Aljabar Linier

[KOMS120301] - 2022/2023

2.1 - Aljabar Matriks

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022



Learning objectives

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan dapat:

- Mendefinisikan dan menulis komponen matriks (baris, kolom, diagonal, dan entri) dengan benar.
- Melakukan operasi antar matriks, seperti: perkalian skalar, penjumlahan matriks, perkalian matriks, transpos, pangkat matriks, dan polinomial matriks.
- Menerapkan sifat-sifat operasi matriks untuk memecahkan masalah.
- Menjelaskan konsep dan sifat-sifat matriks persegi.
- Menerapkan konsep matriks blok untuk menyelesaikan operasi matriks.



Contoh matriks (1)

	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
John	30	10	20	9	14
Amy	10	9	7	19	25
Bob	20	7	0	10	20

A matrix of messages

Contoh matriks (2)



A matrix of expenses

Contoh matriks (3)

	Boston	New York	London
Boston	0	187	3269
New York	187	0	3459
London	3269	3459	0

Contoh matriks (4)

MOTIVATION MATRIX

Enter your sub headline here



Jadi, apa yang bisa Anda katakan tentang matriks?



Bagian 1: Matriks dan operasinya

Definisi MATRIKS

Sebuah matriks A atas lapangan K (atau cukup disebut matriks A, ketika K sudah terdefinisi dengan jelas), adalah sebuah array berbentuk persegi panjang, dan berisikan skalar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris dari matriks A adalah daftar m elemen yang tersusun horizontal:

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

Kolom dari matriks A adalah daftar n elemen yang tersusun vertikal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m3} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Note: Jadi, matriks terdiri dari sekumpulan vektor.

Definisi MATRIKS

Elemen a_{ij} dari matriks A (pada baris i, kolom j) disebut entri ke-ij atau elemen ke-ij.

Ini dinotasikan dengan: $A = [a_{ij}].$

A adalah matriks berukuran size $m \times n$.

- jika m = 1 (hanya satu baris), maka disebut matriks baris atau vektor baris;
- jika n = 1 (hanya satu kolom), maka disebut matriks kolom atau vektor kolom.

A disebut zero matrix jika semua entri matriks adalah nol.

Contoh persoalan

- Matriks baris: [1 2 3]
- Matriks kolom: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Zero matrix (matriks nol): $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Matriks berukuran 3×2 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Operasi matriks

Kita akan membahas:

- Perkalian skalar
- Penambahan matriks
- Perkalian matriks
- Transpose matriks
- Perpangkatan matriks
- Polinomial dari matriks

1. Perkalian matriks dengan skalar

Hasil perkalian dari matriks $A = [a_{ij}]$ dengan skalar $k \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, -A = (-1)A.

2. Penjumlahan matriks

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks dengan ukuran yang sama, yaitu ukuran $m \times n$. Jumlah dari A dan B didefinisikan sebagai:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, A - B = A + (-B).

Sifat-sifat matriks pada penjumlahan dan perkalian skalar

Theorem

Misalkan A, B, dan C merupakan matriks dengan ukuran yang sama, dan $k, k' \in \mathbb{R}$. Maka:

•
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
 (asosiatif)

$$\bullet \ A + B = B + A$$
 (komutatif)

•
$$A + 0 = A$$
 (0 adalah elemen identitas thd penjumlahan)

•
$$A + (-A) = 0$$
 (matriks invers the penjumlahan)

•
$$k(A+B) = kA + kB$$
 (distributif)

•
$$(k + k')A = kA + k'A$$
 (distributif the skalar)

•
$$(kk')A = k(k'A)$$
 (asosiatif thd scalar)

•
$$1 \cdot A = A$$
 (1 adalah elemen identitas thd perkalian skalar)

Note: Oleh karena itu, jumlah $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ dapat dihitung dalam urutan apa pun, dan tidak memerlukan tanda kurung.

Contoh persoalan

Diketahui matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Sederhanakan ekspresi matriks berikut.

$$\bullet$$
 -3A + 2B

•
$$5A + 2B - 3C$$

•
$$3(A-C)+B$$

3. Perkalian matriks

Kasus khusus: hasil kali matriks baris dan matriks kolom yang memiliki jumlah elemen yang sama.

