02 - Analisis Kompleksitas Komputasional

[KOMS119602] & [KOMS120403]

Design and Analysis of Algorithm (2021/2022)

Dewi Sintiari

Prodi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 14-18 February 2022

Daftar isi

Bagian 1: Motivasi

Algoritma untuk menghitung fpb

Ingatlah materi minggu lalu...

Menghitung fpb:

- Input: bilangan bulat a dan b
- Output: fpb dari m dan n

Algorithm 1 Algoritma sederhana fpb dari dua bilangan bulat

1: **procedure** FPB(a, b)
2: $r = 1$
3: $x = \min(a, b)$
4: **for** $i = 1$ to x **do**
5: **if** $a \mod i == 0$ **and** $b \mod i == 0$ **then** $r = i$
6: **end if**
7: **end for**
8: **end procedure**

Tentukan **kompleksitas**-nya!

Coba bandingkan algoritma tersebut dengan algoritma berikut (yang disebut dengan algoritma Euclid)

Algoritma Euclid untuk menghitung fpb (1)

Contoh

Menggunakan algoritma Euclid, tentukan fpb dari 210 dan 45.

Solusi:

Algoritma Euclid untuk menghitung fpb (1)

Contoh

Menggunakan algoritma Euclid, tentukan fpb dari 210 dan 45.

Solusi:

$$210 = 4 \cdot 45 + 30$$
$$45 = 1 \cdot 30 + 15$$
$$30 = 2 \cdot 15 + 0$$

Jadi $fpb(210, 45) = 15$

Algoritma Euclidean untuk menghitung fpb (2)

Algorithm 2 Euclidean algorithm

```
1: procedure EUCLIDFPB(a, b)
2:     while b ≠ 0 do
3:         r = a mod b
4:         a = b
5:         b = r
6:     end while
7:     return a
8: end procedure
```

Mengapa algoritma tersebut berakhir (tidak mengalami *infinite looping*)? (lihat Teorema Lame `https://www.cut-the-knot.org/blue/LamesTheorem.shtml`)

Tentukan kompleksitas algoritma! kerjakan sebagai latihan!

Bagian 2: Kompleksitas algoritma

Model kompleksitas komputasi (1)

Dapatkah Anda menjelaskan kembali definisi dari kompleksitas algoritma, dan mengapa hal tersebut penting?

Model kompleksitas komputasi (2)

Bagian dari *analisis algoritma* adalah menghitung *kompleksitas komputasi* dari suatu algoritma.

Kompleksitas komputasional atau cukup disebut kompleksitas dari sebuah algoritma adalah banyaknya sumber daya (*waktu* dan *memori*) yang diperlukan untuk menjalankannya.

- Efisiensi waktu: seberapa cepat suatu algoritma dijalankan
- Efisiensi ruang: berapa banyak memori yang dibutuhkan untuk mengeksekusi suatu algoritma

Bagaimana kompleksitas suatu algoritma dihitung?

Apa pengaruh kompleksitas komputasi suatu algoritma?

Contoh

Misalkan sebuah **superkomputer** *mengeksekusi algoritma A, dan sebuah* **PC** *(personal computer) mengeksekusi algoritma B. Kedua komputer harus mengurutkan 1 juta elemen. Superkomputer dapat mengeksekusi 100 juta instruksi dalam satu detik, sedangkan PC hanya mampu mengeksekusi 1 juta instruksi dalam satu detik.*

- *Algoritma A membutuhkan* $2n^2$ *instruksi untuk mengurutkan n elemen;*
- *Algoritma B membutuhkan* $50n \log n$ *instruksi*

Hitunglah banyaknya waktu yang dibutuhkan untuk mengurutkan 1 juta elemen di setiap komputer (superkomputer dan PC)!

Apa pengaruh kompleksitas komputasi suatu algoritma?

Dapatkah Anda menebak, secara intuitif, komputer manakah yang memiliki waktu eksekusi lebih singkat?

Apa pengaruh kompleksitas komputasi suatu algoritma?

Dapatkah Anda menebak, secara intuitif, komputer manakah yang memiliki waktu eksekusi lebih singkat?

