

## **6.2 - Invers dan hubungannya dengan metode Gauss, metode Gauss-Jordan, dan sistem linier**

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

- 1 mencari invers dengan algoritma eliminasi Gaussian;
- 2 menemukan invers dengan algoritma eliminasi Gauss-Jordan;
- 3 menjelaskan metode mencari solusi sistem linier menggunakan invers;
- 4 mencari solusi sistem linier menggunakan invers;
- 5 memecahkan sistem homogen (ketika vektor konstan adalah vektor nol).

# Bagian 1: Algoritma untuk mencari invers

- Menghitung invers dengan eliminasi Gauss

Diberikan sebuah **matriks persegi yang dapat dibalikkan**  $A$ .  
Untuk menghitung  $A^{-1}$ , kita melakukan perhitungan berikut:

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} [I \mid A^{-1}]$$

- Menghitung invers dengan eliminasi Gauss-Jordan

Diberikan sebuah **matriks persegi yang dapat dibalikkan**  $A$ .  
Untuk menghitung  $A^{-1}$ , kita melakukan perhitungan berikut:

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{Eliminasi G-J}} [I \mid A^{-1}]$$

# Contoh 1

Tentukan invers dari:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

**Solusi:**

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2 - 2R1 \\ \\ R3 - R1 \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ R3 + 2R2 \\ \end{array} \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R3/(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R1 - 2R2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R1 - 2R2 \\ \\ \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] = [I | A^{-1}]$$

## Contoh 1 (*lanjutan*)

Dengan demikian,  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Dapat diperiksa bahwa:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Contoh 2

Terapkan metode G-J untuk mencari invers dari:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

**Solusi:**

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2 - 2R1 \\ R3 + R1 \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2/(-8) \\ \end{array} \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R3 - 8R2 \\ \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2/(-8) \\ \end{array} \sim$$

Bentuk yang direduksi berisi **baris nol** (oleh karena itu, tidak ada cara untuk membuat matriks identitas di blok kiri).

Ini berarti **A tidak memiliki invers**.

## Contoh 2 (*lanjutan*)

Dapat diperiksa bahwa  $A$  memiliki **determinan nol**.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1(4)(5) + 6(-1)(-1) + 4(2)(2) - 4(4)(-1) - (-1)(1)(2) - 5(6)(2) \\ &= 20 + 6 + 16 + 16 + 2 - 60 \\ &= 0\end{aligned}$$



Jika ada, tentukan invers matriks berikut!

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

Selesaikan sistem linier berikut menggunakan eliminasi Gauss-Jordan:

$$\bullet \begin{cases} a - b + 2c - d = -1 \\ 2a + b - 2c - 2d = -2 \\ -a + 2b - 4c + d = 1 \\ 3a \qquad \qquad - 3d = -3 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

# Bagian 3: Hubungan dengan Sistem Persamaan Linier

# Hubungan dengan sistem persamaan linier

Ingat bahwa sistem:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

dapat dituliskan sebagai operasi matriks:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , di mana  $A$  adalah matriks koefisien,  $\mathbf{x}$  adalah vektor variabel, dan  $\mathbf{b}$  adalah matriks konstanta.

## Catatan:

- Jika  $A$  dapat dibalik, maka sistem memiliki solusi tunggal;
- Jika tidak, solusinya tidak tunggal. *Kira-kira, mengapa?*

# Algoritma penyelesaian SPL dengan invers matriks

## Permasalahan:

Misalkan kita ingin menyelesaikan:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , di mana  $\det(A) \neq 0$ .

## Penyelesaian:

Kalikan kedua ruas dengan  $A^{-1}$  (dari kiri), diperoleh:

$$(A^{-1}) A\mathbf{x} = (A^{-1}) \mathbf{b}$$

$$I\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b} \quad \text{since } AA^{-1} = I$$

$$\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b} \quad \text{since } I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Oleh karena itu, solusi sistem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  adalah  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .

# Contoh: mencari solusi sistem linier menggunakan invers

Diberikan sistem linier:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \quad \quad + 8x_3 = 1 \end{cases}$$

**Solution:**

Invers dari matriks berikut telah dihitung sebelumnya:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ,

yakni,  $A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ . Maka, solusinya adalah:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Anda harus dapat memeriksa apakah  $\mathbf{x}$  cocok dengan solusi yang diperoleh menggunakan eliminasi Gaussian atau Gauss-Jordan.

Jika sistemnya homogen (yaitu,  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ), maka berlaku sebagai berikut:

- Jika  $A$  dapat dibalik, maka sistem hanya memiliki solusi trivial;
- Jika  $A$  tidak dapat dibalik, maka sistem memiliki solusi non-trivial.

# Contoh sistem homogen

Tunjukkan bahwa sistem homogen berikut hanya memiliki solusi trivial!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 \quad \quad + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa sistem homogen berikut memiliki solusi tak-trivial!

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$



# Contoh sistem homogen (*lanjutan*)

## Contoh 1:

Sistem homogen memiliki matriks koefisien:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$  and

$$\det(A) \neq 0 \text{ with } A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

## Contoh 2:

Sistem homogen memiliki matriks koefisien:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Dapat diverifikasi bahwa  $\det(A) = 0$ , jadi  $A^{-1}$  tidak ada.

Sistem memiliki solusi tak-trivial, misalnya:

$$x_1 = -29, x_2 = 8, x_3 = -9$$

# Keuntungan menggunakan metode invers dalam menyelesaikan sistem linier

Metode invers berguna untuk menyelesaikan sistem linier  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dengan matriks koefisien yang sama yakni matriks  $A$ , tetapi dengan vektor konstanta  $\mathbf{b}$  yang berbeda.

**Sebagai contoh:**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \quad \quad + 8x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 \quad \quad + 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 \quad \quad + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

# Keuntungan menggunakan metode invers dalam menyelesaikan sistem linier

Metode invers berguna untuk menyelesaikan sistem linier  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dengan matriks koefisien yang sama yakni matriks  $A$ , tetapi dengan vektor konstanta  $\mathbf{b}$  yang berbeda.

**Sebagai contoh:**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 8x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

Dapatkan Anda jelaskan mengapa?

- Karena  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ , maka untuk menyelesaikan sistem tersebut, cukup menghitung  $A^{-1}$  **once**, kemudian mengalikannya dengan vektor yang sesuai  $\mathbf{b}$ .

Selesaikan sistem berikut dengan menggunakan metode invers:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 8x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

Selesaikan sistem berikut dengan menggunakan metode invers:

$$\bullet \begin{cases} a - b + 2c - d = -1 \\ 2a + b - 2c - 2d = -2 \\ -a + 2b - 4c + d = 1 \\ 3a \qquad \qquad - 3d = -3 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

*bersambung...*