

# 13 - Pemrograman dinamis (*dynamic programming*)

[KOMS120403]

Desain dan Analisis Algoritma (2022/2023)

Dewi Sintari

Prodi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 15 (June 2023)

# Daftar isi

- Prinsip Pemrograman Dinamis
- Contoh sederhana
- Penerapan lebih lanjut dari pemrograman dinamis
  - ▶ Permasalahan knapsack dan fungsi memori



**Figure:** Richard Ernest Bellman (1920-1984), penemu pemrograman dinamis

# Prinsip pemrograman dinamis (*dynamic programming*) (1)

- Kata **pemrograman** tidak mengacu pada pemrograman komputer. Dalam hal ini, pemrograman berarti “ perencanaan”.
- **Dinamis** digunakan untuk merepresentasikan aspek waktu yang bervariasi dari masalah.

Pemrograman dinamis adalah metode pemecahan masalah dengan menguraikan solusi ke dalam serangkaian *tahapan*, sehingga solusi dari masalah dapat dilihat sebagai **sebuah rangkaian keputusan yang terurut**.

## Prinsip pemrograman dinamis (2)

- Biasanya digunakan untuk *optimization problems* (maksimisasi/minimisasi).
- Biasanya, submasalah ini muncul dari **rekurensi** yang menghubungkan solusi masalah yang diberikan dengan solusi dari submasalahnya yang lebih kecil.
- Dibandingkan dengan menyelesaikan submasalah yang tumpang tindih berulang kali, pemrograman dinamis mengarahkan untuk menyelesaikan setiap submasalah yang lebih kecil hanya sekali dan mencatat hasilnya dalam tabel dimana solusinya untuk masalah semula kemudian dapat diperoleh.

# Bagian 1. Pemrograman dinamis pada barisan Fibonacci

# Bilangan Fibonacci

Ingatlah bahwa deret Fibonacci didefinisikan sebagai berikut.

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & n \geq 3 \end{cases}$$

Barisan Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

**Algoritma rekursif:**

---

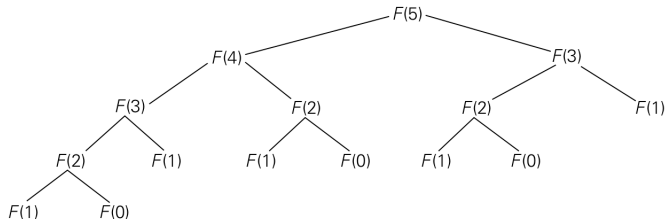
## Algorithm 1 Fibonacci sequence recursively

---

```
1: procedure FIB( $n$ )  
2:   if  $n \leq 2$  then return 1  
3:   end if  
4:   return (FIB( $n-1$ ) + FIB( $n-2$ ))  
5: end procedure
```

---

# Diagram pembentukan barisan Fibonacci



**Figure:** Pohon rekursi untuk menghitung angka Fibonacci ke-5



# Tumpang tindih pada konstruksi bilangan Fibonacci

Cara menangani **perhitungan yang tumpang tindih**?

- Buat array 1-dimensi, dan isi dengan  $(n + 1)$  nilai berurutan dari  $F(n)$ , mulai dari  $F(0)$ , dan elemen terakhir adalah  $F(n)$ .

---

## Algorithm 2 Fibonacci sequence iteratively

---

```
1: procedure FIB2( $n$ )
2:    $F[0] \leftarrow 0$ ;  $F[1] \leftarrow 1$ 
3:   for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
4:      $F(i) \leftarrow F(i - 1) + F(i - 2)$ 
5:   end for
6:   return  $F[n]$ 
7: end procedure
```

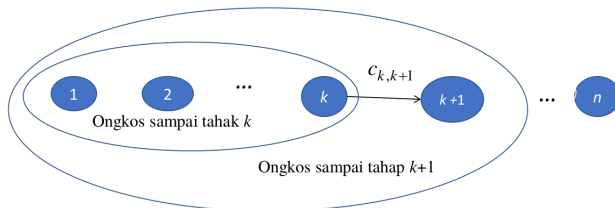
---

# Prinsip optimalitas

Suatu masalah dikatakan memenuhi **Prinsip Optimalitas** jika **solusi optimal untuk setiap instance dari masalah optimisasi terdiri dari solusi optimal untuk sub-instance-nya**; yaitu jika solusi totalnya optimal, maka bagian dari solusi hingga langkah  $k$  juga optimal.

