

目录

目录

1 Frenet坐标系

2 Frenet坐标系基本概念

3 位置：笛卡尔与Frenet坐标点位置的转换

3.1 位置：笛卡尔坐标 → Frenet坐标

3.1.1 求解 s^* , PM 长度最短的第一种方法称为二阶最小化方法

3.1.2 求解 s^* , 求 PM 长度最短的第二种方法称为牛顿法

3.1.3 两种方法比较

3.1.4 求解 l^*

3.2 位置：Frenet坐标 → 笛卡尔坐标

4 运动状态：笛卡尔与Frenet坐标点运动状态的转换

4.1 运动状态：笛卡尔坐标 → Frenet坐标

4.1.1 推导 \dot{l}

4.1.2 推导 l'

4.1.3 推导 \dot{s}

4.1.4 推导 l''

4.1.5 推导 \dot{s}

4.1.6 推导 \dot{l}

4.1.7 综合结果:

4.2 运动状态：Frenet坐标 → 笛卡尔坐标

4.2.1 推导 θ_e

4.2.2 推导 v_e

4.2.3 推导 κ_e

4.2.4 推导 a_e

4.2.5 综合结果:

5 Frenet坐标系的局限性

6 总结

6.1 笛卡尔坐标 → Frenet坐标

6.2 Frenet坐标 → 笛卡尔坐标

7 参考文献

1 Frenet坐标系

大多数道路行车间场景中的道路走势是笔直的，但弯曲道路仍不少见。道路的弯曲形态多种多样，难以找到统一的曲线类型描述弯曲道路。车辆不应与道路边缘线相撞，这一类碰撞躲避约束的有效建模依赖对于道路布局的精细描述。如何统一简洁地描述道路边缘走势对于轨迹规划问题的求解效率有着重要影响。与非结构化泊车场景相比，结构化道路场景中存在指引线，车辆行驶轨迹不会大幅度偏离指引线，因此可以考虑以指引线的存在为契机简化规划任务的建模复杂度——构建Frenet坐标系可实现此理念。

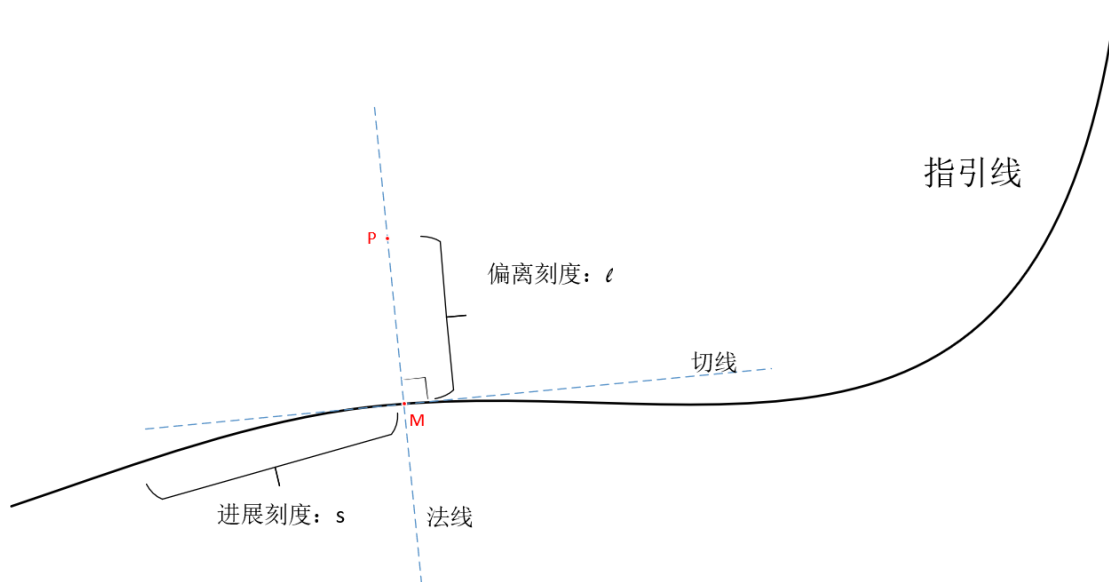
2 Frenet坐标系基本概念

在正式介绍 Frenet 坐标系之前，我们认为有必要先做一些基础铺垫。但凡构建一套坐标系即构建一套可用于有效表征空间中各点位置的数据格式。以最基本的笛卡尔坐标系为例，它将平面上每一点的位置向平面内两根相互正交的数轴投影，分别将投影到两条数轴的刻度记录下来，将其整合起来即构成每一点在笛卡尔坐标系中的位置描述，即坐标值。一套理想的坐标系应保证平面内每一点对应且仅对应唯一的坐标值，即坐标值与平面内实际的点位具有——对应关系，这意味着我们可以放心地使用坐标值代指平面上的点而不会引发理解分歧。

那么，是否还有除笛卡尔坐标系之外的点位描述方式呢？答案是肯定的。假设某人将进村访问某户人家，在没有地图或导航工具辅助的前提下，不得不向他人问路，得到的答复是“沿村口大路向前走，直至遇到三棵大柳树时，右边边距路边十余步的那户人家便是”。在不使用笛卡尔坐标系的条件下，以上描述仍足以精确无误地将某人指引至既定目标点位，那条村中大路和三棵柳树在这里起到了至关重要的作用。Frenet 坐标系与这种指路模式非常相似，以下将进行详细介绍。

Frenet 坐标系依赖条指引线构建起来，它可以描述平面上 **一定范围内的点位（稍后介绍其有效表征范围）**，将每一点用沿指引线延伸方向前行的“进展刻度”与游离于指引线的“偏移刻度”表征，分别将两个刻度记录、整合即构成每一点在 Frenet 坐标系中的坐标值。如图下图F1所示，二维平面上每一点 P 在指引线上的投影点 M 能够反映 P 点沿着指引线的进展到度，而 MP 线段长度反映了 P 点游离于指引线的偏移刻度。在上述问路例子中，村中大路代表看指引线， P 点代表目的地， M 点代表路旁三棵柳树。Frenet 坐标系早在数十年前已应用于车辆轨迹跟踪控制领域开环轨迹被视为指引线，车辆当前位置 P 的进展刻度与偏移刻度分别用于衡量车辆的纵向、横偏差，据此计算横纵方向上的反馈跟踪控制量。Weiling 等于2010年首次将 Frenet 坐标系引入结构化道路上的轨迹规划问题中。

