# Linear Algebra

## [KOMS120301] - 2023/2024

# 15.3 - Penerapan hasil kali dalam

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 15 (Desember 2023)

# Tujuan pembelajaran

Setelah perkuliahan ini, Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan konsep "Masalah Kuadrat Terkecil";
2. menghitung solusi kuadrat terkecil, vektor kesalahan, dan kesalahan kuadrat terkecil;
3. jelaskan bagaimana kuadrat terkecil diterapkan untuk menyesuaikan kurva polinomial dengan data;
4. jelaskan bagaimana kuadrat terkecil diterapkan untuk mendekati suatu fungsi.

# **Bagian 1:** Kuadrat Terkecil

# Apa yang dimaksud "kuadrat terkecil"? (1)

Mari kita berikan sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dari persamaan $m$ dan variabel $n$, yaitu tidak konsisten karena kesalahan dalam entri $A$ atau $\mathbf{b}$.

**Solusi yang mungkin** $\rightarrow$ carilah vektor $\hat{\mathbf{x}}$ yang "mendekati mungkin" untuk menjadi solusi.

# Apa yang dimaksud "kuadrat terkecil"? (1)

Mari kita berikan sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dari persamaan $m$ dan variabel $n$, yaitu tidak konsisten karena kesalahan dalam entri $A$ atau $\mathbf{b}$.

**Solusi yang mungkin** $\rightarrow$ carilah vektor $\hat{\mathbf{x}}$ yang "mendekati mungkin" untuk menjadi solusi.

### Permasalahan (Least Squares Problem)

*Diberikan sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dari persamaan $m$ dalam variabel $n$, carilah vektor $\mathbf{x}$ dalam $\mathbb{R}^n$ yang meminimalkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ wrt hasil kali dalam Euclidean pada $\mathbb{R}^m$.*

**Pertanyaan:** Bisakah Anda menjelaskan mengapa kami meminimalkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$?

# Apa yang dimaksud "kuadrat terkecil"? (1)

Mari kita berikan sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dari persamaan $m$ dan variabel $n$, yaitu tidak konsisten karena kesalahan dalam entri $A$ atau $\mathbf{b}$.

**Solusi yang mungkin** $\rightarrow$ carilah vektor $\hat{\mathbf{x}}$ yang "mendekati mungkin" untuk menjadi solusi.

### Permasalahan (Least Squares Problem)

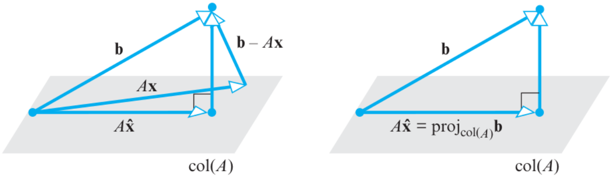
*Diberikan sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dari persamaan $m$ dalam variabel $n$, carilah vektor $\mathbf{x}$ dalam $\mathbb{R}^n$ yang meminimalkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ wrt hasil kali dalam Euclidean pada $\mathbb{R}^m$.*

**Pertanyaan:** Bisakah Anda menjelaskan mengapa kami meminimalkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$?

**Terminologi:** $\mathbf{x}$ disebut solusi kuadrat terkecil, $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ disebut vektor kesalahan kuadrat terkecil, dan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ disebut kesalahan kuadrat terkecil.

**Pertanyaan:** Bisakah Anda menjelaskan mengapa kami meminimalkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$?

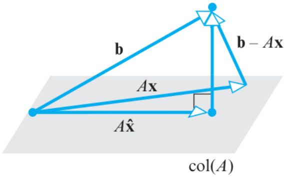
Mencari solusi kuadrat terkecil $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ sama dengan **mencari vektor** $A\hat{\mathbf{x}}$ pada ruang kolom $A$ yaitu textbfpaling dekat dengan **b**.



**Pertanyaan:** Bisakah Anda menjelaskan mengapa kami meminimalkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$?

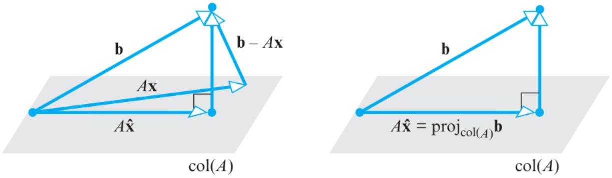
Mencari solusi kuadrat terkecil $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ sama dengan **mencari vektor** $A\hat{\mathbf{x}}$ pada ruang kolom $A$ yaitu textbfpaling dekat dengan $\mathbf{b}$.