Solusi:

- Superkomputer: $\frac{2 \cdot (10^6)^2 \text{ instructions}}{10^8 \text{ instructions / sec}} = 20000 \text{ sec} \approx 5.56 \text{ hours}$
- PC: $\frac{50 \cdot 10^6 \log 10^6 \text{ instructions}}{10^6 \text{ instructions / sec}} \approx 1000 sec \approx 16.67 \text{ minutes}$

Apa yang dapat Anda simpulkan?

Apa yang memengaruhi kompleksitas komputasi?

Kompleksitas waktu (dan ruang) bergantung pada banyak hal seperti *hardware*, *OS*, *processors*, *programming language* dan *compiler*, dll. Tapi kita tidak pertimbangkan faktor-faktor ini saat menganalisis kompleksitas algoritma.

Beberapa catatan dalam memplejari kompleksitas algoritma:

- Fokus kita pada subjek ini adalah pada kompleksitas waktu.
- Kita berasumsi bahwa mesin kita hanya menggunakan satu prosesor (yaitu *generic one-processor*).
- Kompleksitas waktu dihitung berdasarkan banyaknya operasi/instruksi
- *Running time* dari suatu algoritma dihitung sebagai ukuran input (n), dan merupakan fungsi yang *tak-turun (non-decreasing)*.

Contoh penghitungan kompleksitas komputasi

Algorithm 3 Rata-rata array bilangan bulat

```
1: procedure AVERAGE(A[1..n])
2:     sum ← 0
3:     for i = 1 to n do
4:         sum ← sum + A[i]
5:     end for
6:     avg ← sum/n
7: end procedure
```

Jumlah operasi:

- Penugasan: baris 2, 4, 6; dengan operasi $1 + n + 1 = n + 2$
- Penjumlahan: baris 4, dengan operasi n
- Divisi: baris 6, dengan 1 operasi

Kompleksitas waktu: $T(n) = (n + 2) + n = 2n + 2$ operations.

Bagian 3: Tiga macam kompleksitas algoritma

Tiga macam pengukuran penggunaan sumber daya

- **Kasus terburuk** ($T_{\max}(n)$): ini mengukur sumber daya (mis. waktu berjalan, memori) yang diperlukan algoritma dalam kasus terburuk yaitu paling sulit case, diberi input ukuran acak n (biasanya dilambangkan dengan notasi asimtotik).

- **Kasus terbaik** ($T_{\min}(n)$): jelaskan perilaku algoritma dalam kondisi optimal.

- **Kasus rata-rata** ($T_{\text{avg}}(n)$): jumlah waktu komputasi yang digunakan oleh algoritma, rata-rata dari semua input yang mungkin.

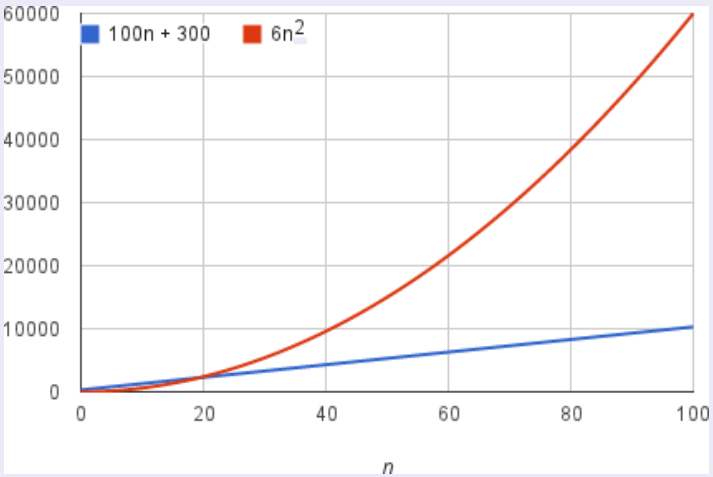
Notasi asimtotik dan urutan besarnya (1)

- *Running time* suatu algoritma diukur sebagai *fungsi ukuran inputnya*.
- Rate of growth dari waktu berjalan mengukur seberapa cepat suatu fungsi tumbuh dengan ukuran input. Secara asimptotis berarti fungsi itu penting *hanya untuk nilai n* yang besar.
- Fungsi order of magnitude menjelaskan bagian dari fungsi yang meningkat paling cepat saat nilai n meningkat.

