1 บทนำ

คงไม่อาจปฏิเสธได้ว่าการศึกษาด้านระบบควบคุมเป็นงานที่ท้าทายอย่างยิ่ง โดยเฉพาะสำหรับผู้เริ่มต้น เหตุผลหลักคือทฤษฎีและหลักการอ้างอิงกับคณิตศาสตร์ในหลายหัวข้อ เช่น พีชณิตเชิงเส้น ตัวแปรเชิงซ้อน แคลคูลัส จนถึงการวิเคราะห์ขั้นสูงสำหรับระบบไม่เป็นเชิงเส้น เช่นทฤษฎีเลียพูนอฟ นอกจากนั้นแนวทางของระบบควบคุมยังมีการแตกแขนงออกไปอย่างกว้างขวาง และมีการผสมผสานกับวิธีการในหลากหลายสาขา เช่นโครงข่ายประสาทเทียม (neural networks) ตรรกศาสตร์คลุมเครือ (fuzzy logic) หรือการเรียนรู้ของเครื่อง ในปัจจุบันยังมีผู้นำเสนอแนวทางใหม่อยู่อย่างต่อเนื่อง

1.1 ต้นกำเนิดของการควบคุมเหมาะที่สุด

แม้ว่ามนุษย์จะได้คิดค้นการควบคุมป้อนกลับมาเป็นเวลานานตั้งแต่ยุคกรีกโบราณก่อนคริสต์ศักราช แต่ความก้าวหน้าจะเด่นชัดเมื่อมนุษย์พัฒนาศาสตราวุธเพื่อเอาชนะฝ่ายตรงข้าม โดยเฉพาะในช่วงสงครามโลกครั้งที่ 2 ที่เป็นจุดเริ่มต้นของการออกแบบตัวควบคุมแบบคลาสสิก (classical control) โดยการแปลงระบบพลวัตระบบเชิงเส้นให้อยู่ในรูปฟังก์ชันถ่ายโอน และอาศัยการพล็อตแผนภาพโบเด (Bode plot) ของระบบวงเปิดลงบนกระดาษกราฟ เป็นการวิเคราะห์และออกแบบในโดเมนความถี่ การออกแบบในลักษณะนี้มีชื่อเรียกว่า *การจัดสัณฐานวงรอบ (loopshaping)* [1] จนกระทั่งประมาณช่วงทศวรรษที่ 60 เมื่อเริ่มมีการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ ซึ่งตัวประมวลผลในยุคเริ่มต้นถนัดการคำนวณข้อมูลในรูปของเมทริกซ์และเวกเตอร์ การวิเคราะห์และออกแบบจึงเปลี่ยนเป็นรูปของเมทริกซ์ในโดเมนเวลาเรียกว่า *ตัวแทนปริภูมิสถานะ (state space representation)* [2] ซึ่งในช่วงนี้เองเป็นจุดเริ่มต้นของการควบคุมเหมาะที่สุด (optimal control)

มีการออกแบบและสังเคราะห์ตัวควบคุมหลายวิธีที่ใช้ชื่อว่า การจัดสัณฐานวงรอบ เช่น QFT (Quantitative Feedback Theory) หรือ H_∞ ในบริบทนี้อ้างถึงการจัดสัณฐานวงรอบของฟังก์ชันถ่ายโอนวงเปิดโดยอาศัยการจัดรูปแผนภาพโบเด ซึ่งเป็นการออกแบบตัวควบคุมในยุคเริ่มต้น

หากต้องการสรุปในประโยคเดียว การควบคุมเหมาะที่สุดคือแขนงหนึ่งของทฤษฎีระบบควบคุมที่เกี่ยวข้องกับการหาตัวควบคุมสำหรับระบบพลวัตที่ต้องการโดยหาค่าเหมาะที่สุดของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ภายใต้เงื่อนไขบังคับที่กำหนด การหาค่าเหมาะที่สุดมีการประยุกต์ใช้งานในหลายสาขาทั้งด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ การวิจัยเชิงปฏิบัติการ เศรษฐศาสตร์ และสาขาอื่นที่สามารถจัดรูปโจทย์ปัญหาให้สอดคล้องกับวิธีการหาคำตอบนี้

