of Math. 93 (1971), 1020-1058.
- [8] G. Kemper, Computing invariants of reductive groups in positive characteristic, Transformation Groups, Vol. 8, No. 2, 2003, 159-176.
- [9] G. Kemper, A characterization of linearly reductive groups by their invariants, Birkhäuser Boston, Transformation Groups, Vol. 5, No 1, 2000, 85-92.
- [10] G. Kemper, *Invariants of Hopf Algebras*, The Curves Seminar at Queen's, Volume XIII, in: Queen's Papers in Pure and Applied Math. **119** (2000), 37-61.
- [11] G. Kemper, Computational Invariant Theory, The Curves Seminar at Queen's, Volume XII, in: Queen's Papers in Pure and Applied Math. 114 (1998), 5-26.
- [12] G. Kemper, On the Cohen-Macaulay Property of Modular Invariant Rings, Journal of Algebra 215 (1999), 330-351.
- [13] M. Kohls, Konstruktion von Invariantenringen ohne die Cohen-Macaulay Eigenschaft, 2003, Projektarbeit.

100 LITERATUR

 $[14]\,$ H.-J. Kowalsky, G. O. Michler, $\it Lineare~Algebra,$ de Gruyter, 11. Auflage 1998.

- [15] E. Kunz, Einführung in die algebraische Geometrie, Vieweg 1997.
- [16] S. Lang, Algebra, Revised Third Edition, Springer Verlag 2002.