Aljabar Linier

[KOMS120301] - 2023/2024

2.1 - Aljabar Matriks

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 2 (September 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan dapat:

1. Mendefinisikan dan menulis komponen matriks (baris, kolom, diagonal, dan entri) dengan benar.
2. Melakukan operasi antar matriks, seperti: perkalian skalar, penjumlahan matriks, perkalian matriks, transpos, pangkat matriks, dan polinomial matriks.
3. Menerapkan sifat-sifat operasi matriks untuk memecahkan masalah.
4. Menjelaskan konsep dan sifat-sifat matriks persegi.
5. Menerapkan konsep matriks blok untuk menyelesaikan operasi matriks.

Contoh matriks (1)

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \text{Mon} & \text{Tue} & \text{Wed} & \text{Thu} & \text{Fri} \\
\hline
\text{John} & 30 & 10 & 20 & 9 & 14 \\
\text{Amy} & 10 & 9 & 7 & 19 & 25 \\
\text{Bob} & 20 & 7 & 0 & 10 & 20
\end{array}
$$

A matrix of messages

Contoh matriks (2)

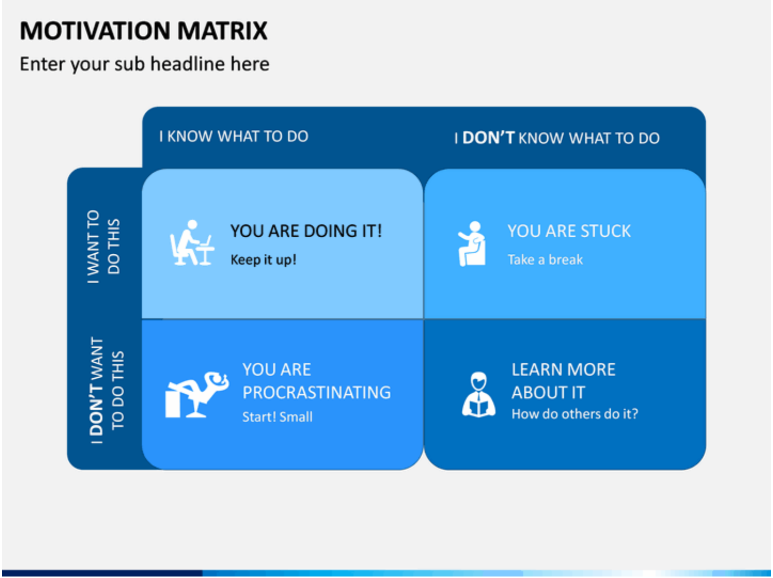
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \text{Jan} & \text{Feb} & \text{Mar} & \text{Apr} & \text{May} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Rent} \\ \text{Grocery} \\ \text{Car} \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 1050 & 1050 & 1050 \\ 300 & 250 & 350 & 310 & 305 \\ 400 & 450 & 350 & 300 & 320 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

A matrix of expenses

Contoh matriks (3)

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} \text{Boston} & \text{New York} & \text{London} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Boston} \\ \text{New York} \\ \text{London} \end{array} &
\begin{pmatrix} 0 & 187 & 3269 \\ 187 & 0 & 3459 \\ 3269 & 3459 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Contoh matriks (4)



Jadi, apa yang bisa Anda katakan tentang matriks?

Bagian 1: Matriks dan operasinya

Sebuah matriks A atas *lapangan* K (atau cukup disebut matriks A, ketika K sudah terdefinisi dengan jelas), adalah sebuah array berbentuk persegi panjang, dan berisikan skalar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris dari matriks A adalah daftar m elemen yang tersusun horizontal:

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),\ \ldots,\ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

Kolom dari matriks A adalah daftar n elemen yang tersusun vertikal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m3} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Catatan: Jadi, matriks tersusun dari sekumpulan vektor.

Definisi MATRIKS

Elemen a_{ij} dari matriks A (pada baris i, kolom j) disebut entri ke-ij atau elemen ke-ij.