- **Implikasi:** jika kita bekerja dari langkah  $k$  ke langkah  $k + 1$ , kita dapat menggunakan solusi optimal hingga langkah  $k$ , tanpa kembali ke keadaan awal.

Biaya pada langkah  $k + 1 =$  biaya pada langkah  $k +$  biaya dari langkah  $k$  ke langkah  $k + 1$



# Requirements

Secara umum, **ada beberapa persyaratan untuk menerapkan pemrograman dinamis pada suatu masalah** [*sumber: Algorithm Design, by Kleinberg and Tardos*]:

- 1 Solusi untuk masalah asli dapat dihitung dari solusi submasalah (independen).
- 2 Banyaknya submasalah polinomial.
- 3 Ada pengurutan submasalah sedemikian rupa sehingga solusi submasalah hanya bergantung pada solusi submasalah yang mendahuluinya dalam urutan ini.

# Tahapan pemrograman dinamis

- ➊ **Definisikan sub-masalah:** Ini merupakan langkah kritis. Biasanya struktur perulangan mengikuti secara alami setelah mendefinisikan submasalah.
- ➋ **Rekurensi:** Untuk membuat algoritma, nyatakan solusi untuk submasalah dalam bentuk formula rekursi dari solusi untuk submasalah yang lebih kecil.
- ➌ **Kebenaran:** Buktikan bahwa perulangannya benar, biasanya dengan teknik pembuktian *induksi*.
- ➍ **Kompleksitas:** Menganalisis kompleksitas waktu, biasanya dengan formula berikut:

$$runtime = \#subproblems \times timeToSolveEachOne$$

# Pendekatan

## ① Pendekatan **forward/top-down**

Perhitungan dilakukan dari tahap  $1, 2, \dots, n-1, n$ .

Urutan variabel keputusan:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

## ② Pendekatan **backward/bottom-up**

Perhitungan dilakukan dari tahap  $n, n-1, \dots, 2, 1$ .

Urutan variabel keputusan:  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ .

## Bagian 2. Contoh sederhana penerapan pemrograman dinamis

- 1 Masalah barisan koin
- 2 Masalah penukaran
- 3 Masalah pengumpulan koin

# 1. Masalah barisan koin

# 1. Masalah barisan koin (1)

## Permasalahan

Diberikan deretan  $n$  koin yang nilainya berupa bilangan bulat positif  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , belum tentu berbeda. Tujuannya adalah untuk mengambil jumlah uang maksimum dengan batasan bahwa tidak ada dua koin yang berdekatan di baris awal yang dapat diambil.

**Strategi:** Misalkan  $F(n)$  adalah jumlah maksimum yang dapat diambil dari deretan  $n$  koin. Bagaimanakah cara menurunkan rumus rekursif untuk  $F(n)$ ?

- Dua partisi pilihan koin yang diizinkan:
  - 1 Grup yang menyertakan koin terakhir
  - 2 Grup yang tidak menyertakan koin terakhir

$$\boxed{c_1 \quad c_1 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-2}} \quad c_{n-1} \quad \boxed{c_n} \quad c_n + F(n-2)$$

$$\boxed{c_1 \quad c_1 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-2} \quad c_{n-1}} \quad c_n \quad F(n-1)$$



# 1. Masalah barisan koin (2)

Fungsi rekursif:

$$\begin{cases} F(n) = \max\{c_n + F(n-2), F(n-1)\} & \text{for } n > 1 \\ F(0) = 0, \quad F(1) = c_1 \end{cases}$$

Jadi,  $F(n)$  dapat dihitung seperti pada deret Fibonacci.

---

## Algorithm 3 Coin row

---

```
1: procedure COINROW( $C[1..n]$ )
2:    $F[0] \leftarrow 0; \quad F[1] \leftarrow C[1]$ 
3:   for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
4:      $F(i) \leftarrow \max\{C[i] + F(i-2), F(i-1)\}$ 
5:   end for
6:   return  $F[n]$ 
7: end procedure
```

