Aljabar Linier

[KOMS119602] - 2022/2023

5.1 - Determinan Matriks

Dewi Sintiari

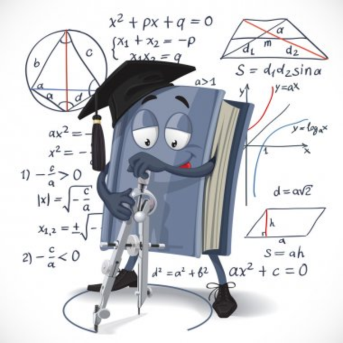
Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Pertemuan 5 (Oktober 2022)

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan konsep determinan suatu matriks;
2. menghitung determinan dari matriks (2×2);
3. menghitung determinan dari matriks (3×3);
4. menjelaskan interpretasi geometris determinan matriks (2×2);
5. menjelaskan interpretasi geometris determinan matriks (3×3);
6. menjelaskan penggunaan determinan dalam penyelesaian sistem persamaan liner;
7. menggunakan permutasi untuk menghitung determinan;

Good math skills are developed by doing lots of problems.



Part 1: Definisi formal dari determinan

Definisi formal matriks determinan

Diberikan matriks persegi $A = [a_{ij}]$ dengan ukuran $n \times n$.

Kita dapat menetapkan *skalar* terhadap matriks A, sebagai fungsi dari entri-entri matriks persegi, yang disebut sebagai determinan dari matriks A.

Determinan matriks A dilambangkan dengan $|A|$, dan seringkali ditulis sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Untuk $n = 1, 2$, determinan matriks didefinisikan sebagai:

$$|a_{11} = a_{11}| \qquad \text{dan} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Contoh

Tentukan determinan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad dan \qquad \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Part 2: Determinan dari matriks 2×2

Determinan dari matriks 2×2

Diberikan sebuah matriks

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}$$

Di sekolah menengah, Anda mungkin telah mempelajari bahwa determinan dari matriks (ukuran 2×2) didefinisikan sebagai

$$A_1 B_2 - A_2 B_1$$

dan dinotasikan dengan:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Contoh motivasi

Perhatikan lagi sistem persamaan linier dalam dua variabel:

$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2$$

- Sistem memiliki tepat <u>satu solusi</u> ketika $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$
- Sistem <u>tidak memiliki solusi atau memiliki banyak solusi</u> ketika $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

Contoh motivasi

Perhatikan lagi sistem persamaan linier dalam dua variabel:

$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2$$

- Sistem memiliki tepat <u>satu solusi</u> ketika $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$
- Sistem <u>tidak memiliki solusi atau memiliki banyak solusi</u> ketika $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

Matriks koefisien $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}$ memiliki determinan $= A_1B_2 - A_2B_1$.

Catatan. Dengan demikian, determinan dari matriks koefisien menentukan jumlah solusi dari sistem yang diberikan. Sistem memiliki solusi unik jika $D \neq 0$.

Menyelesaikan SPL dengan metode eliminasi:

$$A_1B_2x + B_1B_2y = B_2C_1$$
$$A_2B_1x + B_1B_2y = B_1C_2$$

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x = B_2C_1 - B_1C_2$$
$$x = \frac{B_2C_1 - B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Sehingga:

$$B_2C_1 - B_1C_2 = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = N_x \text{ dan } A_1B_2 - A_2B_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = D$$

Dengan demikian, $x = \frac{N_x}{D}$

Penerapan determinan pada sistem persamaan linear

Nilai y dapat ditemtukan dengan cara serupa:

$$A_1A_2x + A_2B_1y = A_2C_1$$
$$A_1A_2x + A_1B_2y = A_1C_2$$

$$(A_2B_1 - A_1B_2)y = A_2C_1 - A_1C_2$$
$$x = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_2B_1 - A_1B_2} = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Sehingga:

$$A_1C_2 - A_2C_1 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = N_y \text{ dan } A_1B_2 - A_2B_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = D$$

Jadi, $y = \frac{N_y}{D}$

Contoh penyelesaian SPL dengan determinan

Selesaikan sistem berikut menggunakan determinan:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -10 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

Solusi:

$$N_x = \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -20 - (-8) = -12$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

Jadi, $x = \frac{-12}{2} = -6$ dan $y = \frac{-4}{2} = -2$.

