Linear Algebra

[KOMS120301] - 2023/2024

# 12.3 - Ruang vektor fundamental: ruang baris, kolom, dan null

Dewi Sintiari

Program Studi Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 12 (November 2023)

# **Bagian 1:** Ruang baris, ruang kolom, dan nol ruang *null*

# Vektor baris dan vektor kolom

Diberikan matriks $m \times n$ $A$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} & \end{bmatrix}$$

- Vektor baris: vektor yang dibentuk dari baris $A$
- Vektor kolom: vektor yang dibentuk dari kolom $A$

 

Vektor baris $A$ adalah:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \cdots \;\; a_{1n}] \\
\mathbf{r}_2 &= [a_{21} \;\; a_{22} \;\; \cdots \;\; a_{2n}] \\
\vdots &= \qquad\quad \vdots \\
\mathbf{r}_m &= [a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \cdots \;\; a_{mn}]
\end{aligned}
$$

Vektor kolom $A$ adalah:

$$
\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \; \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \; \ldots, \; \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}
$$

Misalkan $A$ adalah matriks $(m \times n)$.

- Subruang dari $\mathbb{R}^n$ yang dibentuk oleh vektor baris $A$ disebut ruang baris dari matriks $A$.
- Subruang dari $\mathbb{R}^m$ yang dibentuk oleh vektor kolom $A$ disebut ruang kolom dari matriks $A$.
- Ruang solusi sistem linier homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (yang merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$) disebut spasi nol dari matriks $A$.

**Pertanyaan 1.** Hubungan apa yang ada antara solusi sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan ruang baris, ruang kolom, dan ruang nol matriks koefisien $A$?

**Pertanyaan 2.** Hubungan apa yang ada antara ruang baris, ruang kolom, dan ruang nol suatu matriks?

 

# Ruang kolom

Misalkan sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dimana:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} & \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Misalkan $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ adalah vektor kolom dari $A$. Sistem dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Oleh karena itu, sistem mempunyai solusi jika dan hanya jika $\mathbf{b}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor kolom $A$.

### Teorema

*Suatu sistem persamaan linier* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *konsisten jika dan hanya jika* $\mathbf{b}$ *berada dalam ruang kolom* $A$.

# Contoh ruang kolom

Diketahui sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa $\mathbf{b}$ berada dalam ruang kolom $A$ dengan menyatakannya sebagai kombinasi linier dari vektor kolom $A$.

**Solusi:**

Tahapan:

- Selesaikan sistem dengan eliminasi Gaussian:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$$

- Hal ini menghasilkan

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

  dengan kata lain,

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}$$

# Ruang null

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan ruang nol $A$, selesaikan sistem linear homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Memecahkan sistem dengan eliminasi Gauss, kita memperoleh:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian sistem dapat dituliskan dalam persamaan matriks:

$$\mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$$

dimana $s, t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$ dan $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$.

# **Bagian 2:** Menentukan basis ruang null

 

**Teorema**

*Operasi baris dasar tidak mengubah* **ruang baris** *suatu matriks.*

**Teorema**

*Operasi baris dasar tidak mengubah* **ruang null** *matriks.*

# Bagaimana cara menentukan basis spasi baris, spasi kolom, dan spasi nol?

Misalkan $A$ adalah matriks $(m \times n)$. Bagaimana cara menentukan basis ruang baris, ruang kolom, dan ruang nol matriks $A$?

1. Lakukan operasi baris dasar untuk mendapatkan matriks bentuk eselon baris tereduksi $R$;
2. Basis ruang baris $A$ pada semua vektor baris yang memuat 1 di depan * dari matriks $R$;
3. Basis ruang kolom $A$ adalah semua vektor kolom matriks $A$ yang bersesuaian dengan vektor kolom matriks $R$ yang memuat awalan 1.

*Bagian depan 1 adalah entri di depan pada setiap baris bukan nol adalah 1

# Intuisi di balik algoritma

 

# Contoh 1: menentukan basis ruang baris dan ruang kolom

Tentukan basis ruang baris, ruang kolom, dan ruang kosong matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

**Solusi:**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim ERO \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Basis ruang baris adalah:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

# Contoh 1 (*cont.*)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Jadi, dasar ruang kolom adalah:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

# Contoh 2: menentukan basis spasi nol

Untuk menentukan basis ruang nol, selesaikan persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim ERO \sim \begin{bmatrix} \color{red}{1} & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem linier yang sesuai dengan matriks yang diperbesar terakhir adalah:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 6x_6 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_5 + 5x_6 = 0 \end{cases}$$

dari situ kita dapat mengambil yang berikut ini:

$$\begin{aligned} x_5 &= -5x_6 \\ x_3 &= -3x_4 + 2x_5 + 6x_6 = -3x_4 + 2(-5x_6) + 6x_6 = -3x_4 - 4x_6 \\ x_1 &= -3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 - 4x_6 \\ &= -3x_2 - 4(-3x_4 - 4x_6) + 2x_4 - 5(-5x_6) - 4x_6 \\ &= -3x_2 + 14x_4 + 22x_6 \end{aligned}$$

# Contoh 2 (*cont.*)

Misalkan $x_2 = r$, $x_4 = s$, dan $x_6 = t$, maka penyelesaian $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 14x_4 + 22x_6 = -3r + 14s + 22t \\ x_3 &= -3x_4 - 4x_6 = -3s - 4t \\ x_5 &= -5t \end{aligned}$$

Ini dapat ditulis sebagai vektor:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r + 14s + 22t \\ r \\ -3s - 4t \\ s \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14s \\ 0 \\ -3s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22t \\ 0 \\ -4t \\ 0 \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis dari spasi nol adalah:

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0), \ \mathbf{v}_2 = (14, 0, -3, 1, 0, 0), \ \mathbf{v}_3 = (22, 0, -4, 0, -5, 0)$$

# **Bagian 3:** Rank dan nulitas

Pada Contoh 1, kita menemukan bahwa ruang baris dan ruang kolom matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

keduanya mengandung tiga vektor. Oleh karena itu, keduanya adalah ruang tiga dimensi.