图F1：使用Frenet坐标系表示点的方式

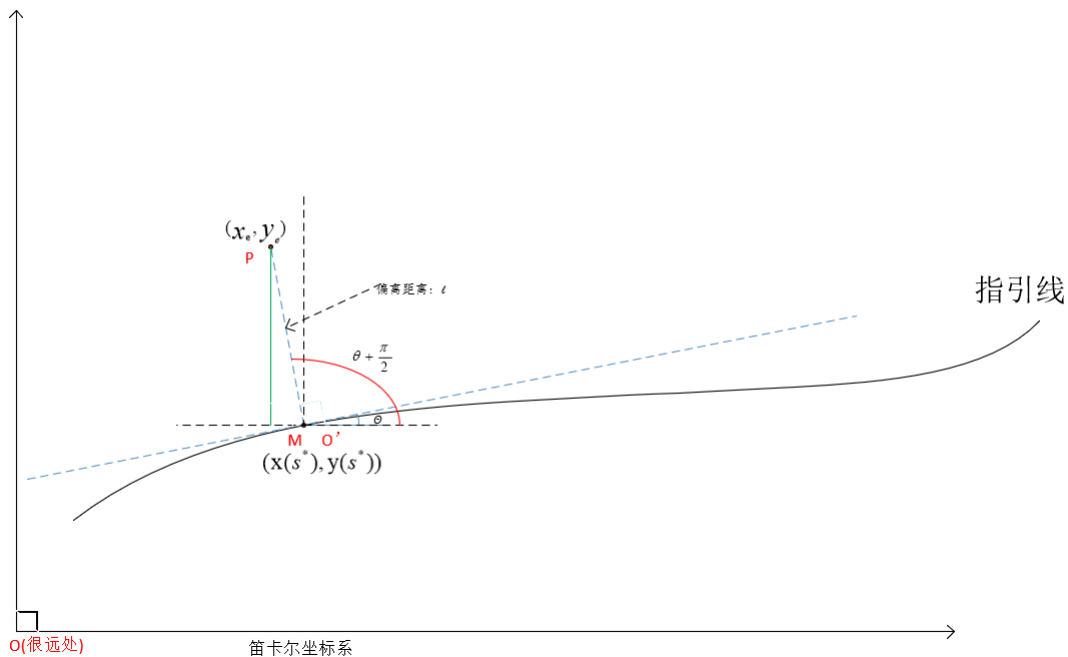


在接下来的两小节中介绍笛卡尔坐标系与 Frenet 坐标系之间的转换法，其中第3章节介绍点的转换方法，第4章节介绍运动状态的转换方法。最后，在第5章节将指出 Frenet 坐标系的局限性。

3 位置：笛卡尔与Frenet坐标点位置的转换

二维平面上的一个点在笛卡尔坐标系中表示为 (x, y) ，也可基于指引线在 Frenet 坐标系中表示为 (s, l) 。本节将介绍如何在给定 (x, y) 的条件下确定 (s, l) ，以及如何在给定 (s, l) 的条件下确定 (x, y) 。

图F2：笛卡尔/Frenet坐标系位置转换模型



3.1 位置：笛卡尔坐标 —> Frenet坐标

首先介绍如何将笛卡尔坐标转化为 Frenet 坐标。已知笛卡尔坐标系下的一段长度为 L 的参数化指引线，将其记为

$$\Gamma[x(s), y(s)], s \in [0, L], \quad (1)$$

其中， s 为沿着指引线的里程。已知点 P 在笛卡尔坐标系中的坐标为 (x_e, y_e) ，为了确定 P 在 Frenet 坐标系中的坐标值，需要在曲线段 Γ 上寻找与 P 匹配的投影点 $M = (x(s^*), y(s^*))$ ，并使线段 PM 长度最短，即

$$\arg \min_{s=s^*} [D(s)] \quad (2)$$

其中， $D(s)$ 为线段 PM 长度：

$$D(s) = [x(s) - x_e]^2 + [y(s) - y_e]^2 \quad (3)$$

符合条件的 P 点能够使曲线在该点处的切线方向与 PM 方向垂直。如 PM 长度为 $|L^*|$ ， M 点位于指引线里程 $s = s^*$ 处，则 P 在 Frenet 坐标系中的坐标值可确定为 (s^*, l^*) 。不难发现，确定 M 点坐标的关键在于计算 s^* ，这里提供了两种具体计算方案。

3.1.1 求解 s^* , PM 长度最短的第一种方法称为二阶最小化方法

第一种方法称为二阶最小化方法，其核心思路是通过多点采样对 $D(s)$ 进行二阶拟合，将拟合而成的二次函数 $\tilde{D}(s)$ 为 $D(s)$ 的估计，随后寻找使 $\tilde{D}(s)$ 取最小值的闭合解。具体而言：

- a 第一步：在曲线上对 s^* 形成三个不同的初步估算值，分别将其记为 s_1 、 s_2 以及 s_3 。
- b 第二步：应针对 $D(s)$ 实施二阶拟合，由于此时可以求出 $D(s)$ 在 s_1 、 s_2 、 s_3 处的函数值，可据此确定 $D(s)$ 的二阶拟合函数为：

$$\tilde{D}(s) = \frac{(s-s_2)(s-s_3)}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)} \cdot D(s_1) + \frac{(s-s_1)(s-s_3)}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)} \cdot D(s_2) + \frac{(s-s_1)(s-s_2)}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)} \cdot D(s_3) \quad (4)$$

由于 $\tilde{D}(s)$ 是二次函数，可通过初等数学知识对其求极值 \hat{s} ：

$$\hat{s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{sq_{23} \cdot D(s_1) + sq_{13} \cdot D(s_2) + sq_{12} \cdot D(s_3)}{err_{23} \cdot D(s_1) + err_{13} \cdot D(s_2) + err_{12} \cdot D(s_3)}, err_{ij} = s_i - s_j, sq_{ij} = s_i^2 - s_j^2 \quad (5)$$

- c 第三步：需将 s_1 、 s_2 、 s_3 以及 \hat{s} 这4个里程数值分别代入 $\tilde{D}(s)$ ，选取对应函数值较大的3个里程值，将其重新记为 s_1 、 s_2 、 s_3 并重复第二步，反复执行迭代直至 \hat{s} 收敛，此时收敛的 \hat{s} 即为 s^* 。 l^* 为区分正负号的变量，其绝对值为 $D(s^*)$ ，如 P 位于指引线延伸方向左侧则取负号，反之取正。至此可确定 P 在 Frenet 坐标系中的坐标值 (s^*, l^*) 。

在工程实践中，通过历史数据提前缩小 s^* 的可能取值范围，这种做法在曲线里程 L 较大时意义显著。假设限定 $s \in [s_k, s_{k+1}]$ ，则可将 s^* 的3个初始估计值设置为 s_k 、 s_{k+1} 以及 $(s_k + s_{k+1})/2$ 。若最终 s^* 收敛至区间 $[s_k, s_{k+1}]$ 之外，则判定选取的区间 $[s_k, s_{k+1}]$ 无效，应在相邻区间中继续进行 s^* 的迭代求解。

