

Aljabar Linier  
[KOMS120301] - 20223/2024

## 9.1 - Vektor dalam ruang vektor

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 9 (Oktober 2023)

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

- 1 explain

# Bagian 1: Ruang vektor

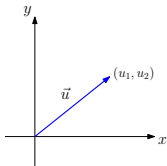
# Apa itu ruang $n$ ?

*Ingat kembali diskusi sebelumnya...*

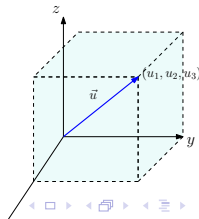
- $n$ -tuple terurut adalah barisan *bilangan riil*:  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  (atau, dapat dilihat sebagai vektor).
- **ruang- $n$**  adalah himpunan semua  $n$ -tupel bilangan real. Biasanya dilambangkan dengan  $\mathbb{R}^n$ . Untuk  $n = 1$ ,  $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$ .
  - Ruang ini adalah ruang dimana vektor terdefinisi
  - Ruang  $n$   $\mathbb{R}^n$  juga disebut **Ruang Euclid**.

## Contoh:

Vektor in  $\mathbb{R}^2$



Vektor in  $\mathbb{R}^3$



# Vektor di ruang $n$

- $n$ -tuple di  $\mathbb{R}^n$ , misalnya  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  disebut **titik** atau **vektor**.
- $u_i$  disebut **koordinat**, **komponen**, **entri**, atau **elemen** dari  $u$ .
- Ketika mengacu pada  $\mathbb{R}^n$ , sebuah elemen dari  $\mathbb{R}$  disebut **scalar**.
- Vektor  $(0, 0, \dots, 0)$  disebut **zero vector**.
  - Contoh: vektor nol di  $\mathbb{R}^2$  adalah  $(0, 0)$ , dan vektor nol di  $\mathbb{R}^3$  adalah  $(0, 0, 0)$
- Vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah **sama** jika mereka memiliki jumlah komponen yang sama, dan komponen yang bersesuaian juga sama.

Sebuah vektor dalam  $\mathbb{R}^n$  dapat ditulis secara horizontal (disebut **vektor baris**) atau vertikal (disebut **vektor kolom**).

$$u = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$u = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

**Catatan:** setiap operasi yang didefinisikan untuk vektor baris didefinisikan secara analog untuk vektor kolom. Mulai sekarang, vektor sering ditulis sebagai vektor baris.

# Bagian 3: **Operasi vektor**

# Penjumlahan vektor dan perkalian skalar vektor

Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah vektor dalam  $\mathbb{R}^n$

$$u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{and} \quad v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

**Jumlah**  $u + v$  didefinisikan sebagai:

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

Jika  $k \in \mathbb{R}$ , **perkalian skalar** atau **perkalian**  $ku$  didefinisikan sebagai:

$$ku = k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

**Negatif** dan **pengurangan**  $u$  dan  $v$  didefinisikan sebagai:

$$-u = (-1)u \quad \text{and} \quad u - v = u + (-v)$$

**Catatan:**  $u + v$ ,  $ku$ ,  $-u$ ,  $u - v$  juga merupakan vektor dalam  $\mathbb{R}^n$ .



*Vektor nol*  $0 = (0, 0, \dots, 0)$  dan *vektor satu*  $1 = (1, 1, \dots, 1)$  dalam  $\mathbb{R}^n$  serupa seperti skalar 0 dan 1 di  $\mathbb{R}$ .

- Untuk vektor  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , maka:

$$u + 0 = (a_1 + 0, a_2 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = u$$

$$1u = 1(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = u$$

# Bagian 4: **Kombinasi Linear** **dari Vektor**

Diketahui vektor  $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$  dan skalar  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ , kita dapat membentuk vektor baru:

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_m u_m$$

Vektor ini disebut **kombinasi linier** dari vektor  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .

