MAKALAH

“RESUME MATERI ALJABAR BOOLEAN”



DISUSUN OLEH

DEWI RATU LANGI’

(NIM 21210029)

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS NEGERI MANADO

TAHUN AJARAN 2021/2022

Defenisi Aljabar Boolean

DEFINISI. Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operator

biner, + dan ., dan sebuah operator uner, ’. Misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen

yang berbeda dari B. Maka, tupel

<B, +, .,’, 0, 1>

disebut aljabar Boolean jika untuk setiap a, b, c , B berlaku aksioma berikut:

1. Identitas

(i) a + 0 = a

(ii) a . 1 = a

2. Komutatif

(i) a + b = b + a

(ii) a.b = b. a

3. Distributif

(i) a. (b + c) = (a.b) + (a. c)

(ii) a + (b . c) = (a + b) . (a + c)

4. Komplemen

Untuk setiap a . B terdapat elemen unik a‘. B sehingga

(i) a + a’ = 1

(ii) a . a’ = 0

Aljabar Boolean 2-Nilai

Merupakan aljabar Boolean yang paling popular, karena aplikasinya luas. Pada aljabar 2-nilai: (i) B = {0, 1}, (ii) operator biner: + dan ⋅, operator uner: ’ (iii) Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | a.b |  | a | b | a + b |  | a | a ‘ |
| 0 | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 0 |  | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |  | 0 | 1 | 1 |  | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |  | 1 | 0 | 1 |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  |

(iv) Keempat aksioma di atas dipenuhi

Ekspresi Boolean  
 Ekspresi Boolean dibentuk dari elemen-elemen B dan/atau peubah-peubah yang dapat dikombinasikan satu sama lain dengan operator +, ⋅, dan ’.

Contoh 1:

0

1

a

b

a + b

a ⋅ b

a’⋅ (b + c)

a ⋅ b’ + a ⋅ b ⋅ c’ + b’, dan sebagainya

Hukum-hukum Aljabar Boolean

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Hukum identitas: (i) a + 0 = a (ii) a ⋅ 1 = a | 2. Hukum idempoten: (i) a + a = a (ii) a ⋅ a = a |
| 3. Hukum komplemen: (i) a + a’ = 1 (ii) aa’ = 0 | 4. Hukum dominansi: (i) a ⋅ 0 = 0 (ii) a + 1 = 1 |
| 5. Hukum involusi: (i) (a’)’ = a | 6. Hukum penyerapan: (i) a + ab = a (ii) a(a + b) = a |
| 7. Hukum komutatif:  (i) a + b = b + a (ii) ab = ba | 8. Hukum asosiatif: (i) a + (b + c) = (a + b) + c (ii) a (b c) = (a b) c |
| 9. Hukum distributif: (i) a + (b c) = (a + b) (a + c) (ii) a (b + c) = a b + a c | 10. Hukum De Morgan: (i) (a + b)’ = a’b’ (ii) (ab)’ = a’ + b’ |
| 11. Hukum 0/1 (i) 0’ = 1 (ii) 1’ = 0 |  |

Contoh 2:

Buktikan bahwa untuk sembarang elemen a dan b dari aljabar Boolean maka kesamaaan berikut:

a + a’b = a + b dan a(a’ + b) = ab adalah benar.

Penyelesaian:

1. a + a’b = (a + ab) + a’b (Hukum Penyerapan)

= a + (ab + a’b) (Hukum Asosiatif)

= a + (a + a’) b (Hukum Distributif)

= a + 1 ⋅ b (Hukum Komplemen)

= a + b (Hukum Identitas)

1. a(a’ + b) = a a’ + ab (Hukum Distributif)

= 0 + ab (Hukum Komplemen)

= ab (Hukum Identitas)

Fungsi Boolean

* Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut literal.

• Fungsi h(x, y, z) = xyz’ terdiri dari 3 buah literal, yaitu x, y, dan z’.

• Jika diberikan x = 1, y = 1, z = 0, maka nilai fungsinya: h(1, 1, 0) = 1 ⋅1 ⋅ 0’ = (1 ⋅ 1) ⋅ 1 = 1 ⋅ 1 = 1

Contoh-contoh fungsi Boolean:

f(x) = x

f(x, y) = x’y + xy’+ y’

f(x, y) = x’ y’

f(x, y) = (x + y)’

f(x, y, z) = xyz’

Bentuk Kanonik

• Ekspresi Boolean yang menspesifikasikan suatu fungsi dapat disajikan dalam dua bentuk berbeda.

• Pertama, sebagai penjumlahan dari hasil kali dan kedua sebagai perkalian dari hasil jumlah.

Contoh 3:

f(x, y, z) = x’y’z + xy’z’ + xyz dan

g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y’ + z)(x + y’ + z’)(x’ + y + z’)(x’ + y’ + z) adalah dua buah fungsi yang sama.

• Minterm: suku (term) di dalam ekspresi boolean mengandung literal yang lengkap dalam bentuk hasil kali

• Maxterm: suku (term) di dalam ekspresi boolean mengandung literal yang lengkap dalam bentuk hasil jumlah.

Contoh 4:

f(x, y, z) = x’y’z + xy’z’ + xyz → 3 buah minterm: x’y’z, xy’z’, xyz g(x, y, z)

= (x + y + z)(x + y’ + z)(x + y’ + z’)(x’ + y + z’)(x’ + y’ + z) → 5 buah maxterm: (x + y + z), (x + y’ + z), (x + y’ + z’), (x’ + y + z’), dan (x’ + y’ + z)

• Jika diberikan sebuah tabel kebenaran, kita dapat membentuk fungsi Boolean dalam bentuk kanonik (SOP atau POS) dari tabel tersebut dengan cara:

- mengambil minterm dari setiap nilai fungsi yang bernilai 1 (untuk SOP) atau

- mengambil maxterm dari setiap nilai fungsi yang bernilai 0 (untuk POS).

