

# 09 - Greedy Technique (part 2)

[KOMS120403]

Desain dan Analisis Algoritma (2022/2023)

Dewi Sintari

Prodi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 11-15 April 2022

# Daftar isi

- Integer knapsack problem
- Fractional knapsack problem
- Job scheduling with deadlines
- Kode Huffman
- Traveling Salesman Problem

# Contoh 4.

## Integer (1/0) knapsack problem

## 4. Integer (1/0) knapsack problem (1)

**Masalah:** diberikan  $n$  objek dan sebuah ransel dengan kapasitas  $K$ . Setiap objek memiliki bobot  $w_i$  dan profit  $p_i$ .

Bagaimana cara memilih objek yang akan dimasukkan ke dalam knapsack s.t. agar total keuntungannya maksimal? Berat total objek tidak boleh melebihi kapasitas ransel.

Formulasi matematis dari soal 1/0 knapsack:

$$\text{Maksimalkan } F = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$\text{atas kendala } \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq K$$

dan  $x_i = 0$  atau  $x_i = 1$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$

## 4. Integer (1/0) knapsack problem (2)

Ingatlah bahwa kompleksitas waktu dengan *exhaustive search* adalah  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ . Dapatkah Anda jelaskan mengapa?

**Dengan menggunakan strategi greedy:**

- Sertakan objek satu per satu ke ransel. Setelah dimasukkan, maka objek tidak dapat diambil kembali.
- Beberapa strategi greedy-heuristik yang dapat digunakan untuk memilih objek di ransel:
  - ① **Greedy by profit:** pada setiap langkah, pilih objek dengan **keuntungan maksimum**
  - ② **Greedy by weight:** pada setiap langkah, pilih objek dengan **berat minimum**
  - ③ **Greedy by density:** pada setiap langkah, pilih objek dengan **nilai maksimum  $p_i/w_i$**
- Namun, tidak ada strategi di atas yang menjamin solusi optimal.

## 4. Integer (1/0) knapsack problem (3)

### Contoh

Diberikan empat objek sebagai berikut, dan ransel berkapasitas  $M = 16$ .

$$(w_1, p_1) = (6, 12); (w_2, p_2) = (5, 15)$$

$$(w_3, p_3) = (10, 50); (w_4, p_4) = (5, 10)$$

Object properties				Greedy by			Optimal solution
$i$	$w_i$	$p_i$	$p_i/w_i$	profit	weight	density	
1	6	12	2	0	1	0	0
2	5	15	3	1	1	1	1
3	10	50	5	1	0	1	1
4	5	10	2	0	1	0	0
Solution set				{3, 2}	{2, 4, 1}	{3, 2}	15
Total weight				20	20	20	15
Total profit				28.2	31.0	31.5	65

## 4. Integer (1/0) knapsack problem (4)

### Contoh

*Diberikan enam objek sebagai berikut:*

$$(w_1, p_1) = (100, 40); (w_2, p_2) = (50, 35); (w_3, p_3) = (45, 18)$$

$$(w_4, p_4) = (20, 4); (w_5, p_5) = (10, 10); (w_6, p_6) = (5, 2)$$

*dan sebuah ransel dengan kapasitas  $M = 100$ .*

## 4. Integer (1/0) knapsack problem (4)

### Contoh

Diberikan enam objek sebagai berikut:

$$(w_1, p_1) = (100, 40); (w_2, p_2) = (50, 35); (w_3, p_3) = (45, 18)$$

$$(w_4, p_4) = (20, 4); (w_5, p_5) = (10, 10); (w_6, p_6) = (5, 2)$$

dan sebuah ransel dengan kapasitas  $M = 100$ .

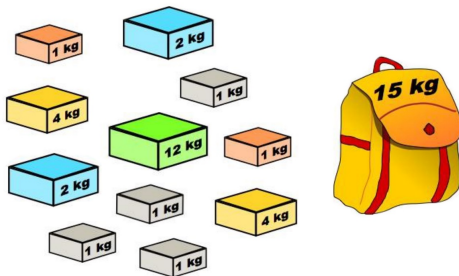
Object properties				Greedy by			Optimal solution
$i$	$w_i$	$p_i$	$p_i/w_i$	profit	weight	density	
1	100	40	0.4	1	0	0	0
2	50	35	0.7	0	0	1	1
3	45	18	0.4	0	1	0	1
4	20	4	0.2	0	1	1	0
5	10	10	1.0	0	1	1	0
6	5	2	0.4	0	1	1	0
Total weight				100	80	85	100
Total profit				40	34	51	55



