- Master's Degree Memoir -

Subgradient Projection Operators

by Benoît Pauwels

under the supervision of :

Patrick L. Combettes

UPMC Université Paris 06 Laboratoire Jacques-Louis Lions- UMR CNRS 7598 75005 Paris, France plc@math.jussieu.fr

Abstract. Several algebraic and topological properties of subgradient projection operators are investigated and various examples are provided. Connections with Moreau's proximity operator are also made and acceleration schemes for subgradient projection algorihms are discussed. Finally continuity, nonexpansiveness, monotonicity, differentiability, and epi-convergence properties are investigated.

September 20, 2012

Laboratoire Jacques-Louis Lions – Université Pierre et Marie Curie

- Mémoire de Master OJME -

Opérateurs de projection sous-différentielle

par Benoît Pauwels

sous la direction de :

Patrick L. Combettes

UPMC Université Paris 06 Laboratoire Jacques-Louis Lions- UMR CNRS 7598 75005 Paris, France plc@math.jussieu.fr

20 septembre 2012

Table des matières

1	Nota	tions, définitions et exemples	6
	1.1	Projecteur sous-différentiel	6
	1.2	Sélections du projecteur sous-différentiel	8
		1.2.1 Sélections	8
		1.2.2 Classe $\mathfrak T$	9
	1.3	Exemples	10
	1.4	Réécriture de l'algorithme de projection sous-différentielle	11
2	Proj	riétés algébriques	12
	2.1	Propriétés liées à la composition	12
		2.1.1 Application vers l'accélération de l'algorithme de projection sous-différentielle	14
	2.2	Propriétés liées à l'addition	15
	2.3	Propriétés liées à l'enveloppe de Moreau	19
3	Rég	larité des sélections de G_f	20
	3.1	Continuité des sélections de G_f	20
	3.2	Différentiabilité et caractère lispchitzien des sélections de G_f	21
		3.2.1 Différentiabilité	21
		3.2.2 Caractère lipschitzien	22
4	Prop	riétés séquentielles	23
	4.1	Rappels sur les suites d'ensembles et notations	23
	4.2	Convergence forte	24
		4.2.1 Résultats préliminaires liés à l'épi-convergence	24
		4.2.2 Résultat de convergence forte	25
5	Prop	riétés d'opérateur multivoque	26
	5.1	Propriétés des valeurs de G_f	26
	5.2	Semi-continuité	27
		5.2.1 Semi-continuité du sous-différentiel	າຂ

	5.2.2 Semi-continuité du projecteur sous-différentiel	28
5.3	Monotonie	30

Introduction

La notion de *projecteur sous-différentiel* a été introduite par Naum Z. Shor dans un algorithme de résolution de programmes linéaires [39]. Elle a été approfondie et développée par le même Shor [40, 41, 42], Yuri M. Ermoliev [18, 19] et Boris T. Polyak [32, 34, 35] notamment.

Dans toute la suite \mathcal{H} désignera un espace de Hilbert sur \mathbb{R} . Nous allons nous intéresser au problème suivant : étant donnés un point $x_0 \in \mathcal{H}$ et une fonction de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ - c'est-à-dire une fonction de \mathcal{H} dans $]-\infty,+\infty]$ propre convexe semi-continue inférieurement - on cherche la projection métrique de x_0 sur $\mathrm{lev}_{\leqslant 0} f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant 0\}$ (supposé non vide).

Voici une version de l'algorithme de Shor, étudiée par Polyak [35] :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\|u_n\|^2} u_n \tag{0.1}$$

où $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n \in \partial f(x_n)$. Sous certaines conditions les orbites cet algorithme convergent faiblement vers des points de $\text{lev}_{\leq 0} f$ [9].

Pour toute sélection U de ∂f et tout point $x \in \text{dom } U$ nous appellerons projection sous-différentielle de x dans la direction Ux le point

$$G_f^U x = x - \frac{f(x)}{\|Ux\|^2} Ux.$$
 (0.2)

Plus généralement on s'intéressera à l'ensemble

$$G_f x = \left\{ x - \frac{f(x)}{\|u\|^2} u \mid u \in \partial f(x) \right\}. \tag{0.3}$$

L'algorithme (0.1) se réécrit alors simplement

$$x_{n+1} = G_f^U x_n \tag{0.4}$$

où U est une sélection qui prolonge la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans ce document nous étudierons l'opérateur de projection sous-différentielle et ses sélections. Nous nous intéresserons notamment à leurs propriétés algébriques (projecteur sous-différentiel d'une composition, d'une combinaison affine, d'une inf-convolution, etc.), à leurs liens avec la conjuguée de Fenchel et l'enveloppe de Moreau, à leur régularité (continuité, différentiabilitié, caractère lipschitzien), au comportement de la suite des projecteurs sous-différentiels associée à une suite de fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$, et enfin aux propriétés d'opérateur multivoque de G_f (propriétés des valeurs, semi-continuité et monotonie).

Contributions

À notre connaissance l'étude de la projection sous-différentielle comme opérateur est nouvelle, et l'ensemble des propriétés algébriques, topologiques et séquentielles démontrées ici sur cet objet sont originales.

Dans toute ce document \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert sur \mathbb{R} .

1 Notations, définitions et exemples

1.1 Projecteur sous-différentiel

Étant donnée $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant 0\} \neq \emptyset$ on veut approcher l'opérateur de projection métrique sur $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f$ par un opérateur plus "simple" à calculer. L'idée de la projection sous-différentielle est de projeter sur un demi-espace contenant $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f$ défini à l'aide d'un sous-gradient de f. Cette approximation est particulièrement utile dans de nombreux problèmes d'optimisation [7, 12, 13].

Notation 1.1 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$ et $(x, u) \in \text{gra } \partial f$. On définit l'approximation suivante de $\text{lev}_{\leq 0}$ f:

$$H_u = \left\{ y \in \mathcal{H} \mid \langle y - x \mid u \rangle + f(x) \leqslant 0 \right\} \tag{1.1}$$

Remarque 1.2 H_u est un convexe fermé contenant $\operatorname{lev}_{\leq 0} f$ (donc non vide). On observe que : $x \in H_u \Leftrightarrow f(x) \leq 0$.

Le lemme suivant, qui est une conséquence directe de la règle de Fermat, affirme que les sous-gradients des points de $\text{lev}_{>0}$ $f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) > 0\}$ sont non nuls.

Lemme 1.3 *Soit* $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ *telle que* $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$. *Alors* $\text{zer } \partial f \subset \text{lev}_{\leq 0}$ f.

Lemme 1.4 [10, Example 28.16] Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$ et $(x, u) \in \operatorname{gra} \partial f$. L'expression de $P_{H_u}x$ est donnée par

$$P_{H_u} x = \begin{cases} x & \text{si } f(x) \le 0\\ x - \frac{f(x)}{\|u\|^2} u & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$
 (1.2)

Définition 1.5 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$. On appellera projecteur sous-différentiel associé à f l'opérateur multivoque suivant :

$$G_f: \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}: x \mapsto \begin{cases} \{x\} & \text{si } f(x) \leq 0\\ \left\{x - \frac{f(x)}{\|u\|^2} u \mid u \in \partial f(x)\right\} & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$

$$(1.3)$$

Observons que $(\forall x \in \text{dom } \partial f)$ $G_f x = \{P_{H_u} x \mid u \in \partial f(x)\}$. Mais l'exemple suivant montre qu'il peut exister des points $x \in \text{lev}_{\leq 0} f$ tels que $\partial f(x) = \emptyset$.

Exemple 1.6 [31, Example 3.8(a)] Considérons que \mathcal{H} est l'espace des suites réelles de carrés sommables et notons $C = \{x \in \mathcal{H} \mid (\forall n \in \mathbb{N}) \mid x_n \mid \leq 2^{-n} \}$. Alors la fonction

$$f: \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]: x \mapsto \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[-\left(2^{-n} + x_n\right)^{1/2} \right] & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
 (1.4)

est convexe semi-continue inférieurement et tout élément x de C tel que $x_n > -2^{-n}$ pour une infinité d'indices vérifie $\partial f(x) = \varnothing$. Par exemple $\partial f(0) = \varnothing$ et $f(0) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} < 0$, d'où $x \in \operatorname{lev}_{\leq 0} f \cap \mathbb{C} \operatorname{dom} \partial f$.

Remarque 1.7 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$.

- (i) $\operatorname{dom} G_f = \operatorname{lev}_{\leq 0} f \cup \operatorname{dom} \partial f \subset \operatorname{dom} f$
- (ii) $(\forall x \in \text{dom } \partial f)$ $G_f x = \{ P_{H_u} x \mid u \in \partial f(x) \}$
- (iii) Fix $G_f = \text{lev}_{\leq 0} f$
- (iv) $\operatorname{dom} G_f = \mathcal{H} \Leftrightarrow \operatorname{lev}_{>0} f \subset \operatorname{dom} \partial f \Leftrightarrow \operatorname{dom} f = \mathcal{H}$. Dans ce cas $\operatorname{cont} f = \operatorname{dom} \partial f = \operatorname{dom} f = \mathcal{H}$.
- (v) Si f est Gâteaux-différentiable sur $lev_{>0}$ f alors G_f est univoque :

$$G_f: \mathcal{H} \to \mathcal{H}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leq 0\\ x - \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2} \nabla f(x) & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$
 (1.5)

(vi) Supposons $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ et f différentiable. Alors $\operatorname{dom} G_f = \mathbb{R}$ et

$$G_f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leq 0\\ x - \frac{f(x)}{f'(x)} & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$
 (1.6)

(vii) $G_f = \mathrm{Id} \Leftrightarrow (\exists \eta \in \mathbb{R}_-) \ f \equiv \eta$. En effet toute fonction convexe majorée sur \mathcal{H} est constante.

Proposition 1.8 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$. Alors

$$(\forall (x, p) \in \operatorname{gra} G_f) (\forall y \in \operatorname{lev}_{\leq 0} f) \|p - y\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 - \|x - p\|^2.$$
(1.7)

En particulier G_f est une quasi-contraction :

$$(\forall (x, p) \in \operatorname{gra} G_f) (\forall y \in \operatorname{lev}_{\leq 0} f) \|p - y\| \leq \|x - y\|.$$
(1.8)

Démonstration. Soient $(x, p) \in \operatorname{gra} G_f$ et $y \in \operatorname{lev}_{\leq 0} f$. Si $f(x) \leq 0$ alors p = x, l'inégalité est donc vérifiée. Supposons f(x) > 0. Il existe alors $u \in \partial f(x)$ tel que $p = P_{H_u}x$ (Remarque 1.7(ii)). Par conséquent

$$||p - y||^{2} + ||x - p||^{2} = ||x - y||^{2} - 2\langle p - y \mid x - p \rangle$$

$$= ||x - y||^{2} + 2\langle y - P_{H_{u}}x \mid x - P_{H_{u}}x \rangle$$

$$\leq ||x - y||^{2}.$$
(1.9)

L'exemple suivant montre que la notion de projecteur sous-différentiel étend celle de projecteur métrique.

Exemple 1.9 Soit $C \subset \mathcal{H}$ un convexe fermé non vide. Alors

$$G_{d_C} = P_C. (1.10)$$

En particulier, pour $C = \{0\}$,

$$G_{\|\cdot\|} \equiv 0. \tag{1.11}$$

Démonstration. On a lev_{≤0} $d_C = C$ et $(\forall x \in \complement C)$ $\nabla d_C(x) = \frac{x - P_C x}{d_C(x)}$ [10, Proposition 18.22(iii)]. Par conséquent dom $G_{d_C} = \mathcal{H}$ et $(\forall x \in \complement C)$ $G_{d_C} x = P_C x$. \square

1.2 Sélections du projecteur sous-différentiel

Dans la littérature les projections sous-différentielles apparaissent sous forme de sélections de l'opérateur mutlivoque que nous venons de définir : à chaque étape de l'algorithme on se contente d'un seul sous-gradient du point courant.

