Aljabar Linier

[KOMS120301] - 2023/2024

9.2 - Ruang Vektor Umum

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 9 (Oktober 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

1. memverifikasi apakah suatu himpunan vektor membentuk ruang vektor atau tidak;
2.

Bagian 1: Ruang Vektor

Sekarang kita akan memperluas konsep vektor dengan mengekstraksi sifat paling penting dari vektor yang sudah dikenal dan mengubahnya menjadi aksioma.

Jadi, ketika satu set objek memenuhi aksioma ini, mereka akan secara otomatis memiliki sifat paling penting dari vektor yang sudah dikenal, sehingga masuk akal untuk menganggap objek ini sebagai jenis vektor baru.

Apa itu ruang vektor?

Misalkan V menjadi kumpulan objek tak kosong sembarang dimana dua operasi didefinisikan:

- penjumlahan: aturan yang terkait dengan setiap pasangan objek di $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dan objek di $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
- perkalian skalar: aturan yang berhubungan dengan setiap skalar k dan setiap objek $\mathbf{u}$ dalam V, dan sebuah objek dalam $k\mathbf{u}$.

V disebut ruang vektor jika memenuhi enam aksioma berikut.

Enam aksioma ruang vektor

1. **Closure:** Untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V \quad \text{and} \quad k\mathbf{u} \in V, \text{for a scalar } k \in \mathbb{R}$$

2. **Komutatif:** Untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. **Asosiatif:** Untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, maka:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

4. **Identitas:** Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$, terdapat identitas $\mathbf{0}$ dan skalar 1, sehingga:

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{and} \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

5. **Invers:** Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$, ada $-\mathbf{u} \in V$ sedemikian rupa sehingga:

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u}$$

6. **Distributif:** Untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, maka:
   - $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
   - $(k + m)\mathbf{w} = k\mathbf{w} + m\mathbf{w}$
   - $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

Ringkasan aksioma

V adalah ruang vektor jika berikut ini dipenuhi:

Untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan skalar $k, m \in \mathbb{R}$, maka:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. Terdapat vektor identitas $\mathbf{0}$ dan skalar 1, sehingga: $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ and $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
5. Terdapat $-\mathbf{u} \in V$ sehingga: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u}$
6. $k\mathbf{u} \in V$
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
8. $(k + m)\mathbf{w} = k\mathbf{w} + m\mathbf{w}$
9. $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Jadi, bagaimana cara mengetahui bahwa V adalah ruang vektor?

Catatan. Dalam definisi ruang vektor, kita tidak menentukan sifat vektor dan operasinya.

Misalnya, **hal-hal berikut tidak ditentukan:**

- vektor berada di $\mathbb{R}^n$; atau
- operasi penjumlahan dan perkalian skalar tidak selalu berhubungan dengan operasi $+$ dan $\times$ dalam $\mathbb{R}$.

Langkah-langkah untuk menunjukkan bahwa himpunan V adalah ruang vektor:

1. Identifikasi himpunan V dan objek V (yang akan menjadi vektor).
2. Identifikasi operasi "penjumlahan" dan "perkalian skalar" dalam V.
3. Periksa apakah Aksioma 1 *tertutup* terhadap penjumlahan dan perkalian skalar.
4. Periksa lima aksioma lainnya.

Bagian 2: Ruang Vektor Umum

Contoh ruang vektor (1)

$\mathbb{R}^n$ (termasuk $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$) dengan operasi standar $+$ dan $\times$, adalah ruang vektor.

- $V = \mathbb{R}^n = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \text{ where } u_i \in \mathbb{R}\}$
- *Operasi:* penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

- *Closure*: untuk setiap $u, v \in \mathbb{R}^n$ and $k \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad k\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

- Dapat diverifikasi bahwa Aksioma 2-6 terpenuhi. Coba Anda periksa!

Ruang dari matriks (2×2)*-dalam* $\mathbb{R}$ *adalah ruang vektor.*

- V adalah himpunan matriks (2×2) dengan elemen-elemen di $\mathbb{R}$.
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$k\mathbf{u} = k\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

- Jelas, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dan $k\mathbf{u}$ adalah matriks dengan ukuran 2×2.
- *Dapatkah Anda memverifikasi Aksioma 2-6?*

- **Aksioma 2 (komutatif)**:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} \underbrace{= \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix} =}_{=} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}+\mathbf{u}}$$

- **Aksioma 3 (identity)**: identitas nol adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{0}+\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

also:

$$1\mathbf{u} = 1\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

- **Aksioma 4 (invers)**: Untuk $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$, berlaku

$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}.$$

Jadi, $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

- **Aksioma 5 (asosiatif)** and **Aksioma 5 (distributif)** juga terpenuhi.

Contoh ruang vektor (3)

Ruang vektor dari fungsi nyata

Misalkan V adalah himpunan fungsi dalam $\mathbb{R}$, yaitu: $f := \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

- *Untuk $f = f(x)$ and $g = g(x)$ di V dan $k \in \mathbb{R}$:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \textit{and} \quad (kf)(x) = kf(x)$$

Maka V adalah ruang vektor.

- **Closure**: Perhatikan bahwa $(f+g)(x)$ dan $(kf)(x)$ adalah fungsi di $\mathbb{R}$. Jadi, $(f+g), (kf) \in V$.
- **Komutatif**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
- **Identitas nol** adalah fungsi: $z(x) = 0$ (semua elemen dipetakan ke 0), dan memenuhi:
$$f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$$
- **Negatif** dari $f(x)$ adalah $-f(x)$, berarti bahwa $-f := x \to -x$, dan memenuhi:
$$f(x) + (-f(x)) = 0 = (-f(x)) + f(x)$$

Ruang vektor polinom

Misalkan V *menjadi himpunan semua polinomial dari bentuk:*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

untuk $x \in \mathbb{R}$, *dimana penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:*

Untuk $\mathbf{p} = p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ *dan* $\mathbf{q} = q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$. *Maka:*

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$
$$k\mathbf{p} = ka_0 + ka_1 x + ka_2 x^2 + \cdots + ka_n x^n$$

Maka, V *adalah ruang vektor.*

Contoh ruang vektor (4) (*lanjutan*)

- **Closure**: penjumlahan dua polinomial dan perkalian skalar dari polinomial menghasilkan polinomial di $\mathbb{R}$.
- **Komutatif**: $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$.
- **Elemen identitas**: terdapat polinom nol 0, sedemikian sehingga $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$.
- **Negatif** dari polinomial $p(x)$ adalah:

$$-p(x) = a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_n x^n$$

so that: $p(x) + (-p(x)) = (-p(x)) + p(x) = 0$.

Contoh bukan ruang vektor

Misalkan $V = \mathbb{R}^2$ *adalah himpunan objek berbentuk:* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $u_i \in \mathbb{R}$. *Tentukan penjumlahan dan perkalian skalar sebagai berikut:*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$
$$k\mathbf{u} = (ku_1, k^2 u_2)$$

V bukan ruang vektor.

- Aksioma 1 (*closure*) terpenuhi, yaitu:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \ k \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V \ \text{ and } \ k\mathbf{u} \in V$$

- Namun, Aksioma 4 (*identity*) tidak terpenuhi, yaitu:

$$1\mathbf{u} = 1(ku_1, k^2 u_2) \neq \mathbf{u} \ \text{ for some } \mathbf{u} \in V$$

Misalnya, ambil $\mathbf{u} = (1, 2)$. Kemudian: $1\mathbf{u} = (1, 4) \neq \mathbf{u}$.

bersambung...