Misalkan $A = [a_i]$ menjadi matriks baris dan $B = [b_i]$ menjadi matriks kolom. Maka produk AB didefinisikan sebagai:

$$AB = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i$$

Catatan: hasil kali *A* dan *B* adalah skalar.

Example

$$[7, -4, 5]$$
 $\begin{bmatrix} 3\\2\\-1 \end{bmatrix}$ = 7(3) + (-4)(2) + 5(-1) = 21 - 8 - 5 = 8



Perkalian matriks

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks dengan ukuran $m \times p$ dan $p \times n$. Maka hasil kali A dan B adalah matriks AB dengan ukuran $m \times n$ yang didefinisikan oleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Contoh persoalan

Temukan
$$AB$$
 dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Kalikan setiap baris A dengan setiap kolom dari B.

Karena A berukuran 2×2 dan B berukuran 2×3 , maka AB berukuran 2×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} 2+15 & 0-6 & -4+18 \\ 4-5 & 0+2 & -8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

Hubungan antara penjumlahan matriks dan perkalian matriks

Theorem

Misalkan A, B, dan C adalah matriks. Jika penjumlahan dan perkalian matriks terdefinisi dengan jelas, maka:

•
$$(AB)C = A(BC)$$
 (asosiatif)

•
$$A(B+C) = AB + AC$$
 (distributif kiri)

•
$$(B+C)A = BA + CA$$
 (distributif kanan)

- k(AB) = (kA)B = A(kB) dimana $k \in \mathbb{R}$
- 0A = 0 dan A0 = 0, dimana 0 adalah matriks nol

Transpos matriks

Transpos dari sebuah matriks A, dilambangkan dengan A^T , adalah matriks yang diperoleh dengan menuliskan kolom-kolom A, secara berurutan, sebagai baris.

$$\mathsf{Jika}\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathsf{maka}\ A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Catatan: Jika A memiliki ukuran $m \times n$, maka A^T memiliki ukuran $n \times m$.

Example

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$



Perpangakatan matriks, Polinomial matriks

Jika A memiliki ukuran $m \times n$, maka A^T memiliki ukuran $n \times m$. Misalkan A adalah matriks persegi dengan order n atas \mathbb{R} (atau atas lapangan lain). Perpangkatan dari A didefinisikan sebagai:

$$A^2 = AA$$
, $A^3 = A^2A$, ..., $A^{n+1} = A^nA$, ..., dan $A^0 = 1$

Kita juga dapat mendefinisikan polinomial dalam matriks A. Untuk polinomial apa pun:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
, dimana $a_i \in \mathbb{R}$,

Polinomial f(A) didefinisikan sebagai:

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

Catatan: Jika f(A) = 0 (matriks nol), maka A disebut pembuat nol (zero) atau akar (root) dari f(x).



Contoh persoalan

Misal
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$
. Maka:
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$
$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$$

Misal
$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$
, maka:

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$



Exercise

- Form a group of 3 students;
- ② Do the following exercises (Howard Anton's book):
 - Number 1 & 2 (2 questions @)
 - Number 3-6 (3 questions @)
 - Number 9-10 (choose 1 or 2 columns)

Bagian 2: Matriks persegi

Matriks persegi

Matriks persegi adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Diagonal and Trace

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi dengan order n. Diagonal atau diagonal utama dari A terdiri dari elemen dengan subskrip yang sama, yaitu:

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

Trace dari A, dilambangkan dengan tr(A) adalah jumlah elemen diagonal dari A.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Theorem (Properties of trace)

- tr(A+B) = tr(A) + tr(B)
- tr(kA) = ktr(A)
- $tr(A^T) = tr(A)$
- tr(AB) = tr(BA) (ingatlah bahwa tidak selalu $AB \neq BA$)

Matriks identitas, matriks skalar

The identity or unit matrix, denoted by I_n (or simply I) is the square matrix $n \times n$, with 1's on the diagonal, and 0's elsewhere.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

I has a similar role as the scalar 1 for \mathbb{R} .

Sifat penting: Ketika terdefinisi dengan baik,

$$IA = A$$

Untuk beberapa skalar $k \in \mathbb{R}$, matriks kl disebut matriks skalar yang sesuai dengan skalar k.



