Aljabar Linier
[KOMS119602] - 2022/2023

7.1 - Vektor di R^n

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan pengertian vektor secara umum;
2. menjelaskan definisi vektor dalam Aljabar Linier;
3. menjelaskan beberapa operasi pada vektor, seperti:
    - penjumlahan vektor dan perkalian skalar;
    - kombinasi linier.

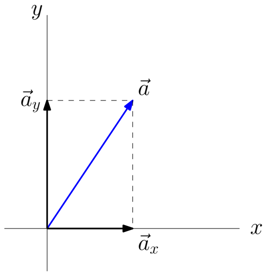
Bagian 1: **Vektor** (*secara umum*)

Tiga cara mendefinisikan vektor:

1. Perspektif Fisika
2. Perspektif Matematika
3. perspektif CS

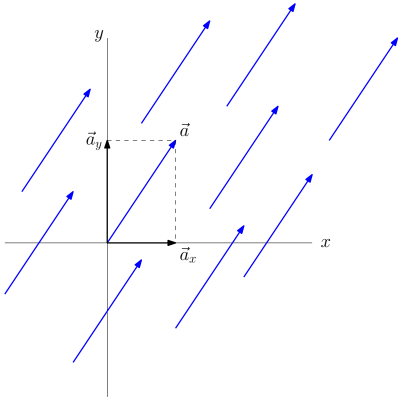
Vektor adalah besaran yang memiliki *nilai* dan *arah* dan digambarkan dengan himpunan ruas garis berarah.

Biasanya, vektor dilambangkan dengan huruf yang diketik dengan huruf tebal, atau dengan panah di atasnya; misalnya $\vec{a}$. Vektor sering dinyatakan sebagai tanda panah yang memiliki panjang dan arah yang bersesuaian.

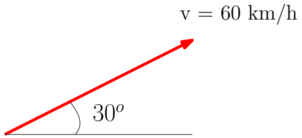


Bagaimana mendefinisikan vektor (dalam fisika)?

- Panjang (besar)
- Arah

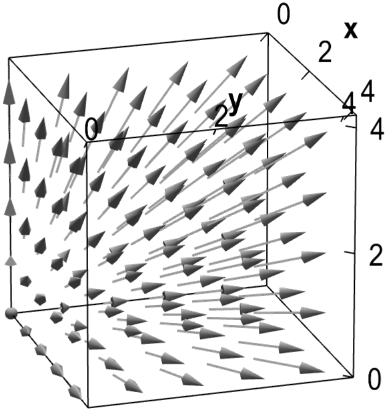


Dua vektor dikatakan sama jika panjang dan arahnya sama



Kecepatan sebuah mobil adalah $60km/jam$, dan melaju ke 30^o ke arah timur laut.

Vektor dalam ruang berdimensi 3 (dalam fisika)



Apa itu vektor (dalam Ilmu Komputer)?

Example

Seorang guru perlu memeriksa kesehatan siswanya, dengan mengukur *berat* dan *tinggi* mereka. Bagaimana seharusnya data direpresentasikan?

$$\begin{bmatrix} 40kg \\ 150cm \end{bmatrix}$$

Ini adalah vektor berdimensi 2

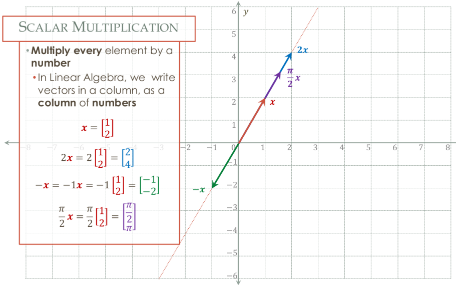
$$\begin{bmatrix} 40kg \\ 150cm \\ 14years \end{bmatrix}$$

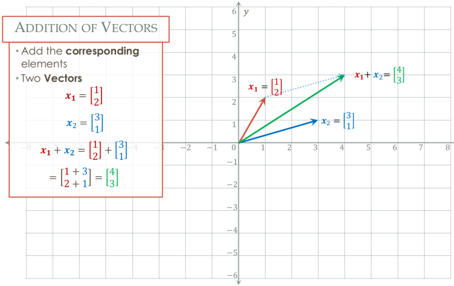
Ini adalah vektor berdimensi 3

Dalam Ilmu Komputer, sebuah vektor dapat dianggap sebagai daftar (tupel) angka

Konsep matematika vektor adalah kombinasi dari keduanya:

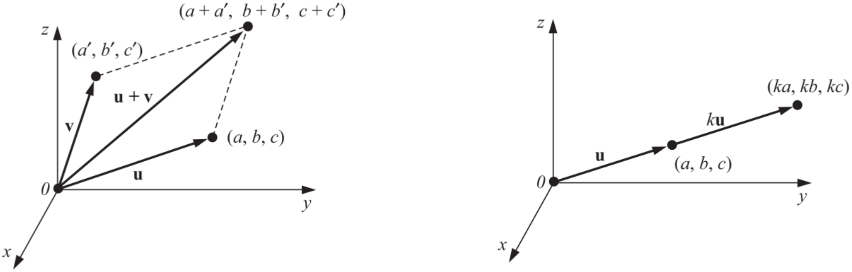
- Vektor dapat dipdanang secara geometris atau *algebraic*;
- Kita dapat melakukan operasi seperti penjumlahan, perkalian, pengurangan, dll.