1.2.1 Sélections

Définition 1.10 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. On appellera sélection de ∂f tout opérateur U défini sur une partie D de dom ∂f tel que $(\forall x \in D)$ $Ux \in \partial f(x)$.

Notation 1.11 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$ et U une sélection de ∂f . On remarque tout d'abord que, d'après le Lemme 1.3, $(\forall x \in \operatorname{lev}_{>0} f \cap \operatorname{dom} U)$ $Ux \neq 0$. On notera G_f^U l'opérateur univoque défini sur $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \cup \operatorname{dom} U$ de la manière suivante :

$$G_f^U x = \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leqslant 0\\ x - \frac{f(x)}{\|Ux\|^2} Ux & \text{si } f(x) > 0 \text{ et } x \in \text{dom } U \end{cases}$$
 (1.12)

Dans la suite il arrivera que l'on ait à considérer des opérateurs G_f^U où $\mathrm{dom}\,U$ est un sousensemble propre de $\mathrm{dom}\,\partial f$, d'où la définition assez large de sélection donnée ci-dessus.

Remarque 1.12 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$ et U une sélection de ∂f .

- (i) $\operatorname{dom} G_f^U \subset \operatorname{dom} f$
- (ii) $(\forall x \in \text{dom } U)$ $G_f^U x = P_{H_{Ux}} x$

(iii)
$$\left(\forall x \in \text{dom } G_f^U \right) \left(\forall y \in \text{lev}_{\leq 0} f \right) \quad \left\langle y - G_f^U x \mid x - G_f^U x \right\rangle \leqslant 0$$

(iv)
$$\left(\forall x \in \text{dom}\,G_f^U\right)$$
 $G_f^U x = P_{\text{lev}_{\leqslant 0}}\,fx \Leftrightarrow G_f^U x \in \text{lev}_{\leqslant 0}\,f$

(v) Fix
$$G_f^U = \operatorname{lev}_{\leqslant 0} f$$

1.2.2 Classe *T*

Nous allons voir que les sélections de projecteurs sous-différentiels définies sur tout \mathcal{H} appartiennent à une classe d'opérateurs déjà étudiée dans [9, 13].

Notation 1.13 [9, (1.2)] Soit $(x, y) \in \mathcal{H}^2$. Notons

$$H(x,y) = \{ u \in \mathcal{H} \mid \langle u - y \mid x - y \rangle \leqslant 0 \}. \tag{1.13}$$

On observe que $y = P_{H(x,y)}x$.

Définition 1.14 [9, Definition 2.2.] On définit la classe d'opérateurs suivante :

$$\mathfrak{T} = \{ T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid (\forall x \in \mathcal{H}) \text{ Fix } T \subset H(x, Tx) \}$$
(1.14)

Remarque 1.15 [9, Proposition 2.3] Soit $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $T \in \mathfrak{T}$
- (ii) $(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \operatorname{Fix} T) \quad \langle y Tx \mid x Tx \rangle \leq 0$
- (iii) 2T Id est une quasi-contraction.

Notation 1.16 Notons $\mathfrak G$ la classe des sélections de projecteurs sous-différentiels définies sur $\mathcal H$:

$$\mathfrak{G} = \{G : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid (\exists f \in \Gamma_0(\mathcal{H}))(\exists U \text{ s\'election de } \partial f) \ G = G_f^U \text{ et } \operatorname{lev}_{>0} f \subset \operatorname{dom} U \}. \tag{1.15}$$

Remarque 1.17 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et U une sélection de ∂f . Si $G_f^U \in \mathfrak{G}$ alors cont $f = \operatorname{dom} \partial f = \operatorname{dom} f = \mathcal{H}$.

Proposition 1.18 [9, Proposition 2.3.]

$$\mathfrak{G}\subset\mathfrak{T}\tag{1.16}$$

Proposition 1.19 [13, Proposition 2.3] *Soit* $T \in \mathfrak{T}$.

- (i) $(\forall (x,y) \in \mathcal{H} \times \text{Fix } T) \quad ||Tx x||^2 \leqslant \langle y x \mid Tx x \rangle$
- (ii) $(\forall \alpha \in [0,2]) (\forall (x,y) \in \mathcal{H} \times \operatorname{Fix} T) \quad \|(1-\alpha)x + \alpha Tx y\|^2 \leqslant \|x-y\|^2 \alpha(2-\alpha)\|Tx x\|^2$. En particulier T est une quasi-contraction.
- (iii) $(\forall x \in \mathcal{H}) \quad ||Tx x|| \leq d_{\text{Fix}\,T}x$
- (iv) Fix $T = \bigcap_{x \in \mathcal{H}} H(x, Tx)$
- (v) Fix T est convexe fermé. D'où :

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad Tx \in \operatorname{Fix} T \Leftrightarrow Tx = P_{\operatorname{Fix} T} x. \tag{1.17}$$

(vi) $(\forall \alpha \in [0,1])$ $(1-\alpha) \operatorname{Id} + \alpha T \in \mathfrak{T}$

Remarque 1.20 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et U une sélection de ∂f . On suppose $G_f^U \in \mathfrak{G}$.

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad H\left(x, G_f^U x\right) = \begin{cases} \mathcal{H} & \text{si } f(x) \leq 0\\ H_{Ux} & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$
 (1.18)

On retrouve le point (ii) de la Remarque 1.12 : $(\forall x \in \text{dom}\, U) \; G_f^U x = P_{H_{Ux}} x$.

Démonstration. Soient $x \in \text{lev}_{>0} f$ et $y \in \mathcal{H}$. Alors

$$\left\langle y - G_f^U x \mid x - G_f^U x \right\rangle = \left\langle y - x + \frac{f(x)}{\|Ux\|^2} Ux \mid \frac{f(x)}{\|Ux\|^2} Ux \right\rangle$$
$$= \frac{f(x)}{\|Ux\|^2} (\langle y - x \mid Ux \rangle + f(x)). \tag{1.19}$$

Corollaire 1.21 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et U une sélection de ∂f . On suppose $G_f^U \in \mathfrak{G}$.

(i) G_f^U est une quasi-contraction. (Nous l'avions déjà montré à la Proposition 1.8.)

(ii)
$$(\forall x \in \text{lev}_{>0} f)$$
 $\frac{f(x)}{\|Ux\|} \leqslant d_{\text{lev}_{\leqslant 0} f}(x)$

(iii)
$$\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f = \bigcap_{x \in \operatorname{lev}_{>0} f} H_{Ux}$$

(iv)
$$(\forall \alpha \in [0,1])$$
 $(1-\alpha)\operatorname{Id} + \alpha G_f^U \in \mathfrak{T}$

1.3 Exemples

Exemple 1.22 Soit $u \in \mathcal{H}$. On considère la fonction $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : x \mapsto \langle x \mid u \rangle$. Alors

$$G_f: \mathcal{H} \to \mathcal{H}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } \langle x \mid u \rangle \leqslant 0 \\ x - \frac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u & \text{si } \langle x \mid u \rangle > 0 \end{cases}$$
 (1.20)

D'après [10, Example 28.16], G_f est le projecteur sur $\operatorname{lev}_{\leq 0} f$:

$$G_{\langle \cdot | u \rangle} = P_{\text{lev}_{\leq 0} f}. \tag{1.21}$$

Exemple 1.23 Soit $C \subset \mathcal{H}$ un convexe fermé non vide. Alors $\operatorname{lev}_{\leq 0} d_C^2 = C$ et $\nabla d_C^2 = 2(\operatorname{Id} - P_C)$ [10, Corollary 12.30]. On en déduit que

$$G_{d_C^2} = \frac{\text{Id} + P_C}{2}. (1.22)$$

On remarque que, comme P_C est une contraction, $G_{d_C^2}$ est une contraction ferme [10, Proposition 4.2]. En particulier, pour $C = \{0\}$,

$$G_{\|\cdot\|^2} = \frac{\mathrm{Id}}{2}.\tag{1.23}$$

Exemple 1.24 [9, Remark 2.4] On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \max\{x+1, 2x+1\}$. Alors

$$G_{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \left[-1, -\frac{1}{2}\right] & \text{si } x = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 (1.24)

f est convexe continue sur \mathbb{R} et différentiable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mais aucune sélection de G_f n'est continue en 0.

Exemple 1.25 Soit $\eta \in \mathbb{R}_{++}$. On pose

$$f: \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]: x \mapsto \begin{cases} \eta - \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$
 (1.25)

Alors $\operatorname{lev}_{\leq 0} f = [\eta^2, +\infty[, \operatorname{dom} G_f = \mathbb{R}_{++}]$ et

$$G_f: \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant \eta^2 \\ 2\eta\sqrt{x} - x & \text{si } 0 < x < \eta^2 \end{cases}$$
 (1.26)

 G_f est continu sur \mathbb{R}_{++} mais pas lipschitzien.

Exemple 1.26 Soit $\eta \in]1, +\infty[$. On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1+x^2} - \eta$. Alors

$$G_f x = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leqslant \sqrt{\eta^2 - 1} \\ \frac{x^2 - 1 + \eta\sqrt{1 + x^2}}{2x} & \text{si } |x| > \sqrt{\eta^2 - 1}. \end{cases}$$
 (1.27)

De plus

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ G'_f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant \sqrt{\eta^2 - 1} \\ \frac{3}{2} + \frac{\eta}{\sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{2x^2} - \frac{\eta}{2x^2 \sqrt{1 + x^2}} & \text{si } |x| > \sqrt{\eta^2 - 1}. \end{cases}$$
(1.28)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > \sqrt{\eta^2 - 1}$, on a $\frac{3}{2} - \frac{1}{\eta^2 - 1} \leqslant G'_f(x) \leqslant \frac{5}{2} + \frac{1}{\eta^2 - 1}$. G'_f est donc bornée. Ainsi f est convexe différentiable lipschitzienne et G_f est lipschitzien.

Exemple 1.27 On pose

$$f: \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]: x \mapsto \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$
 (1.29)

Alors $\operatorname{lev}_{\leq 0} f = [1, +\infty[$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R}_{++}) \quad G_f x = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 1\\ x - x \ln(x) & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$
 (1.30)

1.4 Réécriture de l'algorithme de projection sous-différentielle

Rappelons la méthode de projection sous-différentielle.

Proposition 1.28 [9, Corollary 6.10] Soient $(f_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de fonctions convexes continues de \mathcal{H} dans \mathbb{R} telle que $(\forall i \in I)$ lev $_{\leqslant 0}$ $f_i \neq \emptyset$, U_i des sélections de ∂f_i (pour $i \in I$), $x_0 \in \mathcal{H}$ et $\varepsilon \in]0,1]$. On suppose que l'injection $i: \mathbb{N} \to I$ vérifie

$$(\forall i \in I)(\exists M_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad i \in \{i(n), \dots i(n+M_i-1)\},\tag{1.31}$$

que, pour tout i dans I, ∂f_i est borné sur les bornés et que $S = \bigcap_{i \in I} \operatorname{lev}_{\leqslant 0} f_i \neq \emptyset$. Alors chaque orbite de l'algorithme

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n \left(G_{f_{i(n)}}^{U_{i(n)}} x_n - x_n \right) \text{ où } \lambda_n \in [\varepsilon, 2 - \varepsilon]$$
 (1.32)

converge faiblement vers un point de S.

2 Propriétés algébriques

Étudions à présent les propriétés algébriques du projecteur sous-différentiel, *i.e.* comment s'exprime le projecteur sous-différentiel d'une composée, d'une somme, d'une inf-convolution, etc.