Jenis matriks persegi khusus

Matriks $D = [d_{ij}]$ adalah matriks diagonal jika entri non-diagonalnya semuanya nol.

$$D = \mathsf{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$$

dimana beberapa dari d_{ii} atau semua d_{ii} mungkin nol.

Example

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 9 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, matriks identitas dan matriks skalar juga merupakan matriks diagonal.

Matriks segitiga atas dan segitiga bawah

Matriks persegi $A = [a_{ij}]$ adalah segitiga atas (*upper-triangular*), jika semua entri di bawah diagonal utama sama dengan 0.

Matriks segitiga bawah (*lower-triangular*) adalah matriks persegi yang entri-entri di atas diagonal utama semuanya nol.

a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}
0	a ₂₂	a ₂₃		a _{2n}
0	0	a ₃₃		a _{3n}
			٠.	
0	0	0	• • •	a_{nn}

_				
a ₁₁	0	0	• • •	0]
a ₂₁	a ₂₂	0		0
a ₃₁	a ₃₂	a ₃₃		0
			٠	
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}		ann

Matriks segitiga atas dan segitiga bawah

Theorem

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah $n \times n$ matriks segitiga. Maka:

$$A + B$$
, kA , AB

adalah matriks segitiga dengan elemen diagonalnya yaitu:

$$(a_{11}+b_{11}, \ldots, a_{nn}+b_{nn}), (ka_{11}, \ldots, ka_{nn}), (a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$$

Matriks simetris

Suatu matriks A adalah simetris jika $A^T = A$, yaitu $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Itu skew-symmetric jika $A^T = -A$.

Example

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

A adalah matriks simetris, dan B adalah matriks simetris miring.

Dapatkah Anda menemukan contoh lain? Temukan contoh matriks yang tidak simetris dan tidak simetris miring.



Matriks normal

Sebuah matriks A adalah matriks normal jika $AA^T = A^TA$.

Example

Misalkan
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$
. Maka:
$$AA^{T} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$
$$A^{T}A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Karena $AA^T = A^TA$, matriks A adalah normal.

Bagian 4: Matriks blok

Matriks blok

Dengan menggunakan sistem garis horizontal dan vertikal (putus-putus), matriks A dapat dipartisi menjadi submatriks yang disebut blok (atau sel) dari A.

Example

Operasi pada matriks blok

Misalkan $A = [A_{ij}]$ dan $B = [B_{ij}]$ adalah matriks blok dengan jumlah blok baris dan kolom yang sama, dan misalkan blok yang bersesuaian memiliki ukuran yang sama.

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$$

dan

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{m1} & kA_{m2} & \cdots & kA_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks blok persegi

Matriks blok M disebut matriks blok persegi jika:

- 1 M adalah matriks persegi.
- 2 Blok-bloknya membentuk matriks persegi.
- Blok diagonalnya juga matriks persegi.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Manakah dari matriks di atas yang merupakan matriks blok persegi?



Matriks blok diagonal

Matriks blok diagonal adalah matriks blok persegi $M = [A_{ij}]$ sedemikian sehingga blok-blok non-diagonalnya adalah matriks nol.

Example

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 7 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{pmatrix}$$

Matriks blok diagonal sering dilambangkan sebagai $M = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{rr})$

Latihan

(Akan didiskusikan dalam perkuliahan)

1. Merumuskan algoritma perkalian matriks

Diberikan dua matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Hitunglah $A \times B$.
- Jelaskan prosedur langkah demi langkah untuk menghitung $A \times B$ untuk setiap matriks $A_{m \times k}$ dan $B_{k \times n}$.
- Tulislah prosedur dalam algoritma (Anda dapat menulisnya sebagai kode semu (pseudo-code)).

2. Bagaimanakah cara menyelesaikan perkalian matriks dengan menggunakan matriks blok?

Diberikan dua matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Hitung $A \times B$.

Bagaimana jika kedua matriks tersebut ditulis dalam matriks blok?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 3 \\ 2 & 3 & | & -2 \\ \hline 3 & 1 & | & 9 \\ 4 & 6 & | & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & | & 1 & 4 \\ -1 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & | & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dapatkah Anda merumuskan langkah-langkah perkalian matriks blok?



bersambung...