Ini dinotasikan dengan: $A = [a_{ij}]$.

A adalah matriks berukuran $m \times n$:

- jika $m = 1$ (hanya satu baris), maka disebut matriks baris atau vektor baris;
- jika $n = 1$ (hanya satu kolom), maka disebut matriks kolom atau vektor kolom.

A disebut matriks nol jika semua entri matriks adalah nol.

Contoh persoalan

- Matriks baris: $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$
- Matriks kolom: $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$
- Zero matrix (matriks nol): $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$
- Matriks berukuran 3×2: $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$

Operasi matriks

Kita akan membahas:

1. Perkalian skalar dengan matriks
2. Penambahan matriks
3. Perkalian antar matriks
4. Transpos matriks
5. Perpangkatan matriks
6. Polinomial dari matriks

Hasil perkalian dari matriks $A = [a_{ij}]$ dengan skalar $k \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, $-A = (-1)A$.

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks dengan ukuran yang sama, yaitu ukuran $m \times n$. Jumlah dari A dan B didefinisikan sebagai:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, $A - B = A + (-B)$.

Sifat-sifat matriks pada penjumlahan dan perkalian skalar

Teorema

Misalkan A, B, dan C merupakan matriks dengan ukuran yang sama, dan $k, k' \in \mathbb{R}$. *Maka:*

- $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(asosiatif)*
- $A+B = B+A$ *(komutatif)*
- $A+0 = A$ *(0 adalah elemen identitas thd penjumlahan)*
- $A+(-A) = 0$ *(matriks invers thd penjumlahan)*
- $k(A+B) = kA+kB$ *(distributif)*
- $(k+k')A = kA+k'A$ *(distributif thd skalar)*
- $(kk')A = k(k'A)$ *(asosiatif thd skalar)*
- $1 \cdot A = A$ *(1 adalah elemen identitas thd perkalian skalar)*

Catatan: Oleh karena itu, jumlah $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ dapat dihitung dalam urutan apa pun, dan tidak memerlukan tanda kurung.

Contoh persoalan

Diketahui matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Sederhanakan ekspresi matriks berikut.

- $A + B$
- $B - C$
- $-3A + 2B$
- $5A + 2B - 3C$
- $3(A - C) + B$
- $A - A$

Kasus khusus: hasil kali matriks baris dan matriks kolom yang memiliki jumlah elemen yang sama.

Misalkan $A = [a_i]$ menjadi matriks baris dan $B = [b_i]$ menjadi matriks kolom. Maka produk AB didefinisikan sebagai:

$$AB = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Catatan: hasil kali A dan B adalah skalar.

Contoh

$$[7, -4, 5] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 7(3) + (-4)(2) + 5(-1) = 21 - 8 - 5 = 8$$

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks dengan ukuran $m \times p$ dan $p \times n$. Maka hasil kali A dan B adalah matriks AB dengan ukuran $m \times n$ yang didefinisikan oleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Tentukan AB dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Kalikan setiap baris A dengan setiap kolom dari B.

Karena A berukuran 2×2 dan B berukuran 2×3, maka AB berukuran 2×3.

$$AB = \begin{bmatrix} 2+15 & 0-6 & -4+18 \\ 4-5 & 0+2 & -8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

Hubungan antara penjumlahan matriks dan perkalian matriks

Teorema

Misalkan A, B, dan C adalah matriks. Jika penjumlahan dan perkalian matriks terdefinisi dengan jelas, maka:

- $(AB)C = A(BC)$ *(asosiatif)*
- $A(B + C) = AB + AC$ *(distributif kiri)*
- $(B + C)A = BA + CA$ *(distributif kanan)*
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ *dimana* $k \in \mathbb{R}$
- $0A = 0$ *dan* $A0 = 0$, *dimana* 0 *adalah matriks nol*

Transpos matriks

Transpos dari sebuah matriks A, dilambangkan dengan A^T, adalah matriks yang diperoleh dengan menuliskan kolom-kolom A, secara berurutan, sebagai baris.