## 4. Integer (1/0) knapsack problem (5)

### Kesimpulan:

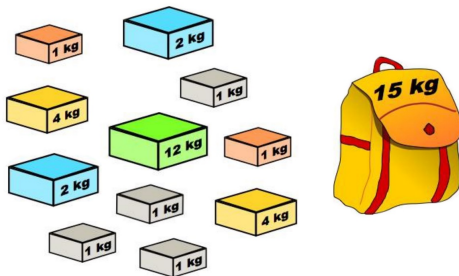
Apakah algoritma greedy selalu dapat menemukan solusi optimal untuk masalah *integer knapsack*?



## 4. Integer (1/0) knapsack problem (5)

### Kesimpulan:

Apakah algoritma greedy selalu dapat menemukan solusi optimal untuk masalah *integer knapsack*?



**TIDAK! Tugas:** Carilah sebuah contoh dimana ketiga pendekatan tersebut tidak memberikan solusi optimal!

# Contoh 5.

## Fractional knapsack problem

## 5. Fractional knapsack problem (1)

**Fractional knapsack problem** adalah varian dari masalah knapsack, tetapi penyelesaiannya tidak harus bilangan bulat, namun bisa dalam bentuk pecahan.

**Formulasi permasalahan:**

$$\text{Maksimalkan } F = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$\text{sedemikian sehingga } \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq K$$

$$\text{dan } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

**Pertanyaan:** apakah mungkin untuk memecahkan masalah dengan *exhaustive search*?

## 5. Fractional knapsack problem (2)

**Pertanyaan:** apakah mungkin untuk memecahkan masalah dengan *exhaustive search*?

Karena  $0 \leq x_i \leq 1$ , maka terdapat tak hingga banyaknya bilangan yang mungkin untuk  $x_i$ .

Karena rentang nilai  $x_1$  tidak diskrit, namun kontinu, jadi **tidak mungkin diselesaikan dengan exhaustive search**.

## 5. Fractional knapsack problem (3)

**Pertanyaan:** apakah mungkin untuk memecahkan masalah dengan *exhaustive search*?

### Contoh

Diberikan tiga objek sebagai berikut:

$$(w_1, p_1) = (18, 25); (w_2, p_2) = (15, 24); (w_3, p_3) = (10, 15)$$

dan ransel kapasitas  $M = 20$ .

Object properties				Greedy by		
$i$	$w_i$	$p_i$	$p_i/w_i$	profit	weight	density
1	18	25	1.4	1	0	0
2	15	24	1.6	2/15	2/3	1
3	10	15	1.5	0	1	1/2
Total weight				20	20	20
Total profit				28.2	31.0	31.5

## 5. Fractional knapsack problem (4)

### Teorema (Greedy by density menghasilkan solusi optimal)

*Jika  $\frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{p_n}{w_n}$ , maka algoritma Greedy dengan strategi memilih densitas maksimum  $\frac{p_i}{w_i}$  memberikan solusi optimal.*

### Proof.

**Tugas:** (berikan bukti yang serupa dengan yang dijelaskan pada “Masalah Pemilih Aktivitas” (pada slide bagian 1)) □

### Algoritma:

- Hitung  $\frac{p_i}{w_i}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$
- Agar strategi ini berhasil,  $\frac{p_i}{w_i}$ 's diurutkan dalam urutan menurun.

## 5. Fractional knapsack problem (5)

```
1: procedure FRACTIONALKNAPSACK( $C$ : objects set,  $K$ : real)
2:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3:      $x[i] \leftarrow 0$  ▷  $x$  is the solution set
4:   end for
5:    $i \leftarrow 0$ ;  $\text{totalwt} \leftarrow 0$ ;  $\text{intFrac} \leftarrow \text{True}$  ▷ ' $\text{totalwt}$ ': total weight, and ' $\text{intFrac}$ ': boolean var
   indicating if current object can be included fully
6:   while ( $i \leq n$ ) and  $\text{intFrac}$  do
7:      $i \leftarrow i + 1$ 
8:     if  $\text{totalwt} + w[i] \leq K$  then
9:        $x[i] \leftarrow 1$  ▷ Include object  $i$  to knapsack
10:       $\text{totalwt} \leftarrow \text{totalwt} + w[i]$  ▷ Include the fraction of object  $i$  to total weight
11:    else
12:       $\text{intFrac} \leftarrow \text{False}$ 
13:       $x[i] \leftarrow \frac{K - \text{totalwt}}{w[i]}$  ▷ Only a fraction of object  $i$  can be included to the knapsack
14:    end if
15:  end while
16:  return  $x$ 
17: end procedure
```



