Aljabar Linier
[KOMS119602] - 2022/2023

7.1 - Vektor di R^n

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan pengertian vektor secara umum;
2. menjelaskan definisi vektor dalam Aljabar Linier;
3. menjelaskan beberapa operasi pada vektor, seperti:
    - penjumlahan vektor dan perkalian skalar;
    - kombinasi linier.

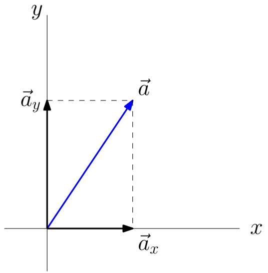
Bagian 1: **Vektor** (*secara umum*)

Tiga cara mendefinisikan vektor:

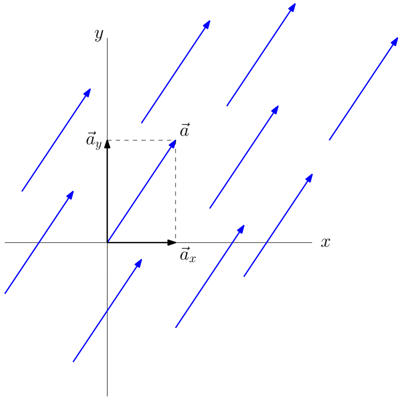
1. Perspektif Fisika
2. Perspektif Matematika
3. Perspektif Ilmu Komputer

Vektor adalah besaran yang memiliki *nilai* dan *arah* dan digambarkan dengan himpunan ruas garis berarah.

Biasanya, vektor dilambangkan dengan huruf yang diketik dengan huruf tebal, atau dengan panah di atasnya; misalnya $\vec{a}$. Vektor sering dinyatakan sebagai tanda panah yang memiliki panjang dan arah yang bersesuaian.

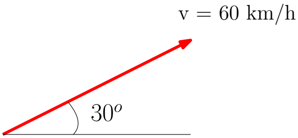


- Panjang (besar)
- Arah

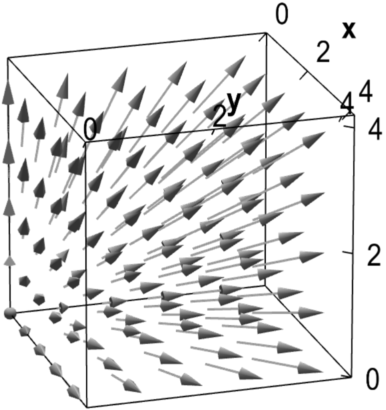


Dua vektor dikatakan sama jika panjang dan arahnya sama

Contoh vektor dalam Fisika



Kecepatan sebuah mobil adalah $60 km/jam$, dan melaju ke 30^o ke arah timur laut.


0
x
2
4
y
0
2
4
4
2
0

Apa itu vektor (dalam Ilmu Komputer)?

Example

Seorang guru perlu memeriksa kesehatan siswanya, dengan mengukur *berat* dan *tinggi* mereka. Bagaimana seharusnya data direpresentasikan?

$$\begin{bmatrix} 40kg \\ 150cm \end{bmatrix}$$

Ini adalah vektor berdimensi 2

$$\begin{bmatrix} 40kg \\ 150cm \\ 14years \end{bmatrix}$$

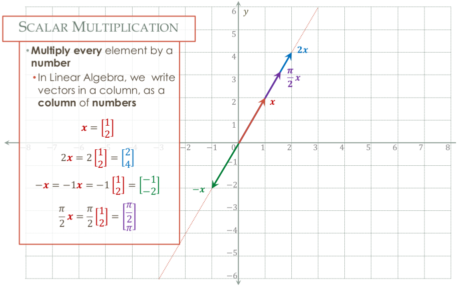
Ini adalah vektor berdimensi 3

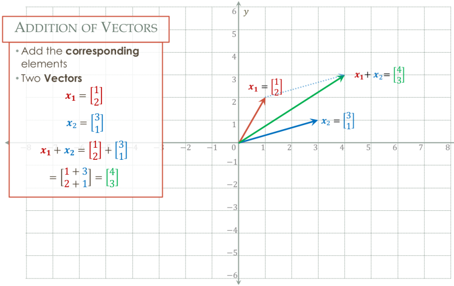
Dalam Ilmu Komputer, sebuah vektor dapat dianggap sebagai daftar (tupel) angka

Apa itu vektor (dalam Matematika)?

Konsep matematika vektor adalah kombinasi dari keduanya:

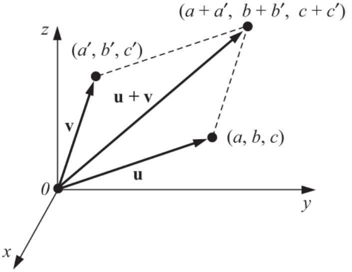
- Vektor dapat dipandang secara geometris atau *aljabar*;
- Kita dapat melakukan operasi seperti penjumlahan, perkalian, pengurangan, dll.



