

Matematika Diskrit

[KOMS119602] - 2022/2023

9.3 - Kombinasi

Dewi Sintiar

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Bagian 6: Kombinasi

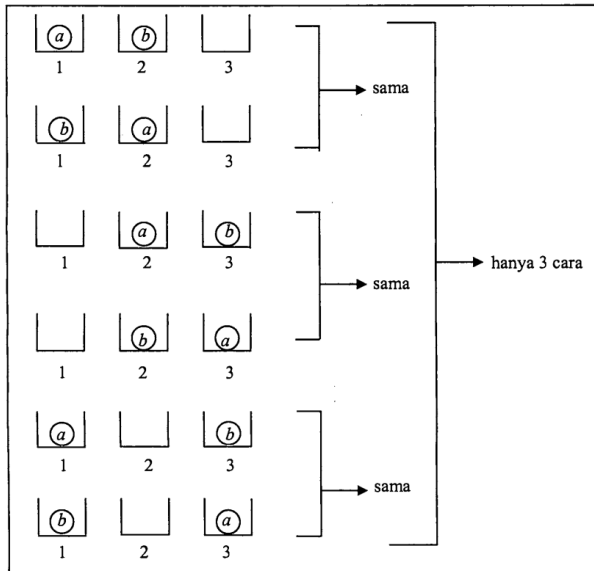
Contoh motivasi

Misalkan ada 2 bola berwarna merah, yaitu bola a dan bola b , serta 3 kotak.

Kita ingin memasukkan bola ke dalam kotak, dimana setiap kotak memuat paling banyak 1 bola.

Tentukan banyaknya cara menempatkan bola ke dalam kotak-kotak tersebut.

Solusi



Kaitan kombinasi dengan permutasi

Apa yang membedakan permutasi dan kombinasi?

▶ ...

▶ ...

Aturan kombinasi

Banyaknya cara memasukkan bola:

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Mengapa $\frac{P(3,2)}{2}$?

Aturan kombinasi

Banyaknya cara memasukkan bola:

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Mengapa $\frac{P(3,2)}{2}$?

Bagaimana jika terdapat 3 bola dan 10 kotak? Ada berapa cara berbeda untuk meletakkan bola ke dalam kotak?

Aturan kombinasi

Misalkan terdapat r bola berwarna sama dan n kotak. Berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola ke dalam kotak?

Aturan kombinasi

Misalkan terdapat r bola berwarna sama dan n kotak. Berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola ke dalam kotak?

Dalam hal ini haruslah $r \leq n$. Mengapa?

Banyaknya cara adalah:

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

Ini dinotasikan dengan:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

Artinya kita mengambil r objek dari n objek.

Aturan kombinasi

Misalkan terdapat r bola berwarna sama dan n kotak. Berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola ke dalam kotak?

Dalam hal ini haruslah $r \leq n$. Mengapa?

Banyaknya cara adalah:

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

Ini dinotasikan dengan:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

Artinya kita mengambil r objek dari n objek.

Hubungan permutasi dan kombinasi dapat dituliskan sebagai:

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$$

Latihan 1

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan banyaknya himpunan bagian dengan dua elemen yang dapat dibentuk dari himpunan A .

Solusi:

$$\begin{array}{l} \{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\} \end{array} \bigg\rangle 3 \text{ buah}$$

Latihan 2: permutasi atau kombinasi?

Tentukan banyaknya cara memilih 3 dari 4 elemen himpunan $A = \{a, b, c, d\}$.

Solusi:

Himpunan bagian A dengan 3 elemen	Permutasi setiap himpunan bagian
$\{a, b, c\}$	$abc, acb, bca, bac, cab, cba$
$\{a, b, d\}$	$abd, adb, bda, bad, dab, dba$
$\{a, c, d\}$	$acd, adc, cda, cad, dac, dca$
$\{b, c, d\}$	$bcd, bdc, cdb, cbd, dbc, dcb$

Banyaknya cara memilih 3 elemen dari 4 elemen pada himpunan adalah:

$$C(4, 3) = \frac{4!}{3! \cdot (4 - 3)!} = 4$$

Latihan 3: permutasi atau kombinasi?