Notasi asimtotik dan urutan besarnya (2)

Contoh

Misalkan sebuah algoritma berjalan pada input berukuran n, membutuhkan $6n^2 + 100n + 300$ *eksekusi.*



Kita hanya menyimpan suku yang paling "penting". Dalam hal ini, fungsi $6n^2$ *memiliki nilai yang lebih dari* $100n + 300$ *untuk setiap nilai n dalam batas bawah tertentu.*

Notasi $\mathcal{O}$ (O-besar/*big-O*): Batas-atas asimtotik

Kompleksitas kasus terburuk mengukur sumber daya yang dibutuhkan algoritma dalam *kasus terburuk*. Ini memberikan upper bound pada sumber daya yang dibutuhkan oleh algoritma.

Mengapa mempelajari kompleksitas kasus terburuk?

- memberikan informasi tentang kebutuhan sumber daya maksimum
- secara alami, hal ini sering terjadi pada suatu sistem

Notasi Big-O ($\mathcal{O}(\cdot)$): notasi matematika yang menjelaskan perilaku pembatas fungsi ketika argumen cenderung ke nilai tertentu atau tak terhingga.

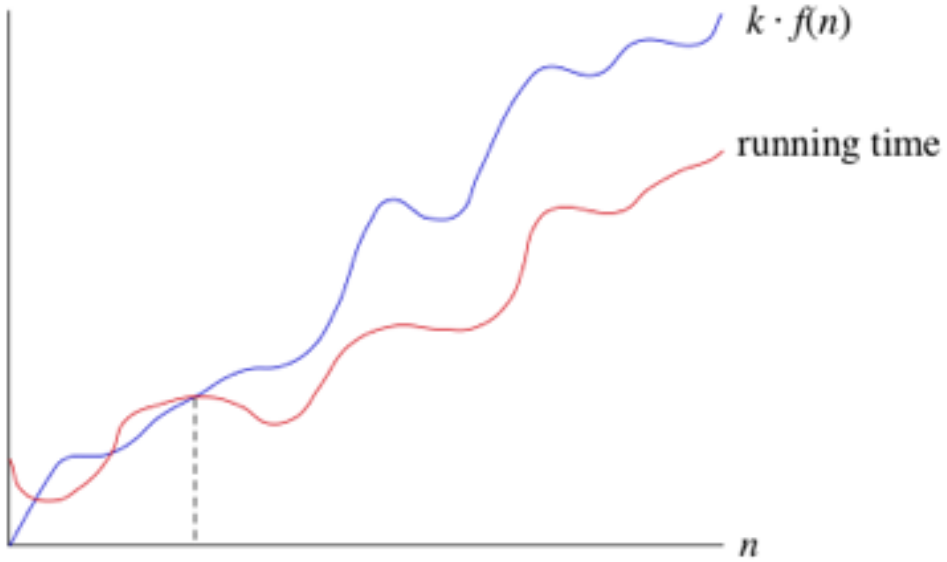
Definisi

$g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ *if* $\exists\ k > 0$ *dan* n_0 *s.t.* $g(n) \leq k \cdot f(n),\ \ \forall n \geq n_0$.

Notasi $\mathcal{O}$ (O-besar/*big-O*): Batas atas asimtotik

Definisi

$g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ *if* $\exists\ k > 0$ *dan* n_0 *s.t.* $g(n) \leq k \cdot f(n),\ \ \forall n \geq n_0$.



Contoh notasi $\mathcal{O}$ (1): Fungsi linier

Contoh

Tunjukkan bahwa $g(n) = 5n + 3$ *ada di* $\mathcal{O}(n)$.

Contoh notasi $\mathcal{O}$ (1): Fungsi linier

Contoh

Tunjukkan bahwa $g(n) = 5n + 3$ *ada di* $\mathcal{O}(n)$.

Solusi:

Perhatikan bahwa $5n + 3 \leq 5n + 3n = 8n$ untuk semua $n \geq 1$. Dalam hal ini, $k = 8$ dan $n_0 = 1$. Jadi, $g(n) \in \mathcal{O}(n)$.

Contoh notasi $\mathcal{O}$ (2): Fungsi polinomial

Contoh

Tunjukkan bahwa $g(n) = 3n^2 - 5n + 6$ *ada di* $\mathcal{O}(n^2)$.

