TEXTO DE APOIO – AULA 1

Fundamentos da Matemática

Professor Gabriel Henrique de Oliveira

EaD
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Sumário

1. Números Reais

O conjunto dos números reais faz parte dos **conjuntos numéricos**, assim chamado por conta de os elementos desses conjuntos, em específico, serem números que possuem alguma característica em comum. São eles: **conjunto dos números naturais, conjunto dos números inteiros, conjunto dos números racionais, conjunto dos números irracionais, conjunto dos números reais e conjunto dos números complexos**. No decorrer de nossas aulas nesse componente, estudaremos todos esses conjuntos, até o conjunto dos números reais. Caso, em outro momento de sua graduação, seja necessária uma ampliação no universo numérico, ela será vista oportunamente, e você estudará o conjunto dos números complexos, ok?

Vamos saber mais sobre o conjunto dos números reais agora?

Lembrete:

Chamamos de conjunto uma coleção de membros (objetos, números, figuras, pessoas etc.) e utilizamos, frequentemente, uma das letras de nosso alfabeto, em maiúsculo, para nomeá-lo. Cada membro que pertence ao conjunto é chamado de elemento, sendo que estes são listados entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula.

- Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Lembrete:

Quando há reticências no início e/ou no final da enumeração dos elementos de qualquer conjunto, isso significa que aquele conjunto possui infinitos elementos.

O conjunto dos números naturais possui alguns subconjuntos importantes, entre eles o **conjunto dos números naturais não nulo**. Para representá-lo, utilizamos o asterisco (*) à direita do símbolo do conjunto do qual se quer suprimir o elemento zero, vejamos:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$):

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Observação:

Se repararmos nos elementos do conjunto dos números inteiros, podemos perceber que todos os elementos de $\mathbb{N}$ pertencem a $\mathbb{Z}$, isto é, o conjunto dos números naturais é um subconjunto (subconjuntos são partes de um conjunto) dos números inteiros.

Assim como no conjunto anterior, o conjunto dos números inteiros possui subconjuntos importantes que valem a pena observarmos:

- Conjunto dos números inteiros não nulo:

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Conjunto dos números inteiros não negativo:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Conjunto dos números inteiros positivo:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Conjunto dos números inteiros não positivo:

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

- Conjunto dos números inteiros negativo:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

- Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$):

É o conjunto formado pelos números fracionários que possuem o numerador e o denominador (diferente de zero) pertencentes ao conjunto dos números inteiros, visto anteriormente. Isto é:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \; e \; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Com isso, podemos dizer que um número será racional quando ele puder ser escrito como uma fração $^p/_q$, sendo que p e q são números inteiros e $q \neq 0$.

A partir dessa definição, podemos afirmar, então, que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros são subconjuntos do conjunto dos números racionais.

Observação:

Vale ressaltar que as dízimas periódicas (algarismos que se repetem periodicamente após a vírgula, por exemplo: 1,3333...; 5,4646...) são números racionais. Caso não se lembre das características das dízimas periódicas ou, até mesmo, de como encontrar a fração que gera uma dízima (fração geratriz), recomendamos que busque o aporte teórico desse componente curricular e faça uma revisão desse tópico.

- Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$):

Os números decimais que não são exatos com algarismos infinitos e não periódicos após a vírgula fazem parte do conjunto dos números irracionais. Vejamos alguns exemplos de números irracionais:

0,77717548... → dízima não periódica, pois os algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente.

$\sqrt{2}$ → ao extrairmos a raiz quadrada de dois, teremos como resultado o número 1,414213..., ou seja, não possui uma periodicidade em seus algarismos após a vírgula.

π → o valor de π é 3,141592... e, também, não possui uma periodicidade em seus algarismos após a vírgula.

- Conjunto dos números reais:

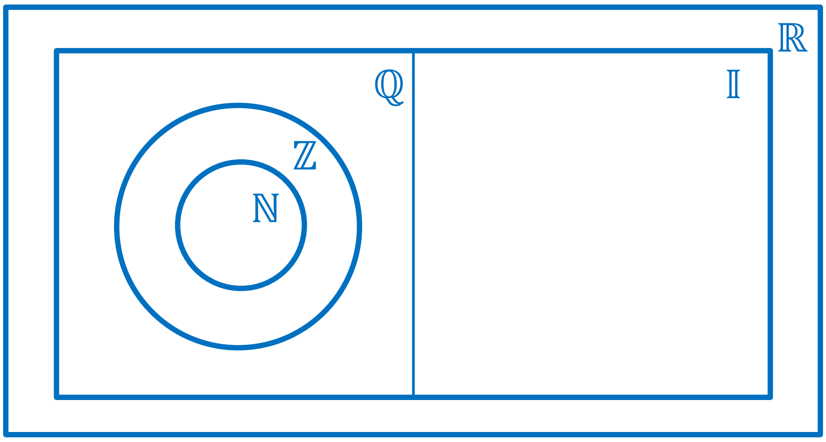
O conjunto dos números reais é formado pelos números racionais e pelos números irracionais. Logo, temos que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Lembrete:

