Matematika Diskrit

[KOMS124210] - 2024/2025

3.2 - Fungsi & Jenis Fungsi

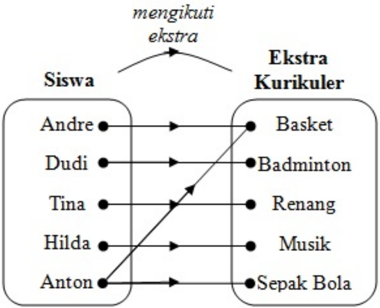
Dewi Sintiari

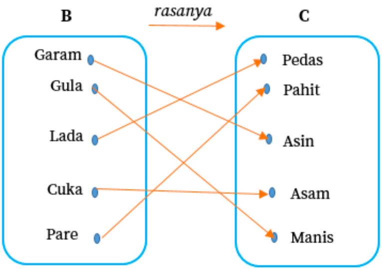
Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 3 (Maret 2025)

Bagian 1: Konsep fungsi

Konsep fungsi





Apa yang dapat Anda amati dari kedua gambar di atas?

Definisi fungsi

Coba tuliskan karakteristik fungsi berdasarkan hasil observasi tersebut!

1.
2.

Definisi fungsi

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Fungsi f dari A ke B adalah pemasangan tepat satu elemen B ke setiap elemen A.

Kita menulis $f(a) = b$ jika b adalah elemen tunggal B yang ditetapkan oleh fungsi f ke elemen a dari A.

Jika f adalah fungsi dari A ke B, maka ditulis:

$$f : A \to B$$

dan dikatakan f memetakan A ke B.

> *Dapatkah Anda memberikan contoh fungsi dalam dunia nyata?*

Terminologi

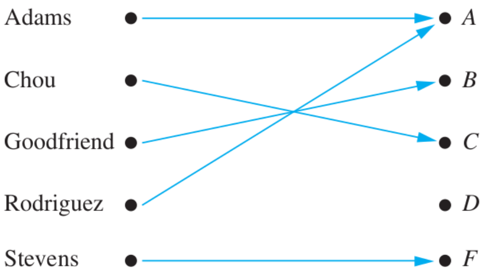
Untuk fungsi:

$$f : A \to B$$

- A disebut domain dari f;
- B disebut codomain dari f;
- Jika $f(a) = b$, maka b disebut bayangan (*image*) dari a, dan a adalah *pre-image* dari b;
- Daerah hasil (*range*) dari f adalah himpunan semua bayangan dari elemen di A.

Latihan 1

Jelaskan domain, codomain, dan range dari fungsi berikut.



Latihan 2

Diberikan relasi pasangan terurut:

(Andi, 22), (Budi, 24), (Cindi, 21), (Dandi, 22), (Edi, 23), dan (Frendi, 22)

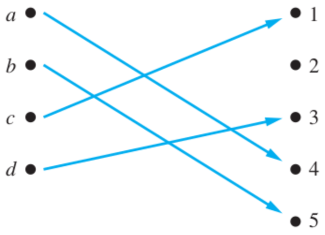
- Gambarkan dalam diagram.
- Apakah relasi tersebut merupakan fungsi?
- Relasi apakah yang sesuai dengan pasangan terurut yang diberikan?

1. Fungsi injektif (satu-satu/*one-to-one*)

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan injektif jika dan hanya jika:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \quad \forall a, b \in A$$

Ini berarti, setiap elemen di B haruslah memiliki paling banyak satu pre-image di A.

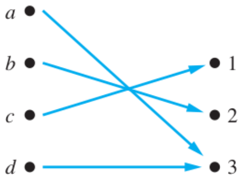


2. Fungsi surjektif (pada/*onto*)

Fungsi $f : A \to B$ dikatakan surjektif jika dan hanya jika:

$$\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ \text{dimana } f(a) = b$$

Ini berarti, setiap elemen di B memiliki <u>sedikitnya</u> satu pre-image di A.