2.1 Propriétés liées à la composition

Proposition 2.1 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$, $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$ et U une sélection de ∂f . Alors $G_{\lambda f}$ et $G_{\lambda f}^{\lambda U}$ sont bien définis, et

$$G_{\lambda f} = G_f \tag{2.1}$$

$$G_{\lambda f}^{\lambda U} = G_f^U \tag{2.2}$$

Démonstration. Tout d'abord $G_{\lambda f}$ est bien défini puisque $\lambda f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\operatorname{lev}_{\leqslant 0}(\lambda f) = \operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \neq \varnothing$. Comme $\partial(\lambda f) = \lambda \partial f$, d'une part $\operatorname{dom} G_{\lambda f} = \operatorname{dom} G_f$, d'autre part, pour toute sélection U de ∂f , $\operatorname{dom}(\lambda U) = \operatorname{dom} U$ et λU est une sélection de $\partial(\lambda f)$, $G_{\lambda f}^{\lambda U}$ est donc bien défini. Enfin $(\forall x \in \mathcal{O})$

$$\operatorname{lev}_{>0} f \cap \operatorname{dom} U) \ G_{\lambda f}^{\lambda U} x = x - \frac{\lambda f(x)}{\|\lambda U x\|^2} \lambda U x = x - \frac{f(x)}{\|U x\|^2} U x = G_f^U x. \ \Box$$

Proposition 2.2 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ à valeurs réelles telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante sur $f(\mathcal{H})$ avec $\phi(0) = 0$. On suppose que f est Fréchet-différentiable sur $\operatorname{lev}_{>0} f$ et que ϕ est différentiable sur \mathbb{R} . Alors $\operatorname{dom} G_{\phi \circ f} = \mathcal{H}$ et

$$G_{\phi \circ f}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leq 0 \\ x + \frac{\phi(f(x))}{f(x)\phi'(f(x))} \left(G_f x - x \right) & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$
 (2.3)

Démonstration. Soit $x \in \text{lev}_{>0} f$. Alors $\nabla(\phi \circ f)(x) = \phi'(f(x))\nabla f(x)$, d'où

$$G_{\phi \circ f} x = x - \frac{\phi(f(x))}{\phi'(f(x))f(x)} \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2} \nabla f(x)$$

$$= x + \frac{\phi(f(x))}{f(x)\phi'(f(x))} (G_f x - x)$$
(2.4)

Corollaire 2.3 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ à valeurs réelles telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$ et $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$. On suppose $f \geqslant 0$ et f Fréchet-différentiable sur $\operatorname{lev}_{>0} f$. Alors

$$G_{f^{1/\alpha}} = (1 - \alpha)\operatorname{Id} + \alpha G_f. \tag{2.5}$$

Démonstration. Prendre $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto |t|^{1/\alpha}$ dans la Proposition 2.2. \square

Remarque 2.4 Ce résultat est à comparer avec le Corollaire 1.21(iv).

Corollaire 2.5 Soient C une partie convexe fermée non vide de \mathcal{H} et $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$. Alors

$$G_{d_C^{1/\alpha}} = (1 - \alpha)\operatorname{Id} + \alpha P_C. \tag{2.6}$$

En particulier, si $\alpha \in]0,1]$ alors $G_{d_C^{1/\alpha}}$ est α -moyenné, donc est une contraction [10, Remark 4.24 (i)], et même une contraction ferme quand $\alpha \in]0,1/2] \cup \{1\}$ [10, Remark 4.27].

Démonstration. Prendre $f=d_C$ dans le Corollaire 2.3. \square

Remarque 2.6 On retrouve Exemple 1.9 et Exemple 1.23 pour les valeurs $\alpha=1$ et $\alpha=1/2$ respectivement.

Corollaire 2.7 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$. *Alors*

$$G_{\|.\|^{1/\alpha}} = (1 - \alpha) \operatorname{Id}.$$
 (2.7)

Démonstration. Cela résulte du Corollaire 2.5 où l'on a pris $C = \{0\}$. \square

Proposition 2.8 [10, Proposition 16.5] Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, \mathcal{G} un espace de Hilbert sur \mathbb{R} et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Alors $L^* \circ \partial f \circ L \subset \partial (f \circ L)$.

Proposition 2.9 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$, \mathcal{G} un espace de Hilbert sur \mathbb{R} , $L \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ et U une sélection de ∂f . On suppose $L^{-1}(\operatorname{lev}_{\leq 0} f) \neq \emptyset$.

- (i) $G_{f \circ L}^{L^*UL}$ est bien défini.
- (ii) dom $G_{f \circ L}^{L^*UL} = L^{-1} \left(\text{dom } G_f^U \right)$

(iii)
$$\left(\forall y \in \operatorname{dom} G_{f \circ L}^{L^*UL}\right) \quad \left[L^* \circ G_f^U \circ L\right] y = L^*Ly - \frac{\|L^*ULy\|^2}{\|ULy\|^2} \left(y - G_{f \circ L}^{L^*UL}y\right)$$

- (iv) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $L^*L = LL^* = \alpha \operatorname{Id}$ alors $\alpha G_{f \circ L}^{L^*UL} = L^* \circ G_f^U \circ L$.
- (v) Si L est inversible avec $L^{-1}=L^*$ alors $G_{f\circ L}^{L^*UL}=L^*\circ G_f^U\circ L$.

Démonstration.

- (i) D'une part $\operatorname{lev}_{\leqslant 0}(f \circ L) = L^{-1}(\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f) \neq \emptyset$, d'autre part $(\forall y \in \operatorname{dom} U) \ L^*ULy \in \partial(f \circ L)(y)$ d'après la Proposition 2.8.
- (ii) On a dom $G_{f \circ L}^{L^*UL} = L^{-1}(\text{lev}_{\leq 0} f) \cup L^{-1}(\text{dom} U) = L^{-1}(\text{dom} G_f^U).$
- (iii) Soit $y\in \mathrm{dom}\,G_{f\circ L}^{L^*UL}$. Si $f(Ly)\leqslant 0$ alors $[L^*\circ G_f^U\circ L]y=L^*Ly$. Si f(Ly)>0 alors

$$[L^* \circ G_f^U \circ L]y = L^*Ly - \frac{\|L^*ULy\|^2}{\|ULy\|^2} \frac{(f \circ L)(y)}{\|L^*ULy\|^2} L^*ULy$$
$$= L^*Ly - \frac{\|L^*ULy\|^2}{\|ULy\|^2} \left(y - G_{f \circ L}^{L^*UL}y\right). \tag{2.8}$$

NB : Comme $L^*ULy \neq 0$, on a aussi $ULy \neq 0$.

(iv) On a $(\forall x \in \mathcal{H}) \|L^*x\|^2 = \langle x \mid LL^*x \rangle = \alpha \|x\|^2$, d'où le résultat.

(v) C'est le cas $\alpha=1$ du point précédent.

Notation 2.10 (Opérateur proximal) [10, Definition 12.23] Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. Pour tout x dans \mathcal{H} on note $\operatorname{prox}_f x$ l'unique point de \mathcal{H} tel que

$$\min_{y \in \mathcal{H}} \left(f(y) + \frac{1}{2} ||x - y||^2 \right) = f(\operatorname{prox}_f x) + \frac{1}{2} ||x - \operatorname{prox}_f x||^2$$
 (2.9)

(voir [10, Proposition 12.15]).

Remarque 2.11 [10, Proposition 23.32] S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ tel que $L^*L = LL^* = \alpha$ Id alors

$$L^* \circ \operatorname{prox}_{\alpha f} \circ L = \alpha \operatorname{prox}_{f \circ L} \tag{2.10}$$

$$L^* \circ G_{\alpha f}^{\alpha U} \circ L = \alpha G_{f \circ L}^{L^* U L}$$
 (2.11)

d'après la Proposition 2.1.

Proposition 2.12 Soient \mathcal{G} un espace de Hilbert sur \mathbb{R} et $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ inversible avec $L^{-1} = L^*$. Posons

$$f: \mathcal{H} \to \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\|Lx\|^2}{2}.$$
 (2.12)

Alors $G_f = \frac{\mathrm{Id}}{2} = \mathrm{prox}_f$.

 $D\'{e}monstration$. En appliquant le Corollaire 2.7, la Proposition 2.1 et la Proposition 2.9 on obtient $G_f = \frac{\mathrm{Id}}{2}$. L'égalité $\mathrm{prox}_f = \frac{\mathrm{Id}}{2}$ résulte de [10, Example 17.7] en prenant r = 0 et $\gamma = 1$. \square

2.1.1 Application vers l'accélération de l'algorithme de projection sous-différentielle

Lemme 2.13 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ à valeurs réelles telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante sur $f(\mathcal{H})$ avec $\phi(0) = 0$. On suppose que f et ϕ sont Fréchet-différentiables sur $\operatorname{lev}_{>0} f$. Alors

$$(\forall x \in \text{lev}_{>0} f) \quad \|x - G_f x\| - \|x - G_{\phi \circ f} x\| = \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \left(1 - \frac{\phi(f(x))}{f(x)\phi'(f(x))}\right). \tag{2.13}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.2. □

On observe que $\text{lev}_{\leqslant 0}$ $(\phi \circ f) = \text{lev}_{\leqslant 0} f$. Les opérateurs $G_{\phi \circ f}$ et G_f sont donc tous deux des approximations sous-différentielles du projecteur métrique sur $\text{lev}_{\leqslant 0} f$. Le résultat suivant affirme que le projecteur de la composition à gauche par $\phi = |\cdot|^{\alpha}$ envoie le point plus loin, mais l'éloigne de sa projection métrique.

Proposition 2.14 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ à valeurs réelles telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$ et $\alpha \in]0,1]$. On suppose $f \geqslant 0$ et f Fréchet-différentiable sur $\text{lev}_{>0}$ f. Alors

(i)
$$(\forall x \in \text{lev}_{>0} f)$$
 $||x - G_f x|| - ||x - G_{f^{\alpha}} x|| = \frac{f(x)}{||\nabla f(x)||} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \leqslant 0$,

(ii)
$$(\forall x \in \text{lev}_{>0} f)$$
 $||G_f x - P_{\text{lev}_{<0}} f x|| \le ||G_f x - P_{\text{lev}_{<0}} f x||$.

Démonstration.

- (i) Il suffit d'appliquer le Lemme 2.13 à $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto |t|^{\alpha}$.
- (ii) Soit $x \in \text{lev}_{>0} f$. Alors

$$\begin{aligned} &\|G_{f}x - P_{\text{lev}}\|_{0}^{2} fx\|^{2} - \|G_{f}^{\alpha}x - P_{\text{lev}}\|_{0}^{2} fx\|^{2} \\ &= \|(x - P_{\text{lev}}\|_{0}^{2} fx) - \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \nabla f(x)\|^{2} - \|(x - P_{\text{lev}}\|_{0}^{2} fx) - \alpha \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \nabla f(x)\|^{2} \\ &= -2(1 - \alpha) \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \left\langle x - P_{\text{lev}}\|_{0}^{2} fx + \nabla f(x) \right\rangle + (1 - \alpha^{2}) \frac{f(x)^{2}}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \\ &= (1 - \alpha) \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \left(2 \left\langle P_{\text{lev}}\|_{0}^{2} fx - x + \nabla f(x) \right\rangle + (1 + \alpha)f(x) \right) \\ &\leq (1 - \alpha) \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \left(2f(P_{\text{lev}}\|_{0}^{2} fx) + (\alpha - 1)f(x) \right) \\ &\leq -(1 - \alpha)^{2} \frac{f(x)^{2}}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.2 Propriétés liées à l'addition

Notation 2.15 Étant données deux fonctions f et g de $\Gamma_0(\mathcal{H})$, on notera $\partial f \cap \partial g$ l'opérateur multivoque qui à tout point x de \mathcal{H} associe l'ensemble $\partial f(x) \cap \partial g(x)$.

Proposition 2.16 Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \neq \varnothing$ et $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} g \neq \varnothing$, et $\alpha \in]0,1[$. On note $h_\alpha = \alpha f + (1-\alpha)g$. On suppose $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \cap \operatorname{lev}_{\leqslant 0} g \neq \varnothing$ et $\operatorname{dom}(\partial f \cap \partial g) \neq \varnothing$. Soit U une sélection de $\partial f \cap \partial g$.

- (i) $G_{h_{\alpha}}^{U}$ est bien défini.
- (ii) $\left(\operatorname{dom} G_f^U\right) \cap \left(\operatorname{dom} G_g^U\right) \subset \operatorname{dom} G_{h_{\alpha}}^U$
- (iii) Soit $x \in \left(\operatorname{dom} G_f^U\right) \cap \left(\operatorname{dom} G_g^U\right)$. Alors

$$G_{h_{\alpha}}^{U}x = \alpha G_{f}^{U}x + (1 - \alpha)G_{g}^{U}x \Leftrightarrow f(x)g(x) \geqslant 0.$$
 (2.15)

Démonstration.