*Apakah ini berlaku untuk matriks lain?*

# Dimensi ruang baris dan ruang kolom

**Teorema**

*Ruang baris dan ruang kolom matriks A mempunyai dimensi yang sama.*

*Proof.*

- Operasi baris dasar tidak mengubah dimensi ruang baris dan ruang kolom suatu matriks.
- Misalkan $R$ berupa sembarang baris eselon dari $A$, maka:

$$\dim(\text{row space of } A) = \dim(\text{row space of } R)$$
$$\dim(\text{column space of } A = \dim(\text{column space of } R)$$

- $\dim(\text{spasi baris } R) = \text{jumlah baris bukan nol di } R$; Dan
- $\dim(\text{ruang kolom } R) = \text{jumlah angka 1 di depan } R$.

Karena pada $R$, jumlah baris bukan nol = jumlah baris 1 di depan, maka $\dim(\text{spasi baris } A) = \dim(\text{spasi kolom } A)$. $\square$

Dimensi ruang baris (dan ruang kolom) matriks $A$ disebut rank of $A$, dan dilambangkan dengan rank($A$).

Dimensi *null space* dari $A$ disebut nullity of $A$, dan dilambangkan dengan nullity($A$).

Teorema (Teorema Dimensi Matriks)

*Jika $A$ adalah matriks dengan kolom $n$, maka:*

$$rank(A) + nullity(A) = n$$

# Contoh

Temukan rank dan nullitas matriks (ukuran $(4 \times 6)$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

**Solusi:**

- **Rank**

  Bentuk eselon baris tereduksi dari $A$ adalah (verifikasi!):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Karena ada dua baris dengan awalan 1, maka:

$$\dim(\text{row space of } A) = \dim(\text{column space of } A) = 2$$

# Contoh (*cont.*)

- **Nulitas**

  Untuk mencari nullitas, selesaikan sistem linier: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

  Dari bentuk eselon tereduksi $A$, kita peroleh sistem linier berikut:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + \phantom{1}5x_6 = 0 \end{cases}$$

  Menyelesaikan persamaan berikut untuk *variabel utama* akan menghasilkan:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6 \\ x_2 &= 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6 \end{aligned}$$

  Jadi solusi sistemnya adalah:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Contoh (*cont.*)

Oleh karena itu, vektornya:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ and } \begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bentuk **basis** untuk ruang solusi, lalu:

$$\text{nullity}(A) = 4$$

**Catatan.** Mengamati bahwa:

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) + \text{nullity}(A) &= n \\ 2 + 4 &= 6 \end{aligned}$$

### Teorema

*Jika $A$ adalah matriks $(m \times n)$, maka:*

1. *rank*$(A)$ =*jumlah variabel terdepan dalam solusi umum* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *nullity*$(A)$ = *jumlah parameter dalam solusi umum* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**Contoh:**

*Temukan rank dan nulitas matriksnya:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks eselon tereduksi adalah sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ada tiga baris bukan nol dalam matriks, jadi $\text{rank}(A) = 3$.

Berdasarkan "Teorema Dimensi", $\text{nullity}(A) = n - \text{rank}(A) = 6 - 3 = 3$.

Untuk membuktikan bahwa nullity$(A) = 5$, kita menyelesaikan sistem linier: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim ERO \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks tereduksi yang diperbesar, kita memperoleh sistem linier:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 = 0 \\ x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 0 \\ x_5 + 5x_6 = 0 \end{cases}$$

Menyelesaikan sistem untuk hasil 1 terdepan:

$$\begin{aligned} x_5 &= -5x_6 \\ x_3 &= -3x_4 - 8x_6 \\ x_1 &= 3x_2 + 14x_4 + 57x_6 \end{aligned}$$

# Solusi latihan (*cont.*)

Oleh karena itu, solusi sistem dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3r + 14s + 57t \\ s \\ -3s - 8t \\ s \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 57 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dimana $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Oleh karena itu, dasar dari ruang nol $A$ adalah:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 57 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

yang berarti $\text{nullity}(A) = 3$.

# Pernyataan yang setara

Jika $A$ adalah matriks $(n \times n)$, maka pernyataan berikut ini ekuivalen.

1. $A$ dapat dibalik.
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya memiliki solusi sepele.
3. Bentuk eselon baris tereduksi dari $A$ adalah $I_n$.
4. $A$ dapat dinyatakan sebagai produk matriks dasar.
5. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ konsisten untuk setiap $(n \times 1)$ matriks $b$.
6. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ memiliki tepat satu solusi untuk setiap $(n \times 1)$ matriks $b$.
7. $\det(A) \neq 0$.
8. Vektor kolom $A$ bebas linier.
9. Vektor baris $A$ bebas linier.
10. Vektor kolom $A$ span $\mathbb{R}^n$.
11. Vektor baris $A$ span $\mathbb{R}^n$.
12. Vektor kolom $A$ membentuk basis untuk $\mathbb{R}^n$.
13. Vektor baris $A$ membentuk basis untuk $\mathbb{R}^n$.
14. $A$ memiliki peringkat $n$.
15. $A$ memiliki nullitas 0.

bersambung...