Contoh notasi $\mathcal{O}$ (2): Fungsi polinomial

Contoh

Tunjukkan bahwa $g(n) = 3n^2 - 5n + 6$ *ada di* $\mathcal{O}(n^2)$.

Solusi:

Perhatikan bahwa $3n^2 - 5n + 6 \leq 3n^2 + 0 + 6n^2 = 9n^2$ untuk semua $n \geq 1$. Dalam hal ini, $k = 9$ dan $n_0 = 1$. Jadi, $g(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

Bagian 3: Operasi aritmatika di $\mathcal{O}$

Operasi aritmatika di $\mathcal{O}$

Fungsi kompleksitas waktu dilambangkan dengan $T(n)$.

Teorema (Big-O dari kompleksitas polinomial)

Jika $T(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ *polinomial dari urutan* m, *maka* $T(n) \in \mathcal{O}(n^m)$.

Teorema (Operasi aritmatika dengan Big-O)

Let $T_1(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ *dan* $T_2(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, *then:*

1. $T_1(n) + T_2(n) \in \mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) \in \mathcal{O}(\max(f(n), g(n)))$
2. $T_1(n) T_2(n) \in \mathcal{O}(f(n))\mathcal{O}(g(n)) \in \mathcal{O}(f(n)g(n))$
3. $\mathcal{O}(cf(n)) \in \mathcal{O}(f(n))$, *dimana* c *adalah konstanta*
4. $f(n) \in \mathcal{O}(f(n))$

Proof: tugas!

Operasi aritmatika dengan $\mathcal{O}$

Contoh (Operasi aritmatika dengan Big-O)

1. *Misalkan* $T_1(n) \in \mathcal{O}(n)$ *dan* $T_2(n) \in \mathcal{O}(n^2)$, *maka:*

$$T_1(n) + T_2(n) \in \mathcal{O}(\ max(n, n^2)) \in \mathcal{O}(n^2)$$

2. *Misalkan* $T_1(n) \in \mathcal{O}(n)$ *dan* $T_2(n) \in \mathcal{O}(n^2)$, *maka:*

$$T_1(n)T_2(n) \in \mathcal{O}(n \cdot n^2) = \mathcal{O}(n^3)$$

3. $\mathcal{O}(5n^2) \in \mathcal{O}(n^2)$
4. $n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$

Review fungsi logaritma

Pratinjau fungsi logaritma dan eksponensial

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

- $a > 0$ adalah "pangkat logaritma"
- $b > 0$ adalah "basis logaritma"
- c adalah "hasil logaritma"

Catatan. Jika basis $b = 2$, maka disebut logaritma biner (*binary logarithm*. Dalam hal ini, basisnya seringkali tidak dituliskan.

Notasi $\mathcal{O}$ pada fungsi logaritma

Dalam Ilmu Komputer, kita biasanya menggunakan kompleksitas logaritma base-two secara default. Mengapa?

Notasi $\mathcal{O}$ pada fungsi logaritma

Dalam Ilmu Komputer, kita biasanya menggunakan kompleksitas logaritma base-two secara default. Mengapa?

- Umum untuk bekerja dengan bilangan biner atau membagi data input menjadi dua
- Dalam notasi Big-O (pertumbuhan batas atas), semua logaritma adalah *setara dengan asimtotik* (satu-satunya perbedaan adalah faktor konstanta perkalian)
- Jadi, kita tidak menentukan basisnya, dan hanya menuliskannya sebagai $\mathcal{O}(\log n)$

Notasi $\mathcal{O}$ pada fungsi logaritma

Sifat-sifat fungsi logaritma

- $\log_b 1 = 0$ untuk setiap $b \geq 0$
- **Penggantian basis:** $\log_b a = \frac{\log_p a}{\log_p b}$
- **Penjumlahan:** $\log_p m + \log_p n = \log_p mn$
- **Pengurangan:** $\log_p m - \log_p n = \log_p \frac{m}{n}$
- **Pangkat:** $\log_p a^x = x \cdot \log_p a$
- **Invers:** $\log_p \frac{1}{a} = -log_p a$
- dsb...