3.1.2 求解 s^* , 求 PM 长度最短的第二种方法称为牛顿法

第二种方法称为牛顿法，其核心思想是以牛顿方法迭代求取使 $D'(s) = 0$ 成立的极值 $s = s^*$ 。具体地，在提供 s^* 的某一初始值 s_{init} 后，进行以下迭代：

$$\hat{s} = s_{init} - \frac{D'(s_{init})}{D''(s_{init})} \quad (6)$$

随后使用 \hat{s} 对 s_{init} 赋值并继续重复计算上式，直至： \hat{s} 取值收敛时将收敛值记为 s^* 。

3.1.3 两种方法比较

- 第一种方法收敛速度快（超线性收敛），但采用二阶拟合会造成求解精度损失；
- 第二种方法因利用 $D(s)$ 二阶导数信息而具有较高求解精度，但收敛速度仅满足二次收敛。
- 在工程实践中可首先利用第一种方法获取粗略解，随后在其微小邻域内采用第二种方法进行精细计算。

3.1.4 求解 l^*

根据求解出的 s^* ，代入指引线参数方程，得到点 $P = (x_e, y_e)$ 的投影点（参考点）坐标 $M = (x(s^*), y(s^*))$ ，则 l^* 的绝对值为：

$$|l^*| = \sqrt{[x_e - x(s^*)]^2 + [y_e - y(s^*)]^2} \quad (7)$$

现在求 l^* 的正负方向， P 位于指引线延伸方向左侧则取正号，反之取负（**一般情况左正右负，看具体定义**）。。：

在笛卡尔坐标系下，如图F3，根据向量关系，已知向量 $\vec{e} = \vec{OP} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}$ 、 $\vec{r} = \vec{OM} = \begin{bmatrix} x(s^*) \\ y(s^*) \end{bmatrix}$ ，很容易得出：

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \vec{r} + |l^*| \cdot \vec{N}_r \\ \vec{e} - \vec{r} &= |l^*| \cdot \vec{N}_r \\ \begin{bmatrix} x_e - x(s^*) \\ y_e - y(s^*) \end{bmatrix} &= |l^*| \cdot \vec{N}_r \\ \vec{N}_r &= \frac{1}{|l^*|} \cdot \begin{bmatrix} x_e - x(s^*) \\ y_e - y(s^*) \end{bmatrix}, \text{M点处单位法向量} \\ \vec{T}_r &= \frac{1}{|l^*|} \cdot \begin{bmatrix} y_e - y(s^*) \\ -(x_e - x(s^*)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r \\ \sin\theta_r \end{bmatrix}, \text{M点处单位切向量} \\ \vec{N}_r \times \vec{T}_r &= (y_e - y(s^*))\cos\theta_r - (x_e - x(s^*))\sin\theta_r, \text{叉积在} x \text{方向的分量} \end{aligned} \quad (8)$$

l^* 的正负号与z分量的符号相同，即：

$$\begin{aligned} l^* &= \text{sign}[(y_e - y(s^*))\cos\theta_r - (x_e - x(s^*))\sin\theta_r] \cdot \sqrt{[x_e - x(s^*)]^2 + [y_e - y(s^*)]^2} \\ l^* &= \text{std} :: \text{copysign}(\sqrt{[x_e - x(s^*)]^2 + [y_e - y(s^*)]^2}, [(y_e - y(s^*))\cos\theta_r - (x_e - x(s^*))\sin\theta_r]) \end{aligned} \quad (9)$$

3.2 位置：Frenet坐标 —> 笛卡尔坐标

将Frenet 坐标向笛卡尔坐标的转换则相对简单。

已知一段参数化指引线 $\Gamma[x(s), y(s)]$ ，以及点 P 在 Frenet 坐标系中的坐标 (s^*, l^*) ，为确定 P 点在笛卡尔坐标系中的坐标值，首先需确定该点在指引线上的投影点 $M = (s^*, 0)$ (Frenet坐标下) / $M = (x(s^*), y(s^*))$ (笛卡尔坐标下) 处的指引线切线方向 θ_r ：

$$\theta_r = \arctan\left[\frac{y'(s^*)}{x'(s^*)}\right] \quad (10)$$

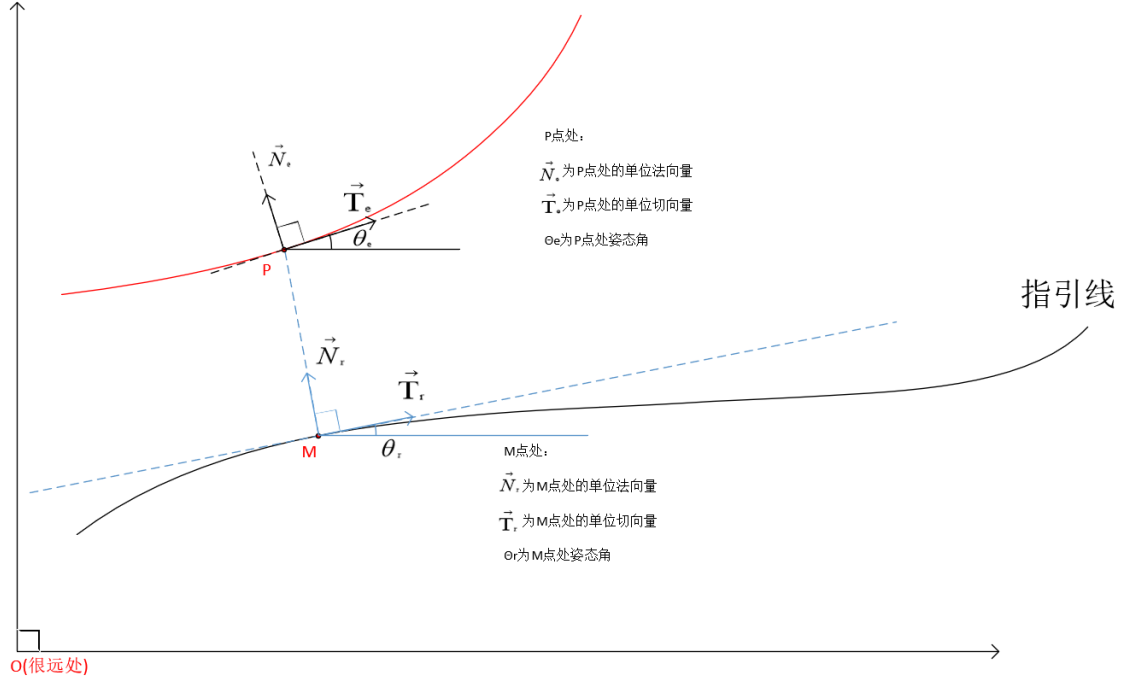
随后即可利用几何关系推导出 P 点在笛卡尔坐标系中的坐标值 (x_e, y_e) :

$$(x_e, y_e) \equiv [x(s^*) + l^* \cdot \cos(\theta_r + \frac{\pi}{2}), y(s^*) + l^* \cdot \sin(\theta_r + \frac{\pi}{2})] \quad (11)$$