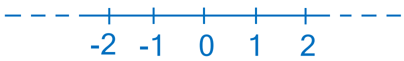
Caso não se lembre das operações que podemos fazer entre conjuntos (união, intersecção e diferença), recomendamos que busque o aporte teórico desse componente curricular e faça uma revisão sobre este tópico.

Ou seja, são subconjuntos do conjunto dos números reais os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Diante disso, podemos, então, construir um diagrama (Figura 1):

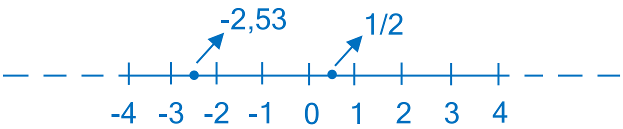


Após essa breve revisão dos conjuntos numéricos, estudaremos um pouco mais sobre o conjunto dos números reais; vamos lá?

Visualizamos os números reais como pontos de uma reta real; veja na Figura 2 a seguir:



O ponto da reta real correspondente a zero é chamado de origem, os números à sua direita são os positivos, e os números à sua esquerda são os negativos, como vemos na Figura 2 anteriormente. Vale ressaltar que cada ponto na reta real corresponde a um e somente um número real e vice-versa (Figura 3):



1.1. VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

O valor absoluto (ou módulo) de um número real, a, é definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & , se\ a \geq 0 \\ -a & , se\ a < 0 \end{cases}$$

Isto é, o módulo de um número real é sempre positivo.

Vejamos alguns exemplos:

(Ex. 1) $|\ 6\ | = 6$

(Ex. 2) $|-15| = \ -(-15) = 15$

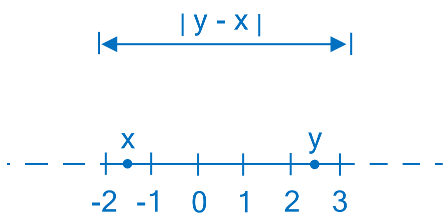
(Ex. 3) $|-0{,}785| = -(-0{,}785) = 0{,}785$

(Ex. 4) Resolva a equação $|5x - 3| = 17$:

$$|5x - 3| = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 = 17 \\ ou \\ 5x - 3 = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ ou \\ x = -{}^{14}/_{5} \end{cases}$$

Logo, $x = 4$ ou $x = -{}^{14}/_{5}$

A distância entre dois números reais, x e y, é dada por $|y - x|$, sendo este o comprimento do segmento de reta que liga x a y. Por exemplo, como mostra a Figura 4 a seguir:



1.2. INTERVALOS

O conjunto dos números reais é **ordenado**, ou seja, podemos comparar quaisquer dois números reais que não são iguais usando desigualdades, pois todo número é menor que qualquer outro número colocado à sua direita.

Exprimimos isso da seguinte maneira:
a é menor do que b: $a < b$
b é maior do que a: $b > a$

Como vimos no tópico anterior, cada ponto da reta representa um número real apenas. Dados dois números reais c e d, é verdade que ou $c = d$, ou $c < d$, ou $c > d$. Atenção: não há outras possibilidades, e não é possível a ocorrência simultânea de duas dessas relações, ok?

Expressões do tipo $c < d$ e $c > d$ são chamadas de desigualdades, em que c e d são membros da desigualdade, e podemos utilizar um dos seguintes símbolos para sua representação:

$> \;\rightarrow\; Maior\ que$
$< \;\rightarrow\; Menor\ que$
$\geq \;\rightarrow\; Maior\ ou\ igual\ que$
$\leq \;\rightarrow\; Menor\ ou\ igual\ que$

Vale ressaltar que qualquer desigualdade pode ser escrita em “sentido contrário”, uma vez que: “c é menor que d” $(c < d)$ é equivalente a “d é maior que c” $(d > c)$. Além disso, quando queremos exprimir que o número a está entre c e d, isto é, que a é maior que c e, ao mesmo tempo, menor que d, escrevemos da seguinte forma: $c < a < d$.

