Linear Algebra

[KOMS120301] - 2023/2024

14.2 Dekomposisi Matriks: SVD

sumber: *Slide Perkuliahan Aljabar Linear dan Geometri - R. Munir ITB*

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 15 (December 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah perkuliahan ini, Anda diharapkan mampu:

- menjelaskan pentingnya dekomposisi nilai singular;
- melakukan dekomposisi nilai singular pada matriks.

Dekomposisi matriks

Penguraian matriks berarti memfaktorkan suatu matriks menjadi **hasil kali matriks**

Contoh: $A = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k$

Metode dekomposisi matriks:

1. Dekomposisi-LU (LU = Lower-Upper)
2. Dekomposisi-QR (Q: othogonal, R: upper-triangular)
3. Dekomposisi Nilai Singular atau Dekomposisi Nilai Singular (SVD)

Dekomposisi-LU

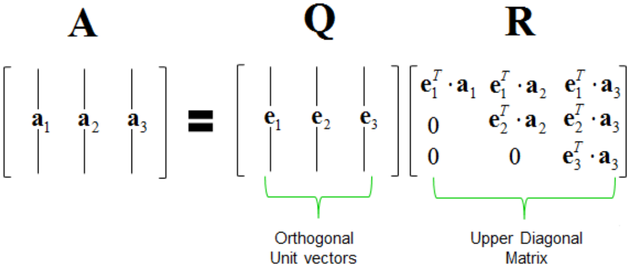
$$A = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{32}{13} \end{bmatrix}$$

Dekomposisi-QR



Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Dekomposisi Nilai Singular

Motivasi Dekomposisi Nilai Singular

Dalam diagonalisasi ortogonal, matriks $n \times n$ A dapat didekomposisi menjadi:

$$A = P^T DP$$

dimana:

- P adalah ortogonal Matriks yang kolomnya merupakan basis eigen dari A (jadi $P^T = P^{-1}$)

$$P = [p_1 \mid p_2 \| \ \ldots \ \mid p_n]$$

- D adalah matriks diagonal, sehingga

$$D = P^{-1}AP$$

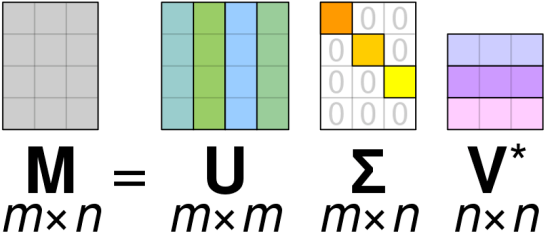
Bagaimana cara memfaktorkan matriks $m \times n$ non-kuadrat yang tidak memiliki nilai eigen?

Dekomposisi Nilai Singular (SVD)

SVD digunakan untuk memfaktorkan matriks non-persegi $m \times n$ menjadi hasil kali matriks U, Σ, dan V, sehingga:

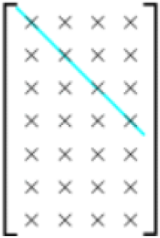
$$A = U \Sigma V^T$$

- U adalah matriks $m \times m$ ortogonal
- V adalah matriks $n \times n$ yang ortogonal
- Σ adalah matriks $m \times n$, yang elemen-elemennya dalam *diagonal utama* adalah nilai tunggal A, dan elemen lainnya adalah 0



Diagonal utama matriks tak persegi

Diagonal utama dari matriks non-persegi A berukuran $m \times n$, didefinisikan sebagai *entries* a_{11} *secara diagonal hingga* a_{mm} (dengan asumsi bahwa $n > m$).



Matriks ortogonal adalah matriks yang kolom-kolomnya membentuk himpunan vektor ortogonal. ($\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ ortogonal jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$).

Jika P adalah sebuah matriks ortogonal, maka $P^{-1} = P^T$.

Proof.

Vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dari Q adalah ortogonal:

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 0 & \text{if} i \neq j \\ 1 & \text{if} i = j \end{cases}$$

Let $P = [v_1 \mid v_2 \mid \ \ldots \ \mid v_n]$, maka:

$$P^T \cdot P = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} [v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n] = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & \cdots & v_1^T v_n \\ v_2^T v_1 & \cdots & v_2^T v_n \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ v_n^T v_1 & \cdots & v_n^T v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh

Apakah matriks-matriks berikut ini ortogonal?

- $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$
- $Q = \begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{bmatrix}$

Nilai singular

Misalkan A adalah matriks $m \times n$. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari $A^T A$, maka:

$$\tau_1 = \sqrt{\lambda_1},\ \tau_2 = \sqrt{\lambda_2},\ \ldots, \tau_n = \sqrt{\lambda_n}$$

disebut nilai tunggal dari A.

> *Dalam hal ini, kita mengasumsikan bahwa* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$*, so that* $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_n \geq 0$*.*

Theorem

Matriks yang dapat didiagonalisasi secara ortogonal mempunyai nilai eigen positif Jika A adalah matriks $m \times n$, maka:

1. *$A^T A$ dapat didiagonalisasi secara ortogonal*
2. *Nilai eigen $A^T A$ adalah non-negatif*

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solusi:

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Selesaikan persamaan karakteristik:

$$\det(\lambda I - B) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1 = 0$$

Hal ini menghasilkan $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$
Nilai eigen dari AA^T adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 1$.

Dengan demikian:

$$\tau_1 = \sqrt{3} \;\text{ and }\; \tau_2 = \sqrt{1} = 1$$

Mendekomposisi matriks $A_{m \times n}$ menjadi produk U, Σ, dan V

1. Untuk vektor singular kiri, hitung nilai-nilai eigen dari AA^T.
2. Tentukan vektor-vektor eigen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ yang berkoresponden dengan nilai-nilai eigen dari AA^T. Normalisasi vektor eigen-nya sehingga diperoleh:

$$U = \left[\frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} \mid \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|} \mid \ldots \mid \frac{\mathbf{u}_m}{|\mathbf{u}_m|} \right]$$

3. Untuk vektor singular kiri, hitung nilai-nilai eigen dari $A^T A$.
4. Tentukan vektor-vektor eigen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ yang berkoresponden dengan nilai-nilai eigen dari $A^T A$. Normalisasi vektor eigen-nya sehingga diperoleh:

$$V = \left[\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \mid \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} \mid \ldots \mid \frac{\mathbf{v}_m}{|\mathbf{v}_m|} \right]$$

5. Bentuklah matriks Σ berukuran *mxn* dengan elemen-elemen diagonalnya adalah *nilai-nilai singular* dari matriks A (yaitu $\tau_1 = \sqrt{\lambda_1},\ \tau_2 = \sqrt{\lambda_2},\ \ldots, \tau_n = \sqrt{\lambda_n}$) dari besar ke kecil.
6. Maka: $A = U \Sigma V^T$

Contoh

Dberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan Dekomposisi Nilai Singular dari A.

Contoh

Dberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan Dekomposisi Nilai Singular dari A.

Cek file pdf untuk mengetahui solusi latihan tersebut.

Penerapan dari Dekomposisi Nilai Singular

- Image and video compression
- Image processing
- Machine learning
- Computer vision
- Digital watermarking
- ...?
- ...?