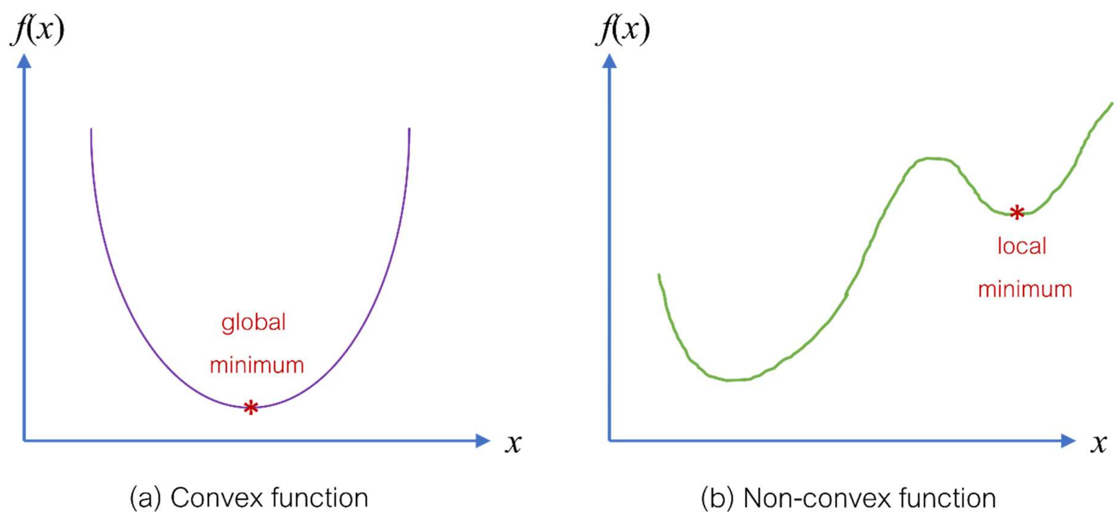
ในช่วงเริ่มต้นที่คอมพิวเตอร์ยังไม่มีสมรรถนะสูงเท่าปัจจุบัน การออกแบบตัวควบคุมจะเป็นลักษณะออฟไลน์ คือกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์จากความต้องการของโจทย์ปัญหา ที่ประกอบด้วยพจน์ของตัวแปรสถานะและตัวแปรควบคุม เช่นต้องการขับเคลื่อนยานพาหนะให้ถึงที่หมายเร็วที่สุดโดยใช้เชื้อเพลิงน้อยสุด หลังจากนั้นใช้คอมพิวเตอร์หาคำตอบที่เหมาะที่สุดได้เป็นตัวควบคุมคงที่เพื่อนำไปใช้ในระบบป้อนกลับ วิธีการนี้มีชื่อเรียกว่า *การควบคุมกำลังสองเชิงเส้น (linear quadratic control)* ซึ่งในบทความหรือหนังสือหลายเล่มจะใช้ชื่อ *LQR: Linear Quadratic Regulator* หรือในกรณีที่มีการประมาณค่าสถานะของพลานต์จะขยายเป็นวิธี *การควบคุมกำลังสองเชิงเส้นแบบเกาส์เซียน (LQG: Linear Quadratic Gaussian)*

> ในการสังเคราะห์ตัวควบคุมสมัยใหม่อาจเรียก LQG ว่า H_2 เพื่อใช้กรอบการออกแบบร่วมกับ H_∞

โดยหลักการแล้วการหาคำตอบของ LQR, LQG จะมีการวนรอบเพื่อหาค่าเหมาะที่สุดของอัตราขยาย สามารถจัดได้เป็นกรณีเฉพาะของการหาค่าเหมาะที่สุดแบบคอนเวกซ์ (convex optimization) [3] แต่ในอดีตการแก้ปัญหาในลักษณะออนไลน์ คือหาคำตอบทุกช่วงเวลาการสุ่มของตัวควบคุมมีการใช้งานน้อย เนื่องจากถูกจำกัดโดยสมรรถนะของคอมพิวเตอร์ในเวลานั้น โดยมีการใช้กับระบบที่มีแบนด์วิดท์ต่ำเช่นการควบคุมกระบวนการ (process control)

