
TOI21_quartet

1 second, 1024 megabytes

ผู้แต่ง: TOI21

เฉลยโดย: detective conan

เนื้อหาที่ใช้: dp on tree + subset sum

Solution Overview

ปัญหานี้ให้เราหาจำนวนชุดของ “หมู่บ้าน 4 แห่ง” ที่สามารถอพยพมายัง “ศูนย์ตำบลเดียวกัน” ได้โดยไม่ใช้ถนนซ้ำกันเลย หรือก็คือ การหากลุ่มหมู่บ้าน 4 แห่งที่สามารถเดินทางเข้าสู่ศูนย์ตำบลโดยใช้เส้นทางที่ไม่ทับกันแม้แต่เส้นเดียว

เงื่อนไขนี้ทำให้เราสังเกตได้ว่า หมู่บ้านแต่ละแห่งควรอยู่ใน “แขนง” ที่แยกจากกันเมื่อมองจากศูนย์ตำบลนั้นเป็นรากต้นไม้ นั่นคือ หากศูนย์ตำบลใดมีแขนงที่มีหมู่บ้านอยู่จำนวนมากพอ เราสามารถเลือกหมู่บ้านจากแขนงละหนึ่งแห่งมารวมเป็นกลุ่มปลอดภัยได้

Step 1: สร้าง Tree และนับขนาด Subtree (sz[u])

เราสร้าง Tree ตามข้อมูลอินพุต และใช้ DFS เพื่อนับจำนวนหมู่บ้านในแต่ละ Subtree โดยนิยามว่า:

```
void dfs1(int u, int pa) {
    sz[u] = (u <= n);
    for (int v : vc[u]) {
        if (v == pa) continue;
        dfs1(v, u);
        sz[u] += sz[v];
    }
}
```

คำอธิบาย:

- โหนดที่เป็นหมู่บ้าน (หมายเลข 1 ถึง n) จะมีค่าเริ่มต้น $sz[u]$ เป็น 1
 - โหนดที่เป็นศูนย์ตำบลจะเริ่มที่ 0 แล้วรวมจำนวนหมู่บ้านจากลูกๆ เข้ามา
- เมื่อจบ DFS แรก เราจะรู้ว่าทุกโหนดมีหมู่บ้านทั้งหมดกี่แห่งใน Subtree ของตัวเอง

Step 2: วิเคราะห์ศูนย์ตำบลแต่ละแห่ง

เราจะเยี่ยมชมทุกศูนย์ตำบลทีละแห่ง แล้วรวบรวม “จำนวนหมู่บ้านในแต่ละแขนง” เข้ามาเก็บในอาร์เรย์ a

แต่มีข้อควรระวังคือ หากศูนย์ตำบลนั้นไม่ใช่รากของต้นไม้ จะมี “แขนงจากพ่อ” ด้วย ซึ่งไม่ใช่ลูกใน Tree structure ดังนั้นเราต้องคำนวณฝั่งนี้ด้วยโดยใช้ $n - sz[u]$

- ถ้า v เป็นลูก u จะหาจำนวนบ้านในแขนง $v \rightarrow$ ใช้ $sz[v]$
- ถ้า v เป็นพ่อ u จะหาจำนวนบ้านในแขนง $v \rightarrow$ ใช้ $n - sz[u]$ เพราะ u เป็นลูกของ v แสดงว่า นอกเหนือจาก subtree ของ u ก็คือแขนงที่แยกออกมาฝั่ง v

Step 3: ใช้ DP แบบ Subset Sum เพื่อเลือก 4 แขนงไม่ซ้ำกัน

เมื่อเรามีอาร์เรย์ a แทนจำนวนหมู่บ้านในแต่ละแขนงของศูนย์ตำบล u แล้ว เป้าหมายคือเลือก 4 แขนงที่ต่างกัน แล้วหยิบหมู่บ้านจากแต่ละแขนงอย่างละ 1 แห่ง

ตรงนี้เราใช้เทคนิค DP 1 มิติคล้าย Subset Sum:

```
vector<int> pref(5, 0);
pref[0] = 1;
for(int x : a){
    for(int i = 4; i >= 1; --i){
        pref[i] = (pref[i] + pref[i - 1] * x % mod) % mod;
    }
}
ans = (ans + pref[4]) % mod;
```

คำอธิบาย: - $pref[i]$ แปลว่า “จำนวนวิธีเลือก i แขนงที่แตกต่างกัน”- สำหรับแขนงใหม่ที่มี x หมู่บ้าน \rightarrow เราสามารถต่อเติมชุดเดิมของ $i - 1$ แขนงให้กลายเป็น i แขนงได้อีก x วิธี

ตัวอย่างเช่น หาก $a = [3, 2, 5, 1]$ เราจะได้ $pref[4] = 30$ ซึ่งหมายถึงมี 30 วิธีเลือกหมู่บ้าน 4 แห่งจากแขนง 4 แขนงนี้

Step 4: รวมคำตอบจากทุกศูนย์ตำบล

เราทำขั้นตอนนี้กับศูนย์ตำบลทุกแห่ง แล้วรวม $pref[4]$ ของแต่ละศูนย์ตำบลเข้ามาในตัวแปร ans

สุดท้ายแสดงคำตอบ $ans \% mod$ ตามโจทย์



TOI21_Quartet

รูปที่ 1: code เฉลย cpp

Time Complexity: $\mathcal{O}(n + m)$