O conjunto dos números reais possui um subconjunto muito importante para nosso estudo neste componente curricular, que é o de intervalos, o qual é determinado por meio de desigualdades. Vamos à definição!

Sejam os números reais m e n, com $m < n$, podemos ter intervalos limitados e intervalos ilimitados. Vejamos a notação algébrica (isto é, por meio de uma propriedade característica) e a representação geométrica (utilizando a reta real) desses intervalos:

- **Intervalos limitados** (o item 1 é denominado de intervalo aberto, o item 2 é denominado de intervalo fechado, e os itens 3 e 4 são denominados de intervalos semiabertos).

  (1) Intervalo aberto de extremos m e n é o conjunto: $]m, n[= \{ x \in \mathbb{R} \mid m < x < n\}$
  Exemplo:

  $] 5 , 9 [= \{ x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 9\}$

  (2) Intervalo fechado de extremos m e n é o conjunto: $[m, n] = \{ x \in \mathbb{R} \mid m \leq x \leq n\}$
  Exemplo:

  $[5 , 9] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 9\}$

  (3) Intervalo aberto à direita e fechado à esquerda de extremos m e n é o conjunto: $[m, n[= \{ x \in \mathbb{R} \mid m \leq x < n\}$
  Exemplo:

  $[5 , 9 [= \{ x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 9\}$

  (4) Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda de extremos m e n é o conjunto: $]m, n] = \{ x \in \mathbb{R} \mid m < x \leq n\}$
  Exemplo:

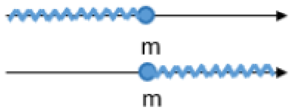
  $] 5 , 9] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 9\}$

- **Intervalos infinitos**

  (1) O intervalo infinito $] -\infty, \infty[$ é toda a reta dos números reais:

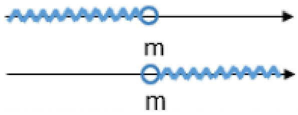
(2) Intervalo semi-infinito fechado:



$] -\infty, m\,] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq m \,\}$

$[\, m,\ \infty\, [= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq m \,\}$

(3) Intervalo semi-infinito aberto:



$] -\infty, m\, [= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < m \,\}$

$]\, m,\ \infty\, [= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > m \,\}$

Atenção:

- **I.** Em alguns referenciais teóricos, você poderá encontrar a utilização dos parênteses também para representar intervalos abertos, por exemplo: $(-5, 85\,]$.
- **II.** As extremidades de um intervalo podem ser abertas ou fechadas, como vimos nos exemplos anteriores. Uma extremidade aberta quer dizer que o elemento de tal extremidade não faz parte do intervalo. E uma extremidade fechada significa que seu elemento extremo está incluso no intervalo.
- **III.** Os símbolos de ∞ e $-\infty$ indicam infinitude positiva e negativa, respectivamente. Além disso, esses símbolos não são números reais, apenas permitem representar condições de não limitação de uma forma mais concisa.
- **IV.** Nas representações gráficas dos intervalos, bolinha não pintada significa que aquele elemento extremo não pertence ao conjunto, e bolinha pintada significa que o elemento extremo pertence ao conjunto.
- **V.** Não é possível representar subconjuntos ou conjuntos que não sejam reais (ou contidos nos reais) pela notação de intervalo.

Observação:

Podemos fazer operações (união, intersecção e diferença) com os intervalos e, caso, em outro momento deste componente curricular, seja necessária a realização dessas operações, os detalhes de cada uma delas serão vistos oportunamente.

PARA SABER MAIS

Quando temos uma relação de desigualdade envolvendo uma ou mais incógnitas, chamamos de inequação. Caso não se lembre como resolver as inequações de primeiro e de segundo grau, além da inequação modular, inequação produto e quociente, recomendamos que busque o aporte teórico deste componente curricular e faça uma revisão sobre este tópico.

2. Potenciação e Radiciação

Neste tópico, veremos as operações de potenciação e radiciação. Vamos lá?

2.1. POTENCIAÇÃO

Potenciação é a operação matemática que representa a multiplicação de fatores iguais. Essa operação nos ajudará quando tivermos de multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. A definição de potenciação nos diz que: sendo dados um número real m e um número natural n tal que:

- Para $n > 1$, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{m^n = \underbrace{m.m.m.\dots m}_{n\ fatores}}}$$

Chama-se de potência de base m e expoente n o número m^n que será o produto de n fatores iguais a m. Isto é, a **base** sempre será o valor do fator, o **expoente**, a quantidade de vezes que o fator se repete, e a **potência** é o resultado do produto.