ตัวอย่างหนึ่งคือ *การควบคุมแบบทำนายโมเดล (MPC: Model Predictive Control)* [4] ที่มีการนำเสนอตั้งแต่ประมาณปี ค.ศ. 1970 แต่ยังไม่มีการใช้งานแพร่หลายในยุคนั้น การหาคำตอบเหมาะที่สุดของ MPC โดยตัวประมวลผลสมรรถนะต่ำอาจต้องการคาบเวลานานหลายนาที แต่โดยสมรรถนะคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน (โดยเฉพาะเมื่อใช้ตัวประมวลผลเช่น GPU จำนวนมาก) อัลกอริทึม MPC สามารถใช้ในระบบที่ตอบสนองอย่างรวดเร็วเช่นการควบคุมหุ่นยนต์

อย่างไรก็ตาม การหาคำตอบเหมาะที่สุดในงานทั่วไปมิได้ถูกจำกัดเฉพาะฟังก์ชันแบบคอนเวกซ์ที่สามารถได้คำตอบรวดเร็ว และคำตอบเป็นค่าต่ำสุดแบบวงกว้าง (global minimum) ในกรณีที่ฟังก์ชันไม่เป็นคอนเวกซ์ เวลาในการคำนวณไม่สามารถคาดเดาได้ และคำตอบอาจติดอยู่กับค่าต่ำสุดเฉพาะที่ (local minimum) กราฟ 2 มิติในรูปที่ 1.1 แสดงค่าต่ำสุดแบบวงกว้างของฟังก์ชันคอนเวกซ์ และค่าต่ำสุดเฉพาะที่ของฟังก์ชันที่ไม่เป็นคอนเวกซ์



รูปที่ 1.1 ค่าต่ำสุดแบบวงกว้างและค่าต่ำสุดเฉพาะที่

ดังนั้นจึงเป็นถือเป็นประเด็นสำคัญในการพิจารณาฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขบังคับทั้งหมดโดยละเอียด เพื่อจัดรูปและเลือกตัวแก้ปัญหา (solver) ที่เหมาะสม และตัดสินว่าสามารถหาคำตอบได้ภายในเวลาที่กำหนดหรือไม่

1.2 ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานและหลักการทั่วไปของการหาค่าเหมาะที่สุดโดยยังไม่ลงลึกทางด้านระบบควบคุม ดังได้กล่าวแล้วว่าปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดสามารถประยุกต์ใช้งานได้อย่างกว้างขวาง แม้กระทั่งในระบบเดียวกันเช่นหุ่นยนต์หรือโดรน อาจใช้การหาค่าเหมาะที่สุดสำหรับตัวควบคุมและการวางแผนเส้นทางเดิน ให้ทำงานร่วมกันในลักษณะซ้อนวงกันก็ได้ ด้านเศรษฐศาสตร์มีการใช้งานด้านการลงทุน การจัดการความเสี่ยง หรือระบบลอจิสติกในงานอุตสาหกรรม ใน [3] ได้กล่าวถึงโจทย์ปัญหาในหลากหลายสาขาที่สามารถจัดรูปเป็นการหาค่าเหมาะที่สุดได้

1.2.1 หลักการของความเหมาะที่สุด

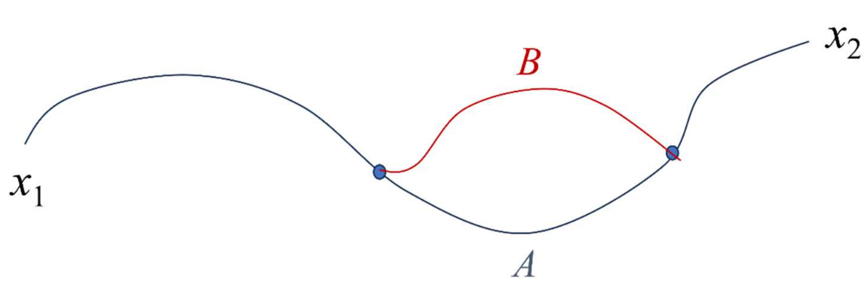
หนึ่งในผลงานเริ่มต้นที่สร้างพื้นฐานให้กับการหาค่าเหมาะที่สุดและการเรียนรู้เสริมกำลัง คือหนังสือที่เขียนโดยเบลแมนในหัวข้อ การโปรแกรมพลวัต (dynamic programming) [5] ที่ช่วยให้สามารถจัดรูปปัญหาเพื่อสร้างอัลกอริทึมสำหรับประมวลผลโดยคอมพิวเตอร์ได้ กล่าวโดยสรุปได้เป็นการแบ่งปัญหาที่ซับซ้อนเป็นโครงสร้างซ้อนในของปัญหาย่อย (subproblems) ที่สามารถหาคำตอบได้ง่ายขึ้นโดยการเรียกซ้ำ (recursive) ผ่านความสัมพันธ์ที่เรียกตามชื่อของผู้ให้กำเนิดว่า *สมการของเบลแมน (Bellman equation)* นอกจากนั้นเบลแมนยังได้มีส่วนสำคัญในทฤษฎีควบคุมเวลาต่อเนื่องในสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ที่เรียกชื่อว่าสมการ HJB: Hamilton-Jacobi_bellman [6]