Kesimpulan

Diberikan:

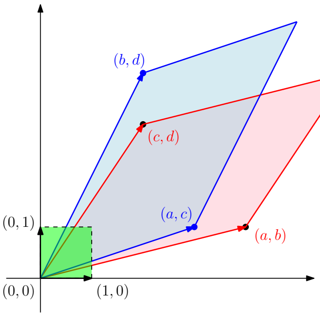
$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y &= C_1 \\ A_2 x + B_2 y &= C_2 \end{aligned}$$

dengan matriks koefisien $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}$ memiliki determinan tak-nol (artinya, SPL memiliki solusi tunggal).

Solusi SPL adalah:

$$x = \frac{N_x}{D} \quad \text{dan} \quad y = \frac{N_y}{D}$$

dimana $N_x = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $N_y = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$, dan $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.



Matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat dilihat sebagai "pengaturan" dari:

- vektor baris: $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$
- atau, vektor kolom: $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

Matriks mendefinisikan apa yang disebut *transformasi linier* dari persegi satuan (digambar hijau) yang dibentuk oleh *vektor basis* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, sehubungan dengan:

- vektor baris, ditunjukkan oleh jajar genjang merah; atau
- vektor kolom, ditunjukkan oleh jajar genjang biru

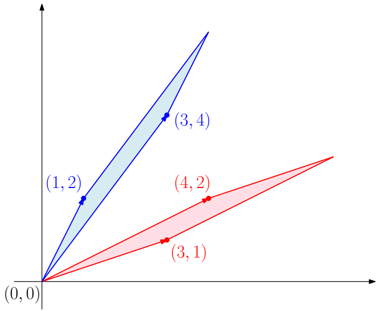
Kedua jajar genjang memiliki luas yang sama.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Gambarlah dua jajar genjang yang mendefinisikan transformasi persegi satuan terhadap masing-masing vektor baris dan vektor kolom.

Solusi:



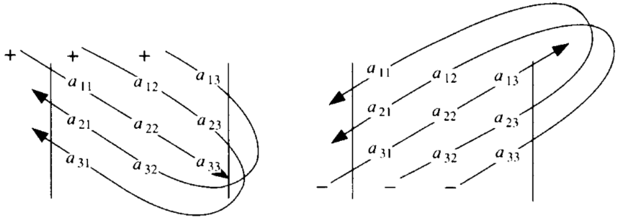
Bagian 3: Determinan matriks ukuran 3×3

Diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks di atas didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$



Determinan dari matriks di atas didefinisikan sebagai:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Formula ini dapat digambarkan sebagai berikut:

$$
a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

Contoh

Tentukan determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Solusi:

- *Dengan menggunakan diagram*

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3(5)(4) + 2(-1)(2) + (1)(-4)(-3) - 1(5)(2) - 2(-4)4 - 3(-1)(-3) \\ &= 60 - 4 + 12 - 10 + 32 - 9 \ = \ 81 \end{aligned}$$

- *Dengan menggunakan bentuk alternatif*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1(20 - 3) - 2(-16 + 2) + 3(12 - 10) = 17 + 28 - 6 = 39 \end{aligned}$$

Diketahui sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{cases}$$

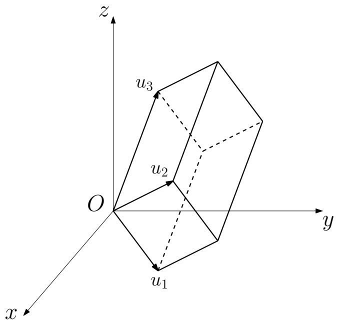
Kita dapat melakukan perhitungan serupa seperti pada kasus matriks (2×2), untuk menemukan solusi sistem.