4 运动状态：笛卡尔与Frenet坐标点运动状态的转换

前文将平面上一个点在笛卡尔/Frenet 坐标系之间转换。然而，给构化道路上的目标往往存在着运动趋势。例如，社会车辆在笛卡尔坐标系中的未来预测轨迹需要转换至Frenet坐标系中，或是Frenet坐标系中求解的轨迹转换至笛卡尔坐标系中。在对轨迹转换坐标系时倘若仅将轨迹上的一系列采样点按照前文的点位置介绍的方法进行转换，则轨迹原有的速度、加速度等运动状态信息很可能在转换过程中丢失。本小节将探讨如何转换运动状态。

图F3：面向轨迹的笛卡尔/Frenet坐标系运动状态转换模型



针对图所示的一般情况，我们将介绍轨迹上的某一点 P 的运动状态如何在两个坐标系中相互转换。假设图中存在某一原点 O （图中未画出），则向量 \vec{OP} 体现了点 P 在笛卡尔坐标系下的位置。

P 点在笛卡尔坐标系下的运动状态：(e: Ego)

- 速度 v_e
- 加速度 a_e
- 姿态角 θ_e
- 曲率 k_e

P 点在 Frenet 坐标系下的运动状态：

- 坐标 (s, l)
- $s(t)$ 的一阶导 \dot{s} , $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$
- $s(t)$ 的二阶导 \ddot{s} , $\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt}$
- $l(t)$ 的一阶导 \dot{l} , $\dot{l} = \frac{dl}{dt}$
- $l(t)$ 的二阶导 \ddot{l} , $\ddot{l} = \frac{d\dot{l}}{dt}$
- $l(s)$ 的一阶导 l' , $l' = \frac{dl}{ds}$
- $l(s)$ 的二阶导 l'' , $l'' = \frac{dl'}{ds}$

4.1 运动状态：笛卡尔坐标 —> Frenet坐标

Q:已知笛卡尔坐标系下 \vec{OP} 、 v_e 、 a_e 、 θ_e 、 κ_e 的条件下推导Frenet坐标系下的 \dot{s} 、 \ddot{s} 、 \dot{l} 、 \ddot{l} 、 l' 、 l'' 。

在已知 \vec{OP} 条件下，设 P 为 (x_e, y_e) ，可利用3.1小节介绍的方法确定 (s, l) ，以及投影点 $(s, 0)$ 处指引线切线与水平线成角 θ_r ，以及该点在指引线上的曲率 $\kappa_r(s) = \frac{|y(s)''x(s)' - x(s)''y(s)'}{\{[x(s)']^2 + [y(s)']^2\}^{3/2}}$ 。

$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \text{OP向量}$$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \text{OP向量的模}$$

$$\widehat{\vec{OP}} = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \end{bmatrix}, \text{OP向量的单位向量(法向量同向)}$$

(12)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \begin{bmatrix} \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \text{OP向量的单位切向量(与法向量垂直)} \\ \left| \overrightarrow{OP} \right| &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

参数方程的曲线的曲率推导:

[参考:曲率、曲率\(对弧长\)的导数以及曲率导数\(对弧长\)的导数的计算](#)

[参数方程确定的曲线的曲率表达式如何推导?](#)

$\Gamma[x(t), y(t)], t \in [0, L]$, 曲线的参数方程

$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$, 曲率定义: 角度对弧度的导数

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \tan\theta$, 这里的 dt 是对应的参数方程中的参数 t

$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (x'_t \cdot dt)^2 + (y'_t \cdot dt)^2 = [(x'_t)^2 + (y'_t)^2] \cdot (dt)^2$

$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$, 弧微分

$\cos\theta = \frac{x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}$

$\sin\theta = \frac{y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}$

$\sec^2\theta = \frac{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}{(x'_t)^2}$

$\frac{y'_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^2_t} = \frac{d \tan\theta}{dt}$

$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta ds} = \frac{d \tan\theta}{\sec^2\theta ds} = \frac{(d \tan\theta/dt)}{\sec^2\theta (ds/dt)}$

$= \frac{1}{\sec^2} \cdot \frac{\frac{y'_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^2_t}}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}$

$= \frac{(x'_t)^2}{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot \frac{\frac{y'_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^2_t}}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}$

$= \frac{y'_t x'_t - x''_t y'_t}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2}}$

$\kappa' = \frac{d\kappa}{ds} = \frac{d\kappa}{dt} \frac{dt}{ds}$

$= \frac{d(\frac{y'_t x'_t - x''_t y'_t}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2}})}{dt} \frac{dt}{ds}$

$= \frac{(y'_t x'_t - x''_t y'_t)' [(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2} - (y'_t x'_t - x''_t y'_t) [(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2}'}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^3} \cdot \frac{1}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{1/2}}$

$= \frac{(y''_t x'_t + y'_t x''_t - x'''_t y'_t - x''_t y''_t) [(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2} - (y'_t x'_t - x''_t y'_t) (\frac{3}{2} [(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{1/2}) (2x'_t x''_t + 2y'_t y''_t)}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^3} \cdot \frac{1}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{1/2}}$

$= \frac{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{1/2} \{ (y''_t x'_t - x'''_t y'_t) [(x'_t)^2 + (y'_t)^2] - \frac{3}{2} (y'_t x'_t - x''_t y'_t) (2x'_t x''_t + 2y'_t y''_t) \}}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^3} \cdot \frac{1}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{1/2}}$

$= \frac{(y'''_t x'_t - x''_t y''_t) [(x'_t)^2 + (y'_t)^2] - 3(y'_t x'_t - x''_t y'_t) (x'_t x''_t + y'_t y''_t)}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^3}$

根据图F3所示的几何关系可得:

$$l = \overrightarrow{MP}^T \cdot \overrightarrow{N_r} = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM})^T \cdot \overrightarrow{N_r} \quad (14)$$

其中 $\overrightarrow{N_r}$ 为经过投影点 M 的单位法向量。为叙述简便, 现约定了 $\vec{e} = \overrightarrow{OP}$ 、 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, 则上式改写为:

$$l = (\vec{e} - \vec{r})^T \cdot \overrightarrow{N_r} \quad (15)$$

4.1.1 推导 \dot{l}

首先考虑如何确定 \dot{l} 。将 l 对时间求导可得: (向量位移求导为速度)

$$\begin{aligned}\dot{l} &= (\dot{\vec{e}} - \dot{\vec{r}})^T \cdot \overrightarrow{N_r} + (\vec{e} - \vec{r})^T \cdot \dot{\overrightarrow{N_r}} \\ &= v_e T_e^T \overrightarrow{N_r} - \dot{s} T_r^T \overrightarrow{N_r} + l \overrightarrow{N_r}^T \cdot \dot{\overrightarrow{N_r}}\end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\overrightarrow{T_e}$ 为 P 点处的单位切向量; $\overrightarrow{T_r}$ 为 M 点处的单位切向量。由向量微分学科中的Frenet-Serret公式可知:

$$\dot{\overrightarrow{N_r}} = -\kappa \overrightarrow{T_r}$$

$$\frac{d N_r}{ds} = -\kappa_r \vec{T}_r \quad (17)$$

这意味着：

$$\dot{\vec{N}}_r = \frac{d \vec{N}_r}{ds} \frac{ds}{dt} = -\kappa_r \vec{T}_r \dot{s} \quad (18)$$