---

# 1. Masalah barisan koin (3)

$F[0] = 0, F[1] = c_1 = 5$

index	0	1	2	3	4	5	6
C		5	1	2	10	6	2
F	0	5					

$F[2] = \max\{1 + 0, 5\} = 5$

index	0	1	2	3	4	5	6
C		5	1	2	10	6	2
F	0	5	5				

$F[3] = \max\{2 + 5, 5\} = 7$

index	0	1	2	3	4	5	6
C		5	1	2	10	6	2
F	0	5	5	7			

$F[4] = \max\{10 + 5, 7\} = 15$

index	0	1	2	3	4	5	6
C		5	1	2	10	6	2
F	0	5	5	7	15		

$F[5] = \max\{6 + 7, 15\} = 15$

index	0	1	2	3	4	5	6
C		5	1	2	10	6	2
F	0	5	5	7	15	15	

$F[6] = \max\{2 + 15, 15\} = 17$

index	0	1	2	3	4	5	6
C		5	1	2	10	6	2
F	0	5	5	7	15	15	17

**Figure:** Memecahkan masalah barisan koin dengan pemrograman dinamis untuk barisan koin 5, 1, 2, 10, 6, 2, dengan solusi optimal  $\{c_1, c_4, c_6\}$  dan nilai optimal 17.

## 2. Masalah penukaran

## 2. Masalah penukaran (1)

### Permasalahan

*Berikan cek sejumlah  $n$ , yang akan ditukar dengan koin nilai  $d_1 < d_2 < \dots < d_m$  dimana  $d_1 = 1$ . Asumsikan bahwa kita memiliki jumlah koin yang tidak terbatas untuk setiap koin  $d_1, d_2, \dots, d_m$ . Tentukan jumlah koin minimum yang dibutuhkan.*

**Strategi:** Misalkan  $F(n)$ : jumlah minimum koin yang nilainya berjumlah  $n$ , dan tentukan  $F(0) = 0$ . Bagaimanakah cara menurunkan rumus rekursif untuk  $F(n)$ ?

- Jumlah  $n$  hanya dapat diperoleh dengan menambahkan satu koin nominal  $d_j$  ke jumlah  $n - d_j$  untuk  $j = 1, 2, \dots, m$  sehingga  $n \geq d_j$ .
- Minimalkan  $F(n - d_j) + 1$ .

**Fungsi rekursif:**

$$\begin{cases} F(n) &= \min_{j: n \geq d_j} F(n - d_j) + 1 \text{ for } n > 0 \\ F(0) &= 0 \end{cases}$$

## 2. Masalah penukaran (2)

---

### Algorithm 4 ChangeMaking

---

```
1: procedure MINCOINCHANGE( $D[1..m], n$ )
2:   input: positive integer  $n$ , and array  $D[1..m]$  of increasing positive integers indicating the coin denominations where  $D[1] = 1$ 
3:   output: the minimum number of coins that add up to  $n$ 
4:    $F[0] \leftarrow 0$ 
5:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
6:      $\text{temp} \leftarrow \infty$ ;  $j \leftarrow 1$ 
7:     while  $j \leq m$  and  $i \geq D[j]$  do
8:        $\text{temp} \leftarrow \min(F[i - D[j]], \text{temp})$ 
9:        $j \leftarrow j + 1$ 
10:    end while
11:     $F[i] \leftarrow \text{temp} + 1$ 
12:  end for
13:  return  $F[n]$ 
14: end procedure
```

---

## 2. Masalah penukaran (3)

$$F[0] = 0$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$F$	0						

$$F[1] = \min\{F[1 - 1]\} + 1 = 1$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$F$	0	1					

$$F[2] = \min\{F[2 - 1]\} + 1 = 2$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$F$	0	1	2				

$$F[3] = \min\{F[3 - 1], F[3 - 3]\} + 1 = 1$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$F$	0	1	2	1			

$$F[4] = \min\{F[4 - 1], F[4 - 3], F[4 - 4]\} + 1 = 1$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$F$	0	1	2	1	1		

$$F[5] = \min\{F[5 - 1], F[5 - 3], F[5 - 4]\} + 1 = 2$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$F$	0	1	2	1	1	2	

$$F[6] = \min\{F[6 - 1], F[6 - 3], F[6 - 4]\} + 1 = 2$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$F$	0	1	2	1	1	2	<b>2</b>

Figure: Penerapan algoritma MINCOINCHANGE untuk nilai  $n = 6$  dan satuan koin 1, 3, dan 4.

### 3. Masalah pengumpulan koin

### 3. Masalah pengumpulan koin (1)

#### Permasalahan

Beberapa koin ditempatkan dalam papan berukuran  $n \times m$ , tidak lebih dari satu koin per sel. Sebuah robot yang ditempatkan di sel *kiri-atas* papan, bertujuan mengumpulkan koin sebanyak mungkin dan membawanya ke sel *kanan-bawah*.