# Contoh 6.

## Job scheduling with deadlines

## 6. Job scheduling with deadlines

**Masalah:** diberikan  $n$  pekerjaan yang akan dilakukan oleh mesin. Setiap job diproses oleh mesin dalam satu satuan waktu dan deadline setiap job  $i$  adalah  $d_i \geq 0$ .

Pekerjaan  $i$  akan memberikan keuntungan  $p_i$  jika pekerjaan tidak dilakukan setelah batas waktu. Bagaimana memilih pekerjaan yang akan diproses oleh mesin agar keuntungan maksimal?

## 6. Job scheduling with deadlines

### Contoh

Diberikan 4 pekerjaan ( $n = 4$ ) dengan karakteristik sebagai berikut:

- $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (50, 10, 15, 30)$
- $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (2, 1, 2, 1)$

Misalkan mesin mulai bekerja pada jam 6 pagi, maka kita memiliki kendala sebagai berikut:

Job	Deadline ( $d_i$ )	Must be done before
1	2 hours	8 am
2	1 hour	7 am
3	2 hours	8 am
4	1 hour	7 am

## 6. Job scheduling with deadlines

Misalkan  $J$  menjadi himpunan pekerjaan, maka fungsi tujuan dari masalah ini adalah:

$$\text{Maximize } F = \sum_{i \in J} p_i$$

Himpunan solusi  $J$  adalah **layak** jika setiap pekerjaan di  $J$  dilakukan sebelum tenggat waktu.

Sebuah **solusi optimal** adalah solusi layak yang memaksimalkan  $F$ .

## 6. Job scheduling with deadlines

Set of jobs	Order	Total profit ( $F$ )	Description
$\{\}$	-	0	feasible
$\{1\}$	-	0	feasible
$\{2\}$	-	0	feasible
$\{3\}$	-	0	feasible
$\{4\}$	-	0	feasible
$\{1, 2\}$	-	0	feasible
$\{1, 3\}$	-	0	feasible
$\{1, 4\}$	-	0	feasible $\rightarrow$ optimal
$\{2, 3\}$	-	0	feasible
$\{2, 4\}$	-	0	not feasible
$\{3, 4\}$	-	0	feasible
$\{1, 2, 3\}$	-	0	feasible
$\{1, 2, 4\}$	-	0	not feasible
$\{1, 3, 4\}$	-	0	not feasible
$\{2, 3, 4\}$	-	0	not feasible
$\{1, 2, 3, 4\}$	-	0	not feasible

## 6. Job scheduling with deadlines

Kompleksitas strategi exhaustive search:  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ .

Strategi greedy untuk memilih pekerjaan: “pada setiap langkah, pilih pekerjaan  $i$  dengan  $p_i$  terbesar untuk meningkatkan nilai objektif  $F$ ”.

Misalkan  $J$  menjadi himpunan yang berisi pekerjaan yang dipilih. Kita menempatkan pekerjaan  $i$  di  $J$  dalam urutan tertentu sedemikian sehingga semua pekerjaan selesai sebelum tenggat waktu.

## 6. Job scheduling with deadlines

### Contoh

Diberikan 4 pekerjaan dengan spesifikasi sebagai berikut:

- $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (50, 10, 15, 30)$
- $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (2, 1, 2, 1)$

Step	$J$	$F = \sum_i p_i$	Description
0	$\{\}$	0	feasible
1	$\{1\}$	50	feasible
2	$\{4, 1\}$	$50+30 = 80$	feasible
3	$\{4, 1, 3\}$	-	not feasible
4	$\{4, 1, 2\}$	-	not feasible

Solusi optimal:  $J = \{4, 1\}$  dengan  $F = 80$ .