将公式 (18) 代入公式 (16)，并考虑 $\vec{T}_r^T \vec{N}_r = \vec{N}_r^T \vec{T}_r = 0$ ，则有：

$$\dot{l} = v_e \vec{T}_e^T \vec{N}_r \quad (19)$$

其中， $\vec{T}_e^T \vec{N}_r$ 为两个单位向量 \vec{T}_e, \vec{N}_r 的夹角余弦值，即 $\cos(\pi/2 - \theta_e + \theta_r)$ ，将其代入公式 (19) 且令 $\Delta\theta = \theta_e - \theta_r$ 则有：

$$\dot{l} = v_e \sin(\theta_e - \theta_r) = v_e \sin(\Delta\theta) \quad (20)$$

4.1.2 推导 l'

$$l' = \frac{dl}{ds} = \frac{dl}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v_e \sin(\Delta\theta)}{\dot{s}} \quad (21)$$

其中分母 \dot{s} 暂时未确定。为了使推导能够进行下去、先聚焦于 (21) 中的 v_e 部分：

$$v_e = \sqrt{\vec{e}^T \dot{\vec{e}}} \quad (22)$$

其中 $\dot{\vec{e}}$ 部分有以下关系式：

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}} &= \frac{d \vec{e}}{dt} = \frac{d(\vec{r} + l \vec{N}_r)}{dt} = \dot{\vec{r}} + (\dot{l} \vec{N}_r + l \dot{\vec{N}}_r) \\ &= \dot{s} \vec{T}_r + \dot{l} \vec{N}_r - \kappa_r \vec{T}_r \dot{s} l \\ &= \dot{s} \vec{T}_r (1 - \kappa_r l) + \dot{l} \vec{N}_r \end{aligned} \quad (23)$$

将式 (23) 代入式 (22) 中则有：

$$\begin{aligned} v_e &= \sqrt{\vec{e}^T \dot{\vec{e}}} \\ &= \sqrt{[\dot{s} \vec{T}_r (1 - \kappa_r l) + \dot{l} \vec{N}_r]^T [\dot{s} \vec{T}_r (1 - \kappa_r l) + \dot{l} \vec{N}_r]} \\ &= \sqrt{[\dot{s}(1 - \kappa_r l)]^2 \vec{T}_r^T \vec{T}_r + \dot{l} \vec{N}_r^T \dot{s}(1 - \kappa_r l) \vec{T}_r + \dot{l} \vec{N}_r \dot{s}(1 - \kappa_r l) \vec{T}_r^T + \dot{l}^2 \vec{N}_r^T \vec{N}_r} \\ &= \sqrt{[\dot{s}(1 - \kappa_r l)]^2 + \dot{l}^2} \end{aligned} \quad (24)$$

将式 (24) 代入式 (21) 中则有：

$$\begin{aligned} l' &= \frac{dl}{ds} \\ &= \frac{\sin(\Delta\theta) \sqrt{[\dot{s}(1 - \kappa_r l)]^2 + \dot{l}^2}}{\dot{s}} \\ &= \sin(\Delta\theta) \sqrt{(1 - \kappa_r l)^2 + \left(\frac{\dot{l}}{\dot{s}}\right)^2} \end{aligned} \quad (25)$$

为了去除根号，不得不对上式两侧取平方，则有：

$$(l')^2 = \sin^2(\Delta\theta) [(1 - \kappa_r l)^2 + \left(\frac{\dot{l}}{\dot{s}}\right)^2] \quad (26)$$

将公式 (21) $\frac{\dot{l}}{\dot{s}} = l'$ 代入公式 (26) 并进行移项与三角函数运算，可得：

$$\begin{aligned} (l')^2 &= \sin^2(\Delta\theta) [(1 - \kappa_r l)^2 + \left(\frac{\dot{l}}{\dot{s}}\right)^2] = \sin^2(\Delta\theta) [(1 - \kappa_r l)^2 + (l')^2] \\ [1 - \sin^2(\Delta\theta)] (l')^2 &= \sin^2(\Delta\theta) (1 - \kappa_r l)^2 \\ \cos^2(\Delta\theta) (l')^2 &= \sin^2(\Delta\theta) (1 - \kappa_r l)^2 \\ (l')^2 &= [(1 - \kappa_r l) \cdot \tan(\Delta\theta)]^2 \end{aligned} \quad (27)$$

之所以 l' 出现多解情况，是因为在对公式 (25) 取平方时引入了增根。最终选取：

$$l' = (1 - \kappa_r l) \cdot \tan(\Delta\theta) \quad (28)$$

另一解 $l' = -(1 - \kappa_r l) \cdot \tan(\Delta\theta)$ 不符合要求。

4.1.3 推导 \dot{s}

由公式 (21) 与公式 (28) 可知:

$$l' = (1 - \kappa_r l) \cdot \tan(\Delta\theta) = \frac{v_e \sin(\Delta\theta)}{\dot{s}} \quad (29)$$

因此有:

$$\dot{s} = \frac{v_e \cos(\Delta\theta)}{(1 - \kappa_r l)} \quad (30)$$

4.1.4 推导 l''

根据公式 (28) 可得:

$$\begin{aligned} l'' &= \frac{d l'}{ds} \\ &= (1 - \kappa_r l)' \cdot \tan(\Delta\theta) + (1 - \kappa_r l) \cdot [\tan(\Delta\theta)]' \\ &= -(\kappa_r l)' \cdot \tan(\Delta\theta) + (1 - \kappa_r l) \cdot \frac{(\Delta\theta)'}{\cos^2(\Delta\theta)} \end{aligned} \quad (31)$$

为了使得推导能够顺利进行下去, 我们聚焦于公式 (31) 中的 $\Delta\theta' = (\theta_e - \theta_r)'$ 部分。

$$(\theta_e - \theta_r)' = \frac{d\theta_e}{ds} - \frac{d\theta_r}{ds} \quad (32)$$

由指引线在投影点 M 处的曲率定义可知:

$$\kappa_r = \frac{d\theta_r}{ds} \quad (33)$$

因此

$$(\theta_e - \theta_r)' = \frac{d\theta_e}{ds} - \kappa_r \quad (34)$$

从直觉上来讲, ds 代表指引线上一段里程微元, θ_e 代表轨迹上 P 点的切线姿态角, 两个变量相互无关, 因此似应直接取 $d\theta_e/ds = 0$ 。这种想法是不正确的, ds 代表投影点 M 在指引线上的微小变化, 这一变化直接导致 P 点位置变化, θ_e 也会相应变化, 这意味着 ds 与 θ_e 是间接有关联的。那么如何计算 $d\theta_e/ds$ 呢? 我们定义临时变量 ds_e 来表示轨迹上的一段微元, 根据轨迹在 P 点曲率的定义式 $\kappa_e = d\theta_e/ds_e$, 以及公式 (30) 则有:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_e}{ds} &= \frac{d\theta_e}{ds_e} \cdot \frac{ds_e}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{d\theta_e}{ds_e} \cdot v_e \cdot \frac{1}{\dot{s}} \\ &= \frac{d\theta_e}{ds_e} \cdot \frac{(1 - \kappa_r l)}{\cos(\theta_e - \theta_r)} \\ &= \kappa_e \cdot \frac{(1 - \kappa_r l)}{\cos(\theta_e - \theta_r)} \end{aligned} \quad (35)$$