Contoh notasi $\mathcal{O}$ (3): Fungsi logaritma

Contoh

Tunjukkan bahwa $g(n) = (n+3)\log(n^2+1) + 2n^2$ *ada di* $\mathcal{O}(n^2)$

Contoh notasi $\mathcal{O}$ (3): Fungsi logaritma

Contoh

Tunjukkan bahwa $g(n) = (n+3)\log(n^2+1) + 2n^2$ *ada di* $\mathcal{O}(n^2)$

Solusi:

Perhatikan bahwa:
$\log(n^2+1) \leq \log(2n^2) = \log 2 + \log n^2 \leq 2\log n^2 = 4\log n$.
Jadi, $\log(n^2+1) \in \mathcal{O}(\log n)$.

Karena $n+3 \in \mathcal{O}(n)$, maka
$(n+3)\log(n^2+1) \in \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(\log n) \in \mathcal{O}(n \log n)$.

Karena $2n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$, dan $\max(n\log n, n^2) = n^2$, maka $g(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

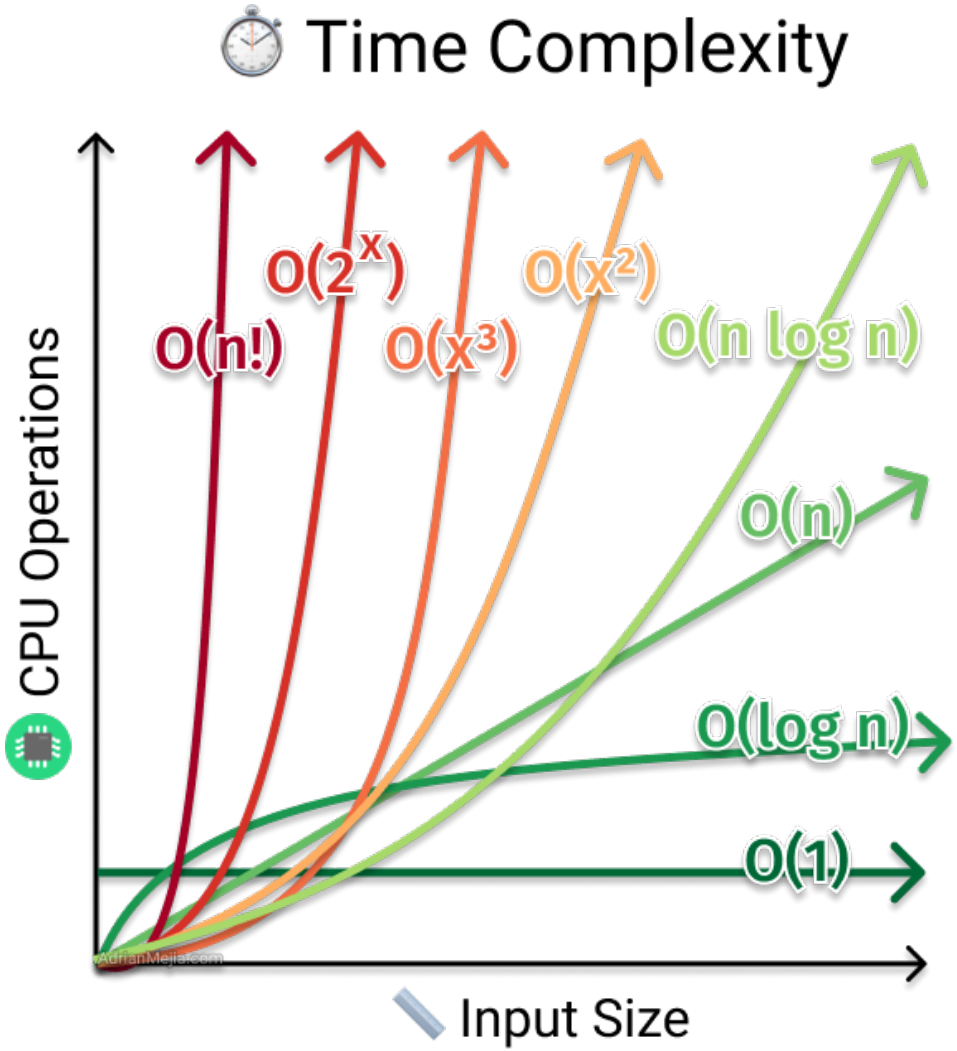
Bagian 4: Klasifikasi algoritma berdasarkan kompleksitas waktu terburuk

