

# 11 - Backtracking

[KOMS120403]

Desain dan Analisis Algoritma (2022/2023)

Dewi Sintiar

Prodi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 14 (May 2023)

# Daftar isi

- Prinsip dasar Backtracking
- State-space tree dalam algoritma backtracking
- Masalah  $n$ -Ratu
- Masalah sirkuit Hamilton
- Masalah subset-sum

# Bagian 1. Prinsip dasar *backtracking*

# Prinsip dasar Backtracking

- Teknik *exhaustive search* menyarankan untuk membuat semua kandidat solusi dan kemudian mengidentifikasi sebuah solusi yang memenuhi sifat tertentu yang diharapkan.
- Algoritma backtracking meningkatkan exhaustive search.
- Dalam exhaustive search, semua kemungkinan solusi dieksplorasi dan dievaluasi satu per satu.
- Dalam backtracking, kita tidak memeriksa semua kemungkinan, hanya kemungkinan yang mengarah pada solusi. Simpul lain yang tidak mengarah ke solusi akan dipangkas.

## Ide pokok:

Percabangan pada state-space tree dapat dihapus segera setelah kita dapat menyimpulkan bahwa itu tidak dapat mengarah pada solusi.

# Prinsip dasar Backtracking

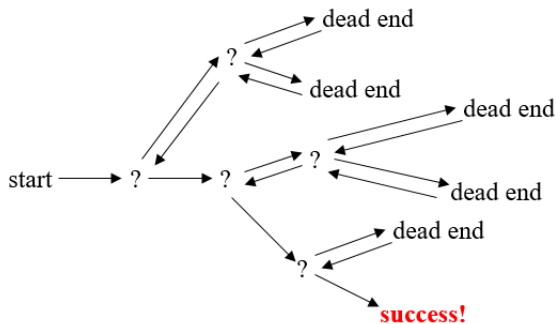


Figure: Ilustrasi algoritma backtracking (sumber: <https://miro.medium.com/>)

# Representasi solusi

- **Representasi solusi:** sebuah output dapat dituliskan sebagai  $n$ -tuple  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dimana setiap koordinat  $x_i$  adalah elemen dari beberapa “himpunan terbatas yang diurutkan secara linear (*finite linearly ordered set*)” (dilambangkan dengan  $S_i$ ).
- **Tuples:** semua tupel solusi dapat memiliki panjang yang sama (misal pada masalah  $n$ -queens dan masalah rangkaian Hamiltonian) dan dengan panjang yang berbeda (misal pada masalah Subset-sum).

# Backtracking dalam DFS

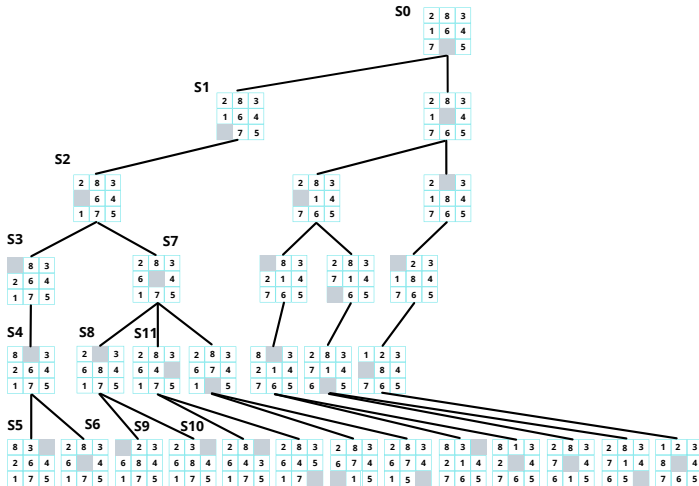
Backtracking dalam DFS digunakan dalam pencarian solusi masalah yang memiliki banyak kemungkinan penyelesaian.

Solusinya diperoleh dengan melihat pendekatan depth-first.