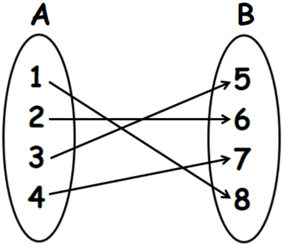


3. Fungsi bijektif

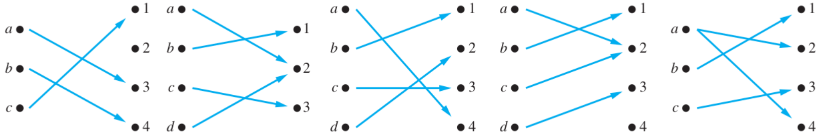
Fungsi $f : A \to$ dikatakan bijektif jika dan hanya jika:

- f adalah fungsi injektif; dan
- f adalah fungsi surjektif.

Ini berarti, setiap elemen di B memiliki tepat satu pre-image di A.



Latihan



Untuk setiap fungsi di atas, jelaskan termasuk jenis manakah fungsi tersebut?

Bagian 2: Invers fungsi

Definisi invers fungsi

Perhatikan fungsi-fungsi berikut:

- $y = 3x + 4$
- $y = x^2$
- $y = 2x^3 + 4$

Untuk setiap fungsi tersebut, nyatakan x sebagai fungsi dari y.

Solusi:

Definisi invers fungsi

Perhatikan fungsi-fungsi berikut:

- $y = 3x + 4$
- $y = x^2$
- $y = 2x^3 + 4$

Untuk setiap fungsi tersebut, nyatakan x sebagai fungsi dari y.

Solusi:

- $x = \frac{y-4}{3}$
- $x = \sqrt{y}$ atau $x = -\sqrt{y}$
- $x = \sqrt[3]{\frac{y-4}{2}}$

Definisi invers (balikan) fungsi (1)

Di antara relasi berikut, yang manakah yang merupakan fungsi (*lihat di papan tulis*)?

Definisi invers (balikan) fungsi (1)

Di antara relasi berikut, yang manakah yang merupakan fungsi (*lihat di papan tulis*)?

Jadi, apa syarat suatu fungsi f memiliki invers?

Definisi invers (balikan) fungsi (1)

Di antara relasi berikut, yang manakah yang merupakan fungsi (*lihat di papan tulis*)?

Jadi, apa syarat suatu fungsi f memiliki invers?

Coba simpulkan definisi fungsi!

Definisi invers (balikan) fungsi (1)

Di antara relasi berikut, yang manakah yang merupakan fungsi (*lihat di papan tulis*)?

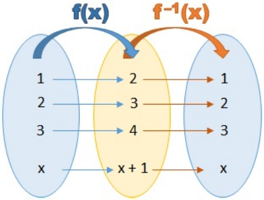
Jadi, apa syarat suatu fungsi f memiliki invers?

Coba simpulkan definisi fungsi!

Definisi

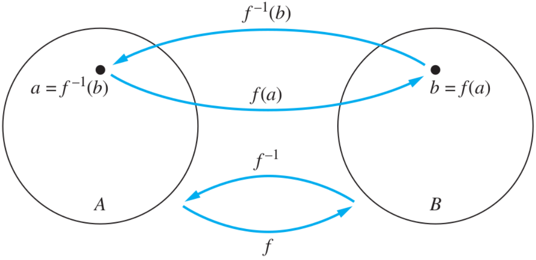
Misal $f : A \to B$ adalah sebuah fungsi bijektif. Maka, invers dari fungsi f (dilambangkan dengan f^{-1} didefinisikan sebagai fungsi dari B ke A yang memiliki sifat berikut:

$$\forall a \in A, b \in B,\ f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$



Definisi invers (balikan) fungsi (2)

Sebuah fungsi f yang memiliki invers disebut *invertible*, dan fungsi yang tidak memiliki invers disebut *not invertible*.



Latihan invers fungsi (1)

Soal 1.

Misal $f : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ sedemikian sehingga:

$$f(a) = 2,\ f(b) = 3,\ f(c) = 1$$

Apakah f memiliki invers? Jika iya, tuliskan invers fungsi f.

Solusi:

Latihan invers fungsi (2)

Soal 2.

Misal $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ adalah fungsi sedemikian sehingga

$$f(x) = x + 1$$

Apakah f memiliki invers? Jika iya, tuliskan invers fungsi f.

Solusi:

Latihan invers fungsi (3)

Soal 2.

Misal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian sehingga

$$f(x) = x^2$$

Apakah f memiliki invers? Jika iya, tuliskan invers fungsi f.

