

3.2 - Algoritma Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 4 (September 2023)

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan mampu:

- 1 menerapkan algoritma eliminasi dan algoritma substitusi untuk menyelesaikan sistem linear dua variabel;
- 2 memahami ciri-ciri sistem persamaan linier yang berbentuk segitiga, bentuk eselon baris, atau bentuk eselon baris tereduksi.
- 3 memverifikasi jika sistem persamaan linier memiliki solusi tunggal, tidak memiliki solusi, atau memiliki banyak solusi tak terhingga.

Bagian 1: Algoritma untuk menyelesaikan sistem sistem persamaan linier dalam **dua variabel**

1. Algoritma Eliminasi (1)

Diberikan SPL:

$$\begin{cases} L_1 : x - y = -4 \\ L_2 : 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Selesaikan SPL tersebut!

- Kalikan persamaan pertama dengan 2.

$$\begin{cases} 2L_1 : 2x - 2y = -8 \\ L_2 : 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- Eliminasi variabel y , dengan menambahkan dua persamaan.

$$2L_1 + L_2 : 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

- Substitusi $x = \frac{4}{5}$ kembali ke L_1 atau L_2 untuk menemukan y .

$$x - y = -4 \Leftrightarrow y = x + 4 = \frac{4}{5} + 4 = \frac{24}{5}$$

1. Algoritma Eliminasi (2)

Asumsikan bahwa sistem yang diberikan memiliki solusi tunggal.

Input: Persamaan linier non-degenerasi L_1 dan L_2 dalam dua variabel.

Langkah 1: *Eliminasi maju*

- Kalikan setiap persamaan dengan konstanta s.t. koefisien yang dihasilkan dari satu variabel adalah sama (atau negatif dari yang lain).
- Kurangi (atau tambah) kedua persamaan untuk mengeliminasi salah satu variabel.

Langkah 2: *Substitusi mundur*

- Substitusikan nilai variabel ke persamaan sistem linier, untuk mendapatkan nilai variabel lainnya.

2. Algoritma substitusi

Diberikan:

$$\begin{cases} L_1 : x - y = -4 \\ L_2 : 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Selesaikan sistem berikut!

- Nyatakan x dalam y , dalam persamaan L_1 .

$$x = y - 4 \tag{1}$$

- Substitusi nilai x dalam persamaan (1) ke L_2

$$3(y - 4) + 2y = 12 \Leftrightarrow 5y = 24 \Leftrightarrow y = \frac{24}{5}$$

- Substitusikan $y = \frac{24}{5}$ ke persamaan (1)

$$x = \frac{24}{5} - 4 = \frac{4}{5}$$

2. Algoritma substitusi

Input: Persamaan linear non-degenerasi L_1 dan L_2 .

Untuk penyederhanaan, misalkan variabelnya adalah x dan y .

Langkah 1:

- Nyatakan satu variabel, misalnya x , sebagai persamaan dalam y dalam persamaan L_1 . Kemudian substitusikan nilai x ke dalam L_1 ke L_2 , untuk mendapatkan nilai y .

Langkah 2:

- Substitusikan nilai variabel y ke persamaan L_1 atau L_2 , untuk mendapatkan nilai variabel x .

Selesaikan sistem linear berikut menggunakan algoritma eliminasi dan substitusi.

① Selesaikan:

$$\begin{cases} L_1 : x - 3y = 4 \\ L_2 : -2x + 6y = 5 \end{cases}$$

② Selesaikan:

$$\begin{cases} L_1 : x - 3y = 4 \\ L_2 : -2x + 6y = -8 \end{cases}$$

Pada Latihan 1, kita dapat menyederhanakan persamaan kedua, dan memperoleh:

$$\begin{cases} L_1 : x - 3y = 4 \\ L_2 : x - 3y = 5 \end{cases}$$

Hasilnya adalah $4 = 5$ (tidak benar). Jadi, tidak ada nilai x dan y yang memenuhi sistem.

Latihan solusi (2)

Pada Latihan 2, dapat disederhanakan persamaan kedua, dan diperoleh:

$$\begin{cases} L_1 : x - 3y = 4 \\ L_2 : x - 3y = 4 \end{cases}$$

Kedua persamaan linier tersebut ekuivalen, yang berarti bahwa garis-garis yang mewakilinya **berpotongan** (berpotongan di semua titik pada sistem koordinat), dan semua titik pada garis memenuhi kedua persamaan.

Bagaimana cara merepresentasikan himpunan solusi?

$$x - 3y = 4$$

Misalkan $y = t$ untuk $t \in \mathbb{R}$. Maka $x = 3y + 4 = 3t + 4$.