- (i) D'une part $\emptyset \neq (\text{lev}_{\leq 0} f) \cap (\text{lev}_{\leq 0} g) \subset \text{lev}_{\leq 0} h_{\alpha}$, d'autre part $(\forall x \in \text{dom } U) Ux = \alpha Ux + (1-\alpha)Ux \in \alpha \partial f(x) + (1-\alpha)\partial g(x) \subset \partial h_{\alpha}(x)$.
- (ii) On a $\left(\operatorname{dom} G_f^U\right) \cap \left(\operatorname{dom} G_g^U\right) = \left(\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \cap \operatorname{lev}_{\leqslant 0} g\right) \cup \operatorname{dom} U \subset \operatorname{lev}_{\leqslant 0} h_\alpha \cup \operatorname{dom} U = \operatorname{dom} G_{h_\alpha}^U.$

(iii) Soit
$$x \in \left(\operatorname{dom} G_f^U\right) \cap \left(\operatorname{dom} G_g^U\right)$$
. Si $x \in \operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \cap \operatorname{lev}_{\leqslant 0} g$ alors $G_{h_\alpha}^U x = x = \alpha x + (1 - \alpha)x = \alpha G_f^U x + (1 - \alpha)G_g^U x$. Supposons $x \in \mathbb{C}(\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \cap \operatorname{lev}_{\leqslant 0} g) \cap \operatorname{dom} U$. On a $G_f^U x = x - \frac{[f(x)]^+}{\|Ux\|^2} Ux$, $G_g^U x = x - \frac{[g(x)]^+}{\|Ux\|^2} Ux$ et $G_{h_\alpha}^U x = x - \frac{[\alpha f(x) + (1 - \alpha)g(x)]^+}{\|Ux\|^2} Ux$. D'où

$$G_{h_{\alpha}}^{U}x - \alpha G_{f}^{U}x - (1 - \alpha)G_{g}^{U}x = \left(\alpha \left[f(x)\right]^{+} + (1 - \alpha)\left[g(x)\right]^{+} - \left[\alpha f(x) + (1 - \alpha)g(x)\right]^{+}\right)\frac{Ux}{\|Ux\|^{2}}$$
(2.16)

Et ainsi

$$G_{h_{\alpha}}^{U}x - \alpha G_{f}^{U}x - (1 - \alpha)G_{g}^{U}x = \begin{cases} (1 - \alpha)\frac{g(x)}{\|Ux\|^{2}}Ux & \text{si } f(x) \leqslant 0, g(x) > 0 \text{ et } h_{\alpha}(x) \leqslant 0 \\ -\alpha\frac{f(x)}{\|Ux\|^{2}}Ux & \text{si } f(x) \leqslant 0, g(x) > 0 \text{ et } h_{\alpha}(x) > 0 \end{cases}$$

$$\alpha\frac{f(x)}{\|Ux\|^{2}}Ux & \text{si } f(x) > 0, g(x) \leqslant 0 \text{ et } h_{\alpha}(x) \leqslant 0$$

$$-(1 - \alpha)\frac{g(x)}{\|Ux\|^{2}}Ux & \text{si } f(x) > 0, g(x) \leqslant 0 \text{ et } h_{\alpha}(x) \leqslant 0$$

$$0 & \text{si } f(x) > 0 \text{ et } g(x) > 0.$$

$$0 & \text{si } f(x) > 0 \text{ et } g(x) > 0.$$

$$(2.17)$$

Corollaire 2.17 Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \neq \emptyset$ et $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} g \neq \emptyset$. On suppose $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} g \neq \emptyset$ et $\operatorname{dom}(\partial f \cap \partial g) \neq \emptyset$. Soit U une sélection de $\partial f \cap \partial g$.

(i) $G_{\frac{f+g}{2}}^U$ et G_{f+g}^{2U} sont bien définis.

(ii)
$$\left(\operatorname{dom} G_f^U\right) \cap \left(\operatorname{dom} G_g^U\right) \subset \operatorname{dom} G_{\frac{f+g}{2}}^U = \operatorname{dom} G_{f+g}^{2U}$$

(iii) Soit $x \in (\operatorname{dom} G_f^U) \cap (\operatorname{dom} G_g^U)$. Alors

$$G_{f+g}^{2U}x = G_{\frac{f+g}{2}}^{U}x = \begin{cases} \frac{1}{2}G_{f}^{U}x + \frac{1}{2}G_{g}^{U}x & \text{si } f(x)g(x) \geqslant 0\\ \frac{1}{2}G_{f}^{U}x + \frac{1}{2}G_{g}^{U}x + \frac{\min\left(|f(x)|, |g(x)|\right)}{2||Ux||^{2}}Ux & \text{sinon.} \end{cases}$$
(2.18)

 $extit{D\'{e}monstration}$. Posons $ilde{f}=2f$, $ilde{g}=2g$ et $ilde{U}=2U$. On observe que $ext{lev}_{\leqslant 0}$ $ilde{f}\cap ext{lev}_{\leqslant 0}$ $ilde{g}\neq \varnothing$ et que $ilde{U}$ est une sélection de $\partial ilde{f}\cap \partial ilde{g}$. Il suffit alors d'appliquer la Proposition 2.16 à $ilde{f}$ et $ilde{g}$.

(i)
$$G_{\frac{f+g}{2}}^U$$
 et $G_{\frac{\tilde{f}+\tilde{g}}{2}}^{\tilde{U}}=G_{f+g}^{2U}$ sont bien définis.

(ii)
$$\operatorname{dom} G_{\frac{\tilde{f}+\tilde{g}}{2}}^{\tilde{U}} = \operatorname{dom} G_{f+g}^{2U} = \operatorname{dom} G_{\frac{f+g}{2}}^{U}$$

(iii) On a
$$G_{f+g}^{2U}x=G_{\frac{\tilde{f}+\tilde{g}}{2}}^{\tilde{U}}x=\frac{1}{2}G_{\tilde{f}}^{\tilde{U}}x+\frac{1}{2}G_{\tilde{g}}^{\tilde{U}}x=\frac{1}{2}G_{2f}^{2U}x+\frac{1}{2}G_{2g}^{2U}x=\frac{1}{2}G_{f}^{U}x+\frac{1}{2}G_{g}^{U}x.$$
 De plus $G_{\frac{f+g}{2}}^{U}x=G_{2\frac{f+g}{2}}^{2U}x=G_{f+g}^{2U}x.$ Enfin, on déduit l'expression de $G_{\frac{f+g}{2}}^{U}x$ de (2.17) pour $\alpha=1/2.$

Exemple 2.18 Soient $(r,r') \in \mathbb{R}^2_{++}$ tels que r < r'. Notons B la boule unité fermée de \mathcal{H} . Alors l'opérateur U défini ci-dessous sur $\mathrm{dom}\, U = rB \cup \mathbb{C}(r'B)$ est une sélection de $\partial d_{rB} \cap \partial d_{r'B}$ de domaine maximal :

$$U: rB \cup \mathcal{C}(r'B) \to \mathcal{H}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } ||x|| \leqslant r \\ ||x||^{-1}x & \text{si } r' \leqslant ||x||. \end{cases}$$
 (2.19)

Soient $\alpha \in]0,1[$ et $x \in rB \cup \mathbb{C}(r'B)$. Alors

$$G_{\alpha d_{rB} + (1-\alpha)d_{r'B}}^{U} x = \frac{\alpha r + (1-\alpha)r'}{\|x\|} x$$
 (2.20)

$$G_{d_{rB}}^{2U} + d_{r'B}x = \frac{r + r'}{2||x||}x.$$
 (2.21)

Démonstration. D'après [10, Proposition 18.22] on a

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad \partial d_{rB}(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } ||x|| < r \\ [0, r^{-1}x] & \text{si } ||x|| = r \\ \{||x||^{-1}x\} & \text{si } ||x|| > r. \end{cases}$$
(2.22)

Par conséquent

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad (\partial d_{rB} \cap \partial d_{r'B})(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } ||x|| \leqslant r \\ \varnothing & \text{si } r < ||x|| < r' \\ \{||x||^{-1}x\} & \text{si } r' \leqslant ||x||. \end{cases}$$
 (2.23)

L'opérateur U est donc bien une sélection de $\partial d_{rB} \cap \partial d_{r'B}$ de domaine maximal. Par ailleurs, on a

$$\begin{cases}
\operatorname{dom} G_{d_{rB}}^{U} = rB \cup \operatorname{dom} U = \operatorname{dom} U \\
\operatorname{dom} G_{d_{r'B}}^{U} = r'B \cup \operatorname{dom} U = \mathcal{H}
\end{cases}$$
(2.24)

D'où

$$\left(\operatorname{dom} G_{d_{rB}}^{U}\right) \cap \left(\operatorname{dom} G_{d_{r'B}}^{U}\right) = \operatorname{dom} U = rB \cup \mathbb{C}(r'B). \tag{2.25}$$

Le reste découle alors de la Proposition 2.16, du Corollaire 2.17 et du fait que

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad G_{d_{rB}} x = P_{rB} x = \begin{cases} x & \text{si } ||x|| \leqslant r \\ \frac{r}{||x||} x & \text{si } ||x|| > r. \end{cases}$$
 (2.26)

Notation 2.19 [10, Definition 12.1] Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$. Alors

$$f \square g : \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty] : x \to \inf_{y \in \mathcal{H}} (f(y) + g(x - y)).$$
 (2.27)

Soit $x \in \mathcal{H}$. On notera $(f \boxdot g)(x)$ si l'infimum est atteint.

Proposition 2.20 [10, Proposition 12.6(ii)] *Soient* f *et* g *deux fonctions* de $\Gamma_0(\mathcal{H})$. *Alors* dom $f \square g = dom$ f + dom g.

Proposition 2.21 [10, Proposition 16.48] *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $\Gamma_0(\mathcal{H})$, $x \in \text{dom}(f \square g)$ *et* $y \in \mathcal{H}$. *Si* $(f \square g)(x) = f(y) + g(x - y)$ *alors* $\partial (f \square g)(x) = \partial f(y) \cap \partial g(x - y)$.

Proposition 2.22 [10, Proposition 12.14] Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$. On suppose qu'au moins une des deux assertions suivantes est vraie :

- (i) f est supercoercive,
- (ii) f est coercive et g est minorée.

Alors $f \square g = f \boxdot g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

Proposition 2.23 Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \neq \emptyset$ et $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} g \neq \emptyset$. On suppose $f \Box g = f \boxdot g \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. Soit M une sélection de $x \mapsto \operatorname{Argmin} f + g(x - \cdot)$, de sorte que $(\forall x \in \mathcal{H}) \ (f \boxdot g)(x) = f(Mx) + g(x - Mx)$. On suppose $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} \ (f \circ M) \cap \operatorname{lev}_{\leqslant 0} \ (g \circ (\operatorname{Id} - M)) \neq \emptyset$ et $\operatorname{dom}(\partial f \cap \partial g) \neq \emptyset$. On suppose que U est une sélection de $\partial f \cap \partial g$ telle que $\operatorname{im} M \cup \operatorname{im}(\operatorname{Id} - M) \subset \operatorname{dom} U$ et $(\forall x \in \operatorname{dom} U) \ Ux = UMx = U(x - Mx)$.