因此有:

$$(\Delta\theta)' = \kappa_e \cdot \frac{(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r \quad (36)$$

将公式 (36) 代入公式 (31) 则得到:

$$\begin{aligned} l'' &= \frac{d l'}{ds} \\ &= (1 - \kappa_r l)' \cdot \tan(\Delta\theta) + (1 - \kappa_r l) \cdot [\tan(\Delta\theta)]' \\ &= -(\kappa_r l)' \cdot \tan(\Delta\theta) + (1 - \kappa_r l) \cdot \frac{(\Delta\theta)'}{\cos^2(\Delta\theta)} \\ &= -(\kappa_r l)' \cdot \tan(\Delta\theta) + \frac{(1 - \kappa_r l)}{\cos^2(\Delta\theta)} \cdot \left[\frac{\kappa_e (1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r \right] \\ &= -(\kappa_r' l + \kappa_r l') \cdot \tan(\Delta\theta) + \frac{(1 - \kappa_r l)}{\cos^2(\Delta\theta)} \cdot \left[\frac{\kappa_e (1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r \right] \end{aligned} \quad (37)$$

4.1.5 推导 \ddot{s}

根据公式 (30) 可得:

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{d\dot{s}}{dt} \\ &= \frac{d[v_e \cos(\Delta\theta)/(1 - \kappa_r l)]}{dt} \\ &= \frac{dv_e}{dt} \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{(1 - \kappa_r l)} + v_e \cdot \frac{d[\cos(\Delta\theta)/(1 - \kappa_r l)]}{dt} \end{aligned} \quad (38)$$

我们聚焦于公式 (38) 第二项中的微分部分, 同时使用公式 (36):

$$\begin{aligned}
& \frac{d[\cos(\Delta\theta)/(1-\kappa_r l)]}{dt} \\
&= \frac{\frac{d\cos(\Delta\theta)}{dt} \cdot (1-\kappa_r l) - \frac{d(1-\kappa_r l)}{dt} \cdot \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)^2} \\
&= \frac{-\sin(\Delta\theta) \cdot (1-\kappa_r l) \cdot \frac{d\Delta\theta}{ds} \frac{ds}{dt} + \frac{d(\kappa_r l)}{ds} \frac{ds}{dt} \cdot \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)^2} \\
&= \frac{-\sin(\Delta\theta) \cdot (1-\kappa_r l) \cdot [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] \dot{s} + (\kappa_r' l + \kappa_r l') \dot{s} \cdot \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)^2} \\
&= \dot{s} \cdot \frac{-\sin(\Delta\theta) \cdot (1-\kappa_r l) \cdot [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] + (\kappa_r' l + \kappa_r l') \cdot \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)^2}
\end{aligned} \tag{39}$$

将公式 (28) 代入公式 (39), 则有:

$$\begin{aligned}
& \frac{d[\cos(\Delta\theta)/(1-\kappa_r l)]}{dt} \\
&= \dot{s} \cdot \frac{-\sin(\Delta\theta) \cdot (1-\kappa_r l) \cdot [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] + (\kappa_r' l + \kappa_r l') \cdot \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)^2} \\
&= \dot{s} \cdot \frac{-\cos(\Delta\theta) \cdot \tan(\Delta\theta) \cdot (1-\kappa_r l) \cdot [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] + (\kappa_r' l + \kappa_r l') \cdot \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)^2} \\
&= \dot{s} \cdot \cos(\Delta\theta) \cdot \frac{-l' [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] + (\kappa_r' l + \kappa_r l')}{(1-\kappa_r l)^2}
\end{aligned} \tag{40}$$

将公式 (40) 代入公式 (38) 中, 并利用公式 (30) 对其进行简化, 则有:

$$\begin{aligned}
\ddot{s} &= \frac{d\dot{s}}{dt} \\
&= \frac{d[v_e \cos(\Delta\theta)/(1-\kappa_r l)]}{dt} \\
&= \frac{dv_e}{dt} \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)} + v_e \cdot \frac{d[\cos(\Delta\theta)/(1-\kappa_r l)]}{dt} \\
&= a_e \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)} + v_e \cdot \left\{ \dot{s} \cdot \cos(\Delta\theta) \cdot \frac{-l' [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] + (\kappa_r' l + \kappa_r l')}{(1-\kappa_r l)^2} \right\} \\
&= a_e \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)} + \dot{s} \cdot \frac{v_e \cdot \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)} \cdot \frac{-l' [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] + (\kappa_r' l + \kappa_r l')}{(1-\kappa_r l)} \\
&= a_e \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)} - \dot{s}^2 \cdot \frac{l' [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] - (\kappa_r' l + \kappa_r l')}{(1-\kappa_r l)} \\
&= \frac{1}{(1-\kappa_r l)} \cdot \{ a_e \cdot \cos(\Delta\theta) - \dot{s}^2 \cdot [(\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r) l' - (\kappa_r' l + \kappa_r l')] \}
\end{aligned} \tag{41}$$

4.1.6 推导 \ddot{l}

使用公式 (36) 和公式 (30), 求出:

$$\begin{aligned}
\ddot{l} &= \frac{d\dot{l}}{dt} = \frac{d[v_e \sin(\Delta\theta)]}{dt} \\
&= a_e \cdot \sin(\Delta\theta) + v_e \cos(\Delta\theta) \frac{d\Delta\theta}{ds} \frac{ds}{dt} \\
&= a_e \cdot \sin(\Delta\theta) + v_e \cos(\Delta\theta) \left(\frac{\kappa_e \cdot (1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r \right) \dot{s} \\
&= a_e \cdot \sin(\Delta\theta) + v_e \cos(\Delta\theta) \left(\frac{\kappa_e \cdot (1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} \frac{v_e \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)} - \kappa_r \dot{s} \right) \\
&= a_e \cdot \sin(\Delta\theta) + v_e \cos(\Delta\theta) (v_e \kappa_e - \kappa_r \dot{s})
\end{aligned} \tag{42}$$

