

Aljabar Linier
[KOMS120301] - 2023/2024

2.1 - Aljabar Matriks

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 2 (September 2023)

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan dapat:

- ➊ Mendefinisikan dan menulis komponen matriks (baris, kolom, diagonal, dan entri) dengan benar.
- ➋ Melakukan operasi antar matriks, seperti: perkalian skalar, penjumlahan matriks, perkalian matriks, transpos, pangkat matriks, dan polinomial matriks.
- ➌ Menerapkan sifat-sifat operasi matriks untuk memecahkan masalah.
- ➍ Menjelaskan konsep dan sifat-sifat matriks persegi.
- ➎ Menerapkan konsep matriks blok untuk menyelesaikan operasi matriks.

Contoh matriks (1)

	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
John	30	10	20	9	14
Amy	10	9	7	19	25
Bob	20	7	0	10	20

A matrix of messages

Contoh matriks (2)

	Jan	Feb	Mar	Apr	May
Rent	1000	1000	1050	1050	1050
Grocery	300	250	350	310	305
Car	400	450	350	300	320

A matrix of expenses

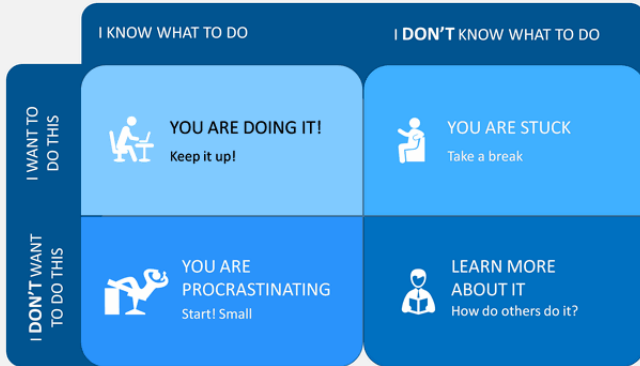
Contoh matriks (3)

	Boston	New York	London
Boston	0	187	3269
New York	187	0	3459
London	3269	3459	0

Contoh matriks (4)

MOTIVATION MATRIX

Enter your sub headline here



Jadi, apa yang bisa Anda katakan tentang matriks?



Bagian 1: Matriks dan operasinya

Definisi MATRIKS

Sebuah **matriks** A atas *lapangan* K (atau cukup disebut **matriks** A , ketika K sudah terdefinisi dengan jelas), adalah sebuah **array** berbentuk persegi panjang, dan berisikan **skalar**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris dari matriks A adalah daftar m elemen yang tersusun **horizontal**:

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

Kolom dari matriks A adalah daftar n elemen yang tersusun **vertikal**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Catatan: Jadi, matriks tersusun dari sekumpulan vektor.

Elemen a_{ij} dari matriks A (pada baris i , kolom j) disebut **entri ke- ij** atau **elemen ke- ij** .

Ini dinotasikan dengan: $A = [a_{ij}]$.

A adalah matriks berukuran $m \times n$:

- jika $m = 1$ (hanya satu baris), maka disebut **matriks baris** atau **vektor baris**;
- jika $n = 1$ (hanya satu kolom), maka disebut **matriks kolom** atau **vektor kolom**.

A disebut **matriks nol** jika semua entri matriks adalah nol.

Contoh persoalan

- Matriks baris: $[1 \ 2 \ 3]$
- Matriks kolom: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Zero matrix (matriks nol): $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Matriks berukuran 3×2 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Kita akan membahas:

- 1 Perkalian skalar dengan matriks
- 2 Penambahan matriks
- 3 Perkalian antar matriks
- 4 Transpos matriks
- 5 Perpangkatan matriks
- 6 Polinomial dari matriks

1. Perkalian matriks dengan skalar

Hasil perkalian dari matriks $A = [a_{ij}]$ dengan skalar $k \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, $-A = (-1)A$.

2. Penjumlahan matriks

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks dengan ukuran yang sama, yaitu ukuran $m \times n$. **Jumlah** dari A dan B didefinisikan sebagai:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, $A - B = A + (-B)$.

Sifat-sifat matriks pada penjumlahan dan perkalian skalar

Teorema

Misalkan A , B , dan C merupakan matriks dengan ukuran yang sama, dan $k, k' \in \mathbb{R}$. Maka:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asosiatif)
- $A + B = B + A$ (komutatif)
- $A + 0 = A$ (0 adalah elemen identitas thd penjumlahan)
- $A + (-A) = 0$ (matriks invers thd penjumlahan)
- $k(A + B) = kA + kB$ (distributif)
- $(k + k')A = kA + k'A$ (distributif thd skalar)
- $(kk')A = k(k'A)$ (asosiatif thd skalar)
- $1 \cdot A = A$ (1 adalah elemen identitas thd perkalian skalar)

Catatan: Oleh karena itu, jumlah $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ dapat dihitung dalam urutan apa pun, dan tidak memerlukan tanda kurung.

Contoh persoalan

Diketahui matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Sederhanakan ekspresi matriks berikut.

