Linear Algebra
[KOMS120301] - 2023/2024

12.1 - Basis dan Dimensi

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 12 (Desember 2023)

Bagian 1: Basis ruang vektor

Contoh intuitif

Di $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ Misalkan $\mathbf{i} = (1,0,0),\ \mathbf{j} = (0,1,0),\ \mathbf{k} = (0,0,1)$

Setiap vektor $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari basis vektor, yaitu:

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

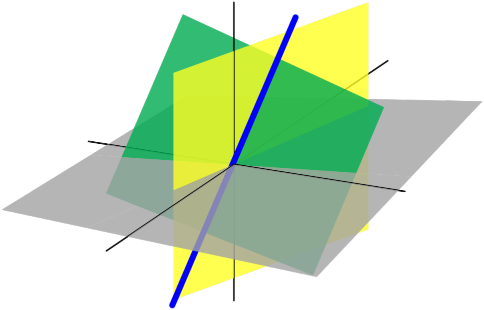
Di $\mathbb{R}^n \rightarrow$ Ini dapat digeneralisasikan untuk ruang vektor Euclidean $\mathbb{R}^n$

Misalkan: $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,0,\ldots,1)$

Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ dapat diekspresikan:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{v}_2 + \cdots + v_n\mathbf{v}_n$$

Bisakah ruang vektor mempunyai lebih dari satu basis?
Bagaimana dengan dasar ruang vektor umum V?



Dalam Aljabar Linier, sistem koordinat biasanya ditentukan menggunakan vektor, bukan sumbu koordinat.

Definisi formal tentang dasar

Jika V adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan vektor di V, maka S disebut basis untuk V jika dua kondisi berikut berlaku:

1. S bebas linier;
2. S merentang V.

Contoh 1: Basis standar untuk $\mathbb{R}^n$

Basis standar untuk $\mathbb{R}^n$ adalah himpunan vektor $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, dimana:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Hal ini berarti bahwa: $\forall \mathbf{v} \in V$, maka $\exists k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga:

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \cdots + k_n\mathbf{e}_n$$

Contoh (Kasus khusus $\mathbb{R}^3$)

Di $\mathbb{R}^3$, basis standarnya adalah:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0),\ \mathbf{j} = (0, 1, 0),\ \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Contoh 2: Basis standar untuk P_n

Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ merupakan basis standar untuk ruang vektor P_n dari polinomial.

Solusi:
Berdasarkan teorema tersebut, dapat ditunjukkan bahwa polinomial di S bebas linier, dan merentang P_n.

Notasikan polinomial dengan vektor:

$$\mathbf{p}_0 = 1,\ \mathbf{p}_1 = x,\ \mathbf{p}_2 = x^2,\ \ldots,\ \mathbf{p}_n = x^n$$

Kita telah menunjukkan (dalam pembahasan sebelumnya) bahwa vektor-vektor merentang P_n, dan mereka bebas linier.

Contoh 2: Basis lain untuk $\mathbb{R}^3$

Tunjukkan bahwa vektor berikut:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \ \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0), \ \text{and } \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$$

membentuk basis untuk $\mathbb{R}^3$.

Solusi:
Harus ditunjukkan bahwa vektor-vektornya adalah independen linier dan span $\mathbb{R}^3$.

- *Independensi linier*: persamaan vektor

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

  hanya memiliki solusi trivial.

- *Rentang ruang vektor* $\mathbb{R}^3$: setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$$

Persamaan vektor dapat dinyatakan sebagai sistem linier:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = b_2 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 = b_3 \end{cases}$$

Untuk menunjukkan bahwa sistem linier homogen (*kiri*) mempunyai hanya solusi sepele dan sistem (*kanan*) mempunyai solusi unik, sama dengan menunjukkan bahwa matriks koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mempunyai determinan bukan nol.

Tugas: Buktikan bahwa $\det(A) \neq 0$.