- (i) $G_{f \odot a}^{U}$ est bien défini.
- (ii)

$$(\operatorname{lev}_{\leqslant 0} \left(f \circ M \right) \cap \operatorname{lev}_{\leqslant 0} \left(g \circ (\operatorname{Id} - M) \right) \cup \operatorname{dom} U \subset \\ \operatorname{dom} \left(G_f^U \circ M \right) \cap \operatorname{dom} \left(G_g^U \circ (\operatorname{Id} - M) \right) \cap \operatorname{dom} \left(G_{f \boxdot g}^U \right)$$

(iii) Soit $x \in (\text{lev}_{\leq 0} \ (f \circ M) \cap \text{lev}_{\leq 0} \ (g \circ (\text{Id} - M)) \cup \text{dom} \ U$. Alors

$$G_{f \square g}^{U} x = G_{f}^{U} M x + G_{g}^{U} (x - M x) \Leftrightarrow f(M x) g(x - M x) \geqslant 0.$$
 (2.28)

Démonstration. Notons $C = \operatorname{lev}_{\leq 0} (f \circ M)$ et $D = \operatorname{lev}_{\leq 0} (g \circ (\operatorname{Id} - M))$, on rappelle que $C \cap D \neq \emptyset$ par hypothèse.

(i) D'une part $\operatorname{lev}_{\leq 0}(f \boxdot g) \supset C \cap D \neq \emptyset$, d'autre part

$$(\forall x \in \text{dom } U) \ Ux = UMx = U(x - Mx) \in \partial f(Mx) \cap \partial g(x - Mx) = \partial (f \boxdot g)(x)$$
 (2.29)

d'après la Proposition 2.21.

(ii) On a

$$\begin{cases}
\operatorname{dom}\left(G_{f}^{U}\circ M\right) = C \cup M^{-1}\left(\operatorname{dom}U\right) \\
\operatorname{dom}\left(G_{g}^{U}\circ\left(\operatorname{Id}-M\right)\right) = D \cup \left(\operatorname{Id}-M\right)^{-1}\left(\operatorname{dom}U\right) \\
\operatorname{dom}\left(G_{f\boxdot g}^{U}\right) = \operatorname{lev}_{\leqslant 0}\left(f\boxdot g\right) \cup \operatorname{dom}U
\end{cases} \tag{2.30}$$

et

$$\begin{cases}
\operatorname{dom} U \subset M^{-1}(\operatorname{dom} U) \\
\operatorname{dom} U \subset (\operatorname{Id} - M)^{-1}(\operatorname{dom} U) \\
C \cap D \subset \operatorname{lev}_{\leq 0} (f \odot g).
\end{cases}$$
(2.31)

 $\text{Par cons\'equent } (C \cap D) \cup \text{dom } U \subset \text{dom } \left(G_f^U \circ M\right) \cap \text{dom } \left(G_g^U \circ (\text{Id} - M)\right) \cap \text{dom } \left(G_{f \boxdot g}^U\right).$

(iii) Notons y=Mx. Si $f(Mx)\leqslant 0$ et $g(x-Mx)\leqslant 0$ alors $f\boxdot g(x)=f(y)+g(x-y)\leqslant 0$, d'où $G_{f\boxdot g}^Ux=x=y+(x-y)=G_f^Uy+G_g^U(x-y)$. Supposons $x\in \complement(C\cap D)\cap \mathrm{dom}\, U$ et posons

$$u = Ux. \text{ Alors } \begin{cases} G_{f \boxdot g}^{U} x = x - \frac{[f(y) + g(x - y)]^{+}}{\|u\|^{2}} u \\ G_{f}^{U} y = y - \frac{[f(y)]^{+}}{\|u\|^{2}} u \\ G_{g}^{U}(x - y) = x - y - \frac{[g(x - y)]^{+}}{\|u\|^{2}} u \end{cases} . \text{ D'où }$$

$$G_{f \square g}^{U}x - G_{f}^{U}y - G_{g}^{U}(x - y) = ([f(y)]^{+} + [g(x - y)]^{+} - [f(y) + g(x - y)]^{+})\frac{u}{\|u\|^{2}}.$$
 (2.32)

Ainsi

$$G_{f\square g}^{U}x - G_{g}^{U}y - G_{g}^{U}(x - y) = \begin{cases} \frac{g(x - y)}{\|u\|^{2}}u & \text{si } f(y) \leqslant 0, g(x - y) > 0 \text{ et } (f\square g)(x) \leqslant 0 \\ -\frac{f(y)}{\|u\|^{2}}u & \text{si } f(y) \leqslant 0, g(x - y) > 0 \text{ et } (f\square g)(x) > 0 \\ \frac{f(y)}{\|u\|^{2}}u & \text{si } f(y) > 0, g(x - y) \leqslant 0 \text{ et } (f\square g)(x) \leqslant 0 \\ -\frac{g(x - y)}{\|u\|^{2}}u & \text{si } f(y) > 0, g(x - y) \leqslant 0 \text{ et } (f\square g)(x) > 0 \\ 0 & \text{si } f(y) > 0 \text{ et } g(x - y) > 0. \end{cases}$$

$$(2.33)$$

2.3 Propriétés liées à l'enveloppe de Moreau

Notation 2.24 (Enveloppe de Moreau) [10, Definition 12.20] Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$. Alors

$$^{\gamma}f = f \Box \left(\frac{1}{2\gamma} \|\cdot\|^2\right). \tag{2.34}$$

Proposition 2.25 [10, Proposition 12.29] Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$. γf est Fréchet-différentiable sur \mathcal{H} et

$$\nabla(^{\gamma}f) = \gamma^{-1}(\operatorname{Id} - \operatorname{prox}_{\gamma f}). \tag{2.35}$$

Proposition 2.26 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$ tels que $\operatorname{lev}_{\leq 0}(\gamma f) \neq \emptyset$. Alors $\operatorname{dom} G_{\gamma f} = \mathcal{H}$, $G_{\gamma f}$ est univoque et

$$G_{\gamma f} x = \begin{cases} x & \text{si } ^{\gamma} f(x) \leq 0 \\ x - \gamma \frac{\gamma f(x)}{\|x - \operatorname{prox}_{\gamma f} x\|^2} (x - \operatorname{prox}_{\gamma f} x) & \text{si } ^{\gamma} f(x) > 0 \end{cases}$$
 (2.36)

Remarque 2.27 Soit $C \subset \mathcal{H}$ convexe fermé non vide. En posant $f = \iota_C$ et $\gamma = 1$ on retrouve l'Exemple 1.23 (d'après [10, Example 12.21]), i.e. $G_{d_C^2/2} = G_{d_C^2} = \frac{\operatorname{Id} + P_C}{2}$ (où l'on a appliqué la Proposition 2.1).

3 Régularité des sélections de G_f

Intéressons-nous au propriétés de régularité des sélections du projecteur sous-différentiel, à savoir leur continuité, leur différentiabilité et leur caractère lipschitzien.

3.1 Continuité des sélections de G_f

Proposition 3.1 [10, Proposition 17.32] Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$. On suppose $x \in \operatorname{int dom} f$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe une sélection U de ∂f , telle que $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} U$, continue en x.
- (ii) f est Fréchet-différentiable en x.
- (iii) Toute sélection U de ∂f telle que $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} U$ est continue en x.

Proposition 3.2 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$ et U une sélection de ∂f . On suppose $x \in \operatorname{lev}_{>0} f \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} U$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) G_f^U est continu en x.
- (ii) U est continue en x.
- (iii) f est Fréchet-différentiable en x.

Démonstration. D'après [10, Corollary 8.30], $\operatorname{lev}_{>0} f \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} U \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} f = \operatorname{cont} f$, donc f est continue en x. On rappelle que, sur $\operatorname{lev}_{>0} f \cap \operatorname{dom} U$,

$$G_f^U = \text{Id} - \frac{f}{\|U\|^2} U.$$
 (3.1)

Si f est Fréchet-différentiable en x alors la continuité de G_f^U en x découle directement de la Proposition 3.1 et de l'égalité ci-dessus. Réciproquement, supposons G_f^U continu en x. Alors $\frac{U}{\|U\|^2} = \frac{\operatorname{Id} - G_f^U}{f} \text{ est continu en } x \text{ et } \|U\|^2 = \|\cdot\|^{-2} \circ \frac{U}{\|U\|^2} \text{ aussi. D'où la continuité en } x \text{ de } U = \frac{\|U\|^2}{f} \left(\operatorname{Id} - G_f^U\right). \text{ On en déduit, via la Proposition 3.1, que } f \text{ est Fréchet-différentiable en } x.$

Corollaire 3.3 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$ et U une sélection de ∂f . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) G_f^U est continu sur $(\operatorname{int} \operatorname{lev}_{\leq 0} f) \cup (\operatorname{int} \operatorname{dom} U)$.
- (ii) f est Fréchet-différentiable sur $lev_{>0}$ $f \cap int dom U$.

Dans ce cas

$$G_f^U: \operatorname{dom} G_f^U \to 2^{\mathcal{H}}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leqslant 0 \\ x - \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2} \nabla f(x) & \text{si } f(x) > 0 \text{ et } x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} U \\ x - \frac{f(x)}{\|Ux\|^2} Ux & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(3.2)$$

3.2 Différentiabilité et caractère lispchitzien des sélections de G_f

3.2.1 Différentiabilité

Lemme 3.4 $\|\cdot\|^{-2}$ Id est Fréchet-différentiable sur $\mathcal{H}\setminus\{0\}$ et

$$(\forall x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}) \ D(\|\cdot\|^{-2} \operatorname{Id})(x) = \|x\|^{-2} \operatorname{Id} - \|x\|^{-4} \langle 2x \mid \cdot \rangle x$$
(3.3)

Démonstration. Calcul effectué grâce à [38, X. Fonctions différentiables]. 🛘

Remarque 3.5 Dans le cas réel on retrouve la dérivée de la fonction inverse $\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : t \mapsto \frac{1}{t}$, qui n'est autre que $\phi' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : t \mapsto -\frac{1}{t^2}$.

Lemme 3.6 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. On suppose $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$. On suppose f Fréchet-différentiable au voisinage de x. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) ∇f est Fréchet-différentiable en x.
- (ii) f est deux fois Fréchet-différentiable en x.

Dans ce cas

$$D(\nabla f)(x) = \nabla^2 f(x). \tag{3.4}$$

Proposition 3.7 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$. On suppose $x \in \text{lev}_{>0}$ f. On suppose que f est deux fois Fréchet-différentiable au voisinage de x. Alors

$$DG_{f}(x) = \operatorname{Id} - \frac{\langle \cdot \mid \nabla f(x) \rangle}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \nabla f(x) - \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^{2}} \nabla^{2} f(x)(\cdot) + \frac{2f(x) \left\langle \nabla f(x) \mid \nabla^{2} f(x)(\cdot) \right\rangle}{\|\nabla f(x)\|^{4}} \nabla f(x).$$
(3.5)

Démonstration. Notons $\operatorname{Inv} = \|\cdot\|^{-2}\operatorname{Id}$. Ainsi, sur $\operatorname{lev}_{>0} f \cap \operatorname{dom} f$, $G_f = \operatorname{Id} - f \cdot \operatorname{Inv} \circ \nabla f$. On a $\operatorname{D} G_f(x) = \operatorname{Id} - \langle \cdot \mid \nabla f(x) \rangle (\operatorname{Inv} \circ \nabla f)(x) - f(x) \cdot \operatorname{D} \operatorname{Inv}(\nabla f(x)) \circ \operatorname{D}(\nabla f)(x)$ par différentiation d'une composée [38, X. Fonctions différentiables]. Il ne reste alors plus qu'à appliquer le Lemme 3.4 :

$$DG_f(x) = \operatorname{Id} - \frac{\langle \cdot \mid \nabla f(x) \rangle}{\|\nabla f(x)\|^2} \nabla f(x) - \frac{f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2} \nabla^2 f(x)(\cdot) + \frac{2f(x) \left\langle \nabla f(x) \mid \nabla^2 f(x)(\cdot) \right\rangle}{\|\nabla f(x)\|^4} \nabla f(x).$$
(3.6)

Proposition 3.8 Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R})$. Si f est deux fois différentiable alors G_f est différentiable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ avec

$$(\forall x \in \mathbb{C} \operatorname{zer} f) \quad G'_f x = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) < 0 \\ \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2} & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$
(3.7)

Remarque 3.9 Il ne suffit pas que f soit deux fois différentiable pour que G_f soit différentiable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$.