4.1.7 综合结果:

$$\begin{cases}
\Delta\theta = \theta_e - \theta_r \\
\dot{l} = v_e \sin(\Delta\theta) \\
l' = (1-\kappa_r l) \cdot \tan(\Delta\theta) \\
\dot{s} = \frac{v_e \cos(\Delta\theta)}{(1-\kappa_r l)} \\
l'' = -(\kappa_r' l + \kappa_r l') \cdot \tan(\Delta\theta) + \frac{(1-\kappa_r l)}{\cos^2(\Delta\theta)} \cdot [\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] \\
\ddot{s} = \frac{1}{(1-\kappa_r l)} \cdot \{ a_e \cdot \cos(\Delta\theta) - \dot{s}^2 \cdot [(\frac{\kappa_e(1-\kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r) l' - (\kappa_r' l + \kappa_r l')] \} \\
\ddot{l} = a_e \cdot \sin(\Delta\theta) + v_e \cos(\Delta\theta) (v_e \kappa_e - \kappa_r \dot{s})
\end{cases} \tag{43}$$

4.2 运动状态: Frenet坐标 → 笛卡尔坐标

Q:已知Frenet坐标系下的 s^* 、 l^* 、 θ_r 、 \dot{s} 、 \ddot{s} 、 \dot{l} 、 \ddot{l} 、 l' 、 l'' ； 推导 笛卡尔坐标系下 (x_e, y_e) 、 θ_e 、 v_e 、 a_e 、 κ_e 。

4.2.1 推导 θ_e

根据公式 (28) 可推导出 θ_e ：

$$\theta_e = \arctan\left(\frac{l'}{1 - \kappa_r l}\right) + \theta_r \quad (44)$$

4.2.2 推导 v_e

根据公式 (30) 可推导出 v_e ：

$$v_e = \frac{\dot{s}(1 - \kappa_r l)}{\cos(\theta_e - \theta_r)} = \frac{\dot{s}(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} \quad (45)$$

4.2.3 推导 κ_e

根据公式 (37) 可反推导出 κ_e ：

$$\kappa_e = \left\{ \frac{[l'' + (\kappa_r' l + \kappa_r l')] \tan(\Delta\theta)] \cdot \cos^2(\Delta\theta)}{1 - \kappa_r l} + \kappa_r \right\} \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{1 - \kappa_r l} \quad (46)$$

4.2.4 推导 a_e

根据公式 (38) 可反推导出 a_e ：

$$a_e = \frac{\ddot{s}(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} + \frac{\dot{s}^2}{\cos(\Delta\theta)} \left\{ l' \left[\frac{\kappa_e(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r \right] - (\kappa_r' l + \kappa_r l') \right\} \quad (47)$$

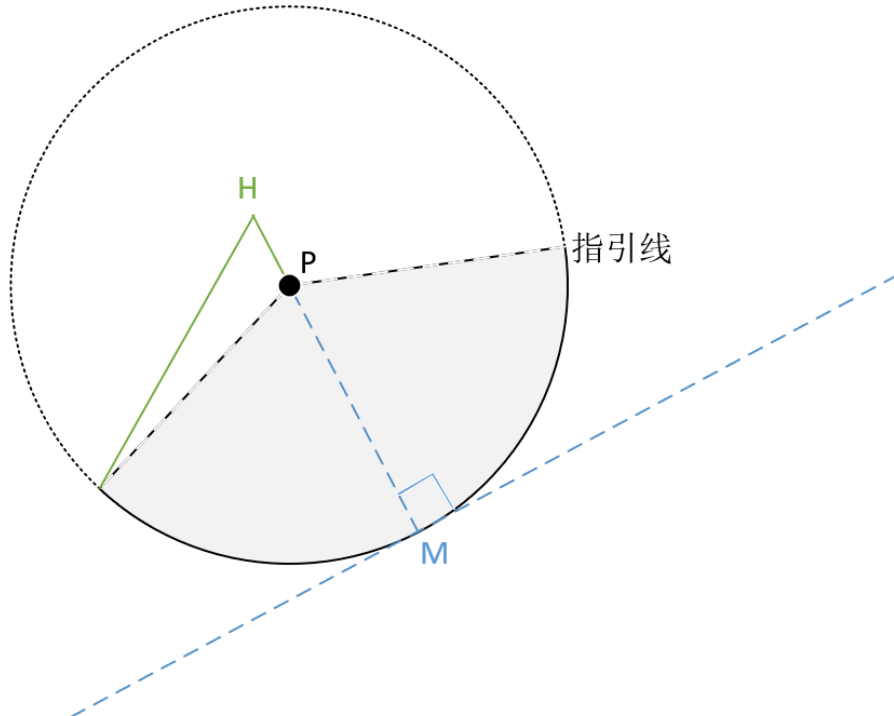
4.2.5 综合结果：

$$\begin{cases} \theta_e = \arctan\left(\frac{l'}{1 - \kappa_r l}\right) + \theta_r \\ v_e = \frac{\dot{s}(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} \\ \kappa_e = \left\{ \frac{[l'' + (\kappa_r' l + \kappa_r l')] \tan(\Delta\theta)] \cdot \cos^2(\Delta\theta)}{1 - \kappa_r l} + \kappa_r \right\} \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{1 - \kappa_r l} \\ a_e = \frac{\ddot{s}(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} + \frac{\dot{s}^2}{\cos(\Delta\theta)} \left\{ l' \left[\frac{\kappa_e(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r \right] - (\kappa_r' l + \kappa_r l') \right\} \end{cases} \quad (48)$$

5 Frenet坐标系的局限性

第2节曾提到，Frenet 坐标系未必能够将二维平面上所有点位进行有效的描述。在这里，有效描述是指点位与 Frenet 坐标值之间构成一一映射。以图F4所示的由圆弧段构成的指引线为例，图中 P 点是圆弧段的圆心；原则上讲， P 点在指引线上的投影点 M 应该是使得 MP 线段长度最短的点，然而此时这样的点有无穷多个——圆弧段上所有点全部符合此要求。由于投影点不唯一， P 点在指引线上坐标无从确定。我们发现，只有当 P 点落入图中阴影区域内时， P 点的投影点 M 才确保是唯一的。

图F4：反映Frenet坐标系表示范围受限的例子



现考虑另一种极端情况——指引线为无限延伸的直线，此时 Frenet 坐标系的点位表示范围完全覆盖整个二维平面，它与笛卡尔坐标系没有任何差异。不难发现，指引线的走势与形态决定了相应 Frenet 坐标系的表示范围大小。

