

Aljabar Linier
[KOMS120301] - 2023/2024

5.2 - Sifat determinan matriks

Dewi Sintiar

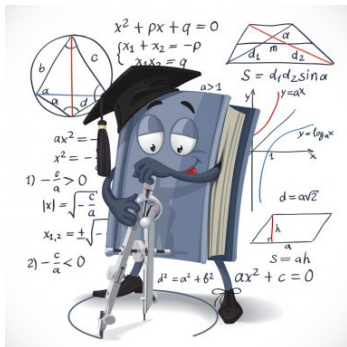
Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 5 (Oktober 2023)

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan mampu:

- 1 mengimplementasikan sifat-sifat determinan dalam penyelesaian masalah penghitungan determinan;
- 2 menghitung determinan matriks menggunakan ekspansi kofaktor;
- 3 memecahkan sistem persamaan linier menggunakan aturan Cramer;
- 4 menjelaskan prosedur menghitung determinan matriks blok diagonal.

Good math skills are developed by doing lots of problems.



Bagian 5: Sifat-sifat determinan

Teorema

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Q: Bisakah Anda menjelaskan mengapa? Periksa matriks 2×2 dan matriks 3×3 .

Implikasi:

Teorema apapun tentang determinan matriks A yang menyangkut baris dari A akan memiliki teorema analog dengan menggunakan kolom dari A .

Teorema

Misalkan A adalah matriks persegi.

- 1 *Jika A memiliki baris (kolom) nol, maka $|A| = 0$.*
- 2 *Jika A memiliki dua baris (kolom) yang identik, maka $|A| = 0$.*
- 3 *Jika A adalah matriks segitiga, maka $|A|$ diperoleh dari hasil perkalian elemen-elemen diagonal:*

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Khususnya, untuk matriks identitas I , kita memiliki $|I| = 1$.

Q: Berikan argumen yang menjelaskan mengapa sifat-sifat tersebut berlaku!

Teorema

Misalkan matriks B diperoleh dari matriks A dengan melakukan operasi baris (kolom) elementer.

- 1 Jika dua baris (kolom) dari A dipertukarkan, maka $|B| = -|A|$.
- 2 Jika sebuah baris (kolom) dari A dikalikan dengan skalar k , maka $|B| = k|A|$.
- 3 Jika kelipatan baris (kolom) A ditambahkan ke baris (kolom) lain dari A , maka $|B| = |A|$.

Q: Berikan argumen yang menjelaskan mengapa sifat-sifat tersebut berlaku!

Determinan perkalian matriks

Teorema

Diberikan dua matriks persegi A dan B dengan orde yang sama. Maka:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Q: Berikan argumen yang menjelaskan mengapa teorema tersebut berlaku!

Matriks elementer E_n adalah matriks yang berbeda dari matriks identitas I_n oleh satu operasi baris elementer tunggal.

Korolari

Jika E adalah matriks dasar berukuran n , dan A adalah matriks persegi $n \times n$. Kemudian $|EA| = |E||A|$.

Latihan: *determinan perkalian dua matriks*

Diberikan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

- 1 Tentukan AB
- 2 Tentukan $\det(A)$, $\det(B)$, dan $\det(AB)$.
- 3 Apakah benar bahwa $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$?

Latihan: *determinan perkalian dua matriks*

Diberikan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

- 1 Tentukan AB

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

- 2 Tentukan $\det(A)$, $\det(B)$, dan $\det(AB)$.

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = -23, \quad \det(AB) = -23$$

- 3 Apakah benar bahwa $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$?

Bagian 6: Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor (*pendekatan algoritmik*)

Minor dan kofaktor

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi n .

Misalkan M_{ij} adalah matriks persegi dengan ordo $(n - 1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j dari A .

Minor dari elemen a_{ij} dari A didefinisikan sebagai:

$$\text{minor}(A) = \det(M_{ij})$$

Kofaktor dari a_{ij} didefinisikan sebagai minor bertanda (*signed minor*) dari a_{ij} , dan dilambangkan dengan:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Pola elemen minor bertanda pada A dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Contoh: *minor dan kofaktor*

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Temukan minor dan kofaktor dari elemen a_{32} !

Solusi:

Elemen a_{32} adalah 8.

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi, minor dari a_{32} adalah $\det(M_{32}) = 1(6) - 4(3) = 6 - 12 = -6$.

Kofaktor dari a_{32} adalah $(-1)^{3+2} \cdot 6 = -6$.

Ekspansi Laplace untuk menghitung determinan

Determinan dari matriks $A = [a_{ij}]$ sama dengan jumlah perkalian yang diperoleh dengan mengalikan elemen dari setiap baris (kolom) dengan kofaktornya masing-masing:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \rightarrow \text{row}$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \rightarrow \text{column}$$

Rumusnya disebut **Ekspansi Laplace** dari determinan A pada baris ke- i dan kolom ke- j .

