

Aljabar Linier
[KOMS120301] - 2023/2024

7.1 - Vektor di R^n

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7 (November 2023)

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

- ① menjelaskan pengertian vektor secara umum;
- ② menjelaskan definisi vektor dalam Aljabar Linier;
- ③ menjelaskan beberapa operasi pada vektor, seperti:
 - penjumlahan vektor dan perkalian skalar;
 - kombinasi linier.

Bagian 1: **Vektor** (*secara umum*)

Apa itu vektor??

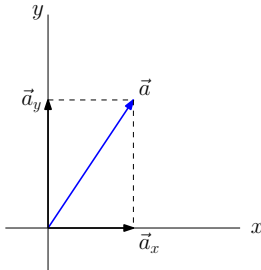
Tiga cara mendefinisikan vektor:

- 1 Perspektif Fisika
- 2 Perspektif Matematika
- 3 Perspektif Ilmu Komputer

Apa itu vektor (dalam fisika)?

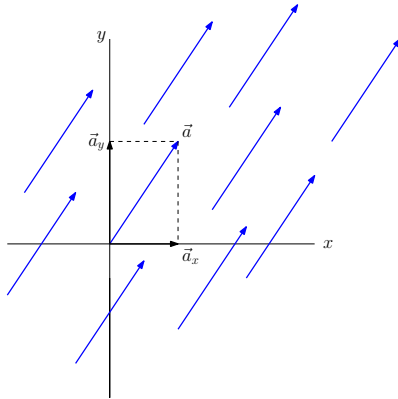
Vektor adalah besaran yang memiliki *nilai* dan *arah* dan digambarkan dengan himpunan ruas garis berarah.

Biasanya, vektor dilambangkan dengan huruf yang diketik dengan huruf tebal, atau dengan panah di atasnya; misalnya \vec{a} . Vektor sering dinyatakan sebagai tanda panah yang memiliki panjang dan arah yang bersesuaian.



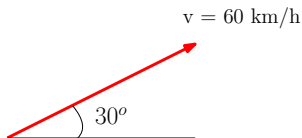
Bagaimana mendefinisikan vektor (dalam fisika)?

- Panjang (besar)
- Arah



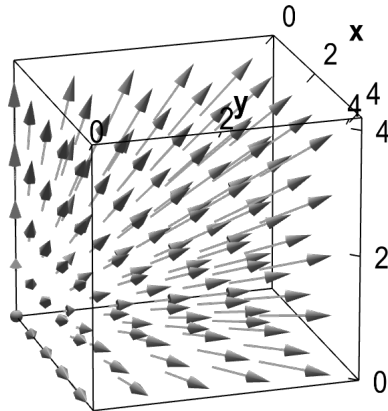
Dua vektor dikatakan **sama** jika panjang dan arahnya sama

Contoh vektor dalam Fisika



Kecepatan sebuah mobil adalah 60 km/jam , dan melaju ke 30° ke arah timur laut.

Vektor dalam ruang berdimensi 3 (dalam fisika)



Apa itu vektor (dalam Ilmu Komputer)?

Contoh

Seorang guru perlu memeriksa kesehatan siswanya, dengan mengukur berat dan tinggi mereka. Bagaimana seharusnya data tersebut direpresentasikan?



$$\begin{bmatrix} 40 \text{ kg} \\ 150 \text{ cm} \end{bmatrix}$$

Vektor berdimensi 2

$$\begin{bmatrix} 40 \text{ kg} \\ 150 \text{ cm} \\ 14 \text{ years} \end{bmatrix}$$

