Linear Algebra
[KOMS120301] - 2023/2024

13.1 - Transformasi Linier

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 13 (November 2023)

Tansformasi matriks

(page 75 of Elementary LA Applications book)

Definisi

Jika f adalah fungsi dengan domain $\mathbb{R}^n$ dan kodomain $\mathbb{R}^m$, maka kita katakan bahwa f adalah transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$, atau f pemetaan dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$.

$$f \ : \ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Ketika $m = n$, transformasi sering disebut operator pada $\mathbb{R}^n$.

Terminologi:

- Domain:
- Kodomain:

Diberikan sistem linier:

$$\begin{array}{ccccccccc} w_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ w_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ w_m & = & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{array}$$

yang dapat ditulis dalam notasi matriks $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$:

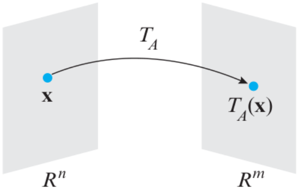
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Hal ini dapat dilihat sebagai transformasi yang memetakan vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ke dalam vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ dengan mengalikan $\mathbf{x}$ di sebelah kiri dengan A.

Transformasi matriks

Matriks yang mengubah vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menjadi vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ disebut transformasi matriks (atau matrix operator jika $m = n$), dan dilambangkan dengan:

$$T \; : \; \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$



$T_A : R^n \rightarrow R^m$

Notasi lain yang sering digunakan adalah:

- $\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x})$, yang disebut perkalian dengan A; atau
- $\mathbf{x} \xrightarrow{T_A} \mathbf{w}$, yang dibaca sebagai T_A memetakan $\mathbf{x}$ ke $\mathbf{w}$.

Diberikan sistem persamaan linier

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini, matriks A adalah matriks yang mengubah $\mathbf{x}$ menjadi $\mathbf{w}$.

Sebagai contoh, jika $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, maka:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Jika 0 adalah matriks nol $(m \times n)$, maka:

$$T_0(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Artinya perkalian dengan nol memetakan setiap vektor di $\mathbb{R}^n$ ke dalam vektor nol di $\mathbb{R}^m$.

T_0 disebut transformasi nol dari $\mathbb{R}^n$ menjadi $\mathbb{R}^m$.

Jika I adalah matriks identitas $(n \times n)$, maka:

$$T_I(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

jadi perkalian dengan I memetakan setiap vektor di $\mathbb{R}^n$ ke dirinya sendiri. Kami menyebut T_I sebagai operator identitas di $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Untuk setiap matriks A, transformasi matriks $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mempunyai sifat-sifat berikut untuk semua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, dan untuk setiap skalar k.

1. $T_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. $T_A(k\mathbf{u}) = kT_A(\mathbf{u})$ *(sifat homogenitas)*
3. $T_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$
4. $T_A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) - T_A(\mathbf{v})$ *(sifat penjumlahan)*

$\sim$ **Pertanyaan** $\sim$

- Apakah ada sifat aljabar suatu transformasi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ yang dapat digunakan untuk menentukan apakah T merupakan transformasi matriks?
- Jika kita mengetahui bahwa transformasi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah transformasi matriks, bagaimana kita dapat mencari matriksnya?

Teorema (Kondisi linieritas)

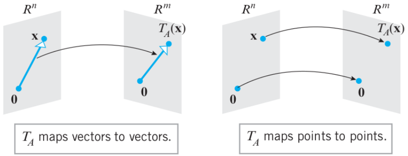
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah transformasi matriks jika dan hanya jika hubungan berikut berlaku untuk semua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ dan untuk setiap skalar k:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ *(sifat penjumlahan)*
2. $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$ *(sifat homogenitas)*

Transformasi yang memenuhi kondisi linearitas disebut transformasi linier

Teorema

Setiap transformasi linier dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ merupakan transformasi matriks, dan sebaliknya, setiap transformasi matriks dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ merupakan transformasi linier.



Teorema

Jika $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *dan* $T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *adalah transformasi matriks, dan jika* $T_A(\mathbf{x}) = T_B(\mathbf{x})$ *untuk setiap vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, maka* $A = B$*.*

Proof.

$T_A(\mathbf{x}) = T_B(\mathbf{x}) \Leftrightarrow A\mathbf{x} = B\mathbf{x}, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Ambil $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ (basis standar), menghasilkan:

$$A\mathbf{e}_j = B\mathbf{e}_j \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n$$

Karena $A\mathbf{e}_j$ adalah kolom ke-j dari A dan $B\mathbf{e}_j$ adalah kolom ke-j dari B, ini berarti kolom ke-j dari A dan kolom ke-j dari B adalah sama. Oleh karena itu $A = B$. □

Menemukan matriks standar untuk transformasi matriks

Dari teorema sebelumnya, kita dapat menyimpulkan bahwa:

> *Terdapat korespondensi satu-satu antara matriks* $(m \times n)$ *dan transformasi matriks dari* $\mathbb{R}^n$ *ke* $\mathbb{R}^m$*.*

Matriks A disebut matriks standar untuk transformasi dari $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Jika $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ adalah vektor basis standar untuk $\mathbb{R}^n$, maka matriks standar untuk transformasi linier $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah diberikan oleh:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)]$$

Prosedur

Langkah 1. Temukan gambar vektor basis standar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ untuk $\mathbb{R}^n$.

Langkah 2. Bangunlah matriks yang memiliki gambar yang diperoleh pada Langkah 1 sebagai kolom berturut-turut. Matriks ini merupakan matriks standar untuk transformasi.

Contoh

Temukan matriks standar untuk transformasi linier $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *yang ditentukan oleh:*

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Solusi:

Lakukan Langkah 1:

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks standarnya adalah:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh

Diberikan matriks standar untuk transformasi $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ *sebagai berikut:*

$$A=[T(\mathbf{e}_1)\mid T(\mathbf{e}_2)]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Tentukan $T\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\right)$

Solusi:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-11\\3\end{bmatrix}$$

Contoh 3: Menemukan matriks standar

Contoh

Temukan matriks standar untuk transformasi:

$$T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - 4x_2)$$

Solusi:

Tulis transformasi dalam vektor kolom:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks standarnya adalah: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Tugas: diskusi kelompok

1. Bagilah diri Anda menjadi 5 kelompok (jadi masing-masing kelompok terdiri dari 4-5 siswa.
2. Setiap kelompok mendiskusikan salah satu topik berikut (baca Bagian 1.9, halaman 84 - 93)
   1. Analisis Jaringan Menggunakan Sistem Linier
   2. Desain Pola Lalu Lintas
   3. Sirkuit dengan Satu Loop Tertutup dan Sirkuit dengan Tiga Loop Tertutup
   4. Interpolasi Polinomial dengan Eliminasi Gauss-Jordan
   5. Perkiraan Integrasi

   Anda sebaiknya mendapatkan materi tambahan jika topik yang diberikan tidak mencukupi untuk presentasi Anda (misalnya jika Anda mendapatkan topik nomor 4 dan 5).
3. Buatlah presentasi video untuk mempresentasikan hasil diskusi Anda. Durasinya sekitar 15-20 menit, dan setiap orang dalam kelompok harus hadir dalam proporsi yang sama.

bersambung..