Solusi:

Bagian 3: Beberapa fungsi penting

1. Fungsi polinomial

Perhatikan fungsi-fungsi berikut:

- $f(x) = ax + b$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Pola apa yang Anda amati dari fungsi-fungsi tersebut?

Definisi fungsi polinomial

Sebuah fungsi polinomial memiliki bentuk:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

2. Fungsi modulo

Misalkan $a \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}^+$. Fungsi a modulo m dinotasikan sebagai:

$$a \mod m$$

yaitu fungsi yang memberikan sisa pembagian dari a bila dibagi dengan m.

Jadi,

$$a \mod m \equiv r$$

berarti $a = mq + r$ dengan $0 \leq r \leq m$.

Contoh fungsi modulo

- $13 \mod 5 \equiv ...$
- $30 \mod 5 \equiv ...$
- $13 \mod 20 \equiv ...$
- $0 \mod 5 \equiv ...$
- $-13 \mod 5 \equiv ...$
- ...
- ...

3. Fungsi faktorial

Misalkan $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Fungsi faktorial dari n didefinisikan sebagai:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n, & n > 0 \end{cases}$$

Example

- $0! = ?$
- $1! = ?$
- $2! = ?$
- $3! = ?$

4. Fungsi eksponensial

Misal $a \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{Z}^+$. Fungsi eksponensial didefinisikan sebagai:

$$a^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ times}}, & n > 0 \end{cases}$$

Untuk $n < 0$, didefinisikan:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Sifat-sifat fungsi eksponensial

Tugas: Sebutkan beberapa sifat fungsi eksponensial yang Anda ketahui!

1. $a^m \times a^n = ...$
2. $a^m / a^n = ...$
3. ...
4. ...

5. Fungsi logaritmik

Fungsi logaritmik merupakan invers dari fungsi eksponensial.

Diberikan $x = a^y$, bagaimana y dapat dinyatakan sebagai fungsi dari x?

$$x = a^y \Leftrightarrow y = {}^a\log x$$

Sifat-sifat fungsi logaritmik

Tugas: Sebutkan beberapa sifat fungsi logaritmik yang Anda ketahui!

1. ${}^{a}\log x \; + \; {}^{a}\log y$ ...
2. ${}^{a}\log x \; - \; {}^{a}\log y$ ...
3. ...
4. ...

6. Fungsi *floor* dan *ceiling*

Misalkan $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat dua bilangan bulat z_1 dan z_2 yang "mengapit" x. Dengan kata lain:

$$z_1 \leq x \leq z_2$$

Dalam hal ini, dapat dilakukan pembulatan bilangan bulat **terdekat**, **ke atas**, atau **ke bawah**.

- Fungsi floor menyatakan nilai bilangan bulat **terbesar** yang **kurang dari atau sama dengan** x.

  Dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$.

- Fungsi ceiling menyatakan nilai bilangan bulat **terkecil** yang **lebih dari atau sama dengan** x.

  Dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$.

Contoh:

$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, $\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$, $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$, $\lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0$, $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$, $\lceil 3.1 \rceil = 4$, $\lfloor 7 \rfloor = 7$, $\lceil 7 \rceil = 7$

Sifat fungsi floor dan ceiling

TABLE 1 Useful Properties of the Floor and Ceiling Functions.
(n is an integer, x is a real number)

(1a)	$\lfloor x \rfloor = n$ if and only if $n \le x < n+1$
(1b)	$\lceil x \rceil = n$ if and only if $n-1 < x \le n$
(1c)	$\lfloor x \rfloor = n$ if and only if $x-1 < n \le x$
(1d)	$\lceil x \rceil = n$ if and only if $x \le n < x+1$
(2)	$x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$
(3a)	$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
(3b)	$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
(4a)	$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
(4b)	$\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

7. Fungsi rekursif

Tinjau fungsi berikut.

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n, & n > 0 \end{cases}$$

- Menggunakan definisi tersebut, hitunglah nilai dari 2!, 3!, 4!, ...
- Pola apa yang dapat diamati dari proses yang dilakukan?
- Bagaimana keterkaitan antara $n!$ dan $(n-1)!$?