**Pertanyaan:** Why is it named **"least square"**?

**Pertanyaan:** Bisakah Anda menjelaskan mengapa kami meminimalkan $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$?

Mencari solusi kuadrat terkecil $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ sama dengan **mencari vektor $A\hat{\mathbf{x}}$** pada ruang kolom $A$ yaitu textbfpaling dekat dengan $\mathbf{b}$.




**Pertanyaan:** Why is it named **"least square"**?

Misal $\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$. Maka: $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$

# Bagaimana kita membuat kesalahan $\mathbf{e} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ menjadi sekecil mungkin?

**Teorema (Best Approximation: the vector closest to b)**

*Jika $W$ adalah subruang berdimensi hingga dari ruang hasil kali dalam $V$, dan jika $\mathbf{b}$ adalah vektor di $V$. Kemudian:*

$$\|\mathbf{b} - proj_W \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{w}\|$$

*untuk setiap vektor $\mathbf{w}$ di $W$, di mana $\mathbf{w} \neq proj_W \mathbf{b}$*

# Bagaimana kita membuat kesalahan $\mathbf{e} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ menjadi sekecil mungkin?

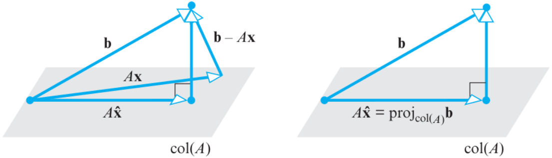
**Teorema (Best Approximation: the vector closest to b)**

*Jika $W$ adalah subruang berdimensi hingga dari ruang hasil kali dalam $V$, dan jika* **b** *adalah vektor di $V$. Kemudian:*

$$\|\mathbf{b} - proj_W\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{w}\|$$

*untuk setiap vektor* **w** *di $W$, di mana $\mathbf{w} \neq proj_W\mathbf{b}$*

→ This means that $\text{proj}_W\mathbf{b}$ is the best approximation to **b** from $W$.




→ A least square solution is a vector **x** satisfying: $A\mathbf{x} = \text{proj}_{\text{col}(A)}\mathbf{b}$.

# Bagaimana cara mendapatkan penyelesaian masalah kuadrat terkecil?

**Teorema (Solusi kuadrat terkecil)**

*Untuk setiap sistem linier* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *solusi kuadrat terkecil dari sistem diberikan oleh*
*underlinesemua solusi sistem:*

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

*Selain itu, jika* $\hat{\mathbf{x}}$ *adalah solusi kuadrat terkecil dari* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *maka proyeksi ortogonal* $\mathbf{b}$ *pada ruang kolom* $A$ *adalah:*

$$proj_{col(A)}\mathbf{b} = A\hat{\mathbf{x}}$$

# Bagaimana cara mendapatkan penyelesaian masalah kuadrat terkecil?

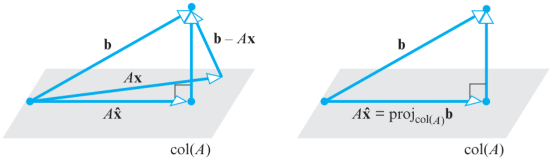
**Teorema (Solusi kuadrat terkecil)**

*Untuk setiap sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, solusi kuadrat terkecil dari sistem diberikan oleh*
*underlinesemua solusi sistem:*

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

*Selain itu, jika $\hat{\mathbf{x}}$ adalah solusi kuadrat terkecil dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, maka proyeksi ortogonal $\mathbf{b}$ pada ruang kolom $A$ adalah:*

$$proj_{col(A)}\mathbf{b} = A\hat{\mathbf{x}}$$



# Kesimpulan

Ketika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak memiliki solusi, maka:

1. Kalikan kedua ruas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $A^T$, sehingga diperoleh:

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \tag{1}$$

2. Selesaikan sistem (1), sehingga kita mendapatkan semua *solusi kuadrat terkecil* $\hat{\mathbf{x}}$.
3. Selesaikan: $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ untuk mendapatkan *error vector*.
4. Hitung $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$ untuk mendapatkan *error vector*.