- ① Misalkan  $u = (2, 4, -5)$  dan  $v = (1, -6, 9)$ , maka:

$$u + v = (2 + 1, 4 + (-6), -5 + 9) = (3, -2, 4)$$

$$4u = (8, 14, -20)$$

$$-v = (-1, 6, -9)$$

$$3u - 2v = (6, 12, -15) + (-2, 12, -18)$$

- ② Misal  $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$  dan  $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ , maka:

$$2u - 3v = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

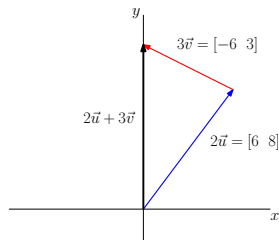
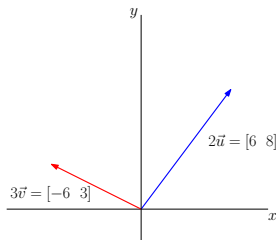
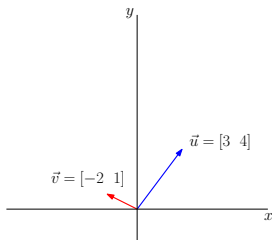
# Interpretasi geometris kombinasi linier

Bagaimana Anda menafsirkan kombinasi linier vektor secara geometris?

Lihat sebagai **kombinasi penskalaan dan perpindahan vektor dalam ruang**

## Contoh

Diketahui sebuah vektor  $\vec{u} = [3/4]$  dan  $\vec{v} = [-2/1]$ . Bagaimana Anda menjelaskan  $2\vec{u} + 3\vec{v}$  ?



# Interpretasi geometris kombinasi linier

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  dan  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$  adalah “vektor khusus” dalam ruang 2D. Bisakah Anda menebak mengapa?

Setiap vektor  $u$  dalam  $\mathbb{R}^2$  dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linier dari vektor  $x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  dan  $x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ , yaitu:

*Untuk setiap  $u \in \mathbb{R}^2$ , terdapat konstanta  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  sehingga  $u = c_1 x_1 + c_2 x_2$ .*

*Khususnya, jika  $u = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$  maka  $u = a_1 x_1 + a_2 x_2$ .*

## Contoh

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Apa vektor khusus dalam ruang 3D?
- Bagaimana dengan  $n$ D-space?

## Himpunan

$\{x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ 1 berada pada posisi } i\text{-th}\}$

adalah himpunan vektor khusus dalam ruang  $n$ .

Jadi setiap vektor  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  dapat ditulis sebagai:

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Kita katakan bahwa  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  mencakup  $\mathbb{R}^n$ .

Definisi yang lebih formal akan dibahas kemudian.

# Vektor-vektor yang bebas linier

*Secara aljabar*, dua vektor adalah **bebas linier** jika tidak satu pun dari vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari yang lain.



# Contoh vektor yang bebas linier

Tentukan apakah vektor-vektor berikut bebas linier?

$$\mathbf{u} = (1, 4, 0), \mathbf{v} = (10, 2, 1), \mathbf{w} = (-5, 0, 6)$$

Pertanyaan ini sama dengan menanyakan:

*Apakah sistem persamaan linier berikut hanya memiliki solusi trivial? (trivial berarti solusi  $(0,0,0)$ )*

$$c_1(1, 4, 0) + c_2(10, 2, 1) + c_3(-5, 0, 6) = (0, 0, 0)$$

yang ekuivalen dengan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Latihan.** Coba Anda selesaikan sistem persamaan linier berikut.

# Bagian 5: **Komputasi Numerik Vektor dalam $\mathbb{R}^n$**

# Sifat-sifat vektor di bawah operasi

## Teorema

Untuk sembarang vektor  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  dan semua skalar  $k, k' \in \mathbb{R}$ ,

①  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  *(associative)*

②  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$  *(identity element w.r.t. addition)*

③  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  *(two opposite vectors)*

④  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  *(commutative)*

⑤  $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$  *(distributive w.r.t. scalar multiplication)*

⑥  $(k + k')\mathbf{u} = k\mathbf{u} + k'\mathbf{u}$

⑦  $(kk')\mathbf{u} = k(k'\mathbf{u})$

⑧  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$  *(identity element w.r.t. multiplication)*

**Catatan:** Misalkan  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah vektor dalam  $\mathbb{R}^n$ , dan  $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$  untuk beberapa  $k \in \mathbb{R}$ . Kemudian  $\mathbf{u}$  disebut **multiple** dari  $\mathbf{v}$ . Jika  $k > 0$ , maka  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  memiliki **arah yang sama**, dan jika  $k < 0$ , maka mereka berada di **berlawanan arah**.

Berikan masing-masing sebuah contoh untuk memeriksa kebenaran teorema di atas.

*bersambung...*