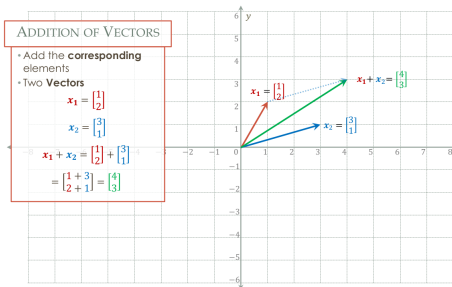
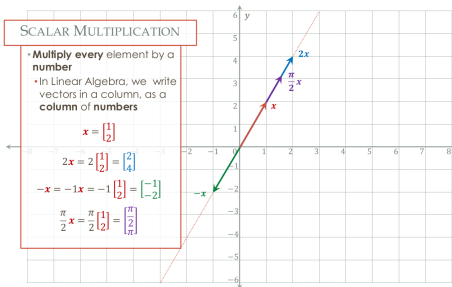
Vektor berdimensi 3

Dalam Ilmu Komputer, sebuah vektor dapat dianggap sebagai daftar angka (tupel)

Apa itu vektor (dalam Matematika)?

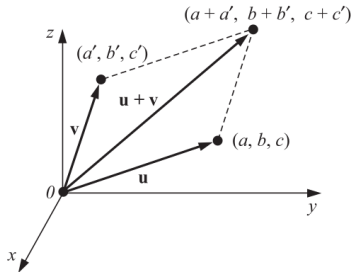
Konsep matematika vektor adalah kombinasi dari keduanya:

- Vektor dapat dipandang *secara geometris* atau *aljabar*;
- Kita dapat melakukan operasi seperti penjumlahan, perkalian, pengurangan, dll.

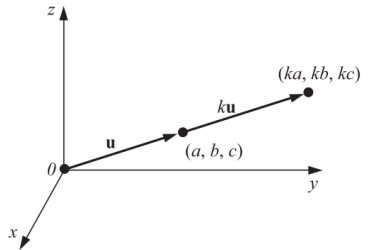


Kembali ke sekolah menengah: *operasi sederhana dalam vektor yang mungkin telah Anda pelajari dalam fisika*

- 1 penjumlahan vektor
- 2 perkalian skalar

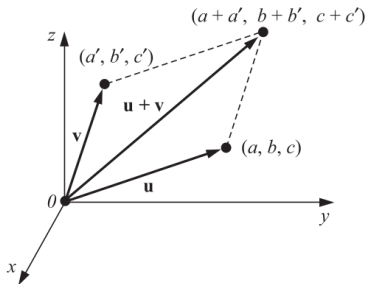


(a) Vector Addition



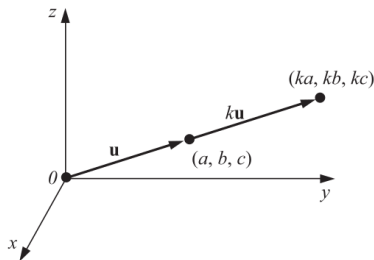
(b) Scalar Multiplication

Penjumlahan vektor ($\mathbf{u} + \mathbf{v}$)



- Secara geometris, *resultan* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ diperoleh dengan **hukum jajaran genjang**
- Jika \mathbf{u} memiliki titik akhir (a, b, c) dan \mathbf{v} memiliki titik akhir (a', b', c') , maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ memiliki titik akhir $(a + a', b + b', c + c')$

Perkalian skalar ($k\mathbf{u}$)

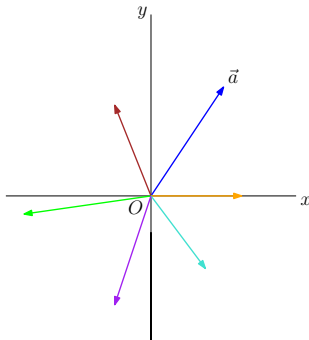


- Misalkan $k \in \mathbb{R}$, maka $k\mathbf{u}$ adalah vektor yang besarnya k kali besar \mathbf{u} , dan arahnya sama ketika $k > 0$ atau berlawanan arah ketika $k < 0$.
- Jika \mathbf{u} memiliki titik akhir (a, b, c) , maka titik akhir $k\mathbf{u}$ adalah (ka, kb, kc) .