## 6. Job scheduling with deadlines

---

### Algorithm 1 Job scheduling algorithm

---

```
1: procedure JOBSCHDLNG( $d[1..n]$ ,  $p[1..n]$ : array of integers)
2:    $J \leftarrow \{\}$ 
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
4:      $k \leftarrow$  job with highest profit
5:     if all jobs in  $J \cup \{k\}$  is feasible then
6:        $J \leftarrow J \cup \{k\}$ 
7:     end if
8:   end for
9:   return  $J$ 
10: end procedure
```

---

### Kompleksitas:

- Memilih pekerjaan dengan  $p_i$  terbesar:  $\mathcal{O}(n)$
- While loop  $n$  kali (= jumlah pekerjaan di  $C$ )
- Kompleksitas *job scheduling*:  $\mathcal{O}(n^2)$



## 6. Job scheduling with deadlines

Perbaikan: pekerjaan diurutkan berdasarkan keuntungan mereka (secara menurun/*descending*).

---

### Algorithm 2 Job scheduling algorithm

---

```
1: procedure JOBSCHDLNG2( $d[1..n]$ ,  $p[1..n]$ : array of integers)
2:    $J \leftarrow \{1\}$ 
3:   for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
4:     if all jobs in  $J \cup \{i\}$  is feasible then
5:        $J \leftarrow J \cup \{i\}$ 
6:     end if
7:   end for
8:   return  $J$ 
9: end procedure
```

---

Kompleksitas: ?

# Contoh 7. Kode Huffman

## 7. Kode Huffman (1)

### Prinsip encoding dan decoding

**Encoding/decoding** adalah terjemahan pesan yang mudah dipahami.

**Encoding**: cara karakter apa pun dipahami dalam penyimpanan atau transmisi komputer dari satu mesin ke mesin lain.

**Decoding**: proses mengembalikan pesan yang disandikan ke pesan asli.

## 7. Kode Huffman (2)

### Fixed-length versus Variable-length codes

Skema **fixed length encoding** menggunakan jumlah byte yang konstan/*fixed* untuk mewakili karakter yang berbeda.

Skema **variable length encoding** menggunakan jumlah byte yang berbeda untuk mewakili karakter yang berbeda

## 7. Kode Huffman (3)

Kode Huffman digunakan untuk **kompresi data**.

### **Kode panjang tetap (fixed-length code)**

Diberikan sebuah pesan dengan panjang 100.000 karakter dengan frekuensi sebuah huruf muncul dalam pesan sebagai berikut:

Karakter	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
Frekuensi	45%	13%	12%	16%	9%	5%
Encoding	000	001	010	011	100	111

**Contoh:** penyandian 'bad' adalah **001000011**

Dengan metode ini, pengkodean 100.000 karakter membutuhkan 300.000 bit.

## 7. Kode Huffman (3)

Kode Huffman digunakan untuk **kompresi data**.

### Kode panjang tetap (fixed-length code)

Diberikan sebuah pesan dengan panjang 100.000 karakter dengan frekuensi sebuah huruf muncul dalam pesan sebagai berikut:

Karakter	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
Frekuensi	45%	13%	12%	16%	9%	5%
Encoding	000	001	010	011	100	111

**Contoh:** penyandian 'bad' adalah **001000011**

Dengan metode ini, pengkodean 100.000 karakter membutuhkan 300.000 bit.

### Prinsip dasar Kode Huffman:

- semakin **sering** karakter muncul, semakin **pendek** *encoding*, dan sebaliknya.

## 7. Kode Huffman (4)

### Kode Huffman panjang tak-konstan (variable-length code)

Karakter	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
Frekuensi	45%	13%	12%	16%	9%	5%
Encoding	0	101	100	111	1100	1100

**Contoh:** penyandian **bad** adalah **1010111**

Dengan metode ini, pengkodean 100.000 karakter membutuhkan:

$$(0.45 \times 1 + 0.13 \times 3 + 0.12 \times 3 + 0.16 \times 3 + 0.09 \times 4 + 0.05 \times 4) \times 10^5 \\ = 224,000 \text{ bits}$$

$$\text{Rasio kompresi} = \frac{300,000 - 224,000}{300,000} \times 100\% = 25,5\%.$$

## 7. Kode Huffman (5)

- Algoritma greedy untuk membentuk Kode Huffman bertujuan untuk meminimalkan panjang kode biner untuk semua karakter dalam pesan  $(M_1, M_2, \dots, M_n)$ .
- Kita membangun **weighted binary tree**. Setiap *simpul daun/leaf node* menunjukkan karakter dalam pesan, dan *simpul dalam/internal nodes* menunjukkan penggabungan karakter tersebut.
- Setiap sisi dalam pohon diberi label 0 atau 1 secara konsisten (misalnya: kiri diberi '0' dan kanan diberi '1').
- Meminimalkan kode biner untuk setiap karakter sama dengan meminimalkan panjang lintasan dari akar ke daun.



