Linear Algebra
[KOMS120301] - 2023/2024

15.4 - Diagonalisasi

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 15 (Desember 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah perkuliahan ini, Anda diharapkan mampu:

- memverifikasi apakah suatu matriks ortogonal atau tidak;
- melakukan diagonalisasi ortogonal suatu matriks.

Matriks ortogonal

- Basis yang bagus dari $\mathbb{R}^n$ adalah basis ortogonal, jadi pertanyaan wajarnya adalah: **matriks $n \times n$ manakah yang mempunyai basis vektor eigen ortogonal?**

Matriks ortogonal

Matriks persegi A dikatakan ortogonal jika:

$$A^{-1} = A^T$$

atau, setara jika $AA^T = A^T A = I$.

Example

Matriks berikut ini ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Tugas: Buktikan!

Kita tunjukkan bahwa $AA^T = I$ (*properti ortogonalitas*).

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Sifat-sifat matriks ortogonal

Misalkan A adalah matriks $n \times n$. Berikut ini setara.

1. A adalah ortogonal.
2. Vektor baris A membentuk himpunan ortonormal di $\mathbb{R}^n$ dengan hasil kali dalam Euclidean.
3. Vektor kolom A membentuk himpunan ortonormal di $\mathbb{R}^n$ dengan hasil kali dalam Euclidean.

Suatu himpunan matriks membentuk himpunan ortonormal jika vektor-vektornya **ortogonal berpasangan**, dan besar setiap vektor adalah 1.

- Matriks ortogonal terkait dengan beberapa dekomposisi terpenting dalam Aljabar Linier numerik, seperti: **QR-decomposition**, **Singular Value Decomposition (SVD)**, dll.

Latihan: Berikan contoh lain pentingnya matriks ortogonal!

Latihan

Ingat transformasi matriks rotasi di $\mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Apakah matriks A ortogonal?

Bagaimana dengan matriks berikut?

1. Matriks refleksi di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$?
2. Proyeksi ortogonal pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$?
3. Rotasi pada $\mathbb{R}^3$?

Latihan (solusi untuk rotasi matriks)

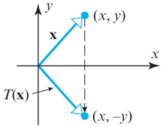
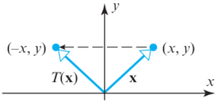
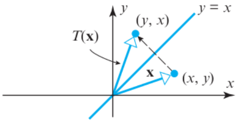
$$\det(A) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Dengan demikian,

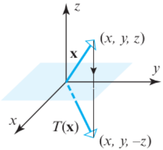
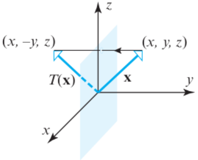
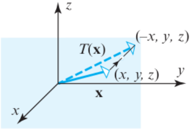
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = A^T$$

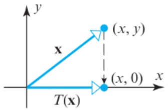
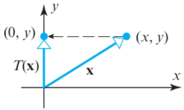
Jadi, matriks rotasi pada $\mathbb{R}^2$ merupakan matriks ortogonal.

Latihan 1: Operator refleksi aktif $\mathbb{R}^3$

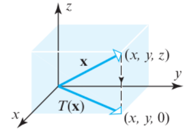
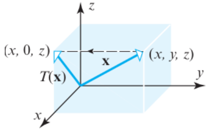
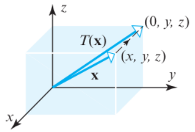
Operator	Illustration	Images of $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$	Standard Matrix
Reflection about the x-axis $T(x, y) = (x, -y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the y-axis $T(x, y) = (-x, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the line $y = x$ $T(x, y) = (y, x)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Latihan 2: Operator refleksi aktif $\mathbb{R}^3$

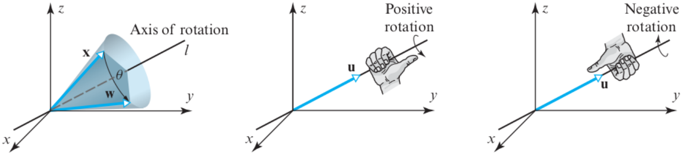
Operator	Illustration	Images of $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Standard Matrix
Reflection about the xy-plane $T(x, y, z) = (x, y, -z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the xz-plane $T(x, y, z) = (x, -y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the yz-plane $T(x, y, z) = (-x, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator	**Illustration**	**Images of $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$**	**Standard Matrix**
Orthogonal projection onto the x-axis $T(x, y) = (x, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the y-axis $T(x, y) = (0, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Latihan 4: Proyeksi ortogonal pada $\mathbb{R}^3$

Operator	Illustration	Images of $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Standard Matrix
Orthogonal projection onto the xy-plane $T(x, y, z) = (x, y, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the xz-plane $T(x, y, z) = (x, 0, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the yz-plane $T(x, y, z) = (0, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Latihan 5: Rotasi di $\mathbb{R}^3$



(a) Angle of rotation (b) Right-hand rule

Diagonalisasi ortogonal

Apa itu *Diagonalisasi ortogonal*?

Misalkan A dan B adalah matriks persegi. B dikatakan mirip secara ortogonal dengan A, jika terdapat matriks ortogonal P, s.t.:

$$B = P^T AP$$

Catatan. Sebaliknya, A juga secara ortogonal mirip dengan B. Bisakah Anda menjelaskan alasannya?

Apa itu *Diagonalisasi ortogonal*?

Misalkan A dan B adalah matriks persegi. B dikatakan mirip secara ortogonal dengan A, jika terdapat matriks ortogonal P, s.t.:

$$B = P^T AP$$

Catatan. Sebaliknya, A juga secara ortogonal mirip dengan B. Bisakah Anda menjelaskan alasannya?

Bukti. Ambil $Q = P^T$. Maka:

$$Q^T BQ = PBP^T = A$$

(sebab $B = P^T AP \Rightarrow PBP^T = P(P^T AP)P^T = IAI = A$, karena $P^T = P^{-1}$)

Jika matriks persegi A sebangun secara ortogonal dengan matriks diagonal D, mis.

$$P^T AP = D$$

maka kita katakan bahwa A dapat didiagonalisasi secara ortogonal dan itu P mediagonalisasi A secara ortogonal.

Mengapa kita peduli pada diagonalisasi ortogonal?

Jenis matriks apa yang dapat didiagonalisasi?

Lemma

Matriks persegi dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika dan hanya jika matriks tersebut **simetris**.

Proof.

$\square$

Misalkan A adalah matriks simetris $n \times n$.

- **Tahap 1.** Temukan basis untuk setiap ruang eigen dari A.
- **Tahap 2.** Terapkan proses Gram-Schmidt ke masing-masing basis ini untuk mendapatkan basis ortonormal untuk setiap ruang eigen.
- **Tahap 3.** Bentuklah matriks P yang kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor yang dibangun Tahap 2.

Matriks P adalah matriks yang akan mendiagonalisasi A secara ortogonal, yaitu.

$$D = P^T AP \quad \text{is a diagonal matrix}$$

Latihan

Diagonalisasikan matriks-matriks berikut secara ortogonal:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solusi dapat dibaca pada
https://psu.pb.unizin.org/psumath220lin/chapter/section-5-2-orthogonal-diagonalization/

Bentuk kuadratik