- Anda tidak memiliki cukup informasi untuk mengetahui langkah selanjutnya.
- Setiap keputusan mengarahkan Anda ke beberapa/banyak pilihan baru.
- Beberapa urutan pilihan mungkin menjadi solusi masalah.

Dalam DFS, backtracking digunakan sebagai cara metodologis untuk mencoba beberapa urutan keputusan.

## Contoh backtracking dalam DFS





# Bagian 2. State-space tree

# State-space tree (1)

Backtracking dapat dilihat sebagai pencarian pada graf pohon, yang dimulai dari akar hingga ke daun (simpul solusi).

## State-space tree

Yakni merupakan pohon yang mewakili semua keadaan yang mungkin (solusi atau non-solusi) dari masalah, dari akar sebagai keadaan awal ke daun sebagai keadaan terminal (akhir).

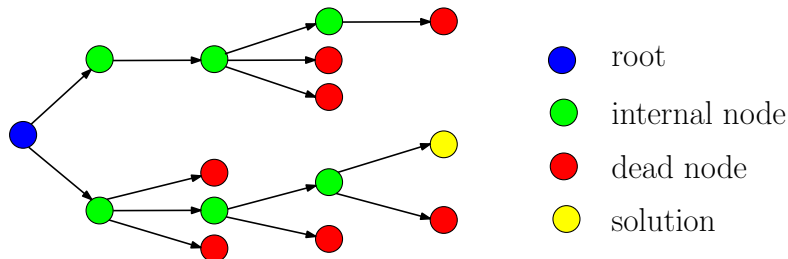
Sebuah algoritma backtracking menghasilkan (secara eksplisit atau implisit) **state-space tree**:

- simpulnya mewakili tupel yang dibangun sebagian oleh  $i$  koordinat pertama yang ditentukan oleh tindakan algoritma sebelumnya;
- jika tuple  $(x_1, x_2, \dots, x_i)$  seperti itu bukan solusi, algoritma menemukan elemen berikutnya dalam  $S_{i+1}$  yang konsisten dengan nilai  $(x_1, x_2, \dots, x_i)$  dan kendala masalahnya, kemudian menambahkannya ke tuple sebagai koordinat yang ke- $(i + 1)$ ;
- jika elemen seperti itu tidak ada, algoritma mundur untuk mempertimbangkan nilai berikutnya dari  $x_i$ , dan demikian seterusnya.

## State-space tree (2)

- **Akar (*root*)** mewakili keadaan awal sebelum pencarian dimulai;
- **Simpul internal**
  - ▶ simpul dari level pertama dalam pohon mewakili pilihan yang dibuat untuk komponen pertama dari solusi;
  - ▶ simpul tingkat kedua mewakili pilihan untuk komponen kedua;
  - ▶ dan seterusnya...;
- **Simpul daun (*leaves*)** mewakili jalan buntu yang tidak menjanjikan atau solusi lengkap yang ditemukan oleh algoritma.

## State-space tree (3)



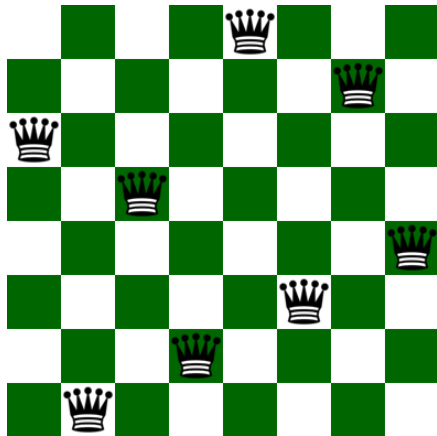
### Tipe simplul state-space tree

- **Promising node**: sesuai dengan solusi yang dibangun sebagian yang mungkin masih mengarah pada solusi lengkap;
- **Non-promising node**: simplul mati (*dead node*)