- Para $n = 1$, temos: $\boxed{m^1 = m}$

- Para $n = 0$, temos: $\boxed{m^0 = 1, m \neq 0}$

E se tivermos um expoente inteiro negativo? Quando tivermos um número real b, não nulo, e um número natural c, define-se a potência b^{-c} pela seguinte relação:

$$\boxed{b^{-c} = \frac{1}{b^c}}$$

A potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo, ou seja, chama-se potência de base b e expoente $-c$ o número b^{-c}, que é o inverso de b^c.

Antes de continuarmos com as propriedades da potência, vejamos alguns exemplos do que discutimos até o momento neste tópico:

(Ex. 1) $3^4 = 3\,.\,3\,.\,3\,.\,3 = 81$

(Ex. 2) $0^2 = 0\,.\,0 = 0$

(Ex. 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(Ex. 4) $(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$

(Ex. 5) $(-2)^2 = (-2).(-2) = 4$

(*Ex. 6*) $-2^2 = -2.2 = -4$

(Ex. 7) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

(Ex. 8) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2.2.2.2} = \frac{1}{16}$

(Ex. 9) $(-32)^{-1} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$

A partir dos exemplos, podemos constatar algumas observações importantes que nos auxiliarão na hora de realizar os exercícios que serão solicitados:

I. Toda base negativa elevada a um expoente par, a potência (seu resultado) será positiva, como podemos verificar no exemplo 5.

II. Toda base negativa elevada a um expoente ímpar, a potência (seu resultado) será negativa, como podemos verificar no exemplo 4.

III. A diferença entre os exemplos 5 e 6 está que, no quinto, o sinal de negativo faz parte da potenciação por conta de que está dentro de parênteses; caso contrário, o sinal de negativo não faz parte da operação e continua em seu lugar no resultado, como no sexto exemplo.

Caso meu expoente seja um número racional, temos, por definição, que dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{N}^*)$, define-se a potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

(Ex. 10) $12^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{12^3}$

(Ex. 11) $3^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

Mas atenção, veremos mais sobre as propriedades da radiciação, as raízes e os radicais no próximo subitem!

Uma nova pergunta: e se o expoente for um número real? Não há nenhum problema, pois podemos fazer a extensão da definição de potenciação para os expoentes reais. A partir disso, para as potências de expoente real, são válidas as seguintes propriedades:

- Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, temos: $\boxed{a^b . a^c = a^{b+c}}$
- Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, temos: $\boxed{\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}}$
- Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*, c \in \mathbb{R}$, temos: $\boxed{(a.b)^c = a^c . b^c}$
- Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*, c \in \mathbb{R}$, temos: $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}}$
- Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, temos: $\boxed{\left(a^b\right)^c = a^{b.c}}$

Vejamos alguns exemplos de aplicação dessas propriedades:

(Ex. 12) $4^2 . 4^1 = 4^{2+1} = 4^3 = 64$

(Ex. 13) $\frac{8^6}{8^7} = 8^{6-7} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

(Ex. 14) $(7.3)^2 = 7^2 . 3^2 = 49.9 = 441$

(Ex. 15) $\left(\frac{16}{12}\right)^{-2} = \left(\frac{12}{16}\right)^2 = \frac{12^2}{16^2} = \frac{144}{256}$

(Ex. 16) $(3^2)^4 = 3^{2.4} = 3^8 = 6561$

Após passarmos por todas as definições de potenciação, vamos estudar, agora, a operação inversa a ela?

2.2. RADICIAÇÃO

Para podermos calcular a raiz de um número, é necessário que os tópicos de potenciação tenham ficado claros para você, pois a radiciação é a operação inversa dela.

Vamos à definição: dado um número real, não negativo, a, e um número natural n, sendo $n \geq 1$, chama-se a raiz enésima de a o número real e não negativo b, tal que $b^n = a$. Vejamos:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b}$$

O símbolo $\sqrt{\ }$ é chamado de radical, a é chamado de radicando, e n é o índice. Vamos verificar essa definição em alguns exemplos?