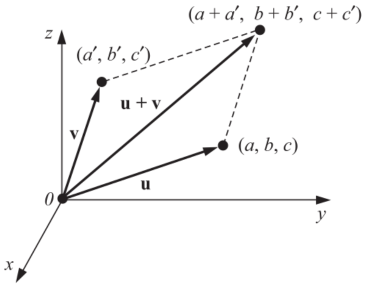
Kembali ke sekolah menengah: *operasi sederhana dalam vektor yang mungkin telah dana pelajari dalam fisika*

1. penjumlahan vektor
2. perkalian skalar

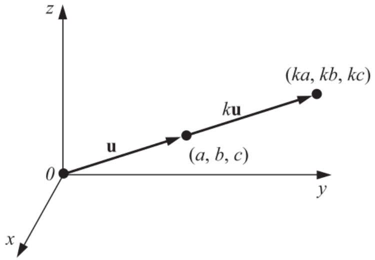


(a) Vector Addition (b) Scalar Multiplication

Penjumlahan vektor ($\mathbf{u} + \mathbf{v}$)



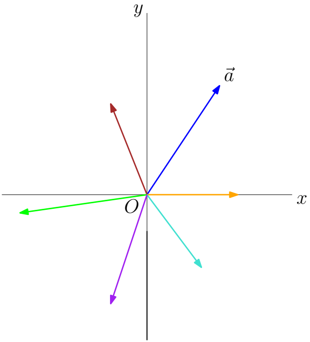
- Secara geometris, *resultant* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ diperoleh dengan hukum jajaran genjang
- Jika $\mathbf{u}$ memiliki titik akhir (a, b, c) dan $\mathbf{v}$ memiliki titik akhir (a', b', c'), maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ memiliki titik akhir $(a + a', b + b', c + c')$



- Misalkan $k \in \mathbb{R}$, maka $k\mathbf{u}$ adalah vektor yang besarnya k kali besar u, dan arahnya sama ketika $k > 0$ atau berlawanan arah ketika $k < 0$.
- Jika $\mathbf{u}$ memiliki titik akhir (a, b, c), maka titik akhir $k\mathbf{u}$ adalah (ka, kb, kc).

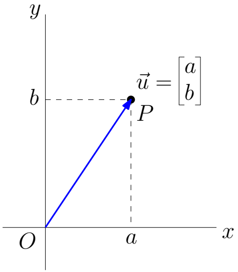
Bagian 2: **Vektor dalam Aljabar Linier**

Secara geometris:



- Vektor adalah panah yang berasal dari titik asal O
- Notasi: **u,v,w, . . .** atau $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$

Dalam ruang berdimensi 2



Vectors are arrows originated at the origin O.

Hal ini tidak sama dengan titik.

Vektor $\vec{u}$ sama dengan $\overrightarrow{OP}$

Nilai a dan b dalam $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ menunjukkan seberapa jauh vektor $\vec{u}$ bergerak sepanjang sumbu x dan sumbu y resp.

Tdana positif (resp. negatif) dari a atau b menunjukkan bahwa ia bergerak ke kanan atau ke atas (resp. kiri atau bawah).

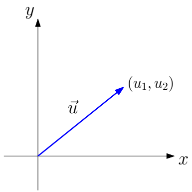
Dalam 3D, ini serupa, tetapi kami mempertimbangkan tiga sumbu (x, y, dan z).

Apa itu ruang vektor?

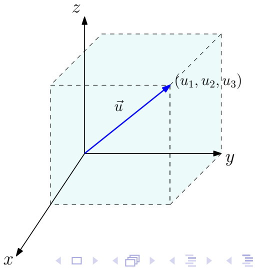
- *n*-tuple teurut adalah barisan *bilangan real*: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (atau, dapat dilihat sebagai vektor).
- *n*-space adalah himpunan semua *n*-tupel bilangan real. Biasanya dilambangkan sebagai $\mathbb{R}^n$. Untuk $n = 1$, $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$.
  - Ruang ini adalah di mana vektor terdefinisi
- Ruang ini juga disebut ruang Euclid.

