Aljabar Linier

[KOMS119602] - 2022/2023

6.2 - Invers dan hubungannya dengan metode Gauss, metode Gauss-Jordan, dan sistem linier

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7 11 Februari 2023

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

1. mencari invers dengan algoritma eliminasi Gaussian;
2. menemukan invers dengan algoritma eliminasi Gauss-Jordan;
3. menjelaskan metode mencari solusi sistem linier menggunakan invers;
4. mencari solusi sistem linier menggunakan invers;
5. memecahkan sistem homogen (ketika vektor konstan adalah vektor nol).

Bagian 1: Algoritma untuk mencari invers

- Menghitung invers dengan eliminasi Gauss

  Diberikan sebuah **matriks persegi yang dapat dibalikkan** A. Untuk menghitung A^{-1}, kita melakukan perhitungan berikut:

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} [I \mid A^{-1}]$$

- Menghitung invers dengan eliminasi Gauss-Jordan

  Diberikan sebuah **matriks persegi yang dapat dibalikkan** A. Untuk menghitung A^{-1}, kita melakukan perhitungan berikut:

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{Eliminasi G-J}} [I \mid A^{-1}]$$

Contoh 1

Tentukan invers dari: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Solusi:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R3-R1}{\overset{R2-2R1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R3+2R2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{R3/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3- & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \overset{R1-2R2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \overset{R1-2R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

Dengan demikian, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Dapat diperiksa bahwa:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terapkan metode G-J untuk mencari invers dari: $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Solusi:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R3+R1}{\overset{R2-2R1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R2/(-8)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R3-8R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{R2/(-8)}{\sim}$$

Bentuk yang direduksi berisi **baris nol** (oleh karena itu, tidak ada cara untuk membuat matriks identitas di blok kiri).

Ini berarti *A* tidak memiliki invers.

Contoh 2 (*lanjutan*)

Dapat diperiksa bahwa A memiliki **determinan nol**.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 1(4)(5) + 6(-1)(-1) + 4(2)(2) - 4(4)(-1) - (-1)(1)(2) - 5(6)(2) \\
&= 20 + 6 + 16 + 16 + 2 - 60 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Latihan

Jika ada, tentukan invers matriks berikut!

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$

Latihan

Selesaikan sistem linier berikut menggunakan eliminasi Gauss-Jordan:

- $$\begin{cases} a - b + 2c - d = -1 \\ 2a + b - 2c - 2d = -2 \\ -a + 2b - 4c + d = 1 \\ 3a - 3d = -3 \end{cases}$$

- $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Bagian 3: Hubungan dengan Sistem Persamaan Linier

Ingat bahwa sistem:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

dapat dituliskan sebagai operasi matriks: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, di mana A adalah matriks koefisien, $\mathbf{x}$ adalah vektor variabel, dan $\mathbf{b}$ adalah matriks konstanta.

Catatan:

- Jika A dapat dibalik, maka sistem memiliki solusi tunggal;
- Jika tidak, solusinya <u>tidak</u> tunggal. *Kira-kira, mengapa?*

Algoritma penyelesaian SPL dengan invers matriks

Permasalahan:

Misalkan kita ingin menyelesaikan: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, di mana $\det(A) \neq 0$.

Penyelesaian:

Kalikan kedua ruas dengan $A^{-}1$ (dari kiri), diperoleh:

$$\begin{aligned} (A^{-1})\ A\mathbf{x} &= (A^{-1})\ \mathbf{x} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\ \mathbf{b} \quad \text{since } AA^{-1} = I \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\ \mathbf{b} \quad \text{since } I\mathbf{x} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Oleh karena itu, solusi sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Contoh: mencari solusi sistem linier menggunakan invers

Diberikan sistem linier:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 1 \end{cases}$$

Solution:

Invers dari matriks berikut telah dihitung sebelumnya: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,

yakni, $A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Maka, solusinya adalah:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Anda harus dapat memeriksa apakah $\mathbf{x}$ cocok dengan solusi yang diperoleh menggunakan eliminasi Gaussian atau Gauss-Jordan.

Kasus homogen

Jika sistemnya homogen (yaitu, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), maka berlaku sebagai berikut:

- Jika A dapat dibalik, maka sistem hanya memiliki solusi trivial;
- Jika A tidak dapat dibalik, maka sistem memiliki solusi non-trivial.

Contoh sistem homogen

Tunjukkan bahwa sistem homogen berikut hanya memiliki solusi trivial!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa sistem homogen berikut memiliki solusi tak-trivial!

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Contoh 1:

Sistem homogen memiliki matriks koefisien: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ and

$\det(A) \neq 0$ with $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Contoh 2:

Sistem homogen memiliki matriks koefisien: $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Dapat diverifikasi bahwa $\det(A) = 0$, jadi A^{-1} tidak ada.

Sistem memiliki solusi tak-trivial, misalnya:

$$x_1 = -29, \; x_2 = 8, \; x_3 = -9$$

Keuntungan menggunakan metode invers dalam menyelesaikan sistem linier

Metode invers berguna untuk menyelesaikan sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan matriks koefisien yang sama yakni matriks A, tetapi dengan vektor konstanta $\mathbf{b}$ yang berbeda.

Sebagai contoh:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

Keuntungan menggunakan metode invers dalam menyelesaikan sistem linier

Metode invers berguna untuk menyelesaikan sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan matriks koefisien yang sama yakni matriks A, tetapi dengan vektor konstanta $\mathbf{b}$ yang berbeda.

Sebagai contoh:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

Dapatkah Anda jelaskan mengapa?

- Karena $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, maka untuk menyelesaikan sistem tersebut, cukup menghitung A^{-1} **once**, kemudian mengalikannya dengan vektor yang sesuai $\mathbf{b}$.

Latihan 1

Selesaikan sistem berikut dengan menggunakan metode invers:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

Latihan 2

Selesaikan sistem berikut dengan menggunakan metode invers:

- $$\begin{cases} a - \ \ b + 2c - \ \ d = -1 \\ 2a + \ \ b - 2c - 2d = -2 \\ -a + 2b - 4c + \ \ d = 1 \\ 3a \qquad\qquad\qquad - 3d = -3 \end{cases}$$

- $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

bersambung...