(Ex. 17) $\sqrt[2]{9} = 3$, pois $3^2 = 9$

(Ex. 18) $\sqrt[5]{1024} = 4$, pois $4^5 = 1024$

Se $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, então podemos afirmar que as seguintes propriedades são válidas:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\,.\,p]{a^{m\,.\,p}} \text{ ou } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\,\div\,p]{a^{m\,\div\,p}}, \text{para } a \neq 0 \text{ ou } m \neq 0} \quad \boxed{\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0} \quad \boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{para } a \neq 0 \text{ ou } m \neq 0} \quad \boxed{\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p\,.\,n]{a}}$$

Sigamos com mais alguns exemplos:

(Ex. 19) $\sqrt[2]{25.36} = \sqrt[2]{25}\,.\,\sqrt[2]{36} = 5\,.\,6 = 30$

(Ex. 20) $\sqrt[3]{\frac{729}{512}} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{9}{8}$

(Ex. 21) $\left(\sqrt[5]{10}\right)^{10} = \sqrt[5]{10^{10}} = 100$

(Ex. 22) $\sqrt[6]{\sqrt[2]{5^{12}}} = \sqrt[6.2]{5^{12}} = \sqrt[12]{5^{12}} = 5$

(Ex. 23) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3\,.\,8} = \sqrt[3]{3\,.\,2^3} = \sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[3]{2^3} = 2\sqrt[3]{3}$

(Ex. 24) $\sqrt[2]{80} = \sqrt[2]{2^2.2^2.5} = 2.2\sqrt[2]{5} = 4\sqrt{5}$

2.3. EXPRESSÕES QUE ENVOLVEM EXPOENTES E/OU RADICAIS

Após estudarmos todas as propriedades das potências e raízes, olharemos alguns exemplos de como resolvê-las, utilizando o que estudamos nos tópicos anteriores. Algumas expressões que envolvem esses conceitos são:

(Ex. 25) $2x^2(x^3) = 2x^{2+3} = 2x^5$

(Ex. 26) $(3x)^2.\sqrt[3]{x} = 9x^2\,.\,x^{\frac{1}{3}} = 9x^{2+\frac{1}{3}} = 9x^{\frac{7}{3}} = 9\sqrt[3]{x^7}$

(Ex. 27) $\frac{13x^3}{(x^3)^6} = \frac{13x^3}{x^{18}} = 13x^{3-18} = 13x^{-15} = \frac{13}{x^{15}}$

(Ex. 28) $\frac{z^2u^{-4}}{u^{-3}z^3} = \frac{z^2.z^{-3}}{u^{-3}.u^4} = \frac{z^{2-3}}{u^{-3+4}} = \frac{z^{-1}}{u^1} = \frac{1}{z.u}$

(Ex. 29) $\sqrt{108x^8z^{18}} = \sqrt{108}\,.\sqrt{x^8}\,.\sqrt{z^{18}} = 6\sqrt{3}\,.x^4\,.z^9$

(Ex. 30) $\frac{2y}{\sqrt{5}} = \frac{2y}{\sqrt{5}}\,.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2y\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{2y\sqrt{5}}{5}$

(Ex. 31) $\frac{3z}{(\sqrt{2}-1)}.\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{3z(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}+1.\sqrt{2}-1\sqrt{2}-1} = \frac{3z\sqrt{2}+3z}{2-1} = \frac{3z\sqrt{2}+3z}{1} = 3z\sqrt{2}+3z$

(Ex. 32) $\frac{\sqrt[3]{4}x}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}x}{2}\,.\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{x.\sqrt[3]{4}\,.\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{x\,.\,\sqrt[3]{4.2}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{x.\sqrt[3]{8}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{2x}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{x}{\sqrt[3]{2}}$

Os três últimos exemplos, 30 a 32, tratam sobre a racionalização, sendo o 30 e o 31 a racionalização do denominador e o 32, do numerador. Racionalizar significa multiplicar o denominador e numerador por um mesmo número para que o numerador ou o denominador se torne um número racional. Para encontrarmos quem multiplicaremos, tanto o numerador como o denominador, é necessário descobrirmos o fator nacionalizante e, posteriormente, simplificarmos a fração equivalente encontrada. Esse conteúdo será basilar para outros temas que veremos ainda neste componente curricular. Portanto, caso não se lembre, recomendamos que busque informações no aporte teórico e faça uma revisão sobre este tópico.

3. Matrizes

Matriz ( ) é uma tabela de $m.n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas. Há três maneiras pelas quais podemos representar uma matriz: parênteses, colchetes ou dois pares de barras verticais.

$$B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{2\times 3} = \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

Observe que, nos exemplos acima, seja em qualquer um deles, a matriz B é do tipo 2×3, isto é, possui duas linhas e três colunas.

Podemos escrever uma matriz genérica? Sim, basta considerarmos uma matriz A do tipo $m_{\times}n$ na qual cada elemento dessa matriz será representado por a_{ij} (na qual o índice i refere-se à linha em que se encontra tal elemento, e o j refere-se à coluna desse elemento), isto é:

$$A = (a_{ij})_{m_x n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(Ex. 1) Escreva a matriz H, sendo $H = (h_{ij})_{3x2}$, em que $h_{ij} = 3i + j$:

$$H = (h_{ij})_{3x2} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1+1 & 3.1+2 \\ 3.2+1 & 3.2+2 \\ 3.3+1 & 3.3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

3.1. MATRIZES NOTÁVEIS

- **Matriz linha:** matriz formada por uma única linha.