เบลแมนได้นำเสนอ *หลักการของความเหมาะที่สุด (principle of optimality)* ทำให้สามารถแบ่งแยกปัญหาการตัดสินใจรวมเป็นปัญหาย่อยได้ นิยามใน [5] กล่าวไว้ดังนี้

นโยบายเหมาะที่สุดต้องมีคุณสมบัติคือ ไม่ว่าจะเลือกสถานะและการตัดสินใจเริ่มต้นอย่างไร การตัดสินใจครั้งต่อไปที่เหลือจะต้องยังคงเป็นนโยบายเหมาะที่สุดเสมอ เมื่อนับจากสถานะที่เกิดจากการตัดสินใจครั้งแรก

เบลแมนใช้คำว่า “นโยบาย” แทนการกระทำ หรือการตัดสินใจ ต่อมาถูกใช้ในบทความเกี่ยวกับการเรียนรู้เสริมกำลัง สำหรับในสาขาระบบควบคุมนโยบายก็คือเอาต์พุตของตัวควบคุม

นิยามนี้อาจมีลักษณะเป็นนามธรรม จะอธิบายให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นดังในรูปที่ 1.2 สมมุติว่านโยบายในการเคลื่อนที่จากจุด x_1 ไปยังจุด x_2 โดยผ่านเส้นทาง A คือนโยบายเหมาะที่สุดตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ เช่นใช้เวลาน้อยสุด ดังนั้นจะไม่สามารถพบเส้นทางลัด B ที่ทำให้



รูปที่ 1.2 หลักการของความเหมาะที่สุด

การเดินทาง เร็วกว่าเส้นทางที่ผ่าน A ได้ มิฉะนั้นเราจะไม่สามารถเรียกเส้นทางที่ผ่าน A ว่าเป็นนโยบายเหมาะที่สุด

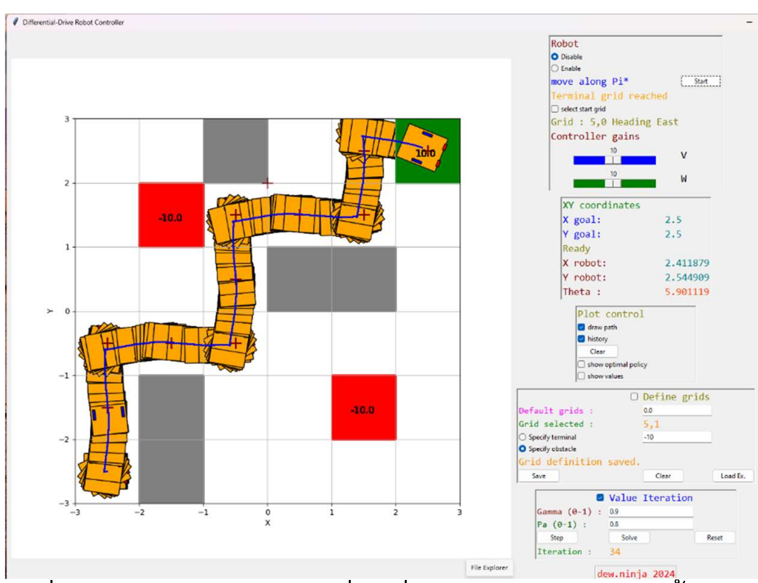
หลักการของความเหมาะที่สุดเป็นหัวใจสำคัญที่ทำให้สามารถใช้วิธีการโปรแกรมพลวัตได้ ตัวอย่างเช่นในการแก้ปัญหาย่อยจากส่วนท้ายมายังต้น ต้องมั่นใจว่านโยบายส่วนท้ายต้องเป็นแบบเหมาะที่สุดโดยไม่ขึ้นกับการตัดสินใจในส่วนต้น