Démonstration. Il suffit de considérer la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x$. Dans ce cas

$$G_f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
 (3.8)

n'est pas dérivable en 0. □

3.2.2 Caractère lipschitzien

Lemme 3.10 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$, U une sélection de ∂f et $\beta \in \mathbb{R}_{++}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) G_f^U est $max(1,\beta)$ -lipschitzien.

(ii)
$$\left(\forall (x,y) \in (\text{lev}_{>0} \ f \cap \text{dom} \ U)^2 \right) \|x - y - \frac{f(x)}{\|Ux\|^2} Ux + \frac{f(y)}{\|Uy\|^2} Uy \| \leqslant \beta \|x - y\|$$

 $\begin{array}{l} \textit{D\'{e}monstration}. \ \text{Soit} \ (x,y) \in \left(\text{dom} \ G_f^U \right)^2. \ \text{Si} \ f(x) \leqslant 0 \ \text{et} \ f(y) \leqslant 0 \ \text{alors} \ \|G_f^U x - G_f^U y\| = \|x - y\|. \\ \text{L'\'{e}ventuelle constante de Lipschitz de} \ G_f^U \ \text{est donc sup\'{e}rieure ou \'{e}gale \`{a}} \ 1. \ \text{Supposons maintenant que} \ f(x) > 0 \ \text{et} \ f(y) \leqslant 0. \ \text{Alors} \end{array}$

$$||G_f^U x - G_f^U y||^2 - ||x - y||^2 = \frac{f(x)}{||Ux||^2} (f(x) + 2\langle y - x \mid Ux \rangle)$$

$$\leq \frac{f(x)(2f(y) - f(x))}{||Ux||^2}$$

$$\leq 0$$
(3.9)

Proposition 3.11 [38, V.5.1. Théorème] Soient Ω un ouvert convexe de \mathcal{H} , $G:\Omega\to\mathcal{H}$ continûment Fréchet-différentiable sur Ω et $\beta\in\mathbb{R}_{++}$. Si $(\forall x\in\Omega)\parallel \mathrm{D}\,Gx\parallel\leqslant\beta$ alors

$$\left(\forall (x,y) \in \Omega^2\right) \|Gx - Gy\| \leqslant \beta \|x - y\|. \tag{3.10}$$

Proposition 3.12 Soient Ω un ouvert convexe inclus dans $\operatorname{lev}_{>0} f \cap \operatorname{dom} f$ et $\beta \in \mathbb{R}_{++}$. On suppose f deux fois Fréchet-différentiable sur Ω . Si $\sup |f|(\Omega) < +\infty$, ∇f β -lipschitzien sur Ω et $\inf \|\nabla f(x)\|(\Omega) > 0$ alors G_f est β' -lipschitzien sur $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \cup \Omega$ avec $\beta' = 2 + 3 \frac{\sup |f|(\Omega)}{\inf \|\nabla f(x)\|^2(\Omega)} \beta$.

Démonstration. Grâce à la Proposition 3.7 on trouve

$$\|DG_f(x)\| \le 2 + 3 \frac{|f(x)| \|\nabla^2 f(x)\|}{\|\nabla f(x)\|^2}.$$
 (3.11)

Le résultat est alors une conséquence directe de la Proposition 3.11.

□

Lemme 3.13 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}_{++}$. *On suppose* f *différentiable. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) f est β -lipschitzienne.
- (ii) $|f'| \leq \beta$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème des accroissements finis [38, Théorème 4.1.]. □

Proposition 3.14 Soient $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_{++}$. On suppose f deux fois différentiable. Si $\sup f(\operatorname{lev}_{>0} f) < +\infty$, f' β -lispchitzienne et $\inf |f'|(\operatorname{lev}_{>0} f) > 0$ alors G_f est β' -lipschitzienne, où $\beta' = \max \left\{ 1, \frac{\sup f(\operatorname{lev}_{>0} f)}{\inf f'^2(\operatorname{lev}_{>0} f)} \beta \right\}$.

Démonstration. Il suffit de combiner la Proposition 3.8 et le Lemme 3.13. □

Remarque 3.15 Un projecteur sous-différentiel fermement contractant n'est pas nécessairement un projecteur classique. En effet, si $C \subset \mathcal{H}$ est un convexe fermé non vide distinct de \mathcal{H} , alors G_{d_C} est une contraction ferme mais n'est pas un projecteur classique.

Démonstration. D'après le Corollaire 2.5

$$G_{d_C^2} = \frac{\text{Id} + P_C}{2} \tag{3.12}$$

 $G_{d_C^2}$ est donc une contraction ferme puisque P_C est contractant. Supposons par l'absurde que $G_{d_C^2}$ est un projecteur. Comme ${\rm Fix}\,G_{d_C^2}={\rm Fix}\,P_C=C$, on en déduit $G_{d_C^2}=P_C$, d'où $P_C={\rm Id}$, ce qui contredit l'hypothèse $C\neq \mathcal{H}$. \square

4 Propriétés séquentielles

Voyons maintenant comment se comporte la suite des projecteurs sous-difféentiels associée à une suite de fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$.

4.1 Rappels sur les suites d'ensembles et notations

Notation 4.1 Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de \mathcal{H} .

$$\underline{\lim} S_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geqslant n} S_k \tag{4.1}$$

$$\overline{\lim} S_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant n} S_k \tag{4.2}$$

Définition 4.2 [4, Definition 1.31] Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de \mathcal{H} .

(i)
$$\liminf_{P-K} S_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \ge n} \overline{S_k}}$$

(ii)
$$\limsup_{P \to K} S_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \ge n} S_k}$$

Proposition 4.3 [4, Proposition 1.33, Proposition 1.34] *Soient* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de parties de* \mathcal{H} *et* $x\in\mathcal{H}$.

- (i) $x \in \underset{P-K}{\operatorname{liminf}} S_n$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} telle que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n \in S_n$ et $x_n \to x$.
- (ii) $x \in \limsup_{\mathrm{P-K}} S_n$ si et seulement si il existe une sous-suite $(S_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} telles que $(\forall k \in \mathbb{N})$ $x_k \in S_{n_k}$ et $x_k \to x$.
- (iii) $\underset{P-K}{\liminf} S_n \subset \underset{P-K}{\limsup} S_n$

Remarque 4.4 Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de \mathcal{H} .

- (i) $\underline{\lim} S_n \subset \underset{\mathrm{P-K}}{\liminf} S_n$
- (ii) $\overline{\lim} S_n \subset \limsup_{P \to K} S_n$

4.2 Convergence forte

4.2.1 Résultats préliminaires liés à l'épi-convergence

Théorème 4.5 [4, Theorem 3.66] Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $(\forall n \in \mathbb{N})$ lev $\leq_0 f_n \neq \emptyset$ et $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que lev $\leq_0 f \neq \emptyset$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\operatorname{epi} f_n \xrightarrow{\operatorname{P-K}} \operatorname{epi} f$
- (ii) $\operatorname{gra} \partial f_n \xrightarrow{\operatorname{P-K}} \operatorname{gra} \partial f$ et

$$(\exists (x, u) \in \operatorname{gra} \partial f) \ (\exists ((x_n, u_n))_{n \in \mathbb{N}}) \in (\mathcal{H}^2)^{\mathbb{N}} \begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) \ (x_n, u_n) \in \operatorname{gra} \partial f_n \\ (x_n, u_n) \to (x, u) \\ f_n(x_n) \to f(x) \end{cases}$$
(4.3)

Lemme 4.6 Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $(\forall n\in\mathbb{N})$ lev $_{\leqslant 0}$ $f_n\neq\varnothing$ et $f\in\Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\mathrm{lev}_{\leqslant 0}$ $f\neq\varnothing$. Si $\limsup_{\mathrm{P-K}}\mathrm{epi}\,f_n\subset\mathrm{epi}\,f$ alors $\limsup_{\mathrm{P-K}}(\mathrm{lev}_{\leqslant 0}\,f_n)\subset\mathrm{lev}_{\leqslant 0}\,f$.

Démonstration. Soit $x \in \limsup_{\mathrm{P-K}} (\mathrm{lev}_{\leqslant 0} \ f_n)$. Alors $(x,0) \in \limsup_{\mathrm{P-K}} \mathrm{epi} \ f_n \subset \mathrm{epi} \ f$, d'où $f(x) \leqslant 0$. \square

Lemme 4.7 Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $(\forall n\in\mathbb{N})$ lev $_{\leqslant 0}$ $f_n\neq\emptyset$, $f\in\Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que lev $_{\leqslant 0}$ $f\neq\emptyset$ et U une sélection de $x\mapsto \liminf_{\mathrm{P-K}}\partial f_n(x)$. On suppose $\liminf_{\mathrm{P-K}}(\mathrm{gra}\,\partial f_n)\subset\mathrm{gra}\,\partial f$. Alors

- (i) U est une sélection de ∂f .
- (ii) Il existe des sélections U_n de ∂f_n , pour $n \in \mathbb{N}$, définies sur dom U telles que $(\forall x \in \text{dom } U) U_n x \to U x$.

Démonstration. Soit $x \in \text{dom } U$. Il existe $(U_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers Ux telle que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(x, U_n x) \in \text{gra } \partial f_n$. Ainsi $(x, Ux) \in \liminf_{P \to K} (\text{gra } \partial f_n) \subset \text{gra } \partial f$. \square

4.2.2 Résultat de convergence forte

Lemme 4.8 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0} \neq \emptyset$ et U une sélection de ∂f .

$$(\forall x \in \operatorname{lev}_{>0} f \cap \operatorname{dom} U) \ (\forall y \in \operatorname{lev}_{\leq 0} f) \ \frac{f(x)}{\|Ux\|} \leqslant \|y - x\|$$
(4.4)

Démonstration. Soient $x \in \text{dom } U$ tel que f(x) > 0 et $y \in \text{lev}_{\leq 0} f$. Alors

$$-\|y - x\| \|Ux\| + f(x) \leqslant \langle y - x \mid Ux \rangle + f(x)$$

$$\leqslant f(y)$$

$$\leqslant 0.$$
(4.5)

Remarque 4.9 Le lemme précédent est une légère extension du Corollaire 1.21(iii).

Notation 4.10 Étant données $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $(\forall n \in \mathbb{N})$ lev $_{\leqslant 0}$ $f_n \neq \emptyset$ et U_n des sélections de ∂f_n (pour $n \in \mathbb{N}$), on notera D l'ensemble des points x de \mathcal{H} pour lesquels la suite de terme général $G_{f_n}^{U_n}x$ est définie à partir d'un certain rang. Pour tout $x \in D$ on notera N_x un tel rang (choisi arbitrairement).

$$D = \underline{\lim} \operatorname{dom} G_{f_n}^{U_n} \tag{4.6}$$

Lemme 4.11 Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $(\forall n\in\mathbb{N})$ lev $_{\leqslant 0}$ $f_n\neq\varnothing$, U_n des sélections de ∂f_n (pour $n\in\mathbb{N}$), $f\in\Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que lev $_{\leqslant 0}$ $f\neq\varnothing$, U une sélection de ∂f définie sur D et $x\in D$.

- (i) Si $f(x) \leq 0$ et $x \in \underset{P-K}{\text{liminf}} (\text{lev}_{\leq 0} f_n)$ alors $G_{f_n}^{U_n} x \to G_f^U x$.
- (ii) Si f(x) > 0 et $x \in \overline{\lim} (\operatorname{lev}_{\leq 0} f_n)$ alors $G_{f_n}^{U_n} x \not\to G_f^U x$.
- (iii) Si f(x) > 0, $x \in \overline{\text{lim}}$ (lev_{≤ 0} f_n), $f_n(x) \to f(x)$ et $U_n x \to U x$ alors $G_{f_n}^{U_n} x \to G_f^U x$.

Démonstration. Notons $G=G_f^U$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $G_n=G_{f_n}^{U_n}$. Soit N_x un entier tel que $(\forall n\geqslant N_x)$ $x\in\mathrm{dom}\,G_n$.