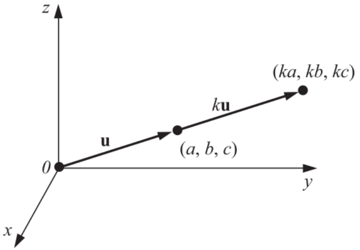


Kembali ke sekolah menengah: *operasi sederhana dalam vektor yang mungkin telah Anda pelajari dalam fisika*

1. penjumlahan vektor
2. perkalian skalar

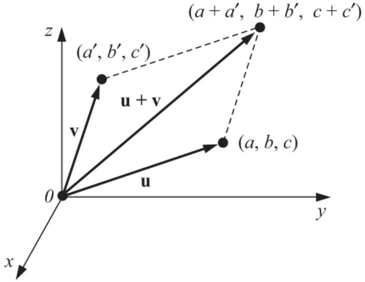


(a) Vector Addition



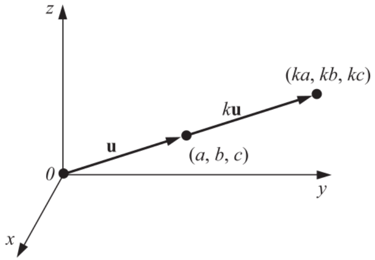
(b) Scalar Multiplication

Penjumlahan vektor ($\mathbf{u} + \mathbf{v}$)



- Secara geometris, *resultan* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ diperoleh dengan hukum jajaran genjang
- Jika $\mathbf{u}$ memiliki titik akhir (a, b, c) dan $\mathbf{v}$ memiliki titik akhir (a', b', c'), maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ memiliki titik akhir $(a + a', b + b', c + c')$

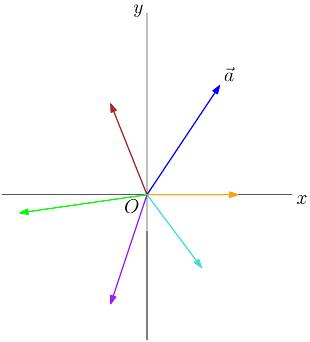
Perkalian skalar ($k\mathbf{u}$)



- Misalkan $k \in \mathbb{R}$, maka $k\mathbf{u}$ adalah vektor yang besarnya k kali besar u, dan arahnya sama ketika $k > 0$ atau berlawanan arah ketika $k < 0$.
- Jika $\mathbf{u}$ memiliki titik akhir (a, b, c), maka titik akhir $k\mathbf{u}$ adalah (ka, kb, kc).

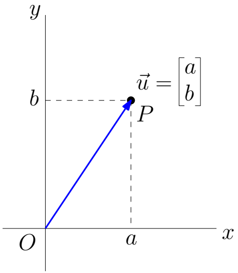
Bagian 2: **Vektor dalam Aljabar Linier**

Secara geometris:



- Vektor adalah panah yang berasal dari titik asal O
- Notasi: **u,v,w, . . .** atau $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$

Dalam ruang berdimensi 2



Vektor adalah tanda panah yang berpangkal di titik asal O.

Hal ini tidak sama dengan titik.

Vektor $\vec{u}$ sama dengan $\overrightarrow{OP}$

Nilai a dan b dalam $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ menunjukkan seberapa jauh vektor $\vec{u}$ bergerak sepanjang sumbu x dan sumbu y.

Tanda positif (resp. negatif) dari a atau b menunjukkan bahwa ia bergerak ke kanan atau ke atas (resp. kiri atau bawah).

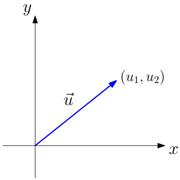
Dalam 3D, hal ini serupa, tetapi kita menggunakan tiga sumbu koordinat, yaitu x, y, dan z.

Apa itu ruang vektor?

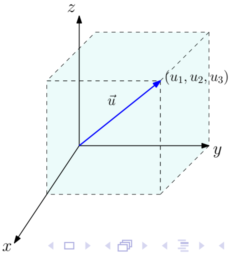
- Barisan n terurut (n-tuple) adalah barisan *bilangan riil*: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (atau, dapat dipandang sebagai vektor).
- Ruang-n (n-space) adalah himpunan semua n-tupel bilangan real. Biasanya dilambangkan sebagai $\mathbb{R}^n$. Untuk $n = 1$, $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$.
  - Ruang ini adalah ruang dimana vektor dapat didefinisikan dengan baik. Ruang ini juga disebut ruang Euclid.