Bagian 2: **Vektor dalam** **Aljabar Linier**

Vektor dalam Aljabar Linier

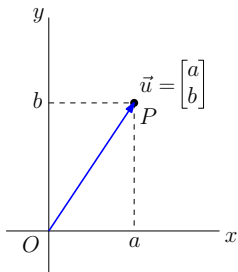
Secara geometris:



- Vektor adalah panah yang berasal dari titik asal O
- Notasi: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$ atau $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$

Vektor dalam Aljabar Linier

Dalam ruang berdimensi 2



Vektor adalah **tanda panah yang berpangkal di titik asal O .**

Namun ini tidak sama dengan titik.

Vektor \vec{u} sama dengan \overrightarrow{OP}

Nilai a dan b dalam $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ menunjukkan seberapa jauh vektor \vec{u} bergerak sepanjang sumbu x dan sumbu y .

Tanda positif (resp. negatif) dari a atau b menunjukkan bahwa ia bergerak ke kanan atau ke atas (resp. kiri atau bawah).

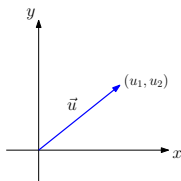
Dalam 3D, hal ini serupa, tetapi kita menggunakan tiga sumbu koordinat, yaitu x , y , dan z .

Apa itu ruang vektor?

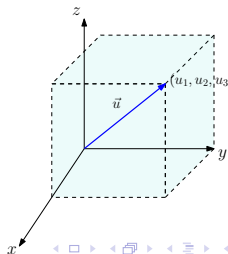
- Barisan n terurut (n -tuple) adalah barisan *bilangan riil*: (a_1, a_2, \dots, a_n) (atau, dapat dipandang sebagai vektor).
- Ruang- n (n -space) adalah himpunan semua n -tupel bilangan real. Biasanya dilambangkan sebagai \mathbb{R}^n . Untuk $n = 1$, $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$.
 - Ruang ini adalah ruang dimana vektor dapat didefinisikan dengan baik. Ruang ini juga disebut **ruang Euclid**.

Contoh:

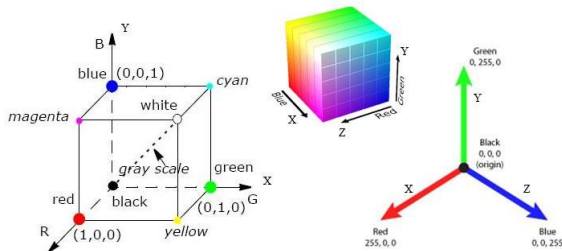
Vektor dalam \mathbb{R}^2



Vektor dalam \mathbb{R}^3



- 1 $\vec{u} = (3, 6) \rightarrow$ vektor dalam \mathbb{R}^2
- 2 $\vec{v} = (2, -4, 5) \rightarrow$ vektor dalam \mathbb{R}^3
- 3 $\vec{w} = (-4, 2, -3, 1) \rightarrow$ vektor dalam \mathbb{R}^4
- 4 $\vec{c} = (r, g, b) \rightarrow$ vektor dalam RGB-model



Kita akan kembali ke ruang vektor \mathbb{R}^n .

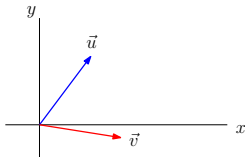
Untuk saat ini, mari kita cermati \mathbb{R}^2 dan \mathbb{R}^3 .



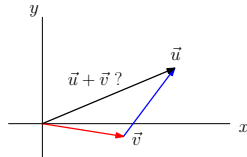
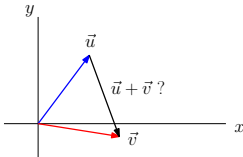
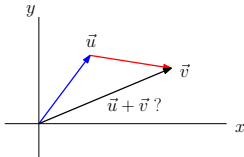
Bagian 3: Operasi vektor dalam R_2 dan R_3

Penjumlahan vektor (representasi geometris)

Diberikan vektor-vektor berikut:



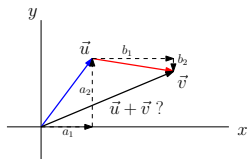
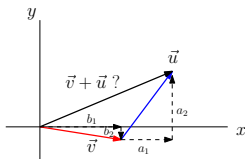
Vektor manakah yang menyatakan $\vec{u} + \vec{v}$?