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Catatan: Jika A memiliki ukuran $m \times n$, maka A^T memiliki ukuran $n \times m$.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad dan \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sifat operasi pada transpos matriks

Teorema

Jika A dan B adalah matriks sedemikian sehingga operasi berikut terdefinisi dengan baik (well-defined), maka:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A - B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$

Jika A memiliki ukuran $m \times n$, maka A^T memiliki ukuran $n \times m$. Misalkan A adalah matriks persegi dengan order n atas $\mathbb{R}$ (atau atas lapangan lain). Perpangkatan dari A didefinisikan sebagai:

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2 A, \quad \ldots, \quad A^{n+1} = A^n A, \quad \ldots, \quad \text{dan} \quad A^0 = 1$$

Kita juga dapat mendefinisikan polinomial dalam matriks A. Untuk polinomial apa pun:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad \text{dimana } a_i \in \mathbb{R},$$

Polinomial $f(A)$ didefinisikan sebagai:

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

Catatan: Jika $f(A) = 0$ (matriks nol), maka A disebut *pembuat nol (zero)* atau *akar (root)* dari $f(x)$.

Contoh persoalan

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Maka:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}, \quad \text{dan}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$$

Misal $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, maka:

$$f(A) = 2 \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

Latihan

1. Bentuk kelompok beranggotakan 3 orang;
2. Kerjakan latihan berikut (Howard Anton's book):
   - Number 1 & 2 (2 questions @)
   - Number 3-6 (3 questions @)
   - Number 9-10 (choose 1 or 2 columns)

Bagian 2: Matriks persegi

Matriks persegi adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Diagonal and Trace

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi dengan order n.
Diagonal atau diagonal utama dari A terdiri dari elemen dengan subskrip yang sama, yaitu:

$$a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$$

Trace dari A, dilambangkan dengan $\mathrm{tr}(A)$ adalah jumlah elemen diagonal dari A.

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Teorema (Properties of trace)

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(kA) = k\,tr(A)$
- $tr(A^T) = tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$ *(ingatlah bahwa tidak selalu $AB \neq BA$)*

Matriks identitas, matriks skalar

Matriks identitas atau unit, dilambangkan dengan I_n (atau sederhananya I) adalah matriks persegi $n \times n$, dengan angka 1 pada diagonalnya, dan angka 0 pada titik lain.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

I memiliki peran yang mirip dengan skalar 1 untuk $\mathbb{R}$.

Sifat penting: Ketika terdefinisi dengan baik,

$$IA = A$$

Untuk beberapa skalar $k \in \mathbb{R}$, matriks kI disebut matriks skalar yang sesuai dengan skalar k.

Matriks $D = [d_{ij}]$ adalah matriks diagonal jika entri non-diagonalnya semuanya nol.

$$D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$$

dimana beberapa dari d_{ii} atau semua d_{ii} mungkin nol.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -5 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 9 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, matriks identitas dan matriks skalar juga merupakan matriks diagonal.

Matriks persegi $A = [a_{ij}]$ adalah segitiga atas (*upper-triangular*), jika semua entri di bawah diagonal utama sama dengan 0.

Matriks segitiga bawah (*lower-triangular*) adalah matriks persegi yang entri-entri di atas diagonal utama semuanya nol.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas (*kiri*) dan segitiga bawah (*kanan*)

Teorema

Jika $A = [a_{ij}]$ *dan* $B = [b_{ij}]$ *adalah* $n \times n$ *matriks segitiga. Maka:*

$$A + B, \quad kA, \quad AB$$

adalah matriks segitiga dengan elemen diagonalnya yaitu:

$$(a_{11} + b_{11}, \ldots, a_{nn} + b_{nn}), \ (ka_{11}, \ldots, ka_{nn}), \ (a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$$

Suatu matriks A adalah simetris jika $A^T = A$, yaitu $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Matriks A simetris miring (*skew-symmetric*) jika $A^T = -A$.