Relasi rekurens

Relasi rekurens untuk barisan $\{a_n\}$ adalah persamaan yang menyatakan a_n dalam satu (atau lebih) suku-suku sebelumnya, yaitu $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Pada contoh sebelumnya, kita dapat menyatakan fungsi faktorial sebagai:

$$\begin{aligned} n! &= (n-1)!\ n \\ \Leftrightarrow\ f(n) &= f(n-1) \times n \end{aligned}$$

Sehingga fungsi rekursif-nya menjadi:

$$\begin{cases} f(1) & = 1 \\ f(n) & = f(n-1) \times n \end{cases}$$

Komponen fungsi rekursif

Perhatikan kembali fungsi tadi.

> *Apa yang dapat diamati dari fungsi tersebut? Apa saja komponennya?*

Komponen:

1. BASIS

   $\rightarrow$ berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri

2. REKURENS

   $\rightarrow$ mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri.

Latihan fungsi rekursif

Soal 1.

Dari fungsi rekurens:

$$\begin{aligned} n! &= (n-1)!\ n \\ \Leftrightarrow\ f(n) &= f(n-1) \times n \end{aligned}$$

jelaskan komponen BASIS dan REKURENS-nya.

Soal 2:

Berikan contoh fungsi rekursif lainnya (setiap mahasiswa memberikan contoh yang berbeda).

Bagian 4: Komposisi fungsi

Definisi komposisi fungsi

Misal:

- g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B.
- f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan A.

Komposisi dari fungsi f dan g untuk setiap $a \in A$, dilambangkan dengan $f \circ g$, didefinisikan sebagai:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Komposisi dua fungsi

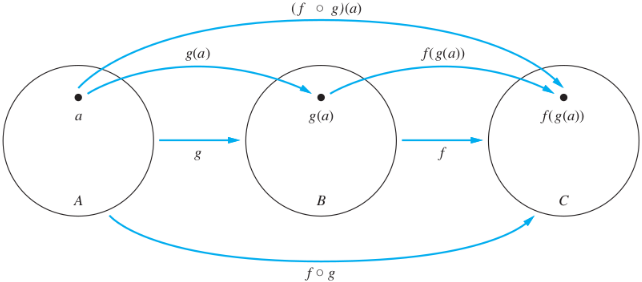


Figure: Komposisi dari fungsi f dan g

Latihan 1

Soal 1. Misal $g : \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}$ sedemikian sehingga $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, dan $f(c) = 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Solusi:

Latihan 2

Soal 2. Misal $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dan $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = 3x + 2$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Solusi:

Bagian 5: Grafik Fungsi

Apa itu grafik fungsi?

Misal $f : A \to B$ adalah fungsi. Grafik fungsi f didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut $\{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$.

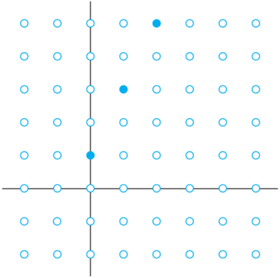


FIGURE 8 **The Graph of $f(n) = 2n + 1$ from Z to Z.**

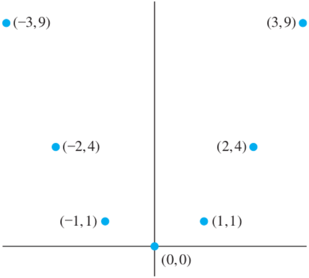


FIGURE 9 **The Graph of $f(x) = x^2$ from Z to Z.**

Contoh

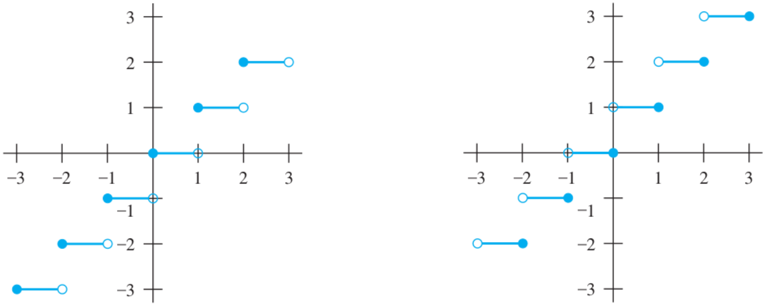


Figure: Grafik fungs floor $y = \lfloor x \rfloor$ dan ceiling $y = \lceil x \rceil$