(i) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{H} telle que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $f_n(x_n)\leqslant 0$ et $x_n\to x$. On a

$$(\forall n \ge N_x) \quad \|G_n x - Gx\| = \begin{cases} 0 & \text{si } f_n(x) \le 0\\ \frac{f_n(x)}{\|U_n x\|} & \text{si } f_n(x) > 0. \end{cases}$$
(4.7)

D'après le Lemme 4.8,

$$(\forall n \geqslant N_x) \quad ||G_n x - Gx|| \leqslant ||x_n - x||. \tag{4.8}$$

Par conséquent $G_n x \to Gx$.

- (ii) Il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $f_n(x) \leq 0$, donc tels que $||G_n x Gx|| = \frac{f(x)}{||Ux||} > 0$.
- (iii) Soit N'_x un entier supérieur à N_x tel que $(\forall n \ge N'_x)$ $x \in \text{lev}_{>0}$ $f_n \cap \text{dom } U_n$. Alors

$$(\forall n \geqslant N_x') \ G_n x - G x = \frac{f_n(x)}{\|U_n x\|^2} U_n x - \frac{f(x)}{\|U x\|^2} U x \to 0. \tag{4.9}$$

Proposition 4.12 Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\Gamma_0(\mathcal{H})$ telles que $(\forall n\in\mathbb{N})$ lev $_{\leqslant 0}$ $f_n\neq\varnothing$, $f\in\Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\mathrm{lev}_{\leqslant 0}f\neq\varnothing$ et U une sélection de $x\mapsto \liminf_{\mathrm{P-K}}\partial f_n(x)$. On suppose $\mathrm{epi}\,f_n\stackrel{\mathrm{P-K}}{\longrightarrow}\mathrm{epi}\,f$ et $(\forall x\in\mathrm{lev}_{>0}\,f)\,f_n(x)\to f(x)$. Alors

- (i) U est une sélection de ∂f et dom $U \subset D$,
- (ii) Il existe des sélections U_n de ∂f_n (pour $n \in \mathbb{N}$) définies sur dom U telles que

$$\forall x \in \underset{P-K}{\text{liminf}} (\text{lev}_{\leq 0} f_n) \cup (\text{lev}_{> 0} f \cap \text{dom} U)) \ G_{f_n}^{U_n} x \to G_f^U x$$
(4.10)

Démonstration.

- (i) Résulte du Lemme 4.7.
- (ii) Résulte de Lemme 4.7 et Lemme 4.11, en notant bien que $\mathrm{lev}_{>0}\,f\subset\overline{\mathrm{Clim}}\,(\mathrm{lev}_{\leqslant0}\,f_n)$ d'après le Lemme 4.6. \Box

5 Propriétés d'opérateur multivoque

Présentons maintenant nos résultats sur le projecteur sous-différentiel en tant qu'opérateur multivoque : les propriétés de ses valeurs et sa semi-continuité.

5.1 Propriétés des valeurs de G_f

Proposition 5.1 (Fonction inverse généralisée) Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$. Utilisons la notation suivante :

$$Inv: \mathcal{H}\backslash\{0\} \to \mathcal{H}\backslash\{0\}: x \mapsto ||x||^{-2}x. \tag{5.1}$$

- (i) Sur $\operatorname{lev}_{>0} f$, $G_f = \operatorname{Id} f \operatorname{Inv} \circ \partial f$.
- (ii) Inv est un homéomorphisme involutif de $\mathcal{H}\setminus\{0\}$.
- (iii) Inv est faiblement continu si et seulement si dim $\mathcal{H} < +\infty$.
- (iv) Soit $D \subset \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Inv(D) borné $\iff 0 \in \mathbb{C}\overline{D}$
- (v) Inv est Fréchet-différentiable sur $\mathcal{H}\setminus\{0\}$ et

$$(\forall x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}) \ \mathrm{D}(\mathrm{Inv})(x) = ||x||^{-2} \mathrm{Id} - 2 \langle \mathrm{Inv} \, x \mid \cdot \rangle \, \mathrm{Inv} \, x. \tag{5.2}$$

Démonstration.

- (i) Découle directement de la définition du projecteur sous-différentiel.
- (ii) On vérifie facilement que Inv est continu et involutif, d'où l'homéomorphie.
- (iii) Si $\dim \mathcal{H} < +\infty$, Inv est faiblement continu car continu. Supposons $\dim \mathcal{H} = +\infty$. Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} , $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite injective de $\left\{e_i \mid i \in I\right\}$ et $j \in I$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e'_n + e_j$. Alors $(\forall i \in I) \ \langle x_n e_j \mid e_i \rangle = \langle e'_n \mid e_i \rangle \to 0$ par injectivité. On en déduit, via [10, Proposition 2.40], que $x_n \rightharpoonup e_j$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle \operatorname{Inv} x_n \operatorname{Inv} e_j \mid e_j \rangle = \left\langle \frac{e'_n + e_j}{2(1 + \langle e'_n \mid e_j \rangle)} e_j \mid e_j \right\rangle = -\frac{1}{2} \neq 0$. Par conséquent, $\operatorname{Inv} x_n \not \to \operatorname{Inv} e_j$. Inv n'est donc pas faiblement continu.
- (iv) Inv(D) borné \Leftrightarrow $(\exists M \in \mathbb{R}_{++})$ $(\forall x \in D) \| \text{Inv } x \| \leqslant M \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}_{++})$ $(\forall x \in D) M \leqslant \| x \| \Leftrightarrow (\exists M' \in \mathbb{R}_{++}) B(0; M) \subset \complement D \Leftrightarrow 0 \in \text{int } \complement D = \complement \overline{D}$
- (v) Lemme 3.4.

Remarque 5.2 Dans le cas $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, Inv n'est autre que la fonction inverse classique.

Corollaire 5.3 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$. G_f est à valeurs fermées bornées.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{H}$. Si $x \in C$, $G_f x = \{x\}$ est fermé borné (même compact). Supposons $x \in \mathbb{C}C$. Comme $\partial f(x)$ est fermé et ne contient pas 0, on déduit de Proposition 5.1(ii) que $\operatorname{Inv}(\partial f(x)) = \operatorname{Inv}^{-1}(\partial f(x))$ est fermé et de Proposition 5.1(iv) que $\operatorname{Inv}(\partial f(x))$ est borné. Il découle alors directement de Proposition 5.1 (i) que $G_f x$ est fermé borné. \square

Remarque 5.4 Les valeurs de G_f ne sont pas nécessairement convexes. Considérons par exemple la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \mapsto 1 + \max(x,y)$. Alors $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ est un sous-gradient de f en $(0,0) \in \text{lev}_{>0}$ f si et seulement si

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \ xu + yv \leqslant max(x,y). \tag{5.3}$$

En appliquant 5.3 aux valeurs (-1,0),(1,0),(1,1) et (-1,-1) de (x,y) on obtient $u\in[0,1]$ et v=1-u. Ainsi $\left\{(u,1-u)\mid u\in[0,1]\right\}\subset\partial f(0,0)$. On vérifie facilement l'inclusion réciproque grâce à la caractérisation 5.3. On note que $\partial f(0,0)=[(1,0),(0,1)]$. Inv $(\partial f(0,0))$ n'est pas convexe : cela s'observe facilement sur un dessin, ou bien en vérifiant par l'absurde que $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\not\in\operatorname{Inv}(\left\{(u,1-u)\mid u\in[0,1]\right\})$. Par conséquent $G_f(0,0)$ n'est pas convexe.

5.2 Semi-continuité

On notera $\mathcal{H}^{\text{fort}}$ l'espace \mathcal{H} muni de la topologie induite par la norme et $\mathcal{H}^{\text{faible}}$ l'espace \mathcal{H} muni de la topologie affaiblie.

Définition 5.5 [6, Definition 1.4.1, Definition 1.4.2, Definition 1.4.3] *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques,* $A: X \to 2^Y$ *et* $x \in \text{dom } A$.

- On dira que A est semi-continu inférieurement en x si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergente vers A et tout A existe une suite A convergente vers A telle que A convergente vers A telle que A existe une suite A convergente vers A telle que A existe une suite A convergente vers A telle que A existe une suite A convergente vers A telle que A existe une suite A convergente vers A existe une suite A existe une suite A convergente vers A existe une suite A existe A existe une suite A existe une suite A existe A existe A existe
- On dira que A est semi-continu supérieurement en x si et seulement si, pour tout voisinage V de Ax, il existe un voisinage U de x tel que $A(U) \subset V$.
- On dira que A est continu en x si et seulement si A est à la fois semi-continu supérieurement en x et semi-continu inférieurement en x.

Remarque 5.6 Si A est univoque au voisinage d'un point, les notions de semi-continuité inférieure, semi-continuité supérieure et continuité en ce point se confondent.

5.2.1 Semi-continuité du sous-différentiel

Proposition 5.7 Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. Supposons $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$. Si f est Fréchet-différentiable en x alors ∂f est semi-continu inférieurement en x.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\operatorname{dom} \partial f$ convergente vers x et $u\in\partial f(x)$. Soit U une sélection de ∂f définie sur $\operatorname{dom} \partial f$ telle que Ux=u. D'après la Proposition 3.1 U est continue en x, $\operatorname{donc} Ux_n\to Ux=u$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ Ux_n\in\partial f(x_n)$. \square

Définition 5.8 Soient $A: \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ et $x_0 \in \text{dom } A$. On dira que A est hémi-continu supérieurement en x_0 si et seulement si, pour tout $u \in \mathcal{H}$, la fonction $\mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]: x \mapsto \sigma_{Ax}(u)$ est semi-continue supérieurement en x_0 .

Théorème 5.9 [5, 3.3.Theorem 10] Soient $A: \mathcal{H}^{\text{fort}} \to 2^{\mathcal{H}^{\text{faible}}}$ et $x_0 \in \text{dom } A$. On suppose A hémi-continu supérieurement x_0 et Ax_0 convexe faiblement compact. Alors A est semi-continu supérieurement en x_0 .

Théorème 5.10 [5, 4.3.Theorem 17] Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. ∂f est hémi-continu supérieurement, à valeurs non vides convexes faiblement compactes, sur int dom f.

Corollaire 5.11 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. $\partial f : \mathcal{H}^{\text{fort}} \to 2^{\mathcal{H}^{\text{faible}}}$ est semi-continu supérieurement sur int dom f.

5.2.2 Semi-continuité du projecteur sous-différentiel

Lemme 5.12 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\text{lev}_{\leq 0}$ $f \neq \emptyset$. G_f est continu sur int $\text{lev}_{\leq 0}$ f et semi-continu inférieurement sur $\text{fr lev}_{\leq 0}$ f.

Démonstration. Soient $x \in \text{lev}_{\leq 0} f$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{dom } G_f$. Pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} telle que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $y_n \in G_f x_n$ on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \|y_n - x\| \leqslant \|x_n - x\| \to 0 \tag{5.4}$$

par quasi-contractance de G_f (voir Proposition 1.8). Si de plus $x \in \operatorname{int} \operatorname{lev}_{\leq 0} f$, alors, pour tout voisinage V de x, $G_f(V \cap \operatorname{int} \operatorname{lev}_{\leq 0} f) \subset V$. \square

Proposition 5.13 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \varnothing$. Si f est Fréchet-différentiable sur $\operatorname{int} \operatorname{dom} f \cap \operatorname{lev}_{>0} f$ alors G_f est continu sur $\operatorname{int} \operatorname{lev}_{\leq 0} f \cup (\operatorname{int} \operatorname{dom} f \cap \operatorname{lev}_{>0} f)$ et semi-continu inférieurement sur $\operatorname{fr} \operatorname{lev}_{\leq 0} f$.

Démonstration. Par Fréchet-différentiabilité $\partial f = \nabla f$ et f sont continus sur int $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{lev}_{>0} f$. Par conséquent $G_f = \mathrm{Id} - f \, \mathrm{Inv} \circ \nabla f$ est continu sur int $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{lev}_{>0} f$. Le reste découle du Lemme 5.12. \square

Proposition 5.14 [6, Proposition 1.4.14] Soient X, Y et Z des espaces métriques, $A: X \to 2^Z$ et $g: \operatorname{gra} A \to Y$. On définit l'opérateur suivant :

$$B: X \to 2^Y: x \mapsto g(x, Ax)$$
. (5.5)

On suppose g continue.