## State-space tree (4)

- Solusi dicari dengan membangkitkan **simpul status (*state nodes*)**, sehingga menghasilkan lintasan dari akar ke daun;
- Untuk menghasilkan node, aturan DFS diikuti;
- Node yang dihasilkan disebut **simpul aktif (*live node*)**;
- Live node yang sedang diperluas disebut **simpul perluasan (*expand-node*)**;
- Setiap kali expand-node diperluas, lintasan yang dihasilkan menjadi lebih panjang;
- Fungsi yang digunakan untuk “menghilangkan” sebuah expand-node disebut **bounding function**;
- Ketika sebuah simpul dimatikan, maka secara otomatis semua simpul anaknya akan dipangkas;
- Jika pembuatan jalur berakhir dengan simpul mati, maka dilakukan **runut balik (*backtrack*)** ke simpul induk;
- Simpul orang tua ini menjadi simpul perluasan baru;
- Pencarian dihentikan jika solusi ditemukan.

# Bagian 3. $n$ -Queens problem

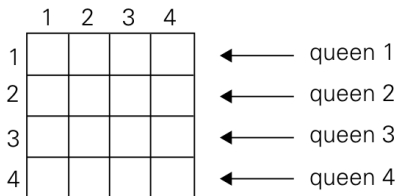


# Masalah $n$ -ratu ( $n$ -Queens problem)

## Permasalahan

*Tempatkan  $n$  ratu di papan catur berukuran  $n \times n$ , sehingga tidak ada dua ratu yang saling menyerang (dengan berada di baris yang sama, di kolom yang sama, atau di diagonal yang sama).*

- Untuk  $n = 1$ , masalahnya memiliki solusi trivial
- Untuk  $n = 2, 3$ , masalah tidak memiliki solusi
- Bagaimana jika  $n = 4$ ?



# Algoritma

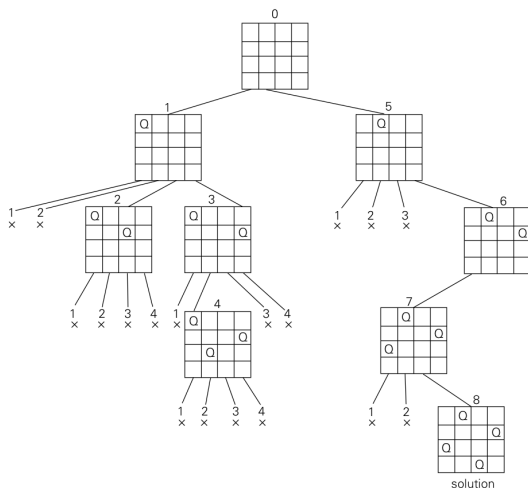
## START

- ➊ mulai dari kolom paling kiri
- ➋ jika semua ratu ditempatkan, kembalikan `TRUE` atau `PRINT` konfigurasinya
- ➌ periksa semua baris di kolom saat ini
  - ➊ jika ratu ditempatkan dengan aman, tandai baris dan kolom; dan secara rekursif periksa apakah kita mendekati konfigurasi saat ini, apakah kita mendapatkan solusi atau tidak
  - ➋ jika penempatan menghasilkan solusi, kembalikan `TRUE`
  - ➌ jika penempatan tidak menghasilkan solusi, hapus tanda dan coba baris lain
- ➍ jika semua baris dicoba dan solusi tidak diperoleh, kembalikan `FALSE` dan lakukan *backtrack*

## END



# Masalah $n$ -Ratu



**Figure:** State-space tree untuk memecahkan masalah 4-ratu dengan backtracking. Tanda  $\times$  menunjukkan usaha yang gagal untuk menempatkan sebuah ratu di kolom yang ditunjukkan. Angka di atas simpul menunjukkan urutan pembangkitan simpul.