  (Ex. 2) $H = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

- **Matriz coluna:** matriz formada por uma única coluna.

  (Ex. 3) $H = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix}$

- **Matriz nula:** matriz cujos elementos são todos iguais a zero.

  (Ex. 4) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- **Matriz quadrada:** matriz que possui o número de linhas (m) igual ao número de colunas (n).

(Ex. 5) $H = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ $H\ \textit{é de ordem}\ 2$

(Ex. 6) $G = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 18 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ $G\ \textit{é de ordem}\ 3$

Os elementos da matriz quadrada cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal**. No exemplo 5 anterior, a diagonal principal de H é formada pelos elementos 3 e 12; no exemplo 6, os elementos 8, 2 e 7 formam a diagonal principal de G.

Os elementos da matriz quadrada, de ordem n, cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$, constituem a **diagonal secundária**. No exemplo 5, a diagonal secundária de H é formada pelos elementos 7 e 9; no exemplo 6, os elementos 1, 2 e 9 formam a diagonal secundária de G.

- **Matriz diagonal:** é uma matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

(Ex. 7) $H = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

- **Matriz identidade:** é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1.

(Ex. 8) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\textit{Matriz identidade de ordem}\ 2$

(Ex. 9) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\textit{Matriz identidade de ordem}\ 3$

E podemos igualar duas matrizes? Sim, porém, para dizermos que duas matrizes são iguais, elas precisam ter a mesma ordem ($m \times n$) e todos os seus elementos, de mesmo índice, devem ser iguais. Para visualizar isso, observe as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B possuem a mesma ordem, ou seja, de ordem 2 por 2, e todos os elementos de mesmo índice são iguais.

Vejamos mais duas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Não podemos igualar A com B, pois elas não possuem a mesma ordem, isto é, a matriz A é de ordem 3 por 2 e a matriz B, de ordem 2 por 3.

Olhemos mais duas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Não podemos igualar A com B, pois o elemento a_{21} não é igual ao b_{21}.

3.2. OPERAÇÕES COM MATRIZES

- **Adição:** dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m_x n}$ e $B = (b_{ij})_{m_x n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m_x n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e para todo j.

(Ex. 10) $$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 7+0 \\ 9+8 & 12+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 17 & 16 \end{bmatrix}$$

- **Subtração:** dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m_x n}$ e $B = (b_{ij})_{m_x n}$, a matriz diferença $A - B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m_x n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ para todo i e para todo j.

(Ex. 11) $$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 7-0 \\ 9-8 & 12-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- **Multiplicação de um número real por uma matriz:** dado a matriz $A = (a_{ij})_{m_x n}$ e k um número real, a multiplicação de k pela matriz A é definida como a matriz $B = (b_{ij})_{m_x n}$, $B = k.A$, em que $b_{ij} = k \,.\, a_{ij}$.

(Ex. 12) $$5.\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 & 5.7 \\ 5.9 & 5.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 35 \\ 45 & 60 \end{bmatrix}$$

- **Multiplicação de matrizes:** dadas duas matrizes, A e B, a multiplicação de A por B só estará definida se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

$$\boxed{A_{m\times \underbrace{n} \,.\, B_{n}\times p}}$$

Observação: A matriz produto, caso seja possível a multiplicação, terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz.

$$\boxed{A_{m\times n}\,.\,B_{n\times p}=C_{m\times p}}$$

Vejamos no exemplo a seguir como realizar a multiplicação de duas matrizes, A por B, sendo $A_{2\times 3}$ e $B_{3\times 2}$ (sabemos que o produto existe, pois satisfaz a condição de existência, visto que a matriz A possui 3 colunas, e a matriz B possui 3 linhas. A partir disso, sabemos também que a matriz produto, C, será uma matriz 2×2):

(Ex. 13) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 0 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ $\quad A.B=C_{2\times 2}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$