## 7. Kode Huffman (6)

### Algoritma:

- 1 Hitung frekuensi setiap karakter dalam pesan. Representasikan setiap karakter dengan pohon dengan satu simpul (atau single-node tree), dan setiap simpul dipasangkan dengan frekuensi karakter yang sesuai.
- 2 Terapkan strategi greedy: di setiap langkah, gabungkan dua pohon yang memiliki frekuensi terkecil di akar. Akar baru memiliki frekuensi sama dengan jumlah frekuensi dari dua pohon yang menyusunnya.
- 3 Ulangi langkah ke-2 sampai akhirnya kita mendapatkan satu pohon Huffman. Ini membentuk pohon biner.
- 4 Berikan label pada setiap sisi pohon dengan 0 atau 1 (misalnya sisi berorientasi kiri diberi label 0 dan sisi berorientasi kanan diberi label 1).
- 5 Setiap lintasan dari akar, setiap daun pohon mewakili string biner untuk setiap karakter, dengan frekuensi seperti yang ditunjukkan pada daun yang sesuai.

## 7. Kode Huffman (7)

**Berapakah kompleksitas waktunya?**

$$\mathcal{O}(n \log n)$$

- Gunakan *heap*\* untuk menyimpan bobot setiap pohon, setiap iterasi membutuhkan waktu sebanyak  $\mathcal{O}(\log n)$  untuk menentukan bobot termkecil dan menyisipkan bobot baru.
- Terdapat sebanyak  $\mathcal{O}(n)$  iterasi, satu untuk setiap item.

---

\*[https://www.wikiwand.com/en/Heap\\_\(data\\_structure\)](https://www.wikiwand.com/en/Heap_(data_structure))

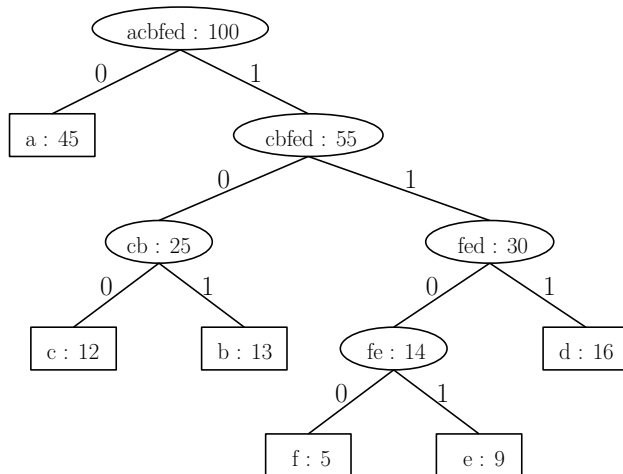
## 7. Kode Huffman (8)

**Latihan:** Diberikan pesan dengan panjang 100. Pesan terdiri dari huruf  $a, b, c, d, e, f$ . Frekuensi setiap huruf dalam pesan adalah sebagai berikut:

Karakter	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
Frekuensi	45%	13%	12%	16%	9%	5%

Temukan kode Huffman untuk setiap karakter dalam pesan.

## 7. Kode Huffman (10)



## 7. Kode Huffman (11)

### Huffman code:

- a : 0
- b : 101
- c : 100
- d : 111
- e : 1101
- f : 1100

# Contoh 8.

## Traveling salesman problem

## 8. Traveling salesman problem (1)

Diberikan daftar kota dan jarak antara setiap pasangan kota, berapakah rute terpendek yang mengunjungi setiap kota tepat satu kali dan kembali ke kota asal?