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x = 3t + 4, y = t, \text{ where } t \in \mathbb{R}\}$

Bagian 2: Sistem dalam bentuk segitiga dan bentuk eselon (*echelon form*)

Bentuk segitiga

Sistem berikut dikatakan dalam **bentuk segitiga**.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 9 \\ \quad 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad \quad 7x_3 - x_4 = 3 \\ \quad \quad \quad 2x_4 = 8 \end{cases} \quad (1)$$

Ingat bahwa **matriks segitiga (triangular matrix)** memiliki salah satu bentuk berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Apa yang bisa kamu amati?

Suatu sistem persamaan linear berbentuk segitiga jika **matriks koefisien yang bersesuaian adalah matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah**, yaitu:

- 1 Matriks adalah matriks persegi;
- 2 Entri di bawah diagonal utama (atau, di atas diagonal utama, untuk matriks segitiga atas) adalah 0;

Remark:

- Dalam hal ini, ingatlah bahwa nilai di diagonal utama tidak ditentukan (boleh bernilai 0)

Sistem penyelesaian dalam bentuk segitiga (*atas*)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 9 \\ \quad 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad \quad 7x_3 - x_4 = 3 \\ \quad \quad \quad 2x_4 = 8 \end{cases} \quad (2)$$

Algoritma untuk menyelesaikan sistem:

- 1 Selesaikan persamaan terakhir untuk mendapatkan x_4 ;
- 2 Substitusikan x_4 ke persamaan ketiga untuk mendapatkan x_3 ;
- 3 Substitusikan x_3 dan x_4 ke persamaan kedua untuk mendapatkan x_2 ;
- 4 Substitusikan x_2 , x_3 , dan x_4 ke persamaan pertama untuk mendapatkan x_1 .

Latihan: Temukan solusi dari sistem!

- Dari persamaan terakhir, kita mendapatkan: $x_4 = 4$
- Dari persamaan ketiga:

$$x_3 = \frac{x_4 + 3}{7} = \frac{4 + 3}{7} = 1$$

- Dari persamaan kedua:

$$x_2 = \frac{x_3 - 3x_4 + 1}{5} = \frac{1 - 3(4) + 1}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

- Dari persamaan pertama:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 9}{2} = \frac{3(-2) - 5(1) + 2(4) + 9}{2} \\ &= \frac{-6 - 5 + 8 + 9}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Jadi, solusinya adalah: $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 4$

Nah, bagaimana jika matriks koefisiennya bukan matriks persegi ???



Bentuk eselon (*echelon form*)

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 9 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 1 \\ \quad \quad x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Sistem dikatakan dalam **bentuk eselon (*echelon form*)**, yakni:

- 1 Semua baris yang hanya terdiri dari nol ada di bagian bawah.
- 2 Koefisien paling depan (juga disebut pivot, atau koefisien utama) dari baris bukan nol selalu tepat di sebelah kanan koefisien utama dari baris di atasnya.
- 3 (Dalam beberapa literatur), koefisien utama adalah 1 (yang disebut dengan *leading one* atau *satu utama*).

Karakteristik

- Variabel utama (x_1, x_2, x_3) dalam sistem disebut **pivot**;
- Variabel lainnya (x_4 dan x_5) adalah variabel **free**.

Bentuk eselon (*echelon form*) (bentuk umum)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

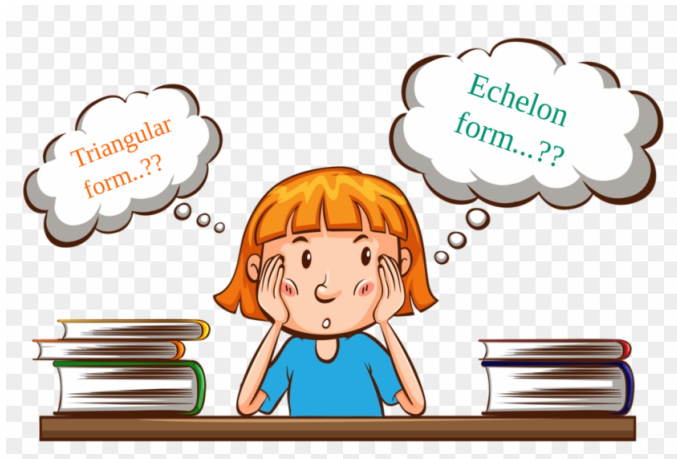
$$a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r$$

dimana $1 < j_2 < \cdots < j_r$ and $a_{11}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r} \neq 0$.

Variabel **pivot** adalah: $x_1, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$

Catatan: agar sistem memiliki solusi, maka haruslah $r \leq n$.