*Para descobrir o $\boldsymbol{c_{11}}$ tomamos ordenadamente os elementos da linha **1** de A (2, 1 e 1) e os elementos da coluna **1** de B (5, 0 e 3) e multiplicamos o primeiro elemento da primeira linha de A pelo primeiro elemento da primeira coluna de B, somamos com a multiplicação do segundo elemento da primeira linha de A pelo segundo elemento da primeira coluna de B e adicionamos a multiplicação do terceiro elemento da primeira linha de A pelo terceiro elemento da primeira coluna B.*

$$c_{11}=2.5+1.0+1.3=10+0+3=13$$

*Para descobrir o $\boldsymbol{c_{12}}$ tomamos ordenadamente os elementos da linha **1** de A (2, 1 e 1) e os elementos da coluna **2** de B (-1, 2 e 1) e multiplicamos o primeiro elemento da primeira linha de A pelo primeiro elemento da segunda coluna de B, somamos com a multiplicação do segundo elemento da primeira linha de A pelo segundo elemento da segunda coluna de B e adicionamos a multiplicação do terceiro elemento da primeira linha de A pelo terceiro elemento da segunda coluna B.*

$$c_{12}=2.(-1)+1.2+1.1=-2+2+1=1$$

*Para descobrir o $\boldsymbol{c_{21}}$ tomamos ordenadamente os elementos da linha **2** de A (-1, 0 e 1) e os elementos da coluna **1** de B (5, 0 e 3) e multiplicamos o primeiro elemento da segunda linha de A pelo primeiro elemento da primeira coluna de B, somamos com a multiplicação do segundo elemento da segunda linha de A pelo segundo elemento da primeira coluna de B e adicionamos a multiplicação do terceiro elemento da segunda linha de A pelo terceiro elemento da primeira coluna B.*

$$c_{21}=(-1).5+0.0+1.3=-5+0+3=-2$$

*Para descobrir o $\boldsymbol{c_{22}}$ tomamos ordenadamente os elementos da linha **2** de A (-1, 0 e 1) e os elementos da coluna **2** de B (-1, 2 e 1) e multiplicamos o primeiro elemento da segunda linha de A pelo primeiro elemento da segunda coluna de B, somamos com a multiplicação do segundo elemento da segunda linha de A pelo segundo elemento da segunda coluna de B e adicionamos a multiplicação do terceiro elemento da segunda linha de A pelo terceiro elemento da segunda coluna B.*

$$c_{22}=(-1).(-1)+2.0+1.1=1+0+1=2$$

Assim: $C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

PARA SABER MAIS

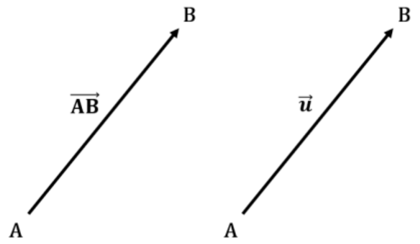
Há outras matrizes importantes para você que futuramente atuará na área das ciências exatas, que são a matriz oposta, a matriz transposta e a matriz inversa e, também, o cálculo de determinantes com matrizes de ordem 1, 2, 3 e maior do que 3. Caso não se lembre desses tópicos, recomendamos que busque o aporte teórico desse componente curricular e faça uma revisão.

4. Introdução a Vetores

Na computação, utilizamos bastante o conceito de vetores e, por isso, faremos uma breve introdução a este tópico com um viés matemático, para que você possa aplicá-lo e ter uma certa facilidade quando for resolver situações problemas que envolvam esse tema em seu curso de graduação.

Na geometria, um vetor, no plano $\mathbb{R}^2$, é um conjunto de segmentos com a mesma direção, mesmo comprimento (ou módulo) e mesmo sentido.

O vetor $\overrightarrow{AB}$, ou escreve-se com uma letra minúscula em cima da seta, por exemplo, $\vec{u}$, como mostra a Figura 6 a seguir, e é formado por um par ordenado de pontos A (origem do vetor) e B (extremidade do vetor).

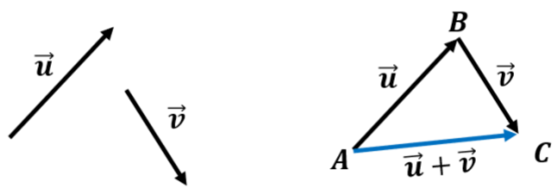


Observações:

- **I.** O sentido de um vetor é para onde aponta sua extremidade.
- **II.** A direção de um vetor é simbolizada por uma reta (na qual o vetor está localizado) e poderá ser: horizontal, vertical ou diagonal.
- **III.** Para verificarmos o comprimento (ou módulo) de um vetor, podemos utilizar a seguinte notação: $|\vec{u}|$. Por exemplo, o comprimento do vetor $\vec{w}$ é 5, logo $|\vec{w}| = 5$. Atente-se que $\vec{w}$ é um vetor e $|\vec{w}|$, que é seu comprimento, é um número real.
- **IV.** Dois vetores ou mais são iguais se seus módulos forem iguais, se suas direções forem iguais e se possuírem o mesmo sentido.
- **V.** Chamamos de vetor oposto a um vetor $\vec{v}$ o vetor $-\vec{v}$, o qual possui o mesmo módulo, a mesma direção, porém seu sentido é oposto ao de $\vec{v}$.