Tentukan banyaknya cara menyusun menu nasi goreng dalam seminggu.

Solusi:

- ▶ Nasi goreng dapat diasumsikan sebagai bola;
- ▶ Hari dalam seminggu dapat diasumsikan sebagai kotak.

Banyaknya cara berbeda adalah:

$$C(7, 3) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

Bagian 7: Permutasi & kombinasi bentuk umum

Contoh motivasi

Misalkan diberikan 10 bola, sebagai berikut:

- ▶ 2 bola berwarna merah;
- ▶ 3 bola berwarna hijau;
- ▶ 5 bola berwarna kuning.

Tentukan banyaknya cara memasukkan 10 bola tersebut ke dalam 10 kotak.

Solusi:

Solusi contoh motivasi

Jika semua bola berbeda, maka bola-bola dapat dimasukkan dalam:

$$P(10, 10) = 10! \text{ cara}$$

Jika setiap bola dianggap berbeda, maka:

- ▶ Bola merah dapat dimasukkan dalam 2! cara
- ▶ Bola hijau dapat dimasukkan dalam 3! cara
- ▶ Bola kuning dapat dimasukkan dalam 5! cara

Maka, banyaknya cara memasukkan 10 bola ke dalam 10 kotak adalah:

$$\frac{P(10, 10)}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$$

Perumuman aturan

Jika terdapat bola-bola sebagai berikut:

- ▶ n_1 bola berwarna 1;
- ▶ n_2 bola berwarna 2;
- ▶ ...
- ▶ n_k bola berwarna k ;

dimana: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Maka banyaknya cara untuk memasukkan bola ke dalam kotak adalah:

$$P(n_1; n_2; \dots; n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Latihan dapat dilihat pada Conoh 6.36 s.d. 6.39 pada Buku Referensi Matematika Diskrit (oleh Rinaldi Munir)...

Bagian 8: Kombinasi dengan perulangan

Contoh motivasi

Diberikan r bola berwarna **sama** dan n kotak, berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola-bola ke dalam kotak jika:

*setiap kotak boleh diisi dengan **lebih dari satu bola**.*

Contoh motivasi

Diberikan r bola berwarna **sama** dan n kotak, berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola-bola ke dalam kotak jika:

*setiap kotak boleh diisi dengan **lebih dari satu** bola.*

Solusi:

Banyaknya cara adalah:

$$C(n + r - 1, r)$$

Mengapa?

Ini dapat dilihat sebagai banyaknya cara menaruh $(n - 1)$ sekat di antara r bola yang ada.

Latihan dapat dilihat pada Conoh 6.40 s.d. 6.45 pada Buku Referensi Matematika Diskrit (oleh Rinaldi Munir)...

Bagian 9: Koefisien binomial

Contoh motivasi

Bagaimanakah cara menjabarkan bentuk:

$$(x + y)^n$$

Contoh motivasi

Bagaimanakah cara menjabarkan bentuk:

$$(x + y)^n$$

Solusi:

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

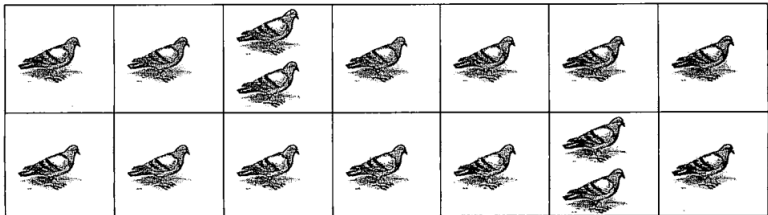
latihan dapat dilihat pada Conoh 6.46 s.d. 6.48 pada Buku Referensi Matematika Diskrit (oleh Rinaldi Munir)...

Bagian 9: Prinsip sarang merpati (*pigeon hole*)

Konsep “Prinsip Sarang Merpati”

Teorema (Prinsip Sarang Merpati)

Jika $(n + 1)$ objek ditempatkan dalam n kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek



latihan dapat dilihat pada Conoh 6.49 s.d. 6.53 pada Buku Referensi Matematika Diskrit (oleh Rinaldi Munir)...

end of slide...