Contoh:

Vector in $\mathbb{R}^2$

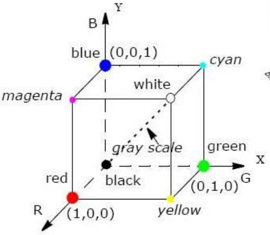


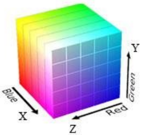
Vector in $\mathbb{R}^3$

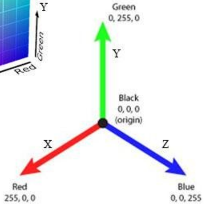


Contoh

1. $\vec{u} = (3, 6) \;\rightarrow\;$ vector in $\mathbb{R}^2$
2. $\vec{v} = (2, -4, 5) \;\rightarrow\;$ vector in $\mathbb{R}^4$
3. $\vec{w} = (-4, 2, -3, 1) \;\rightarrow\;$ vector in $\mathbb{R}^4$
4. $\vec{c} = (r, g, b) \;\rightarrow\;$ vector in RGB-model





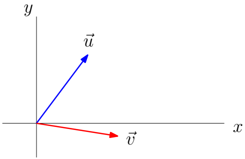


Kita akan kembali ke ruang vektor $\mathbb{R}^n$.

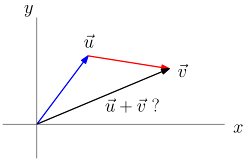
Untuk saat ini, mari kita lihat $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$.

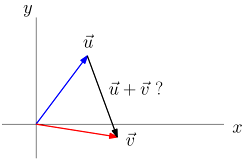
Bagian 3: Operasi vektor dalam R_2 dan R_3

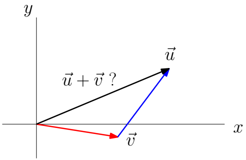
Diberikan vektor-vektor berikut:



Vektor manakah yang menyatakan $\vec{u} + \vec{v}$?

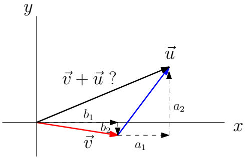


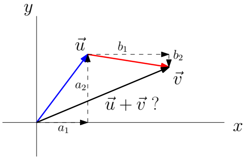




Sebuah vektor mendefinisikan gerakan tertentu dalam ruang (seberapa jauh, ke arah mana).

- $\vec{u} = [a_1 \;\; a_2] \rightarrow$ memindahkan a_1 langkah ke arah sumbu x, dan a_2 langkah ke arah sumbu y.
- $\vec{v} = [b_1 \;\; b_2] \rightarrow$ memindahkan b_1 langkah ke arah sumbu x, dan b_2 langkah ke arah sumbu y.

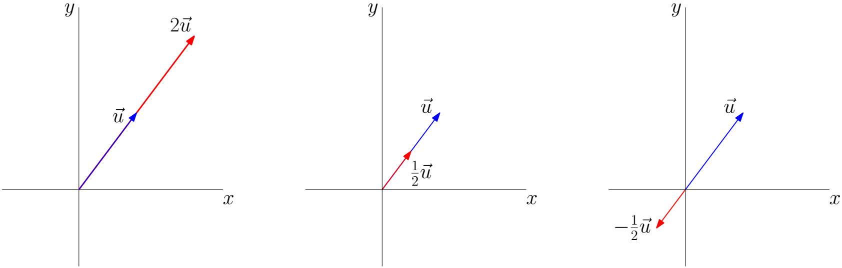




Jadi $\vec{u} + \vec{v}$ dapat dilihat sebagai bergerak sepanjang vektor $\vec{u}$ dilanjutkan dengan bergerak sepanjang vektor $\vec{v}$, yaitu memindahkan $a_1 + b_1$ melangkah ke arah sumbu x, dan $a_2 + b_2$ melangkah ke arah sumbu y.

$$\vec{u} + \vec{v} = [(a_1 + b_1) \;\; (a_2 + b_2)]$$

Perkalian skalar (representasi geometris)



Mengalikan vektor dengan skalar dapat dilihat sebagai "penskalaan" sebuah vektor (meregangkan, dan terkadang membalikkan arah vektor).

Contoh

Latihan

Bagian 4: Vektor spasial

Vektor dalam $\mathbb{R}^3$ disebut vektor spasial, muncul di banyak aplikasi, terutama dalam fisika.

Notasi khusus:

- $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$ menunjukkan vektor satuan dalam arah x
- $\mathbf{j} = [1, 0, 0]$ menunjukkan vektor satuan dalam arah y
- $\mathbf{k} = [1, 0, 0]$ menunjukkan vektor satuan dalam arah z

Setiap vektor $\mathbf{u} = [a, b, c]$ dalam $\mathbb{R}^3$ dapat diekspresikan secara unik dalam bentuk:

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Important! $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ adalah vektor, dan mereka adalah vektor satuan. Lebih lanjut:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1,\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \quad dan \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0,\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$$

Persamaan yang tepat menunjukkan bahwa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ saling ortogonal satu sama lain.

Semua operasi vektor masih berlaku:

Untuk $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, dan $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, maka:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j} + (u_3 + v_3)\mathbf{k}$
- $k\mathbf{u} = ku_1\mathbf{i} + ku_2\mathbf{j} + ku_3\mathbf{k}$ for any $k \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Contoh

Misal $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Tentukan $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= 3(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 2(4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\ &= (9\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + (-8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \\ &= 1\mathbf{i} + 31\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \end{aligned}$$

bersambung...