- Pada setiap langkah, robot dapat memindahkan satu sel ke kanan atau satu sel ke bawah dari lokasinya saat ini.
- Ketika robot mengunjungi sel dengan koin, ia selalu mengambil koin itu.

Rancang algoritma untuk menemukan jumlah koin maksimum yang dapat dikumpulkan robot dan jalur yang harus diikuti untuk melakukannya.



### 3. Masalah pengumpulan koin (1)

#### Permasalahan

Beberapa koin ditempatkan dalam papan berukuran  $n \times m$ , tidak lebih dari satu koin per sel. Sebuah robot yang ditempatkan di sel *kiri-atas* papan, bertujuan mengumpulkan koin sebanyak mungkin dan membawanya ke sel *kanan-bawah*.

- Pada setiap langkah, robot dapat memindahkan satu sel ke kanan atau satu sel ke bawah dari lokasinya saat ini.
- Ketika robot mengunjungi sel dengan koin, ia selalu mengambil koin itu.

Rancang algoritma untuk menemukan jumlah koin maksimum yang dapat dikumpulkan robot dan jalur yang harus diikuti untuk melakukannya.

**Strategi:** Misalkan  $F(i, j)$  adalah jumlah koin terbesar yang dapat dikumpulkan dan dibawa robot ke sel  $(i, j)$  di baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  di papan.

- $(i, j)$  dapat dijangkau dari sel  $(i - 1, j)$  (atas) atau sel  $(i, j - 1)$  (kiri).
- Untuk sel di baris pertama (atau kolom pertama), asumsikan bahwa  $F(i - 1, j) = 0$  (atau  $F(i, j - 1) = 0$ ).

### 3. Masalah pengumpulan koin (2)

$$\begin{cases} F(i,j) = \max\{F(i-1,j), F(i,j-1)\} + c_{ij} & \text{untuk } 1 \leq i < n, 1 \leq j \leq m \\ F(0,j) = 0 & \text{for } 1 \leq j \leq m \text{ and } F(i,0) & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

---

#### Algorithm 5 Robot coin collection

---

```
1: procedure ROBOTCOINCOLLECTION( $C[1..n, 1..m]$ )
2:    $F[1, 1] \leftarrow C[1, 1]$ 
3:   for  $j \leftarrow 2$  to  $m$  do
4:      $F[1, j] \leftarrow F[1, j-1] + C[1, j]$ 
5:   end for
6:   for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
7:      $F[i, 1] \leftarrow F[i-1, 1] + C[i, 1]$ 
8:     for  $j \leftarrow 2$  to  $m$  do
9:        $F[i, j] \leftarrow \max\{F[i-1, j], F[i, j-1]\} + C[i, j]$ 
10:    end for
11:  end for
12:  return  $F[n, m]$ 
13: end procedure
```

---

### 3. Masalah pengumpulan koin (3)

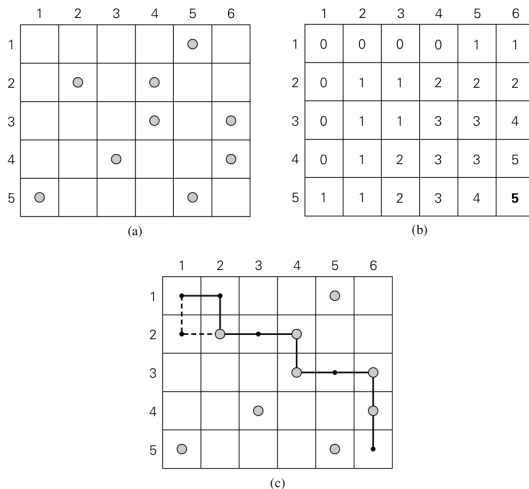


Figure: (a) Koin untuk dikumpulkan. (b) Hasil algoritma pemrograman dinamis. (c) Dua jalur untuk mengumpulkan 5 koin, jumlah koin maksimum yang mungkin.

## Bagian 3. Pemrograman dinamis pada permasalahan knapsack

# Knapsack problem (1)

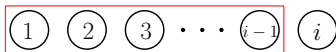
## Permasalahan

Diberikan  $n$  objek dengan bobot  $w_1, \dots, w_n$  dan nilai  $v_1, \dots, v_n$ , serta sebuah ransel berkapasitas  $W$ . Temukan sub-himpunan objek dengan nilai tertinggi dan memenuhi kapasitas ransel.