# Contoh: Solusi kuadrat terkecil yang tunggal

Carilah kuadrat terkecil *solusi*, kuadrat terkecil *vektor kesalahan*, dan kuadrat terkecil *kesalahan* dari sistem linier:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

Carilah kuadrat terkecil *solusi*, kuadrat terkecil *vektor kesalahan*, dan kuadrat terkecil *kesalahan* dari sistem linier:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

**Solusi:**

Dari sistem linear tersebut dapat kita peroleh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. **Menemukan solusi:** Hitung $A^TA$, $A^T\mathbf{b}$, dan selesaikan $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Sekarang, selesaikan sistem linier $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$$\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

yang menghasilkan **solusi kuadrat terkecil yang unik**:

$$x_1 = \frac{17}{95}, \quad x_2 = \frac{143}{285}$$

2. **Vektor kesalahan:** Diberikan oleh $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$, yaitu,

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{92}{285} \\ \frac{439}{285} \\ \frac{95}{57} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1232}{285} \\ -\frac{154}{285} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

3. **Kesalahan kuadrat terkecil:** Diberikan oleh$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$.

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \approx 4.556$$

# Contoh solusi (*cont.*)

2. **Vektor kesalahan:** Diberikan oleh $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$, yaitu,

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{92}{285} \\ \frac{439}{285} \\ \frac{95}{57} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1232}{285} \\ -\frac{154}{285} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

3. **Kesalahan kuadrat terkecil:** Diberikan oleh$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$.

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \approx 4.556$$

**Pertanyaan:** Bisakah Anda menjelaskan secara singkat interpretasi contoh ini?

# Latihan: Berapa banyak solusi kuadrat terkecil?

Carilah kuadrat terkecil *solusi*, kuadrat terkecil *vektor kesalahan*, dan kuadrat terkecil *kesalahan* dari sistem linier:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 1 \end{cases}$$

Berapa banyak solusi kuadrat terkecil yang Anda temukan?

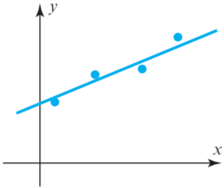
# **Bagian 2:** Penerapan

**Permasalahan (Menyesuaikan kurva dengan data)**

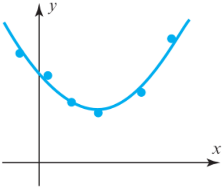
*Diberikan nilai eksperimen pasangan $(x, y)$, yaitu:*

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

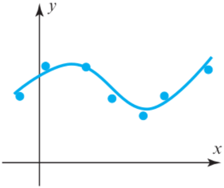
*Bagaimana cara mendapatkan hubungan matematis $y = f(x)$?*




(a) $y = a + bx$




(b) $y = a + bx + cx^2$




(c) $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

# Kuadrat terkecil cocok untuk kurva linier

Misalkan kita ingin membuat garis lurus $y = a + bx$. Lalu kita selesaikan:

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 \\ y_2 &= a + bx_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a + bx_n \end{aligned}$$

yang dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

atau sebagai $A\mathbf{v} = \mathbf{y}$, dimana:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

# Latihan: Bagaimana dengan memasang kurva polinomial?

Misalkan kita ingin memasukkan fungsi polinomial:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

to $n$ points:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

**Hint:**

1. Tentukan sistem persamaan $n$ berdasarkan data di atas.
2. Tentukan setiap komponen $A$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{y}$.
3. Selesaikan kuadrat terkecil.

# Penerapan 2: Aproksimasi fungsi

### Permasalahan (Permasalahan aproksimasi)

*Diberikan fungsi $f$ yang kontinu pada interval $[a, b]$, carilah "pendekatan terbaik" terhadap $f$ hanya dengan menggunakan fungsi dari subruang $W$ tertentu dari $C[a, b]$[a].*

[a] ruang fungsi kontinu pada $[a, b]$

### Example

Temukan perkiraan terbaik untuk:

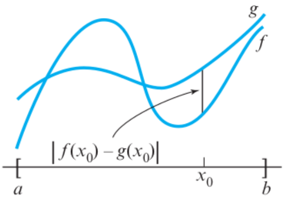
1. $e^x$ lebih dari $[0, 1]$ dengan polinomial berbentuk $a_0 + a_1x + a_2x^2$
2. $\sin \pi x$ atas $[-1, 1]$ dengan fungsi dari bentuk:

$$a_0 + a_1e^x + a_2e^{2x} + a_3e^{3x}$$

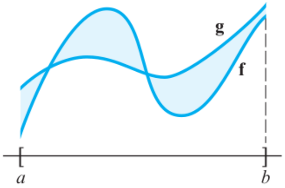
3. $x$ di atas $[0, 2\pi]$ dengan fungsi berbentuk:

$$a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x$$

# Arti matematis dari "perkiraan terbaik terhadap [$a$, $b$]"




▲ Figure 6.6.1 The deviation between $f$ and $g$ at $x_0$.




▲ Figure 6.6.2 The area between the graphs of **f** and **g** over $[a, b]$ measures the error in approximating $f$ by $g$ over $[a, b]$.

# Penjelasan intuitif