# Masalah $n$ -Ratu

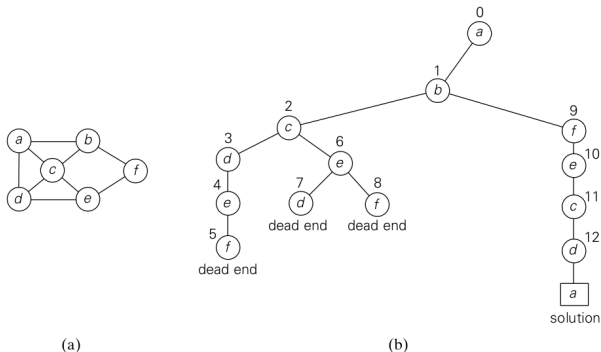
- 1 Kita mulai dengan papan kosong dan kemudian tempatkan ratu 1 di posisi pertama yang mungkin dari barisnya, yaitu di kolom 1 dari baris 1.
- 2 Lalu kita tempatkan ratu 2, setelah gagal mencoba kolom 1 dan 2, di posisi pertama yang dapat diterima untuk itu, yaitu kuadrat (2, 3), kuadrat di baris 2 dan kolom 3.
- 3 Ini terbukti menjadi jalan buntu karena tidak ada posisi yang dapat diterima untuk ratu 3.
- 4 Jadi, algoritma mundur dan menempatkan ratu 2 di posisi berikutnya yang memungkinkan di (2, 4).
- 5 Kemudian ratu 3 ditempatkan di (3, 2), yang terbukti menjadi jalan buntu lainnya.
- 6 Algoritma kemudian mundur ke ratu 1 dan memindahkannya ke (1, 2).
- 7 Ratu 2 lalu pergi ke (2, 4), ratu 3 menjadi (3, 1), dan ratu 4 menjadi (4, 3), yang merupakan solusi untuk masalah tersebut.

## Bagian 4. Contoh permasalahan lain

# Masalah sirkuit Hamilton

## Permasalahan

Diberikan graf terhubung  $G$ , temukan sirkuit Hamilton di  $G$ . (Ingat bahwa sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang mengunjungi semua simpul  $G$  tepat satu kali.)



**Figure:** (a) Graf. (b) State-space tree untuk menemukan sirkuit Hamilton. Angka di atas simpul graf pohon menunjukkan urutan pembangkitan simpul.

# Subset-sum problem (1)

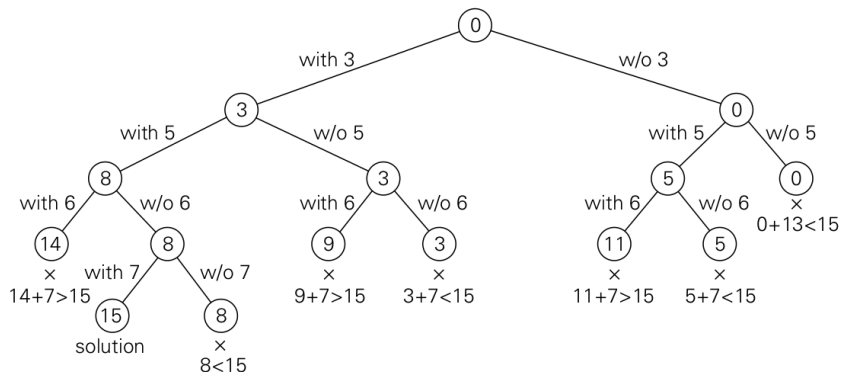
## Permasalahan

*Temukan subhimpunan dari himpunan tertentu  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  dari  $n$  bilangan bulat positif yang jumlahnya sama dengan bilangan bulat positif yang diberikan  $d$ .*

**Contoh 1:** Diberikan  $A = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ ,  $d = 9$ , solusinya adalah:  $\{1, 2, 6\}$  dan  $\{1, 8\}$ .