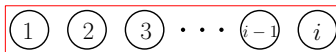
**Strategi:** Misalkan  $F(i, j)$  adalah nilai solusi optimal untuk instance yang ditentukan oleh  $i$  item pertama  $1 \leq i \leq n$ ,

- dengan bobot  $w_1, \dots, w_i$  dan nilai  $v_1, \dots, v_i$
- kapasitas ransel  $j$ , dengan  $1 \leq j \leq W$ .

Kita ingin memutuskan apakah objek  $i$  disertakan atau tidak.



$$F(i-1, j)$$



$$v_i + F(i-1, j - w_i)$$

## Knapsack problem (2)

$$F(i, j) = \begin{cases} \max\{F(i-1, j), v_i + F(i-1, j-w_i)\} & \text{jika } j - w_i \geq 0 \\ F(i-1, j), & \text{jika } j - w_i < 0 \end{cases}$$

dengan kondisi awal:

$$F(0, j) = 0 \text{ untuk } j \geq 0 \quad \text{dan} \quad F(i, 0) = 0 \text{ untuk } i \geq 0$$

**Tujuan:** untuk menemukan  $F(n, W)$ , yakni nilai maksimal subset dari  $n$  item yang diberikan yang sesuai dengan ransel kapasitas  $W$ ; beserta subset yang memenuhi nilai optimal tersebut.

		0	$j-w_i$	$j$	$W$
	0	0	0	0	0
	$i-1$	0	$F(i-1, j-w_i)$	$F(i-1, j)$	
$w_i, v_i$	$i$	0		$F(i, j)$	
	$n$	0			goal

Figure: Tabel untuk memecahkan masalah knapsack dengan pemrograman dinamis.

# Knapsack problem (3)

## Contoh

item	weight	value
1	2	\$12
2	1	\$10
3	3	\$20
4	2	\$15

capacity  $W = 5$

		capacity $j$						
		$i$	0	1	2	3	4	5
$w_1 = 2, v_1 = 12$	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	12	12	12	12	12
$w_2 = 1, v_2 = 10$	2	0	10	12	22	22	22	22
$w_3 = 3, v_3 = 20$	3	0	10	12	22	30	32	32
$w_4 = 2, v_4 = 15$	4	0	10	15	25	30	<b>37</b>	

Figure: Contoh penyelesaian instance masalah knapsack dengan algoritma pemrograman dinamis.

## Bagian 4. Fungsi memori (*memory functions*)

(studi kasus pada Knapsack problem)



# Prinsip fungsi memori

**Pada dasarnya, pemrograman dinamis memecahkan masalah yang memiliki hubungan perulangan.**

- Menggunakan perulangan secara langsung dalam algoritma rekursif memiliki kelemahan, yaitu kemungkinan untuk memecahkan sub-masalah umum berkali-kali, menghasilkan kompleksitas yang mencapai eksponensial.
- Teknik pemrograman dinamis memiliki kelemahan bahwa beberapa sub-masalah mungkin tidak perlu dipecahkan.

**Tujuan:** untuk mendapatkan solusi terbaik (optimal) dari kedua pendekatan, dimana semua sub-masalah yang diperlukan diselesaikan hanya sekali.

# Prinsip fungsi memori

- Teknik ini menggunakan pendekatan top-down, algoritma rekursif, dengan tabel solusi sub-masalah.
- Sebelum menentukan solusi secara rekursif, algoritma memeriksa apakah sub-masalah sudah diselesaikan dengan memeriksa tabel.
- Jika tabel memiliki nilai yang valid maka algoritma menggunakan nilai tabel yang lain, dilanjutkan dengan solusi rekursif.