Contoh:

Vektor dalam $\mathbb{R}^2$

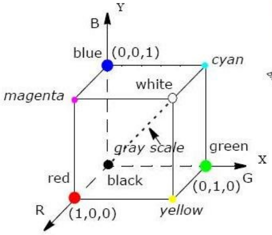


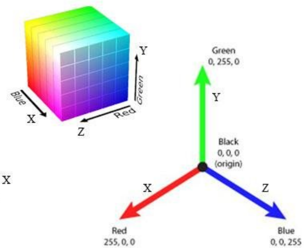
Vektor dalam $\mathbb{R}^3$



Contoh

1. $\vec{u} = (3, 6) \;\rightarrow\;$ vektor dalam $\mathbb{R}^2$
2. $\vec{v} = (2, -4, 5) \;\rightarrow\;$ vektor dalam $\mathbb{R}^4$
3. $\vec{w} = (-4, 2, -3, 1) \;\rightarrow\;$ vektor dalam $\mathbb{R}^4$
4. $\vec{c} = (r, g, b) \;\rightarrow\;$ vektor dalam RGB-model



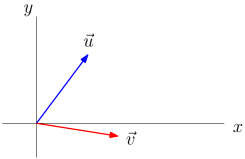


Kita akan kembali ke ruang vektor $\mathbb{R}^n$.

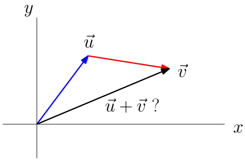
Untuk saat ini, mari kita cermati $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$.

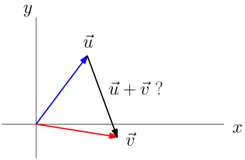
Bagian 3: Operasi vektor dalam R_2 dan R_3

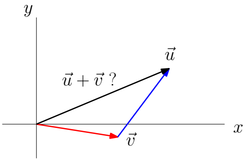
Diberikan vektor-vektor berikut:



Vektor manakah yang menyatakan $\vec{u} + \vec{v}$?



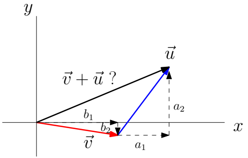


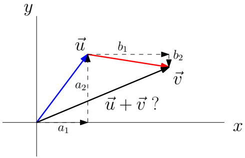


Penjumlahan vektor (representasi geometris)

Sebuah vektor mendefinisikan gerakan tertentu dalam ruang (seberapa jauh, ke arah mana).

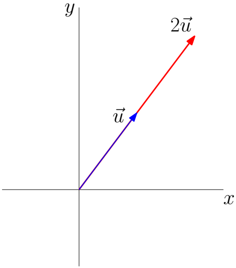
- $\vec{u} = [a_1 \;\; a_2] \rightarrow$ memindahkan a_1 langkah ke arah sumbu x, dan a_2 langkah ke arah sumbu y.
- $\vec{v} = [b_1 \;\; b_2] \rightarrow$ memindahkan b_1 langkah ke arah sumbu x, dan b_2 langkah ke arah sumbu y.

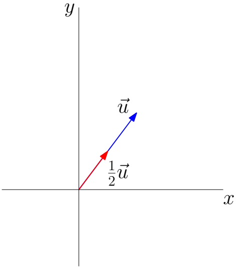


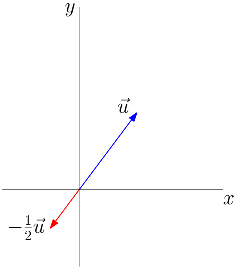


Jadi $\vec{u} + \vec{v}$ dapat dipandang sebagai bergerak sepanjang vektor $\vec{u}$ dilanjutkan dengan bergerak sepanjang vektor $\vec{v}$, yaitu memindahkan $a_1 + b_1$ melangkah ke arah sumbu x, dan $a_2 + b_2$ melangkah ke arah sumbu y.

$$\vec{u} + \vec{v} = [(a_1 + b_1) \;\; (a_2 + b_2)]$$







Mengalikan vektor dengan skalar dapat dipandang sebagai "penskalaan" sebuah vektor (meregangkan, dan terkadang membalikkan arah vektor).

Contoh

Latihan

Bagian 4: Vektor spasial

Vektor dalam $\mathbb{R}^3$ disebut vektor spasial, muncul di banyak aplikasi, terutama dalam fisika.

Notasi khusus:

- $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$ menunjukkan vektor satuan dalam arah x
- $\mathbf{j} = [1, 0, 0]$ menunjukkan vektor satuan dalam arah y
- $\mathbf{k} = [1, 0, 0]$ menunjukkan vektor satuan dalam arah z

Setiap vektor $\mathbf{u} = [a, b, c]$ dalam $\mathbb{R}^3$ dapat diekspresikan secara unik dalam bentuk:

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Important! $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ adalah vektor, dan ketiganya merupakan vektor satuan. Lebih lanjut:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1,\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1 \quad dan \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$$

Persamaan yang tepat menunjukkan bahwa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ saling ortogonal satu sama lain.

Semua operasi vektor masih berlaku:

Untuk $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$, dan $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$, maka:

- $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1)\mathbf{i}+(u_2+v_2)\mathbf{j}+(u_3+v_3)\mathbf{k}$
- $k\mathbf{u}=ku_1\mathbf{i}+ku_2\mathbf{j}+ku_3\mathbf{k}$ for any $k\in\mathbb{R}$
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$
- $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

Contoh

Misal $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Tentukan $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}
3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= 3(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 2(4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\
&= (9\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + (-8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \\
&= 1\mathbf{i} + 31\mathbf{j} - 16\mathbf{k}
\end{aligned}$$

bersambung...