**Contoh 2:** Diberikan  $A = \{3, 5, 6, 7\}$ ,  $d = 15$ , solusinya adalah:  $\{3, 5, 7\}$ .

## Subset-sum problem (2)



**Figure:** Pohon ruang-status lengkap dari algoritma backtracking yang diterapkan pada instance  $A = \{3, 5, 6, 7\}$  dan  $d = 15$  dari masalah Subset-sum. Angka di dalam sebuah simpul menunjukkan jumlah dari elemen yang sudah termasuk dalam himpunan bagian yang diwakili oleh simpul tersebut. Ketidakesetaraan di bawah daun menunjukkan alasan penghentiannya (*prunning the node*).

## Subset-sum problem (1)

Sebuah lintasan dari akar ke simpul pada level ke- $i$  dari pohon menunjukkan mana dari  $i$  nomor pertama yang telah dimasukkan dalam himpunan bagian yang diwakili oleh simpul tersebut.

Kita mencatat nilai  $s$ , jumlah dari angka-angka ini, pada simpul.

- Jika  $s$  sama dengan  $d$ , kita memiliki solusi untuk masalah tersebut. Kita dapat melaporkan hasil ini dan berhenti atau,
- Jika semua solusi perlu ditemukan, lanjutkan dengan menelusuri kembali ke simpul induk.
- Jika  $s$  tidak sama dengan  $d$ , kita dapat mengakhiri simpul sebagai tidak menjanjikan jika salah satu dari dua ketidaksetaraan berikut terpenuhi:

$$s + a_{i+1} > d \text{ (jumlah } s \text{ terlalu besar)}$$

$$s + \sum_{j=i+1}^n a_j < d \text{ (jumlah } s \text{ terlalu kecil)}$$

# Bagian 5. Kerangka algoritma Backtracking



# Kerangka algoritma backtracking

---

## Algorithm 1 Backtracking

---

```
1: procedure BACKTRACK( $X[1..i]$ )
2:   input:  $X[1..i]$ : the first  $i$  promising components of a solution
3:   output: all the tuples representing the problem's solution
4:   if  $X[1..i]$  is a solution then
5:     write ( $X[1..i]$ )
6:   else
7:     for each  $x \in S_{i+1}$  consistent with  $X[1..i]$  and the constraints do
8:        $X[i + 1] \leftarrow x$ 
9:       BACKTRACK( $X[1..i + 1]$ )
10:    end for
11:  end if
12: end procedure
```

---

## Kompleksitas waktu

Backtracking pada dasarnya adalah pencarian lengkap yang dilakukan di atas ruang pencarian. Jadi kompleksitas waktu dari algoritma backtracking **ditentukan oleh ukuran ruang pencarian**.

Misalnya, dalam masalah  $n$ -queens dan Hamiltonian, ukuran ruang pencarian adalah sekitar  $\mathcal{O}(n!)$ .

*Secara intuitif, ratu pertama memiliki  $n$  penempatan, ratu kedua tidak boleh berada di kolom yang sama dengan yang pertama, sehingga ratu kedua memiliki kemungkinan  $n - 1$ , dan seterusnya, dengan kompleksitas waktu sebesar  $\mathcal{O}(n!)$ .*

# Kelebihan & kekurangan

## Kelebihan

- Biasanya diterapkan pada masalah kombinatorial yang sulit dimana tidak ada algoritma yang efisien untuk menemukan solusi yang tepat.
- Berbeda dengan pendekatan pencarian lengkap, backtracking setidaknya memiliki harapan untuk menyelesaikan beberapa contoh ukuran tak-trivial dalam jumlah waktu yang dapat diterima (terutama untuk masalah optimasi).
- Bahkan jika backtracking tidak menghilangkan elemen apa pun dari ruang keadaan masalah dan akhirnya menghasilkan semua elemennya, ia menyediakan teknik khusus untuk melakukannya.

## Kekurangan

- Backtracking **bukan** teknik yang efisien (walaupun berhasil digunakan pada soal sebelumnya).
- Pada kasus terburuk, mungkin harus menghasilkan semua kandidat yang mungkin dalam ruang keadaan masalah yang tumbuh secara eksponensial (atau lebih cepat).

*end of slide...*