Ingat kembali definisi  $F(i, j)$ , yakni nilai solusi optimal untuk instance yang ditentukan oleh  $i$  objek pertama dengan kapasitas knapsack  $j$ .

$$F(i, j) = \begin{cases} \max\{F(i-1, j), v_i + F(i-1, j - w_i)\} & \text{jika } j - w_i \geq 0 \\ F(i-1, j), & \text{jika } j - w_i < 0 \end{cases}$$

# Algoritma fungsi memori

---

## Algorithm 6 MF Knapsack

---

```
1: procedure MFK( $i, j$ )
2:   input:  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  menunjukkan jumlah item pertama yang telah diperhitungkan
   dan  $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  menunjukkan kapasitas ransel
3:   output: Nilai subset layak optimal dari item  $i$  pertama
4:   variables: variabel global array berbobot  $Wt[1..n]$ , nilai  $V[1..n]$ , dan tabel
    $F[0..n, 0..W]$  yang entri-entrinya diinisialisasi dengan -1 kecuali untuk baris 0 dan
   kolom 0 yang diinisialisasi dengan 0.

5:   if  $F[i, j] < 0$  then
6:     if  $j < Wt[i]$  then
7:        $value \leftarrow \text{MFK}(i - 1, j)$ 
8:     else
9:        $value \leftarrow \max\{\text{MFK}(i - 1, j), V[i] + \text{MFK}(i - 1, j - Wt[i])\}$ 
10:    end if
11:     $F[i, j] \leftarrow value$ 
12:  end if
13:  return  $F[i, j]$ 
14: end procedure
```

---

## Contoh fungsi memori

Mari terapkan prosedur MFK pada contoh sebelumnya:

item	weight	value
1	2	\$12
2	1	\$10
3	3	\$20
4	2	\$15

capacity  $W = 5$

		capacity $j$						
		$i$	0	1	2	3	4	5
$w_1 = 2, v_1 = 12$ $w_2 = 1, v_2 = 10$ $w_3 = 3, v_3 = 20$ $w_4 = 2, v_4 = 15$	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	12	12	12	12	12
	2	0	—	12	22	—	22	22
	3	0	—	—	22	—	32	32
	4	0	—	—	—	—	—	<b>37</b>

Figure: Contoh penyelesaian instance masalah knapsack dengan algoritma fungsi memori.

# Contoh fungsi memori

Implementasi algoritma langkah demi langkah adalah sebagai berikut:

- $N = 4, W = 5, w_1 = 2, w_2 = 1, w_3 = 3, w_4 = 2, v_1 = 12, v_2 = 10, v_3 = 20, v_4 = 15$
- $V[4, 5] = \max\{V[3, 5], 15 + V[3, 3]\}$  (since  $v_4 = 15, w_4 = 2, j = 15, w_4 < j \rightarrow$  apply 1st case)
- $V[3, 5] = \max\{V[2, 5], 20 + V[2, 2]\}$
- $V[3, 3] = \max\{V[2, 3], 20 + V[2, 0]\}$
- $V[2, 5] = \max\{V[1, 5], 10 + V[1, 4]\}$
- $V[2, 2] = \max\{V[1, 2], 10 + V[1, 1]\}$
- $V[2, 3] = \max\{V[1, 3], 10 + V[1, 2]\}$
- $V[2, 0] = V[1, 0] = 0$  (since  $w_2 = 1, j = 0, w_2 > j \rightarrow$  apply 2nd case)
- $V[1, 5] = \max\{V[0, 5], 12 + V[0, 3]\} = \max\{0, 12 + 0\} = 12$
- $V[1, 4] = \max\{V[0, 4], 12 + V[0, 2]\} = \max\{0, 12 + 0\} = 12$
- $V[1, 2] = \max\{V[0, 2], 12 + V[0, 0]\} = \max\{0, 12 + 0\} = 12$
- $V[1, 1] = V[0, 1] = 0$
- $V[1, 3] = \max\{V[0, 3], 12 + V[0, 1]\} = \max\{0, 12 + 0\} = 12$

Selanjutnya, lakukan substitusi mundur:

- $V[2, 3] = \max\{V[1, 3], 10 + V[1, 2]\} = \max\{12, 10 + 12\} = 22$
- $V[2, 2] = \max\{V[1, 2], 10 + V[1, 1]\} = \max\{12, 10 + 0\} = 12$
- $V[2, 5] = \max\{V[1, 5], 10 + V[1, 4]\} = \max\{12, 10 + 12\} = 22$
- $V[3, 3] = \max\{V[2, 3], 20 + V[2, 0]\} = \max\{22, 20 + 0\} = 22$
- $V[3, 5] = \max\{V[2, 5], 20 + V[2, 2]\} = \max\{22, 20 + 12\} = 32$
- $V[4, 5] = \max\{V[3, 5], 15 + V[3, 3]\} = \max\{32, 15 + 22\} = 37$

*end of slide...*