2. 선형 변환

1. 벡터 공간의 확장으로의 행렬

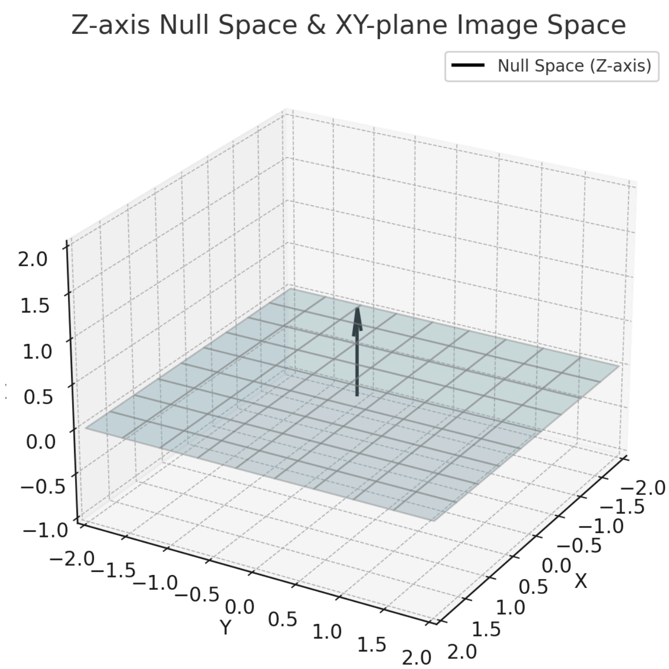
$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m*n}$, $k \in R$이라 하면, 다음과 같이 덧셈과 스칼라 곱이 정의된다.

- 덧셈 : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- 스칼라 곱 : $kA = (ka_{ij})$

  → 벡터 연산이 적용된다? 행렬=벡터와 같이 쓸 수 있다.

2. 벡터 공간을 연결해 주는 함수로서의 행렬

- 하나의 m x n 행렬 A를 벡터공간 R^n에서 벡터공간 R^m으로의 **선형변환**이라고 부른다.
- $N(A)$: 선형변환 행렬 A에 의해 0벡터로 보내지는 벡터들의 집합.



R3 공간 벡터에서 xy 평면으로 차원축소 되는 경우 z축의 데이터들은 모두 0벡터(원점)으로 보내지게 된다.

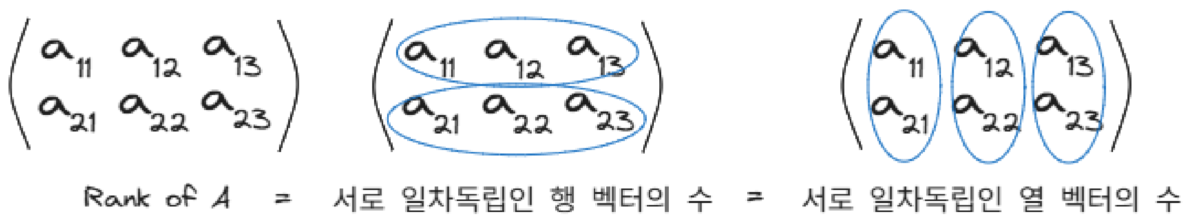
정리 2) 차원공식

- 하나의 m x n 행렬 $A : R^n \rightarrow R^m$을 선형변환이라고 하자. 다음과 같은 차원공식이 성립한다.

  $$n = \dim(N(A)) + \dim(A(R^n))$$

3. 행렬의 Rank

- **행렬 RANK : 행, 열 벡터들 중에서 일차독립인 벡터의 최대 개수.**



- 정방 행렬의 일차 독립 여부 확인 방법 = 행렬식이 0이 아니어야 함

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

if. det(A)=0 -> Rank=3

4. 행렬식

- 선형방정식 $Ax = b$를 푸는데 필요한 역행렬을 찾는데 사용된다.
- 행렬식 : 연립방정식이 유일한 해를 가질 조건 (아래 식이 0이 아니어야 함.)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

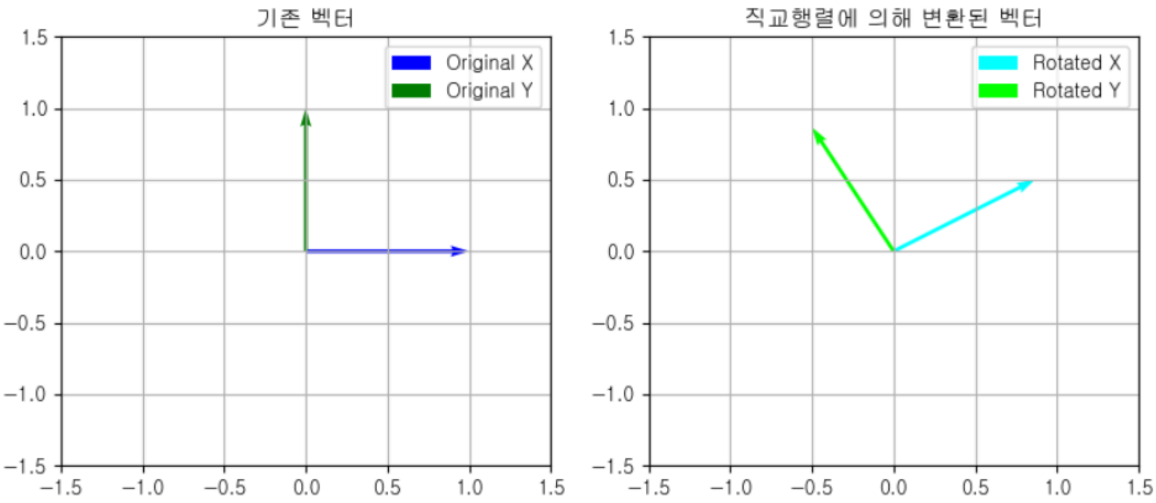
6. 직교행렬

- **n x n 행렬 A가 $A^TA = I_n$ 또는 $AA^T = I_n$을 만족하면 A를 직교행렬**이라고 부른다.
  - 즉, 전치행렬이 역행렬이 되는 경우.

정리 1) n x n 행렬 A가 $A : R^n \to R^n$인 선형함수일 때 다음 세 성질은 동치이다.

- A는 직교행렬이다.
- $||Ax|| = ||x||$, 모든 $x \in R^n$
- $< Ax, Ay > = < x, y >$, 모든 $x, y \in R^n$

정리 2) n x n 행렬 A가 직교행렬이면 두 벡터 사이의 각의 크기를 보존한다.



직교 행렬로 인한 선형변환은 두 벡터 사이의 각의 크기를 보존하는 회전 변환!

→ 실전에서…

데이터의 구조를 왜곡하지 않고 축을 바꿀 수 있다.