Matriks koefesien dari SPL tersebut adalah: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

SPL memiliki solusi tunggal hanya jika $D = \det(A) \neq 0$.
Solusinya adalah:

$$x = \frac{N_x}{D}, \quad y = \frac{N_y}{D}, \quad z = \frac{N_z}{D}$$

dimana N_x, N_y, dan N_z diperoleh dengan mengganti kolom ke-1, ke-2, dan ke-3 dari A dengan vektor konstanta $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.



Dalam $\mathbb{R}^3$, vektor u_1, u_2, dan u_3 menentukan paralelepiped,

yang merupakan hasil transformasi kubus satuan menggunakan vektor $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Catatan.
Misal $u_1, u_2, \dots, u_n$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$. Maka persamaan paralelepiped:

$$S = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n \;:\; 0 \le a_i \le 1 \text{ for } i = 1, \dots, n\}$$

$V(S) =$ nilai mutlak $\det(A)$

Bagian 4: Determinan dengan orde sembarang (*secara kombinatorial*)

Pola dalam rumus determinan

Dapatkah Anda menemukan pola dari rumus-rumus determinan berikut?

- Untuk matriks 2×2, misalkan: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Untuk matriks 3×3, misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ maka:}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = & \; a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Kita akan mempelajari pola-pola ini!

Tanda (paritas) permutasi

Diberikan urutan elemen: $\sigma = j_1 j_2 \ldots j_n$, permutasi dari σ didefinisikan sebagai susunan objek di σ dalam urutan tertentu.

Himpunan semua permutasi dari objek n dilambangkan dengan S_n.

Invers di σ adalah sepasang bilangan bulat (i, k), sehingga $i > k$ tetapi i mendahului k di σ .

σ disebut:

- permutasi genap, jika banyaknya inversi di σ adalah genap;
- permutasi ganjil, sebaliknya.

Tanda atau paritas dari permutasi σ didefinisikan oleh:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \sigma \text{ genap} \\ -1 & \text{jika } \sigma \text{ ganjil} \end{cases}$$

Diberikan permutasi $\sigma = 35412$ dalam S_5. Bagaimanakah tanda dari σ?

Solusi:

- 3 angka (3, 4 dan 5) mendahului 1;
- 3 angka (3, 4 dan 5) mendahului 2;
- 1 angka (5) mendahului 4;
- tidak ada angka yang mendahului 3 atau 4

Karena $3 + 3 + 1 = 7$ ganjil, maka σ adalah permutasi ganjil. Oleh karena itu

$$\text{sgn}(\sigma) = -1$$

Latihan:

1. Cari tanda permutasi: $\epsilon = 123 \dots n$ dalam S_n.
2. Temukan tanda setiap permutasi dalam S_2 dan S_3.
3. Benarkah di S_n, setengah dari permutasinya genap, dan setengahnya ganjil?

Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ pada suatu *lapangan* K. Perhatikan perkalian dari n elemen dari A yaitu:

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

dimana dalam hal ini, $j_1 j_2 \ldots j_n$ adalah permutasi dari $123 \ldots n$.

Sehingga:

- *satu dan hanya satu* elemen berasal dari setiap baris A; dan
- *satu dan hanya satu* elemen berasal dari setiap kolom A.

Q: *Berapa banyak perkalian yang berbeda dari bentuk* $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ *yang ada?*

A: *Terdapat* $n!$ *perkalian seperti itu, karena ada* $n!$ *kemungkinan permutasi dari* $j_1 j_2 \ldots j_n$.

Permutasi untuk menghitung determinan (2)

Determinan dari matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ didefinisikan sebagai:

> *jumlah semua perkalian* $n!$ $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$*, di mana setiap perkalian dikalikan dengan tanda* $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$.

$$|A| = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

atau, dapat dituliskan sebagai:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)} a_{2j\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

1. Diketahui $A = [a_{11}]$, maka $\det(A) = a_{11}$.
2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, lalu $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
3. Diberikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka:

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

bersambung...