ตัวอย่าง 1.1 ในบทที่ 8 ของหนังสือ [7] ได้แสดงตัวอย่างขั้นพื้นฐานของการโปรแกรมพลวัตในการวางแผนเส้นทางหุ่นยนต์เคลื่อนที่บนกริดเวิลด์โดยวิธีการที่เรียกว่า *การวนซ้ำมูลค่า (value iteration)* อาศัยสมการของเบลแมน

$$v(s) = r(s) + \gamma \max_{a} \sum_{s'} p(s'|s,a)v(s') \tag{1.1}$$

โดย $r(s)$ แทนรางวัลของสถานะ s ค่า γ คือตัวแปรประกอบส่วนลดในช่วง 0 – 1 และ $p(s'|s,a)$ คือความน่าจะเป็นในการเลือกการกระทำ a เพื่อเปลี่ยนสถานะจาก s เป็น s'

นิยามกริดเป้าหมาย กริดที่มีมูลค่าลบ (แทนพื้นที่อันตรายที่ไม่ต้องการให้หุ่นยนต์เข้าถึง) และกริดสิ่งกีดขวาง กำหนดค่าเริ่มต้นใดๆ (เช่นค่าศูนย์) ให้กับสถานะคือแต่ละตารางบนกริดเวิลด์ เลือกค่า γ และ $p(s'|s,a)$ และใช้วิธีการวนซ้ำมูลค่าที่จะทำให้มูลค่าลู่เข้าสู่ค่าคำตอบนโยบายเหมาะที่สุดได้จากทิศทางการเคลื่อนที่เพื่อได้รางวัลสูงสุด รูปที่ 1.3 แสดงตัวอย่างหนึ่งของหุ่นยนต์ที่เคลื่อนที่ตามนโยบายเหมาะที่สุดจากตำแหน่งเริ่มต้นสู่เป้าหมาย



รูปที่ 1.2 การวางแผนการเคลื่อนที่หุ่นยนต์โดยวิธีการวนซ้ำมูลค่า

ประเด็นหนึ่งที่น่าสนใจในการวางแผนเส้นทางเดินหุ่นยนต์จากตัวอย่าง 1.1 คือเมื่อแปรค่าพารามิเตอร์ γ และ $p(s'|s,a)$ จะสามารถเปลี่ยนแปลงนโยบายเหมาะที่สุด เสมือนว่าหุ่นยนต์มีความฉลาดที่จะตัดสินใจขึ้นกับอัตราการลดลงของรางวัลและความแม่นยำในการเคลื่อนที่

ในหนังสือหลายเล่มเช่น [8] ใช้ตัวอย่างการแก้ปัญหากริดเวิลด์เป็นพื้นฐานสู่เนื้อหาหลักของการเรียนรู้เสริมกำลัง (reinforcement learning) เมื่อเพิ่มความไม่แน่นอนแบบสโทแคสติก นอกจากนั้นพบว่าการหาคำตอบของปัญหากริดเวิลด์จะขึ้นกับจำนวนของสถานะคือกริด เมื่อมีจำนวนมากขึ้น การคำนวณจะเพิ่มมากขึ้นตามจนประสบปัญหาที่เบลแมนเรียกว่า คำสาปของมิติ (curse of dimensionality)

ถึงจุดนี้ต้องการชี้ประเด็นหนึ่งที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการควบคุมเหมาะที่สุดและการเรียนรู้เสริมกำลัง ซึ่งทำให้ทั้งสองมารวมอยู่ในชื่อหนังสือเล่มนี้ได้ ในปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดที่กล่าวถึงตั้งแต่ต้นเราต้องการหาคำตอบที่ทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าน้อยสุด แต่ในสมการเบลแมน (1.1) เป็นตรงข้ามกันคือ นโยบายเหมาะที่สุดของหุ่นยนต์สอดคล้องกับเส้นทางที่ทำให้ได้รางวัลสูงสุด สิ่งที่เหมือนเป็นตรงข้ามกันนี้แท้จริงแล้วอยู่บนพื้นฐานหรือหลักการเดียวกัน