- $A + B$
- $B - C$
- $-3A + 2B$
- $5A + 2B - 3C$
- $3(A - C) + B$
- $A - A$

3. Perkalian matriks

Kasus khusus: hasil kali matriks baris dan matriks kolom yang memiliki jumlah elemen yang sama.

Misalkan $A = [a_i]$ menjadi matriks baris dan $B = [b_i]$ menjadi matriks kolom. Maka produk AB didefinisikan sebagai:

$$AB = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Catatan: hasil kali A dan B adalah skalar.

Contoh

$$[7, -4, 5] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 7(3) + (-4)(2) + 5(-1) = 21 - 8 - 5 = 8$$

Perkalian matriks

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks dengan ukuran $m \times p$ dan $p \times n$. Maka hasil kali A dan B adalah matriks AB dengan ukuran $m \times n$ yang didefinisikan oleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$

Contoh persoalan

Tentukan AB dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Kalikan setiap baris A dengan setiap kolom dari B .

Karena A berukuran 2×2 dan B berukuran 2×3 , maka AB berukuran 2×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} 2 + 15 & 0 - 6 & -4 + 18 \\ 4 - 5 & 0 + 2 & -8 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

Hubungan antara penjumlahan matriks dan perkalian matriks

Teorema

Misalkan A , B , dan C adalah matriks. Jika penjumlahan dan perkalian matriks terdefinisi dengan jelas, maka:

- $(AB)C = A(BC)$ (asosiatif)
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributif kiri)
- $(B + C)A = BA + CA$ (distributif kanan)
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ *dimana $k \in \mathbb{R}$*
- $0A = 0$ dan $A0 = 0$, *dimana 0 adalah matriks nol*

Transpos matriks

Transpos dari sebuah matriks A , dilambangkan dengan A^T , adalah matriks yang diperoleh dengan menuliskan kolom-kolom A , secara berurutan, sebagai baris.

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Catatan: Jika A memiliki ukuran $m \times n$, maka A^T memiliki ukuran $n \times m$.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [1 \quad -3 \quad 5]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Teorema

Jika A dan B adalah matriks sedemikian sehingga operasi berikut terdefinisi dengan baik (well-defined), maka:

- ① $(A^T)^T = A$
- ② $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ③ $(A - B)^T = A^T - B^T$
- ④ $(kA)^T = kA^T$
- ⑤ $(AB)^T = B^T A^T$

Perpangkatan matriks, Polinomial matriks

Jika A memiliki ukuran $m \times n$, maka A^T memiliki ukuran $n \times m$. Misalkan A adalah matriks persegi dengan order n atas \mathbb{R} (atau atas lapangan lain). **Perpangkatan** dari A didefinisikan sebagai:

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2A, \quad \dots, \quad A^{n+1} = A^nA, \quad \dots, \quad \text{dan} \quad A^0 = 1$$

Kita juga dapat mendefinisikan **polinomial dalam matriks A** . Untuk polinomial apa pun:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad \text{dimana } a_i \in \mathbb{R},$$

Polinomial $f(A)$ didefinisikan sebagai:

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n$$

Catatan: Jika $f(A) = 0$ (matriks nol), maka A disebut *pembuat nol (zero)* atau *akar (root)* dari $f(x)$.

Contoh persoalan

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Maka:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$$

Misal $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, maka:

$$f(A) = 2 \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

- ① Bentuk kelompok beranggotakan 3 orang;
- ② Kerjakan latihan berikut (Howard Anton's book):
 - Number 1 & 2 (2 questions @)
 - Number 3-6 (3 questions @)
 - Number 7-8

Bagian 2: Matriks persegi

Matriks persegi

Matriks **persegi** adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Diagonal and Trace

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi dengan order n .

Diagonal atau **diagonal utama** dari A terdiri dari elemen dengan subskrip yang sama, yaitu:

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

Trace dari A , dilambangkan dengan $\text{tr}(A)$ adalah jumlah elemen diagonal dari A .

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Teorema (Properties of trace)

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ (ingatlah bahwa tidak selalu $AB \neq BA$)

Matriks identitas, matriks skalar

Matriks **identitas** atau **unit**, dilambangkan dengan I_n (atau sederhananya I) adalah matriks persegi $n \times n$, dengan angka 1 pada diagonalnya, dan angka 0 pada titik lain.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

I memiliki peran yang mirip dengan skalar 1 untuk \mathbb{R} .

Sifat penting: Ketika terdefinisi dengan baik,

$$IA = A$$

Untuk beberapa skalar $k \in \mathbb{R}$, matriks kI disebut **matriks skalar** yang sesuai dengan skalar k .

Jenis matriks persegi khusus

Matriks $D = [d_{ij}]$ adalah **matriks diagonal** jika entri non-diagonalnya semuanya nol.

$$D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$$

dimana beberapa dari d_{ii} atau semua d_{ii} mungkin nol.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 9 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, matriks identitas dan matriks skalar juga merupakan matriks diagonal.

Matriks *segitiga atas* dan *segitiga bawah*

Matriks persegi $A = [a_{ij}]$ adalah **segitiga atas** (*upper-triangular*), jika semua entri di bawah diagonal utama sama dengan 0.

