OS POLINÔMIOS, PRODUTOS NOTÁVEIS E OS CASOS DE FATORAÇÃO: PARTE 1

Professor: Gabriel Henrique de Oliveira

EaD
Universidade Presbiteriana Mackenzie

POLINÔMIOS

Definição

Um **polinômio**, em x, é qualquer expressão que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{a_n \, . \, x^n \; + \; a_{n-1} \, . \, x^{n-1} + \cdots + a_1 \, . \, x + a_0}$$

Em que:

- $\boldsymbol{n}$ é um número inteiro não negativo;
- os números $\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a_{n-1}}, \ldots \; , \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_0}$ são números reais chamados **coeficientes**; e
- $\boldsymbol{a_n \, . \, x^n}, \boldsymbol{a_{n-1} \, . \, x^{n-1}}, \ldots \; , \boldsymbol{a_1 \, . \, x}, \boldsymbol{a_0}$ são chamados de **termos**.

Mas, o que é...

Polinômio completo

$$x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 5$$

(possui todas as potências consecutivas desde o grau mais alto até o termo constante)

Polinômio incompleto

$$x^7 - x^4 + x^3 - x^2 - 9$$

Polinômio na forma padrão

$$12x^3 - 2x^2 + 4x^1 - 9$$

(ordenado segundo as suas potências em ordem crescente ou decrescente)

Polinômio na forma não padrão

$$x^4 + x^7 - 10 + 3x^2 - 5$$

Monômio

$$12x^6$$

Binômio

$$3x^8 + 9x^3$$

Trinômio

$$x^2 + 12x + 7$$

Grau de um polinômio

Em um polinômio, o termo de mais alto grau que possui um coeficiente não nulo denominado termo dominante e o coeficiente deste termo é o coeficiente do termo dominante. O grau de um polinômio não nulo, é o expoente de seu termo dominante.

$\boldsymbol{7x^3} \rightarrow$ polinômio de grau 3 $\rightarrow \mathrm{Gr(P)} = 3$

$\mathbf{7x^9 + 9x^6} \rightarrow$ polinômio de grau 9 $\rightarrow \mathrm{Gr(P)} = 9$

$\mathbf{15} \rightarrow$ polinômio de grau 0 $\rightarrow \mathrm{Gr(P)} = 0$

$\mathbf{0} \rightarrow$ polinômio nulo: não se define o grau

Dois polinômios idênticos?

Dois **polinômios são idênticos** quando todos os coeficientes do primeiro e do segundo polinômio **são ordenadamente iguais**.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$mx^3 + nx^2 + px + q$$

Os dois polinômios acima serão idênticos quando: $\boldsymbol{a = m}$; $\boldsymbol{b = n}$; $\boldsymbol{c = p}$; $\boldsymbol{e\ d = q}$.

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Operações: adição

$$P = 7x^3 - 8x^2 + 4x - 4 \qquad Q = 6x^2 - 8x + 10$$

$$\begin{array}{r} 7x^3 - 8x^2 + 4x - 4 \\ + \qquad 6x^2 - 8x + 10 \\ \hline 7x^3 - 2x^2 - 4x + 6 \end{array}$$

Operações: adição

$$\boldsymbol{P = 7x^3 - 8x^2 + 4x - 4} \qquad \boldsymbol{Q = 6x^2 - 8x + 10}$$

$$P + Q = (7x^3 - 8x^2 + 4x - 4) + (6x^2 - 8x + 10)$$

$$P + Q = 7x^3 + (-8 + 6)x^2 + (4 - 8)x + (-4 + 10)$$

$$\boldsymbol{P + Q = 7x^3 - 2x^2 - 4x + 6}$$

Operações: subtração

$P = 7x^3 - 8x^2 + 4x - 4$ $\quad\quad$ $Q = 6x^2 - 8x + 10$

$$\begin{array}{r} 7x^3 - 8x^2 + 4x - 4 \\ \ominus \quad\quad 6x^2 - 8x + 10 \\ \hline 7x^3 - 14x^2 + 12x - 14 \end{array}$$