Keunikan representasi basis

Teorema (Uniqueness)

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis dari ruang vektor V, maka setiap vektor $\mathbf{v}$ di V dapat dinyatakan dalam bentuk berikut, tepat dalam satu cara.

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Proof.

Misalkan $\mathbf{v}$ dapat diekspresikan dalam kombinasi linier lain, katakanlah:

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

Mengurangi dua persamaan menghasilkan:

$$\mathbf{v} = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n$$

Karena vektor dalam S bebas linier, maka:

$$c_1 - k_1 = 0,\ c_2 - k_2 = 0,\ \ldots,\ c_n - k_n = 0$$

artinya: $c_1 = k_1,\ c_2 = k_2,\ \ldots,\ c_n = k_n$ $\square$

Bagian 2: Dimensi

Banyak vektor dalam suatu basis

Suatu ruang vektor dapat mempunyai lebih dari satu basis yang berukuran sama.

Teorema (Ukuran basis ruang vektor)

Semua basis untuk ruang vektor berdimensi hingga memiliki jumlah vektor yang sama.

Teorema mengikuti dari pengamatan berikut.

Teorema

Biarkan V menjadi ruang vektor berdimensi n, dan biarkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ menjadi sembarang basis.

1. *Jika suatu himpunan di V mempunyai lebih dari n vektor, maka himpunan tersebut bergantung linier.*
2. *Jika suatu himpunan dalam V memiliki vektor kurang dari n, maka himpunan tersebut tidak mencakup V.*

Proof.

Pernyataan tersebut benar karena vektor-vektor di S bebas linier. $\square$

Dimensi ruang vektor berhingga V didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam basis untuk V.

Ruang vektor nol didefinisikan memiliki dimensi nol.

Contoh (Dimensi beberapa ruang vektor yang familiar)

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \qquad \text{[basis standar memiliki } n \text{ vektor]}$$

$$\dim(P_n) = n+1 \qquad \text{[basis standar memiliki } n+1 \text{ vektor]}$$

$$\dim(M_{mn}) = mn \qquad \text{[basis standar memiliki } mn \text{ vektor]}$$

Contoh 1: Dimensi *span*(S)

Misalkan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan vektor bebas linier.

Buktikan bahwa $\dim(\mathit{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}) = n$.

Solusi:

Setiap vektor di *span*(S) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di S.

Oleh karena itu, S adalah basis dari *span*(S).

Dengan Teorema "Ukuran Basis",

$$\dim(\mathit{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}) = n$$

Contoh 2: Dimensi ruang solusi

Diketahui sistem linier berikut:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{cases}$$

Temukan dimensi ruang solusi sistem linier.

Solusi:

- Temukan solusi dari sistem:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t,\ x_6 = 0$$

- Dalam bentuk vektor:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= (-3r - 4s - 2t, r, -2s, s, t, 0) \\ &= r(-3, 1, 0, 0, 0, 0) + s(-4, 0, -2, 1, 0, 0) + t(-2, 0, 0, 0, 1, 0)\end{aligned}$$

- Jadi vektor-vektor berikut merentang ruang vektor:

  $\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{v}_2 = (-4, 0, -2, 1, 0, 0),\ \mathbf{v}_3 = (-2, 0, 0, 0, 1, 0)$

- Periksa apakah himpunan vektor $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bebas linier.
  Harus ditunjukkan bahwa persamaan vektor:

  $$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = 0$$

  hanya memiliki solusi *trivial*, i.e. $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$.

  Periksa kebenarannya!

- Jika ya, maka S adalah basis dari ruang solusi, dan $\dim(S) = 3$.

Teorema

Jika W adalah subruang dari ruang vektor berdimensi hingga V, maka:

1. *W memiliki dimensi hingga;*
2. $\dim(W) \leq \dim(V)$;
3. *$W = V$ jika dan hanya jika* $\dim(W) = \dim(V)$.

Proof.

Baca halaman 225 pada "Elementary Linear Algebra Applications Version (Howard Anton, Chris Rorres - Edisi 1 - 2013)". □

bersambung...