Aljabar Linier

[KOMS120301] - 20223/2024

9.1 - Vektor dalam ruang vektor

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 9 (Oktober 2023)

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

1. explain

 © Dewi Sintiari/CS Undiksha

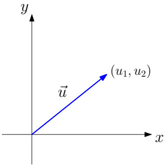
Bagian 1: Ruang vektor

Ingat kembali diskusi sebelumnya...

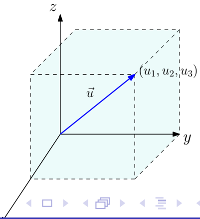
- n-tuple terurut adalah barisan *bilangan riil*: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (atau, dapat dilihat sebagai vektor).
- ruang-n adalah himpunan semua n-tupel bilangan real. Biasanya dilambangkan dengan $\mathbb{R}^n$. Untuk $n = 1$, $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$.
  - Ruang ini adalah ruang dimana vektor terdefinisi
- Ruang n $\mathbb{R}^n$ juga disebut Ruang Euclid.

Contoh:

Vektor in $\mathbb{R}^2$



Vektor in $\mathbb{R}^3$



Vektor di ruang n

- n-tuple di $\mathbb{R}^n$, misalnya $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ disebut titik atau vektor.
- u_i disebut koordinat, komponen, entri, atau elemen dari u.
- Ketika mengacu pada $\mathbb{R}^n$, sebuah elemen dari $\mathbb{R}$ disebut scalar.
- Vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ disebut zero vector.
  - Contoh: vektor nol di $\mathbb{R}^2$ adalah $(0, 0)$, dan vektor nol di $\mathbb{R}^3$ adalah $(0, 0, 0)$
- Vektor **u** dan **v** adalah sama jika mereka memiliki jumlah komponen yang sama, dan komponen yang bersesuaian juga sama.

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Vektor baris dan kolom

Sebuah vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dapat ditulis secara horizontal (disebut vektor baris) atau vertikal (disebut vektor kolom).

$$u = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \qquad\qquad u = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Catatan: setiap operasi yang didefinisikan untuk vektor baris didefinisikan secara analog untuk vektor kolom. Mulai sekarang, vektor sering ditulis sebagai vektor baris.

Bagian 3: **Operasi vektor**

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Penjumlahan vektor dan perkalian skalar vektor

Misalkan u dan v adalah vektor dalam $\mathbb{R}^n$

$$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{and} \quad v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Jumlah $u + v$ didefinisikan sebagai:

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

Jika $k \in \mathbb{R}$, perkalian skalar atau perkalian ku didefinisikan sebagai:

$$ku = k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

Negatif dan pengurangan u dan v didefinisikan sebagai:

$$-u = (-1)u \quad \text{and} \quad u - v = u + (-v)$$

Catatan: $u + v,\ ku,\ -u,\ u - v$ juga merupakan vektor dalam $\mathbb{R}^n$.

Vektor nol dan vektor satu

Vektor nol $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ dan *vektor satu* $1 = (1, 1, \ldots, 1)$ dalam $\mathbb{R}^n$ serupa seperti skalar 0 dan 1 di $\mathbb{R}$.

- Untuk vektor $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, maka:

$$\begin{aligned} u + 0 &= (a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots, a_n + 0) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = u \\ 1u &= 1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = u \end{aligned}$$

Bagian 4: **Kombinasi Linear dari Vektor**

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Diketahui vektor $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ dan skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, kita dapat membentuk vektor baru:

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_m u_m$$

Vektor ini disebut kombinasi linier dari vektor $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Contoh

1. Misalkan $u = (2, 4, -5)$ dan $v = (1, -6, 9)$, maka:

$$\begin{aligned} u + v &= (2 + 1, 4 + (-6), -5 + 9) = (3, -2, 4) \\ 4u &= (8, 14, -20) \\ -v &= (-1, 6, -9) \\ 3u - 2v &= (6, 12, -15) + (-2, 12, -18) \end{aligned}$$

2. Misal $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, maka:

$$2u - 3v = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

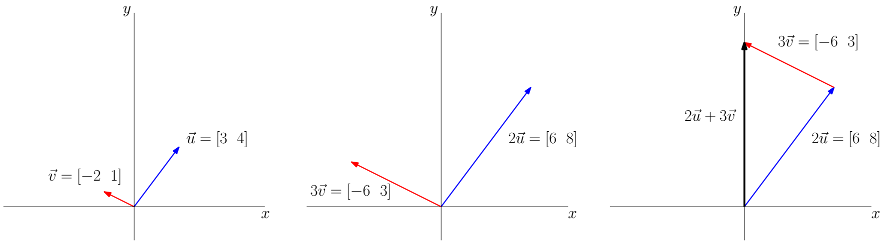
© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Bagaimana Anda menafsirkan kombinasi linier vektor secara geometris?

Lihat sebagai kombinasi penskalaan dan perpindahan vektor dalam ruang

Contoh

Diketahui sebuah vektor $\vec{u} = [3/4]$ *dan* $\vec{v} = [-2/1]$. *Bagaimana Anda menjelaskan* $2\vec{u} + 3\vec{v}$ *?*



© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Interpretasi geometris kombinasi linier

[1 0] dan [0 1] adalah "vektor khusus" dalam ruang 2D. Bisakah Anda menebak mengapa?

Setiap vektor u dalam $\mathbb{R}^2$ dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linier dari vektor $x_1 = [1\ 0]$ dan $x_2 = [0\ 1]$, yaitu:

> *Untuk setiap $u \in \mathbb{R}^2$, terdapat konstanta $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sehingga $u = c_1 x_1 + c_2 x_2$.*
>
> *Khususnya, jika $u = [a_1\ a_2]$ maka $u = a_1 x_1 + a_2 x_2$.*

Contoh

$[4\ 3] = 4[1\ 0] + 3[0\ 1]$

- Apa vektor khusus dalam ruang 3D?
- Bagaimana dengan nD-space?

Himpunan

$$\{x_i,\ i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ 1 berada pada posisi } i\text{-th}\}$$

adalah himpunan vektor khusus dalam ruang n.

Jadi setiap vektor $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dapat ditulis sebagai:

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

Kita katakan bahwa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ mencakup $\mathbb{R}^n$.

Definisi yang lebih formal akan dibahas kemudian.

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Secara aljabar, dua vektor adalah bebas linier jika tidak satu pun dari vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari yang lain.

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Contoh independensi linier vektor

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Bagian 5: **Komputasi Numerik Vektor dalam $\mathbb{R}^n$**

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Sifat-sifat vektor di bawah operasi

Teorema

Untuk sembarang vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *dan semua skalar* $k, k' \in \mathbb{R}$,

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(associative)*
2. $\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$ *(identity elt w.r.t. addition)*
3. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$ *(two opposite vectors)*
4. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(commutative)*
5. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ *(distributive w.r.t. scalar mult.)*
6. $(k + k')\mathbf{u} = k\mathbf{u} + k'\mathbf{u}$
7. $(kk')\mathbf{u} = k(k'\mathbf{u})$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ *(identity elt w.r.t. multiplication)*

Catatan: Misalkan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor dalam $\mathbb{R}^n$, dan $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ untuk beberapa $k \in \mathbb{R}$. Kemudian $\mathbf{u}$ disebut multiple dari $\mathbf{v}$. Jika $k > 0$, maka $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ memiliki arah yang sama, dan jika $k < 0$, maka mereka berada di berlawanan arah.

Contoh

bersambung...