Lalu...apakah ada perbedaan antara bentuk segitiga (*triangular form*) dan bentuk eselon (*echelon form*)?



Matriks berikut adalah dalam bentuk **eselon**, tetapi bukan segitiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks berikut adalah dalam bentuk **segitiga** tetapi tidak eselon

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks berikut adalah dalam bentuk **eselon dan segitiga** (KIRI), dan **bukan eselon dan bukan segitiga** (KANAN)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Catatan. Untuk matriks bujur sangkar non-tunggal, “baris eselon” dan “segitiga atas” adalah ekuivalen.

Berikan sebuah contoh matriks yang merupakan:

- bentuk **eselon, tetapi bukan segitiga**
- bentuk **segitiga tetapi tidak eselon**
- bentuk **eselon dan segitiga**
- **bukan eselon dan bukan segitiga**

Bagian 3: Bagaimana cara menentukan banyaknya penyelesaian?

Bagaimana cara menentukan banyaknya penyelesaian?

Diberikan sistem persamaan linier dengan r persamaan dengan n variabel.

Tentukan kondisi sedemikian sehingga:

- sistem memiliki **solusi tunggal**?
- sistem **tidak memiliki solusi**?
- sistem memiliki **tak hingga banyaknya solusi**?



Bagaimana cara menentukan banyaknya penyelesaian?

Diberikan sistem persamaan linier dengan r persamaan dan n variabel.

Maka:

- sistem memiliki **solusi tunggal**
 - when $r = n$ (dalam hal ini, tidak ada persamaan yang merupakan kombinasi linier dari persamaan lain)
- sistem **tidak memiliki solusi?**
 - ketika $r > n$, dan tidak ada persamaan yang merupakan kombinasi linier dari persamaan lain
- sistem memiliki **tak hingga banyaknya solusi?**
 - ketika $r < n$

Bagaimana cara menulis solusi jika jumlahnya tak terhingga? (jika $r < n$)

Diberikan:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 9 \\ x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

- Variabel pivot: x_1, x_2, x_3
- Variabel bebas: x_4, x_5

Algoritma untuk penyelesaian SPL:

- 1 Tetapkan *parameter* ke variabel bebas;

$$x_4 = a \quad \text{and} \quad x_5 = b$$

- 2 Substitusi variabel kembali untuk mendapatkan nilai variabel pivot.

1. Solusi dalam bentuk parametrik

- Dari persamaan ketiga:

$$x_3 = x_4 + 3 = a + 3$$

- Dari persamaan kedua:

$$\begin{aligned}x_2 &= 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 1 \\&= 2(a + 3) - 4a + 2b + 1 = -2a + 2b + 7\end{aligned}$$

- Dari persamaan pertama:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 + 9 \\&= 3(-2a + 2b + 7) - 5(a + 3) + 2a - b + 9 \\&= -9a + 5b + 15\end{aligned}$$

Himpunan solusi:

$$\{-9a + 5b + 15, -2a + 2b + 7, a + 3, a, b\}$$

2. Solusi dalam bentuk variabel bebas

Gunakan substitusi kembali untuk menyelesaikan sistem, dan dapatkan variabel pivot.

$$\begin{cases} x_1 &= 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 - 9 \\ x_2 &= 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 + 1 \\ x_3 &= x_4 + 3 \\ x_4 &= \text{free variable} \\ x_5 &= \text{free variable} \end{cases}$$

Himpunan solusi:

$$\{(4x_2 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 - 9), (2x_3 - 4x_4 + 2x_5 + 1), (x_4 + 3), x_4, x_5\}$$

Bagian 4: Bentuk eselon baris tereduksi (*reduced row echelon form*)

Bentuk eselon baris tereduksi (*reduced row echelon form*)

Suatu matriks merupakan bentuk *baris eselon tereduksi* (*reduced row echelon form*) (juga disebut *row canonical form*), jika memenuhi kondisi berikut ini:

- 1 Bentuk eselon baris (*row echelon form*).
- 2 Entri utama di setiap baris bukan nol adalah 1 (disebut *leading 1*).
- 3 Setiap kolom yang berisi *leading 1* memiliki nol di semua entri lainnya.

Matriks manakah yang berada pada baris tereduksi bentuk eselon (*eselon form*)?

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bagaimana cara mengubah matriks koefisien menjadi bentuk baris segitiga atau (diperkecil) bentuk eselon (*bentuk eselon*)?

Terapkan operasi baris elementer.

Pada kuliah berikutnya, kita akan mempelajari cara menyelesaikan sistem persamaan linier dengan mentransformasikan matriks koefisien ke dalam bentuk eselon baris tereduksi (reduced row echelon form).

bersambung...