Penjumlahan vektor (representasi geometris)

Sebuah vektor mendefinisikan gerakan tertentu dalam ruang (seberapa jauh, ke arah mana).

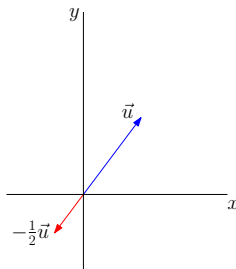
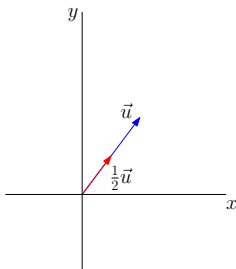
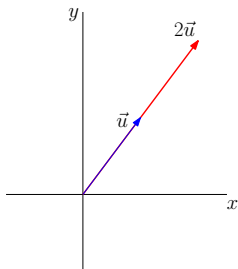
- $\vec{u} = [a_1 \ a_2] \rightarrow$ memindahkan a_1 langkah ke arah sumbu x , dan a_2 langkah ke arah sumbu y .
- $\vec{v} = [b_1 \ b_2] \rightarrow$ memindahkan b_1 langkah ke arah sumbu x , dan b_2 langkah ke arah sumbu y .



Jadi $\vec{u} + \vec{v}$ dapat dipandang sebagai **pergerakan sepanjang vektor \vec{u} dilanjutkan dengan bergerak sepanjang vektor \vec{v}** , yaitu memindahkan $a_1 + b_1$ melangkah ke arah sumbu x , dan $a_2 + b_2$ melangkah ke arah sumbu y .

$$\vec{u} + \vec{v} = [(a_1 + b_1) \ (a_2 + b_2)]$$

Perkalian skalar (representasi geometris)



Mengalikan vektor dengan skalar dapat dipandang sebagai “penskalaan” sebuah vektor (meregangkan, dan terkadang membalikkan arah vektor).

Berikan dua vektor pada \mathbb{R}^2 .

- Hitunglah penjumlahan kedua vektor tersebut.
- Gambarkan secara geometris kedua vektor beserta resultannya pada bidang Kartesius.
- Kalikan salah satu vektor dengan suatu skalar \mathbb{R}^+ dan vektor lainnya dengan suatu skalar \mathbb{R}^- .
- Gambarkan kedua vektor hasil pada bidang \mathbb{R}^2 .

Bagian 4: Vektor spasial

Vektor dalam \mathbb{R}^3 disebut **vektor spasial**, muncul di banyak aplikasi, terutama dalam fisika.

Notasi khusus:

- $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$ menunjukkan vektor satuan pada arah x
- $\mathbf{j} = [0, 1, 0]$ menunjukkan vektor satuan pada arah y
- $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$ menunjukkan vektor satuan pada arah z

Setiap vektor $\mathbf{u} = [a, b, c]$ dalam \mathbb{R}^3 dapat diekspresikan secara unik dalam bentuk:

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Important! \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k} adalah vektor, dan ketiganya merupakan vektor satuan. Lebih lanjut:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \text{dan} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Persamaan yang tepat menunjukkan bahwa \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k} saling ortogonal satu sama lain.

Semua operasi vektor masih berlaku:

Untuk $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, dan $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, maka:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j} + (u_3 + v_3)\mathbf{k}$
- $k\mathbf{u} = ku_1\mathbf{i} + ku_2\mathbf{j} + ku_3\mathbf{k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Misal $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Tentukan $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= 3(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 2(4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\ &= (9\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + (-8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \\ &= 1\mathbf{i} + 31\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \end{aligned}$$

bersambung...