- (i) Si A est semi-continu inférieurement alors B aussi.
- (ii) Si A est semi-continu supérieurement à valeurs compactes alors B aussi.

Corollaire 5.15 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leq 0} f \neq \emptyset$. Si $\dim \mathcal{H} < +\infty$ alors G_f est semi-continu supérieurement sur int $\operatorname{dom} f$.

Démonstration. Définissons l'opérateur suivant :

$$A: \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}: x \mapsto \begin{cases} \partial f(x) & \text{si } x \in \text{int dom } f \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$
 (5.6)

D'après le Théorème 5.10 on a dom $A = \operatorname{int} \operatorname{dom} f$. On définit également la fonction suivante :

$$g: \operatorname{gra} A \to \mathcal{H}: (x, u) \mapsto \begin{cases} x & \operatorname{si} f(x) \leq 0\\ x - f(x) \operatorname{Inv} u & \operatorname{si} f(x) > 0. \end{cases}$$
 (5.7)

Vérifions que g est continue. Soit $(x,u) \in \operatorname{gra} A$ et $(x_n,u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\operatorname{gra} A$ convergente vers (x,u). Supposons $f(x) \leqslant 0$ et donnons-nous une sélection U de ∂f telle que Ux = u et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $Ux_n = u_n$. Comme G_f^U est une quasi-contraction (Proposition 1.8) on obtient :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \|g(x_n, u_n) - g(x, u)\| = \|G_f^U x_n - G_f^U x\| \leqslant \|x_n - x\| \to 0.$$
 (5.8)

Supposons maintenant que f(x) > 0. Comme $\text{lev}_{>0} f$ est ouvert, pour n assez grand on a $f(x_n) > 0$ et, comme Inv est continu sur $\mathcal{H}\setminus\{0\}$ et $x \in \text{int dom } f = \text{cont } f$ (c.f. [10, Corollary 8.30]),

$$g(x_n, u_n) = x_n - f(x_n) \operatorname{Inv} u_n \to x - f(x) \operatorname{Inv} u = g(x, u).$$
 (5.9)

Définissons l'opérateur B comme dans la Proposition 5.14 :

$$B: \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}: x \mapsto \begin{cases} G_f x & \text{si } x \in \text{int dom } f\\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$
 (5.10)

D'après le Théorème 5.10 et son corollaire 5.11 A est semi-continu supérieurement à valeurs compactes. La Proposition 5.14 permet de conclure que, sur $\inf \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} B$, $B = G_f$ est semi-continu supérieurement. \square

5.3 Monotonie

Lemme 5.16 Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $\operatorname{lev}_{\leqslant 0} f \neq \emptyset$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) G_f est monotone.

(ii)

$$\left(\forall (x,y) \in (\text{lev}_{>0} f)^2\right) (\forall u \in \partial f(x)) (\forall v \in \partial f(y))$$
$$\langle x - y \mid f(x) \text{Inv } u - f(y) \text{Inv } v \rangle \leqslant ||x - y||^2$$

Démonstration. Soit $(x,y) \in (\text{dom } G_f)^2$. Si $f(x) \leq 0$ et $f(y) \leq 0$ alors

$$\langle G_f x - G_f y \mid x - y \rangle = ||x - y||^2 \geqslant 0.$$
 (5.11)

Supposons maintenant que f(x) > 0 et $f(y) \le 0$, et donnons-nous $u \in \partial f(x)$. Alors

$$\langle G_f x - G_f y \mid x - y \rangle = \|x - y\|^2 - \frac{f(x)}{\|u\|^2} \langle u \mid x - y \rangle$$
 (5.12)

On a

$$-\|u\|\|y - x\| + f(x) \leqslant \langle u \mid y - x \rangle + f(x)$$

$$\leqslant f(y)$$

$$\leqslant 0.$$
(5.13)

On en déduit les relations suivantes :

$$\langle u \mid x - y \rangle \geqslant f(x) - f(y) > 0 \tag{5.14}$$

$$\frac{f(x)}{\|u\|} \le \|y - x\|. \tag{5.15}$$

Par conséquent la relation (5.12) donne

$$\langle G_{f}x - G_{f}y \mid x - y \rangle \geqslant \|x - y\|^{2} - \frac{\|y - x\|}{\|u\|} \langle u \mid x - y \rangle$$

$$= \frac{\|x - y\|}{\|u\|} (\|x - y\| \|u\| - \langle u \mid x - y \rangle)$$

$$\geqslant 0.$$
(5.16)

L'opérateur G_f est donc monotone si et seulement si la relation définissant la monotonie est vérifiée pour les points de $\text{lev}_{>0} f$. \square

Exemple 5.17 Étant donnés un convexe fermé non vide $C \subset \mathcal{H}$ et $\alpha \in]0,1/2] \cup \{1\}$, on a vu au Corollaire 2.5 que $G_{d^{1/\alpha}}$ était une contraction ferme, donc monotone.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié la projection sous-différentielle dans le cadre de la théorie des opérateurs, et non pas seulement comme méthode algorithmique. À notre connaissance cette démarche est nouvelle. Nous avons obtenu des propriétés algébriques liées à la composition que d'aucuns pourraient qualifier d'élégantes, mais celles liées à l'addition et à l'inf-convolution ne sont pas aussi applicables qu'espéré. De même les interactions avec la conjugaison de Fenchel et l'enveloppe de Moreau se sont révélées faibles. Nous avons également établi un fort lien entre Fréchet-différentiabilité et continuité du projecteur sous-différentiel. Nous nous attendions cependant à trouver des conditions plus simples sous lesquelles G_f soit une contraction, une contraction ferme, ou même un projecteur métrique.

Références

- [1] Ya. I. Alber, A. N. Iusem, et M. V. Solodov, On the projected subgradient method for non-smooth convex optimization in a Hilbert space, *Math. Programming*, vol. 81, pp. 23–35, 1998.
- [2] E. Allen, R. Helgason et J. Kennigton, A generalization of Polyak's convergence result for subgradient optimization, *Mathematical Programming*, vol. 37, pp. 309–317, 1987.
- [3] K. M. Anstreicher et L. A. Wolsey, Two well-known properties of subgradient optimization, *Mathematical Programming*, Ser. B, vol. 120 pp. 213–220, 2009.
- [4] H. Attouch, Variational convergence for functions and operators. Pitman, London, 1984.
- [5] J.-P. Aubin et I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis John Wiley & Sons, 1984.
- [6] J.-P. Aubin et H. Frankowska, Set-Valued Analysis Birkhäuser, 1990.
- [7] H. H. Bauschke et J. M. Borwein, On projection algorithms for solving convex feasibility problems, *SIAM Rev.*, vol. 38, pp. 367–426, 1996.
- [8] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, et P. L. Combettes, Bregman monotone optimization algorithms, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 42, pp. 596–636, 2003.
- [9] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, A weak-to-strong convergence principle for Fejérmonotone methods in Hilbert spaces, *Math. Oper. Res.*, vol. 26, pp. 248–264, 2001.
- [10] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer, New York, 2011.
- [11] Y. Censor and A. Lent, Cyclic subgradient projections, *Math, Programming*, vol. 24, pp. 233–235, 1982.
- [12] P. L. Combettes, Convex set theoretic image recovery by extrapolated iterations of parallel subgradient projections, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, pp. 493–506, 1997.
- [13] P. L. Combettes, Quasi-Fejérian analysis of some optimization algorithms. In: D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich (Eds.), *Inherently Parallel Algorithms for Feasibility and Optimization*, pp. 115–152. Elsevier, New York, 2001.
- [14] P. L. Combettes and V. R. Wajs, Signal recovery by proximal forward-backward splitting, *Multiscale Model. Simul.*, vol. 4, pp. 1168–1200, 2005.

- [15] L. T. Dos Santos, A parallel subgradient projections method for the convex feasibility problem, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 18, pp. 307–320, 1987.
- [16] I. I. Eremin, Fejér mappings and convex programming, *Siberian Math. J.*, vol. 10, pp. 762–772, 1969.
- [17] I. I. Eremin et L. D. Popov, Fejér Processes in Theory and Practice: Recent Results, *Russian Mathematics*, vol. 53, pp.36–55, 2009.
- [18] Yu. M. Ermoliev, Methods of solutions of nonlinear extremal problems, *Cybernetics*, 2, 4, 116.
- [19] Yu. M. Ermoliev and N.Z. Shor, On the minimization of nondifferentable functions, *Cybernetics*, 3, 1, 72.
- [20] J. L. Goffin, On convergence rates of subgradient optimization methods, *Mathematical Programming*, vol. 13, pp. 329–347, 1977.
- [21] J. L. Goffin et K. C. Kiwiel, Convergence of a simple subgradient method, *Mathematical Programming*, vol. 85, pp. 207–211, 1999.
- [22] M. Held, P. Wolfe et H. P. Crowder, Validation of subgradient optimization, *Mathematical Programming*, vol. 6, pp. 62–88, 1974.
- [23] J.-B. Hiriart-Urruty et C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [24] S. Kim, H. Ahn et S.-C. Cho, Variable target value subgradient method, *Mathematical Programming*, vol. 49, pp. 359–369, 1991.
- [25] K. C. Kiwiel, A tilted cutting plane proximal bundle method for convex nondifferentiable optimization, *Oper. Res. Lett.*, vol. 10, pp. 75–81, 1991.
- [26] X. Lin, M. Pham, A. Ruszczynski, Alternating Linearization for Structured Regularization Problems, arXiv:1201.0306.
- [27] Y. Lou, G. Shi, K. H. Johansson, Y. Hong, An Approximate Projected Consensus Algorithm for Computing Intersection of Convex Sets, arXiv:1205.5927v1.
- [28] A. Nedic et D.P. Bertsekas, Incremental subgradient methods for non-differentiable optimization, *Siam J. Optim.*, vol. 12, no. 1., 2001.
- [29] Yu. Nesterov, Primal-dual subgradient methods for convex problems, *Mathematical Programming*, Ser B., vol. 120, pp. 221–259, 2009.
- [30] Yu. Nesterov, Subgradient methods for huge-scale optimizations problems, *CORE Discusion Papers*, 2012/2.
- [31] R. R. Phelps, Convex functions, monotone operators and differentiability, Springer-Verlag, 1993.
- [32] B. T. Polyak, A general method of solving extremal problems, *Soviet Math. Doklady*, 8, 593597, 1967.
- [33] B. T. Polyak, Minimization of unsmooth functionals, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 9, pp. 14–29, 1969.
- [34] B. T. Polyak, Subgradient methods: A survey of Soviet research, *Non-smooth optimization: Proceedings of the IIASA workshop March 28April 8, 1977*, C. Lemaréchal and R. Mifflin eds. Pergamon Press, pp. 5–30, 1978.

- [35] B.T. Polyak, *Introduction to Optimization*, Optimization Software, Inc., Publications Division, New York, 1987.
- [36] E. Raik, Fejér type methods in Hilbert space, *Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised Füüsika-Matemaatika*, vol. 16, pp. 286–293, 1967.
- [37] E. Rosenberg, A geometrically convergent subgradient optimization method for nonlinearly constrained convex programs, *Mathematics of Operations Research*, 13, 3, 1988.
- [38] J. Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*. Calvage & Mounet, Paris, 2008.
- [39] N. Z. Shor, An application of the method of gradient descent to the solution of the network transportation problem. *Materialy Naucnovo Seminara po Teoret i Priklad. Voprosam Kibernet. i Issted. Operacii, Nucnyi Sov. po Kibernet*, Akad. Nauk Ukrain. SSSR, vyp. 1, pp. 9–17, Kiev 1962.
- [40] N. Z. Shor, On the structure of algorithms for numerical solution of problems of optimal planning and design, Diss. Doctor Philos., Kiev, 1964.
- [41] N. Z. Shor, *Minimization methods for non-differentiable functions*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [42] N. Z. Shor, *Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Doordrecht, London, 1998.
- [43] P. Wolfe, A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions, *Mathematical programming study*, 3, pp. 145–173, 1975.