Menghitung determinan

Algoritma: (Metode reduksi orde determinan)

Input: Matriks persegi n bukan nol $A = [a_{ij}]$ dengan $n > 1$

- 1 Pilih elemen $a_{ij} = 1$, atau jika tidak ada, $a_{ij} \neq 0$;
- 2 Menggunakan a_{ij} sebagai pivot, terapkan operasi baris dasar (kolom) untuk menempatkan 0 di semua posisi lain di kolom (baris) yang berisi a_{ij} ;
- 3 Perluas determinan dengan kolom (baris) yang berisi a_{ij} .

Catatan:

- Algoritma biasanya digunakan untuk kasus $n \geq 4$.
- Eliminasi Gauss dapat diimplementasikan untuk mengubah matriks adalah matriks segitiga bawah (*upper-triangular*). Selanjutnya determinan dihitung sebagai perkalian diagonalnya.

Tetapi kita perlu melacak operasi dasar yang dilakukan (karena masing-masing akan mengubah tanda determinan).

Contoh: *menghitung determinan menggunakan kofaktor*

Terapkan algoritma penghitungan determinan dengan kofaktor untuk menghitung determinan dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Contoh: menghitung determinan menggunakan kofaktor

Gunakan $a_{23} = 1$ sebagai pivot, dan terapkan operasi baris dasar, lalu ekspansi determinannya.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ -5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -7 + 45 = 38 \end{aligned}$$

Peninjauan determinan matriks 2×2 dan 3×3

Mari kita turunkan rumus determinan dari matriks (2×2) menggunakan algoritma.

$$\text{Diberikan } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{vmatrix}$$

Sehingga,

$$A = a_{11} \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \right) = a_{11} \left(\frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Peninjauan determinan matriks 2×2 dan 3×3

Coba turunkan rumus untuk menghitung determinan matriks (3×3) berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bagian 7: Aplikasi persamaan linear: *Aturan Cramer*

Aturan Cramer

Diberikan sistem persamaan linier: $AX = B$, dengan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi dan $B = [b_i]$ adalah vektor kolom.

Misalkan A_i : matriks yang diperoleh dari A dengan mengganti kolom ke- i dari A dengan vektor kolom dari B .

Misalkan:

$$D = \det(A), \quad N_1 = \det(A_1), \quad N_2 = \det(A_2), \quad \dots, \quad N_n = \det(A_n)$$

Teorema (Aturan Cramer)

Sebuah sistem persegi $AX = B$ memiliki solusi jika $D \neq 0$, dimana solusinya diberikan oleh:

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, \quad x_2 = \frac{N_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{N_n}{D}$$

Q: Berikan argumen yang menjelaskan mengapa teorema tersebut berlaku!

Catatan tentang aturan Cramer

- Sistem harus *persegi* (memiliki jumlah persamaan dan variabel yang sama);
- Solusinya hanya ada jika $D \neq 0$;
- Jika $D = 0$, kita tidak tahu apakah sistem memiliki solusi atau tidak.

Untuk sistem homogen persegi:

Teorema

Sistem homogen persegi $AX = 0$ memiliki solusi tak-nol jika dan hanya jika $D = |A| = 0$.

Contoh

Terapkan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem berikut:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Solusi: Matriks koefisien SPL: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

$$D = 2 - 6 + 1 + 4 + 3 + 1 = 5$$

Contoh

Terapkan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem berikut:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Solusi: Matriks koefisien SPL: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

$$D = 2 - 6 + 1 + 4 + 3 + 1 = 5$$

Karena $D \neq 0$, maka sistem memiliki solusi tunggal. Selanjutnya:

$$N_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad N_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \quad N_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sehingga: $N_x = 20$, $N_y = -10$, dan $N_z = 15$.

Jadi, $x = \frac{20}{5} = 4$, $y = \frac{-10}{5} = -2$, dan $z = \frac{15}{5} = 3$.

Bagian 8: Matriks blok dan determinan

Teorema

Misalkan M adalah *matriks blok segitiga atas (bawah)* dengan blok diagonal:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

Maka:

$$\det(M) = \det(A_1) \det(A_2) \cdots \det(A_n)$$

Contoh

Diberikan

$$M = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

Evaluasi determinan setiap blok diagonal:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 29$$

Maka: $|M| = 13 \cdot 29 = 377$.

Catatan. Misalkan $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ dimana A, B, C, D adalah matriks persegi.

Maka **umumnya tidak benar** bahwa $|M| = |A||D| - |B||C|$.

Latihan akan diberikan di kelas...