Operações: subtração

$$\boldsymbol{P = 7x^3 - 8x^2 + 4x - 4} \qquad \boldsymbol{Q = 6x^2 - 8x + 10}$$

$$P - Q = (7x^3 - 8x^2 + 4x - 4\,) - (6x^2 - 8x + 10)$$

$$P - Q = (7x^3 - 8x^2 + 4x - 4) + (-6x^2 + 8x - 10)$$

$$P - Q = 7x^3 + \big(-8 + (-6)\big)x^2 + (4 + 8)x + \big(-4 + (-10)\big)$$

$$\boldsymbol{P - Q = 7x^3 - 14x^2 + 12x - 14}$$

Operações: multiplicação

$$\boldsymbol{P = x^4 - 2} \qquad \boldsymbol{Q = x^4 + 4}$$

$$P.Q = (x^4 - 2).(x^4 + 4)$$

$$P.Q = x^8 + 4x^4 - 2x^4 - 8$$

$$P.Q = x^8 + (4 - 2)x^4 - 8$$

$$\boldsymbol{P.Q = x^8 + 2x^4 - 8}$$

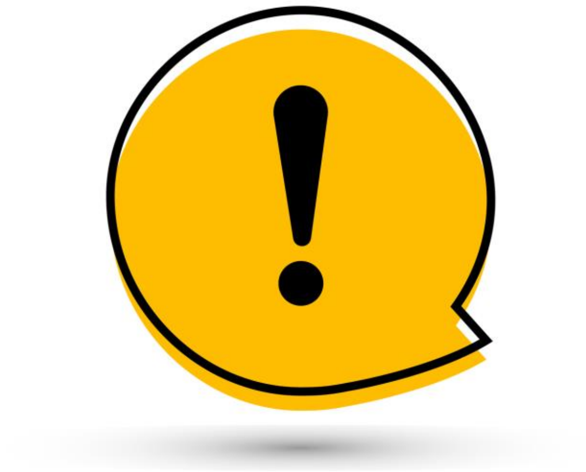
Operações: divisão

Ao dividirmos um polinômio P por um outro polinômio D, não nulo, sendo que o grau de P é maior que o grau de D, encontraremos um par de polinômios, Q e R, tais que:

$$\boxed{P = D.Q + R \qquad sendo:\ grau\ de\ R < grau\ de\ D}$$

- **Método da chave:** divisão de dois polinômios quaisquer.
- **Dispositivo prático de Briott-Ruffini:** divisão de um polinômio por um binômio do tipo $\mathrm{x} - \mathrm{a}$.

Atenção!



- Quando o resto da divisão de P por D é nulo (isto é, igual a zero), dizemos que **o polinômio $\boldsymbol{P}$ é divisível por $\boldsymbol{D}$**.

- Seu resultado indicamos por: $\boldsymbol{\frac{P}{D} = Q + \frac{R}{D}}$

- **Antes de iniciar a divisão:** verificar se os polinômios estão em sua forma padrão e completa.

Método da chave: divisão de dois polinômios quaisquer

$$\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 4x + 1} \text{ por } \boldsymbol{x^2 - 2x - 2}$$

dividendo *divisor*

$$\frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{x^2}} = \boldsymbol{x}$$

$$\frac{\boldsymbol{4x^2}}{\boldsymbol{x^2}} = \boldsymbol{4}$$

$$\begin{array}{rl|l}
\cancel{x^3} + 2x^2 - 4x + 1 & & x^2 - 2x - 2 \\
\cancel{-x^3} + 2x^2 + 2x & & \boldsymbol{x+4} \\
\hline
\cancel{4x^2} - 2x + 1 & & \\
\cancel{-4x^2} + 8x + 8 & & \\
\hline
\boldsymbol{6x + 9} & &
\end{array}$$

quociente

resto

$$\boldsymbol{Q = x + 4}$$
$$\boldsymbol{R = 6x + 9}$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x - 2} = x + 4 + \frac{6x + 9}{x^2 - 2x - 2}$$

Operações: divisão

Briott-Ruffini: divisão de um polinômio por um binômio do tipo $\boldsymbol{x-a}$.

$$\boldsymbol{x^3+2x^2-4x+1}\ \text{por}\ \boldsymbol{x-1}$$

$\boldsymbol{x-1=0}$

$\boldsymbol{x=1}$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

+ + +

$1.1+2=1+2=3$

$3.1+(-4)=3-4=-1$

$(-1).1+1=-1+1=0$

$\boldsymbol{Q=x^2+3x-1}$

$\boldsymbol{R=0}$

resto da divisão

coeficientes do quociente

$$\frac{x^3+2x^2-4x+1}{x-1}=x^2+3x-1+\frac{0}{x-1}$$

$$\frac{x^3+2x^2-4x+1}{x-1}=x^2+3x-1$$

Referências

AXLER, S. *Pré-cálculo* – Uma preparação para o cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

DEMANA, F. D. *et al*. *Pré-cálculo*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

GOMES, F. M. *Pré-Cálculo*: operações, equações, funções e trigonometria. São Paulo: Cengage Learning, 2022.

IEZZI, G. *et al*. *Matemática*: volume único. São Paulo: Atual, 1997.

LARSON, R. E.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. *Cálculo com aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

EaD

Universidade Presbiteriana
Mackenzie