**Contoh:**

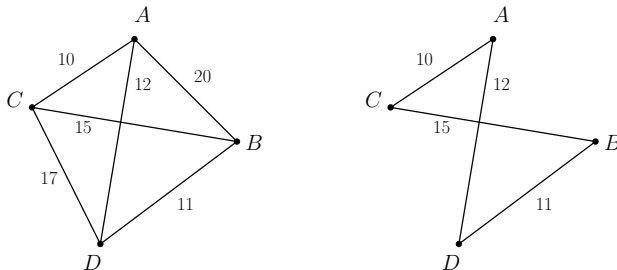
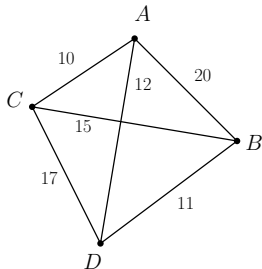


Figure: Graf dengan sisi berbobot dan solusi dari TSP-nya

## 8. Traveling salesman problem (2): algorithm and example

- 1 Diberikan graf berikut, kita ingin mencari TSP dari simpul A. Misalkan simpul dari graf input  $G$  menjadi:  $v_1, v_2, \dots, v_n$
- 2 Misalkan tur dimulai dari  $v_1$ . Simpul berikutnya dipilih “secara greedy”
  - Pada setiap langkah  $i$ , pilih simpul  $v_j$  yang bobot sisinya  $(v_i, v_j)$  diminimalkan.



	A	B	C	D
A	-	20	10	12
B	20	-	15	11
C	10	15	-	17
D	12	11	17	-

**Solusi greedy:**  $A \xrightarrow{10} C \xrightarrow{15} B \xrightarrow{11} D \xrightarrow{12} A$ , dengan bobot total = 48.



# Bagian 4. Kekurangan algoritma greedy

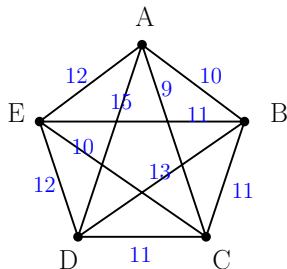
# Kekurangan algoritma greedy

**Warning!** Optimum global belum tentu merupakan solusi optimal. Ini bisa berupa solusi *sub-optimum* atau solusi *pseudo-optimum*.

- Algoritma greedy tidak mencoba semua kandidat solusi yang mungkin (seperti dalam *exhaustive search*).
- Ada banyak fungsi SELECTION yang berbeda, jadi kita harus memilih fungsi yang sesuai untuk mendapatkan solusi yang optimal.

## Solusi greedy tidak selalu optimal (1)

Diberikan graf berikut, kita ingin mencari TSP yang dimulai dari simpul A.



	A	B	C	D	E
A	-	10	9	15	12
B	10	-	11	13	11
C	9	11	-	11	10
D	15	13	11	-	12
E	12	11	10	12	-

**Greedy solution:**  $A \xrightarrow{9} C \xrightarrow{10} E \xrightarrow{11} B \xrightarrow{13} D \xrightarrow{15} A$  dengan bobot = 58.

**Optimal solution:**  $A \xrightarrow{10} B \xrightarrow{11} C \xrightarrow{11} D \xrightarrow{12} E \xrightarrow{12} A$  dengan bobot = 56.

## Solusi greedy tidak selalu optimal (2)

### Contoh (Greedy solution $\neq$ optimal solution)

- ① *Set of coins:  $\{1, 3, 4, 5\}$ , amount of money: 7*
  - ▶ *Greedy solution:  $7 = 5 + 1 + 1$  (3 coins)*
  - ▶ *Optimal solution:  $7 = 4 + 3$  (2 coins)*
- ② *Set of coins:  $\{1, 7, 10\}$ , amount of money: 15*
  - ▶ *Greedy solution:  $15 = 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$  (6 coins)*
  - ▶ *Optimal solution:  $15 = 7 + 7 + 1$  (3 coins)*
- ③ *Set of coins:  $\{1, 10, 15\}$ , amount of money: 20*
  - ▶ *Greedy solution:  $20 = 15 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$  (6 coins)*
  - ▶ *Optimal solution:  $20 = 10 + 10$  (2 coins)*

*Fun fact:* untuk sistem IDR, algoritma greedy selalu memberikan solusi optimal untuk masalah pertukaran koin

# Kekurangan algoritma greedy

## Tapi mengapa algoritma greedy masih digunakan?

- Dibandingkan dengan menggunakan algoritma waktu eksponensial untuk mendapatkan solusi optimal aktual, algoritma greedy dapat digunakan untuk mendapatkan perkiraan solusi optimal (misalnya, pada penyelesaian TSP).
- Jika algoritma greedy menghasilkan solusi optimal, maka hal ini harus dibuktikan secara matematis.
- Namun, lebih mudah untuk menunjukkan bahwa solusi greedy tidak optimal (yakni dengan memberikan contoh penyangkal).

*end of slide...*