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

A adalah matriks simetris, dan B adalah matriks simetris miring.

Dapatkah Anda menemukan contoh lain? Temukan contoh matriks yang tidak simetris dan tidak simetris miring.

Sebuah matriks A adalah matriks normal jika $AA^T = A^T A$.

Contoh

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. *Maka:*

$$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Karena $AA^T = A^T A$, *matriks* A *adalah normal.*

Bagian 4: Matriks blok

Dengan menggunakan sistem garis horizontal dan vertikal (putus-putus), matriks A dapat dipartisi menjadi submatriks yang disebut blok (atau sel) dari A.

Contoh

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ \hline 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Misalkan $A = [A_{ij}]$ dan $B = [B_{ij}]$ adalah matriks blok dengan jumlah blok baris dan kolom yang sama, dan misalkan blok yang bersesuaian memiliki ukuran yang sama.

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$$

dan

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{m1} & kA_{m2} & \cdots & kA_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks blok persegi

Matriks blok M disebut matriks blok persegi jika:

1. M adalah matriks persegi.
2. Blok-bloknya (dipandang sebagai entri) membentuk matriks persegi.
3. Blok diagonalnya juga matriks persegi.

Contoh

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Manakah dari matriks di atas yang merupakan matriks blok persegi?

Matriks blok persegi

Matriks blok M disebut matriks blok persegi jika:

1. M adalah matriks persegi.
2. Blok-bloknya (dipandang sebagai entri) membentuk matriks persegi.
3. Blok diagonalnya juga matriks persegi.

Contoh

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Manakah dari matriks di atas yang merupakan matriks blok persegi?

Matriks B adalah matriks blok persegi.

Matriks blok diagonal adalah matriks blok persegi $M = [A_{ij}]$ sedemikian sehingga blok-blok non-diagonalnya adalah matriks nol.

Contoh

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Matriks blok diagonal sering dilambangkan sebagai
$M = \operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{rr})$

Matriks persegi A dikatakan invertible atau tak-singular jika $\exists B$ s.t.:

$AB = BA = I$ di mana I adalah matriks identitas

Catatan: Matriks B tunggal (tepat satu invers), dan disebut invers dari A, yang dilambangkan dengan A^{-1}.
Hubungan A dan B bersifat **simetris**:

Jika B adalah kebalikan dari A, maka A adalah kebalikan dari B, i.e.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Contoh

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *Maka:*

$$AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diberikan matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Apakah B merupakan invers dari A?
- Apakah A merupakan invers dari B?

Solusi.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi A dan B adalah invers satu sama lain.

Pertanyaan. Dapatkah Anda menemukan dua matriks persegi A dan B berukuran 2×2, dimana B adalah invers dari A namun A bukan invers dari B?

Ingatlah kembali pelajaran saat Anda di SMA.

Tentukan invers dari:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Solusi.

$|A| = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2.$ Karena $|A| \neq 0$, maka matriks A memiliki invers.

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sementara itu, $|B| = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0.$ Maka matriks B tidak memiliki invers atau merupakan sebuah matriks singular.

Latihan

(Akan didiskusikan dalam perkuliahan)

1. Merumuskan algoritma perkalian matriks

Diberikan dua matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Hitunglah $A \times B$.
- Jelaskan prosedur langkah demi langkah untuk menghitung $A \times B$ untuk setiap matriks $A_{m\times k}$ dan $B_{k\times n}$.
- Tulislah prosedur dalam algoritma (Anda dapat menulisnya sebagai kode semu (*pseudo-code*)).

2. Bagaimanakah cara menyelesaikan perkalian matriks dengan menggunakan matriks blok?

Diberikan dua matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Hitung $A \times B$.

Bagaimana jika kedua matriks tersebut ditulis dalam matriks blok?

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Dapatkah Anda merumuskan langkah-langkah perkalian matriks blok?

bersambung...