Klasifikasi algoritma berdasarkan kompleksitas waktu terburuk

Complexity	**Class**
$\mathcal{O}(1)$	constant
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmic
$\mathcal{O}(n)$	linear
$\mathcal{O}(n \log n)$	quasilinear /linearithmic
$\mathcal{O}(n^2)$	square
$\mathcal{O}(n^3)$	cubic
$\mathcal{O}(n^k),\ k \geq 2$	polynomial
$\mathcal{O}(2^n)$	exponential
$\mathcal{O}(n!)$	factorial

$$\underbrace{\mathcal{O}(1) < \mathcal{O}(\log n) < \mathcal{O}(n) < \mathcal{O}(n \log n) < \mathcal{O}(n^2) < \mathcal{O}(n^3) < \cdots <}_{\text{polynomial algorithms}} \underbrace{\mathcal{O}(2^n) < \mathcal{O}(n!)}_{\text{exponential algorithms}}$$

Klasifikasi algoritma berdasarkan kompleksitas waktu terburuk



Bagian 5: Penghitungan banyaknya operasi pada algoritma

Kalkulasi jumlah operasi algoritma: Operasi dasar

1. **Penugasan nilai** (*perbandingan*, *operasi aritmatika*, *baca*, *tulis*) membutuhkan $\mathcal{O}(1)$
2. **Mengakses** elemen array, atau memilih bidang dari catatan memerlukan $\mathcal{O}(1)$

Contoh

- $read(x) \rightarrow \mathcal{O}(1)$
- $x : x + a[k] \rightarrow \mathcal{O}(1)$
- $print(x) \rightarrow \mathcal{O}(1)$

Kalkulasi jumlah operasi algoritma: If-Else

3. **If-Else condition:** IF C THEN A1 ELSE A2 membutuhkan waktu: $T_C + \max(T_{O1}, T_{O2})$

Contoh

```
1: read(x)
2: if x mod 2 = 0 then
3:       x := x + 1
4:       print("Even")
5: else
6:       print("Odd")
7: end if
```

Kompleksitas waktu asimtotik:
$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1)) \in \mathcal{O}(1)$

Kalkulasi jumlah operasi algoritma: For loop

4. **For loop:** kompleksitas waktu adalah jumlah iterasi dikalikan dengan kompleksitas waktu *body loop* (yaitu *pernyataan loop*)

Contoh (Single for loop)

```
1: for i = 1 to n do
2:     sum:= sum + a[1]
3: end for
```

Kompleksitas waktu asimtotik: $n \cdot \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n)$

Kalkulasi jumlah operasi algoritma: Loop bersarang

Contoh (Two nested for loops with one instruction)

```
1: for i = 1 to n do
2:     for j = 1 to n do
3:         a[i, j] := i + j
4:     end for
5: end for
```

Kompleksitas waktu asimtotik: $n \cdot \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$

Kalkulasi jumlah operasi algoritma: Loop bersarang

Contoh (Two nested for loops with two instructions)

```
1: for i = 1 to n do
2:     for j = 1 to i do
3:         a := a + 1
4:         b := b − 1
5:     end for
6: end for
```

Loop luar dieksekusi n kali, dan loop dalam dieksekusi i kali untuk setiap j. Jumlah iterasi: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \in \mathcal{O}(n^2)$.

Perulangan pada body membutuhkan waktu $\mathcal{O}(1)$.

Asymptotic time complexity: $\mathcal{O}(n^2)$

Kalkulasi jumlah operasi algoritma: While loop

5. **While loop:** WHILE C DO A; and REPEAT A UNTIL C.
   Time complexity = # iterations $\times$ T_{body}

Contoh (Single loop with $n-1$ iterations)

```
1: i := 2
2: while i ≤ n do
3:     sum:= sum + a[i]
4:     i := i + 1
5: end while
```

Kompleksitas waktu asimtotik:

$$\mathcal{O}(1) + (n-1)(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(n-1) \in \mathcal{O}(n)$$

Kalkulasi jumlah operasi algoritma: Infinite loop

Contoh (Infinite loop)

```
1: x := 0
2: while x < 5 do
3:       x := 1
4:       x := x + 1
5: end while
```

Dalam situasi ini, x tidak akan pernah lebih besar dari 5, karena pada awal perulangan while, x diberi nilai 1, sehingga perulangan akan selalu berakhir dengan 2 dan perulangan tidak akan pernah terputus.