Contoh 5: Tinjau fungsi Boolean yang dinyatakan oleh Tabel di bawah ini. Nyatakan fungsi tersebut dalam bentuk kanonik SOP dan POS

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | Z | F(x,y,z) |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Penyelesaian:

• SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

f(x, y, z) = x’y’z + xy’z’ + xyz

atau (dengan menggunakan lambang minterm),

f(x, y, z) = m1 + m4 + m7 = ∑ (1, 4, 7)

• POS

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | F(x,y,z) |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y’+ z)(x + y’+ z’)(x’+ y + z’)(x’+ y’+ z) atau dalam bentuk lain,

f(x, y, z) = M0 M2 M3 M5 M6 = ∏(0, 2, 3, 5, 6)

Contoh 6: Nyatakan fungsi Boolean f(x, y, z) = x + y’z dalam bentuk kanonik SOP dan POS. Penyelesaian:

1. SOP

Lengkapi terlebih dahulu literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama.

x = x(y + y’)

= xy + xy’ = xy (z + z’) + xy’(z + z’)

= xyz + xyz’ + xy’z + xy’z’ dan y’z

= y’z (x + x’) = xy’z + x’y’z

Jadi f(x, y, z) = x + y’z

= xyz + xyz’ + xy’z + xy’z’ + xy’z + x’y’z

= x’y’z + xy’z’ + xy’z + xyz’ + xyz

atau f(x, y, z) = m1 + m4 + m5 + m6 + m7 = Σ (1,4,5,6,7)

1. POS f(x, y, z) = x + y’z

= (x + y’)(x + z)

Lengkapi terlebih dahulu literal pada setiap suku agar jumlahnya sama: x + y’ = x + y’ + zz’

= (x + y’ + z)(x + y’ + z’) x + z

= x + z + yy’ = (x + y + z)(x + y’ + z)

Jadi, f(x, y, z) = (x + y’ + z)(x + y’ + z’)(x + y + z)(x + y’ + z)

= (x + y + z)(x + y’ + z)(x + y’ + z’)

atau f(x, y, z) = M0M2M3 = ∏(0, 2, 3)

Konversi Antar Bentuk Kanonik

Misalkan f adalah fungsi Boolean dalam bentuk SOP dengan tiga peubah:

f(x, y, z) = Σ (1, 4, 5, 6, 7)

dan f ’adalah fungsi komplemen dari f,

f ’(x, y, z) = Σ (0, 2, 3) = m0+ m2 + m3

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

f (x, y, z) = (f ’(x, y, z))’ = (m0 + m2 + m3 )’ = m0 ’ . m2 ’ . m3 ’

= (x’y’z’)’ (x’y z’)’ (x’y z)’

= (x + y + z) (x + y’ + z) (x + y’ + z’)

= M0 M2 M3 = ∏ (0,2,3)

Jadi, f(x, y, z) = Σ (1, 4, 5, 6, 7) = ∏ (0,2,3).

Kesimpulan: mj ’ = Mj

Penyederhanaan Fungsi Boolean

Menyederhanakan fungsi Boolean artinya mencari bentuk fungsi lain yang ekivalen tetapi dengan jumlah literal atau operasi yang lebih sedikit.

Contoh:

f(x, y) = x’y + xy’ + y’

disederhanakan menjadi f(x, y) = x’ + y’.

Peta Karnaugh

Peta Karnaugh (atau K-map) merupakan metode grafis untuk menyederhanakan fungsi Boolean. Metode ini ditemukan oleh Maurice Karnaugh pada tahun 1953. Peta Karnaugh adalah sebuah diagram/peta yang terbentuk dari kotak-kotak (berbentuk bujursangkar) yang bersisian. Tiap kotak merepresentasikan sebuah minterm. Tiap kotak dikatakan bertetangga jika minterm-minterm yang merepresentasikannya berbeda hanya 1 buah literal.

Contoh:

f(x, y, z) = xz’ + y

xz’: Irisan antara:

x →semua kotak pada baris ke-2

z’ →semua kotak pada kolom ke-1 dan kolom ke-4 y:

y→semua kotak pada kolom ke-3 dan kolom ke-4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | yz |  |  |  |
|  |  | 00 | 01 | 11 | 10 |
| X 0 |  | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 |  | 1 | 0 | 1 | 1 |
|  |  |  | Xz’ +y |  |  |

Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh

Penggunaan Peta Karnaugh dalam penyederhanaan fungsi Boolean dilakukan dengan cara menggabungkan kotak-kotak yang bernilai 1 dan saling bersisian. Kelompok kotak yang bernilai 1 dapat membentuk:

- pasangan (dua),

- kuad (empat),

- oktet (delapan).

Tips menyederhanakan dengan Peta Karnaugh

Kelompokkan 1 yang bertetangga sebanyak mungkin Dimulai dengan mencari oktet sebanyakbanyaknya terlebih dahulu, kemudian kuad, dan terakhir pasangan.

Contoh minimisasi 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| yz |  |  |  |  |
| wx | 00 | 01  minimisasi 1: | 11 | 10 |
| 00 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 1  minimisasi 1: |
| 11 | 1  Contoh minimisasi 1: | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Hasil penyederhanaan: f(w, x, y, z) = wy’ + yz’ + w’x’z