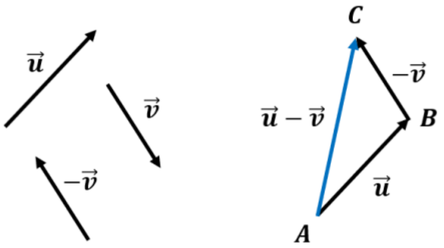
4.1. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES E MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores, como mostra a Figura 7, a soma de $\vec{u} + \vec{v}$ será o vetor $\overrightarrow{AC}$.

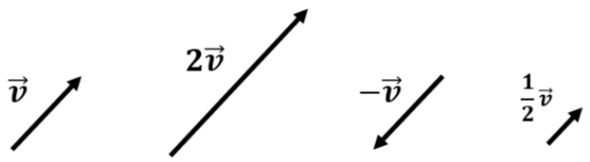


Partindo da ponta final do vetor $\vec{u}$, desenha-se o vetor $\vec{v}$ e, disso, a soma de $\vec{u}+\vec{v}$ será o vetor que começa na ponta inicial do vetor $\vec{u}$ até a ponta do final do vetor $\vec{v}$.

Subtrair significa somar o oposto, assim: sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores, a subtração de $\vec{u}+\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$ será o vetor $\overrightarrow{AC}$ como na Figura 8 a seguir.



Para nos dar uma ideia do que é multiplicar um número real por um vetor, veja a Figura 9 a seguir:



Dado um vetor, $\vec{v}$, e um número real, α, multiplicando-se α por $\vec{v}$, obtém-se o vetor $\alpha\vec{v}$ que terá a mesma direção de $\vec{v}$ e seu comprimento será o módulo do número real multiplicado pelo comprimento do vetor $\vec{v}$. O vetor $\alpha\vec{v}$ terá o mesmo sentido de $\vec{v}$ se α for maior do que zero; se for menor do que zero, o sentido será oposto. Se $\alpha = 0$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ (vetor nulo).

EXEMPLOS DESSES CONCEITOS NA ÁREA DE COMPUTAÇÃO

- O estudo que vimos sobre o conjunto dos números reais é fundamental, pois praticamente todos os conceitos desenvolvidos na área de computação são baseados em conjuntos ou em construções de conjuntos. Além disso, conhecer os elementos que compõem cada um dos conjuntos numéricos fará você ter uma maior facilidade na compreensão dos sistemas de numeração (binários, hexadecimais etc.) ao expressar valores e quantidades.

- O conceito de intervalos te auxiliará quando for utilizar estruturas lógicas e estruturas de decisão em linguagem de programação.

- Uma das referências principais para a medição da capacidade de memória de um computador são as potências de 2, entretanto os prefixos utilizados pelo SI (Sistema Internacional de Unidades) estão na potência de 10 e, por isso, o estudo das potências e suas propriedades se faz necessário para uma maior compreensão dos sistemas de numeração utilizados na computação.

- Ao desenvolver um algoritmo, seja em qualquer linguagem de programação, você deverá compreender os conceitos de potenciação e radiciação para buscar corretamente essas operações nas “bibliotecas matemáticas” do ambiente que está desenvolvendo.

- Segundo Paulo (2020, p. 29-31), na área de computação, vetores “são listas de valores (conjuntos ou arranjos) cujos elementos apresentam características em comum” e são “posicionados em sequência”. Matrizes, por sua vez, referem-se a um “tipo de arranjo de vetores com duas ou mais dimensões, cujos dados contêm características comuns. Esses dados são organizados sequencialmente e, tal como os vetores, acessados por meio da chave da matriz”.

Referências

AXLER, S. *Pré-cálculo* – uma preparação para o cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BONETTO, G. A.; MUROLO, A. C. *Fundamentos de matemática para engenharias e tecnologia*. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2021. (v. 1).

IEZZI, G. *et al. Matemática*: volume único. São Paulo: Atual, 1997.

LARSON, R. E.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. *Cálculo com aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

MELLO, D. A.; WATANABE, R. G. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

PAULO, L. G. *Matemática computacional*. Curitiba: Contentus, 2020.

ROGAWSKI, J. *Cálculo*. Porto Alegre: Bookman, 2009.