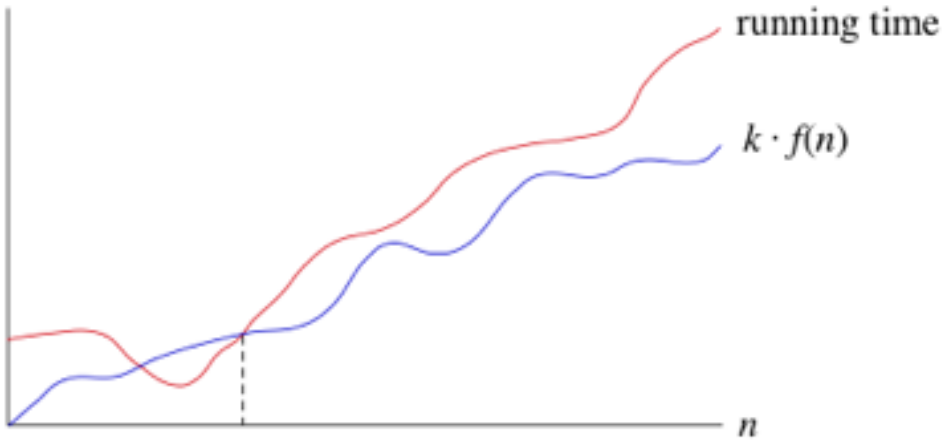
Notasi Ω: Batas-bawah asimptotik

Kita juga dapat mengatakan bahwa suatu algoritma membutuhkan *setidaknya sejumlah waktu tertentu*, tanpa memberikan batas atas.

Big-Omega ($\Omega(\cdot)$) notation

Definisi

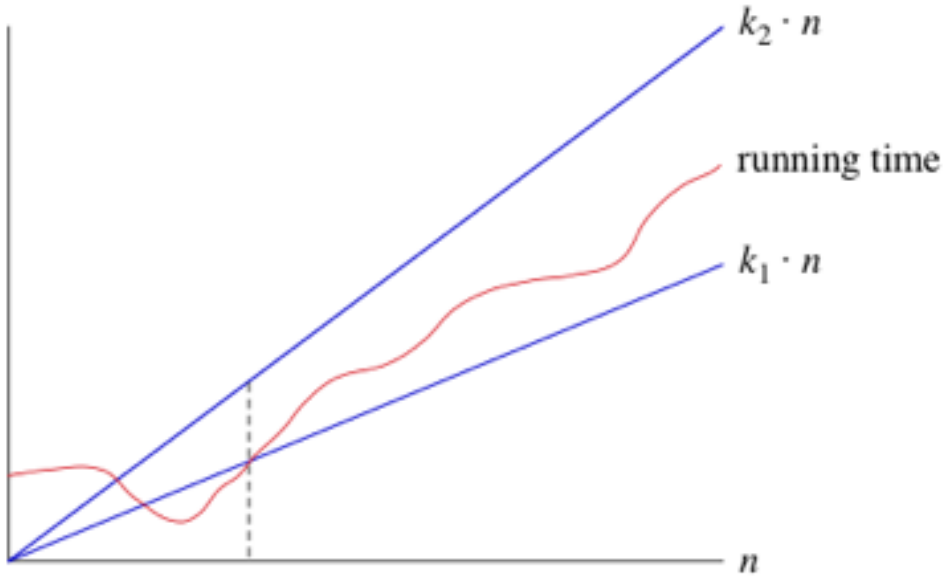
$g(n) \in \Omega(f(n))$ *jika* $\exists\ k > 0$ *dan* n_0 *sedemikian sehingga* $g(n) \geq k \cdot f(n)$, $\forall n \geq n_0$.



Notasi Θ: Batas-ketat asimptotik

Definisi

$g(n) \in \Theta(f(n))$ *jika* $\exists\ k_1, k_2 > 0$ *dan* n_0 *sedemikian sehingga* $k_1 \cdot f_n \leq g(n) \leq k_2 \cdot f(n), \quad \forall n \geq n_0$.



end of slide...