为了定量地确定 Frenet 坐标系在二维平面上的有效作用范围，给出了指引线曲率的一种计算方法，它与曲率定义式实质上是等价的（感兴趣的读者可自行推导）：

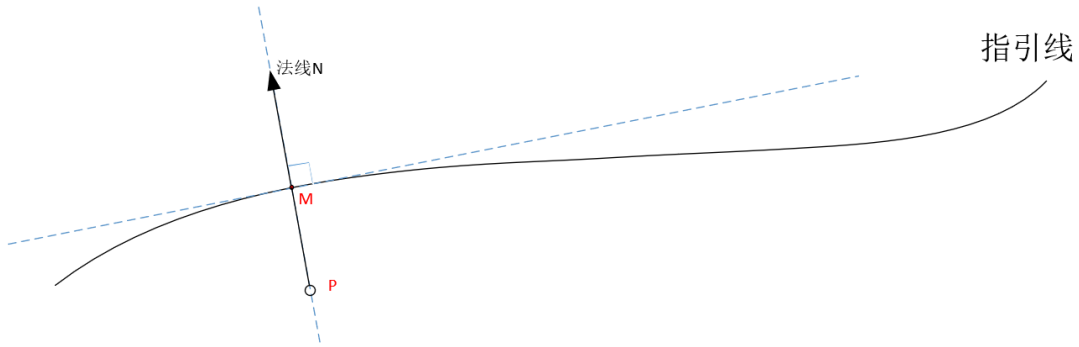
$$\kappa(s) = \frac{|y(s)''x(s)' - x(s)''y(s)'|}{\{[x(s)']^2 + [y(s)']^2\}^{3/2}} \quad (49)$$

给定一条参数化指引线 $\Gamma[x(s), y(s)]$ ，可针对指引线上每一点 $[x(s), y(s)]$ 计算曲率，曲率的倒数为该点的曲率半径 $\kappa^{-1}(s)$ 。如图 F5 所示，在指引线上点 M 处切线所对应的法线 N 上，在指引线凹陷侧定义临界点 P 使得 MP 长度为 $\kappa^{-1}(s)$ 。

将法线 N 上从 P 点到指向曲线凸出侧无穷远处的一段开区间（不包括端点 P ）定义为扫描线。随着里程 s 连续变化，扫描线连续扫过的区域合并起来统称 Frenet 坐标系的有效表征区域。在有效表征区域内的点位均确保能够对应唯一的 Frenet 坐标值，这一论断涉及微分同胚理论，详情可参阅文献或更早期文献。

Frenet 坐标系作用范围受限意味着距离指引线较远的移动障碍预测轨迹等未必能够准确转换至 Frenet 坐标系中，该现象在指引线曲率较大的行车场景由尤为显著，此时还需采取额外措施避免坐标系转换误差，或干脆直接以类似于泊车决策规划的方式在笛卡尔坐标系中生成行车轨迹^{1 2}。

图F5：Frenet坐标系有效作用范围量化模型



6 总结

曲线指引线参数方程：

$$\Gamma[x(s), y(s)], s \in [0, L], \quad (50)$$

轨迹上某点 P 在笛卡尔坐标系下的表示 (x_e, y_e) ，在 Frenet 坐标系下的表示 (s^*, l^*) ；

P 点在指引线上的投影点 M 在笛卡尔坐标系下的表示 $M = (x(s^*), y(s^*))$ ，在 Frenet 坐标系下的表示 $(s^*, 0)$ ；

6.1 笛卡尔坐标 —> Frenet坐标

已知：笛卡尔坐标系下 (x_e, y_e) 、 v_e 、 a_e 、 θ_e 、 κ_e

求解：Frenet 坐标系下的 s^* 、 l^* 、 θ_r 、 \dot{s} 、 \ddot{s} 、 \dot{l} 、 \ddot{l} 、 l' 、 l''

$$\text{Frenet 坐标系下位置状态} \begin{cases} \hat{s} = s_{init} - \frac{D'(s_{init})}{D''(s_{init})}, D'(s^*) = 0, \text{二阶最小化+牛顿法迭代} \\ l^* = \text{sign}[(y_e - y(s^*))\cos\theta_r - (x_e - x(s^*))\sin\theta_r] \cdot \sqrt{[x_e - x(s^*)]^2 + [y_e - y(s^*)]^2} \\ \theta_r = \arctan[\frac{y'(s^*)}{x'(s^*)}] \end{cases} \quad (51)$$

$$\text{Frenet 坐标系下运动状态} \begin{cases} \Delta\theta = \theta_e - \theta_r \\ \dot{l} = v_e \sin(\Delta\theta) \\ l' = (1 - \kappa_r l) \cdot \tan(\Delta\theta) \\ \dot{s} = \frac{v_e \cos(\Delta\theta)}{(1 - \kappa_r l)} \\ l'' = -(\kappa_r' l + \kappa_r l') \cdot \tan(\Delta\theta) + \frac{(1 - \kappa_r l)}{\cos^2(\Delta\theta)} \cdot [\frac{\kappa_e(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] \\ \ddot{s} = \frac{1}{(1 - \kappa_r l)} \cdot \{a_e \cdot \cos(\Delta\theta) - \dot{s}^2 \cdot [(\frac{\kappa_e(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r)l' - (\kappa_r' l + \kappa_r l')]\} \\ \ddot{l} = a_e \cdot \sin(\Delta\theta) + v_e \cos(\Delta\theta)(v_e \kappa_e - \kappa_r \dot{s}) \end{cases} \quad (52)$$

6.2 Frenet坐标 —> 笛卡尔坐标

已知：Frenet 坐标系下的 s^* 、 l^* 、 θ_r 、 \dot{s} 、 \ddot{s} 、 \dot{l} 、 \ddot{l} 、 l' 、 l'' ；

求解：笛卡尔坐标系下 (x_e, y_e) 、 θ_e 、 v_e 、 a_e 、 κ_e ；

笛卡尔坐标系下位置状态

$$\begin{cases} \theta_r = \arctan[\frac{y'(s^*)}{x'(s^*)}] \\ (x_e, y_e) \equiv [x(s^*) + l^* \cdot \cos(\theta_r + \frac{\pi}{2}), y(s^*) + l^* \cdot \sin(\theta_r + \frac{\pi}{2})] \\ \theta_e = \arctan(\frac{l'}{1 - \kappa_r l}) + \theta_r \end{cases}$$

(53)

笛卡尔坐标系下运动状态

$$\begin{cases} v_e = \frac{\dot{s}(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} \\ \kappa_e = \{ \frac{[l'' + (\kappa_r' l + \kappa_r l')] \tan(\Delta\theta)] \cdot \cos^2(\Delta\theta)}{1 - \kappa_r l} + \kappa_r \} \cdot \frac{\cos(\Delta\theta)}{1 - \kappa_r l} \\ a_e = \frac{\ddot{s}(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} + \frac{\dot{s}^2}{\cos(\Delta\theta)} \{ l' [\frac{\kappa_e(1 - \kappa_r l)}{\cos(\Delta\theta)} - \kappa_r] - (\kappa_r' l + \kappa_r l') \} \end{cases}$$


(54)

7 参考文献

[【自动驾驶】笛卡尔坐标系和frenet坐标系相互转换](#)

[Apollo cartesian frenet conversion.c](#)

1.

LI B , OUYANG Y , ZHANG Y , et al . Trajectory planning for autonomous driving on curvy roads without Frenet frame : Cartesian frame is al you need [J] . IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems , under review . 

2.

LI B , ZHANG YM . Fast trajectory planning in Cartesian rather than Frenet frame : A precise solution for autonomous driving in complex urban scenarios [J] . IFAC - PapersOnLine ,2020, 