Matriks **segitiga bawah** (*lower-triangular*) adalah matriks persegi yang entri-entri di atas diagonal utama semuanya nol.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas (*kiri*) dan segitiga bawah (*kanan*)

Matriks segitiga atas dan segitiga bawah

Teorema

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah $n \times n$ matriks segitiga. Maka:

$$A + B, \quad kA, \quad AB$$

adalah matriks segitiga dengan elemen diagonalnya yaitu:

$$(a_{11} + b_{11}, \dots, a_{nn} + b_{nn}), \quad (ka_{11}, \dots, ka_{nn}), \quad (a_{11}b_{11}, \dots, a_{nn}b_{nn})$$

Matriks simetris

Suatu matriks A adalah **simetris** jika $A^T = A$, yaitu $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Matriks A **simetris miring** (*skew-symmetric*) jika $A^T = -A$.

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

A adalah matriks simetris, dan B adalah matriks simetris miring.

Dapatkah Anda menemukan contoh lain? Temukan contoh matriks yang tidak simetris dan tidak simetris miring.

Sebuah matriks A adalah **matriks normal** jika $AA^T = A^T A$.

Contoh

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Maka:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Karena $AA^T = A^T A$, matriks A adalah normal.

Bagian 4: Matriks blok

Dengan menggunakan sistem garis horizontal dan vertikal (putus-putus), matriks A dapat dipartisi menjadi submatriks yang disebut **blok** (atau **sel**) dari A .

Contoh

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ \hline 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

Operasi pada matriks blok

Misalkan $A = [A_{ij}]$ dan $B = [B_{ij}]$ adalah matriks blok dengan jumlah blok baris dan kolom yang sama, dan misalkan blok yang bersesuaian memiliki ukuran yang sama.

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2n} + B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$$

dan

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{m1} & kA_{m2} & \cdots & kA_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks blok persegi

Matriks blok M disebut **matriks blok persegi** jika:

- 1 M adalah matriks persegi.
- 2 Blok-bloknya (dipandang sebagai entri) membentuk matriks persegi.
- 3 Blok diagonalnya juga matriks persegi.

Contoh

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

Manakah dari matriks di atas yang merupakan matriks blok persegi?

Matriks blok persegi

Matriks blok M disebut **matriks blok persegi** jika:

- 1 M adalah matriks persegi.
- 2 Blok-bloknya (dipandang sebagai entri) membentuk matriks persegi.
- 3 Blok diagonalnya juga matriks persegi.

Contoh

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

Manakah dari matriks di atas yang merupakan matriks blok persegi?

Matriks B adalah matriks blok persegi.

Matriks blok diagonal

Matriks blok diagonal adalah matriks blok persegi $M = [A_{ij}]$ sedemikian sehingga blok-blok non-diagonalnya adalah matriks nol.

Contoh

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Matriks blok diagonal sering dilambangkan sebagai
 $M = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{rr})$

Determinan dan invers matriks berukuran kecil

Matriks persegi A dikatakan **invertible** atau **tak-singular** jika $\exists B$ s.t.:

$$AB = BA = I \quad \text{di mana } I \text{ adalah matriks identitas}$$

Catatan: Matriks B **tunggal** (tepat satu invers), dan disebut **invers** dari A , yang dilambangkan dengan A^{-1} .

Hubungan A dan B bersifat **simetris**:

Jika B adalah kebalikan dari A , maka A adalah kebalikan dari B , i.e.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Contoh

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ Maka:

$$AB = \begin{bmatrix} 6 - 5 & -10 + 10 \\ 3 - 3 & -5 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diberikan matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Apakah B merupakan invers dari A ?
- Apakah A merupakan invers dari B ?

Solusi.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi A dan B adalah invers satu sama lain.

Pertanyaan. Dapatkah Anda menemukan dua matriks persegi A dan B berukuran 2×2 , dimana B adalah invers dari A namun A bukan invers dari B ?

Ingatlah kembali pelajaran saat Anda di SMA.

Tentukan invers dari:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Solusi.

$|A| = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$. Karena $|A| \neq 0$, maka matriks A memiliki invers.

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sementara itu, $|B| = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$. Maka matriks B tidak memiliki invers atau merupakan sebuah matriks singular.

Latihan

(Akan didiskusikan dalam perkuliahan)

1. Merumuskan algoritma perkalian matriks

Diberikan dua matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Hitunglah $A \times B$.
- Jelaskan prosedur langkah demi langkah untuk menghitung $A \times B$ untuk setiap matriks $A_{m \times k}$ dan $B_{k \times n}$.
- Tulislah prosedur dalam algoritma (Anda dapat menulisnya sebagai kode semu (*pseudo-code*)).

2. Bagaimanakah cara menyelesaikan perkalian matriks dengan menggunakan matriks blok?

Diberikan dua matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Hitung $A \times B$.

Bagaimana jika kedua matriks tersebut ditulis dalam matriks blok?

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Dapatkah Anda merumuskan langkah-langkah perkalian matriks blok?

bersambung...