คำกล่าวติดตลกที่ผู้เขียนชอบใช้คือผู้ศึกษาการเรียนรู้เสริมกำลังคือผู้มองโลกในแง่ดี (optimistic) ส่วนผู้ศึกษาการควบคุมเหมาะที่สุดคือผู้มองโลกในแง่ร้าย (pessimistic) ☺

1.2.2 การจัดรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์

หากต้องการจัดรูปปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดที่ครอบคลุมทุกกรณี เพื่อหาคำตอบโดยวิธีทางคณิตศาสตร์ สามารถเขียนได้เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & c(x) \le b \end{aligned} \tag{1.2}$$

โดย min แทนการหาค่าน้อยสุด และ s.t. ย่อมาจาก subject to หมายถึง ขึ้นอยู่กับ หรือภายใต้เงื่อนไขบังคับ ในที่นี้ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ คือ *ตัวแปรที่ต้องการหาค่าเหมาะที่สุด (optimization variables)* $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ คือ *ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (objective function)* และ $c : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ คือ *ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ (constraint function)* และเวกเตอร์ค่าคงที่ b คือค่าจำกัดหรือขอบเขต เวกเตอร์ x^* เรียกว่าเหมาะที่สุด (optimal) หรือเป็นคำตอบของ (1.2) ถ้าทำให้ค่าวัตถุประสงค์มี

ค่าน้อยที่สุดในเวกเตอร์ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ หากไม่สามารถหาค่าของ x^* ได้ เรียกว่าเป็นปัญหาที่เป็นไปไม่ได้ (infeasible)

> นิยามและสัญนิยมที่ใช้ในแต่ละบทความ/หนังสืออาจมีความแตกต่างกันในรายละเอียด เช่นอาจแยกแต่ละฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ โดยเฉพาะกรณีที่มีทั้งสมการและอสมการ หรือเขียนเป็น $c(x) \le 0$ ซึ่งได้จากการย้าย b ใน (1.2) ไปทางด้านซ้าย หรือ $c(x) \ge 0$ สมมูลกับ $-c(x) \le 0$

ในกรณีทั่วไปที่ $f(x)$ และ $c(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ การหาคำตอบอาจมีความซับซ้อนและไม่สามารถรับประกันได้ว่าจะได้คำตอบภายในเวลาที่กำหนด เราสนใจเป็นกรณีพิเศษกับปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดแบบคอนเวกซ์ ที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเงื่อนไขบังคับเป็นแบบคอนเวกซ์สอดคล้องกับอสมการ

$$f(\alpha x + \beta y) \le \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{1.3}$$

สำหรับทุกค่า $x, y \in \mathrm{R}^n$ และ $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ โดย $\alpha + \beta = 1,\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0$ สังเกตว่าฟังก์ชันคอนเวกซ์จะครอบคลุมฟังก์ชันเชิงเส้นและสัมพรรคด้วย

บรรณานุกรม

1., K.J. Åström and R. M. Murray. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers, 2nd ed. Princeton University Press. 2020.

2. R.E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, 82:34–45, 1960.

3. S.P Boyd and L. Vandenberghe, Convex Optimization. Cambridge University Press. 2004.

4. M. Morari and J.H. Lee, *Model predictive control: past, present, and future.* Computers & Chemical Engineering, 23: 667—682, 1999.

5. R.E. Bellman. Dynamic Programming. Princeton University Press. 1957.

6. J. Yong and X.Y. Zhou. *Dynamic Programming and HJB Equations*. Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer. Pp. 157 – 215. 1999.

7. วโรดม ตู้จินดา. การโปรแกรมไพทอนสำหรับงานควบคุมและฝังตัว. ดิว นินจา. 2567.

8. R.S. Sutton and A.G. Barto. Reinforcement Learning: An Introduction. 2nd ed. MIT Press. 2020.