Aljabar Linier

[KOMS120301] - 2023/2024

3.2 - Algoritma Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 4 (September 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan mampu:

1. menerapkan algoritma eliminasi dan algoritma substitusi untuk menyelesaikan sistem linear dua variabel;
2. memahami ciri-ciri sistem persamaan linier yang berbentuk segitiga, bentuk eselon baris, atau bentuk eselon baris tereduksi.
3. memverifikasi jika sistem persamaan linier memiliki solusi tunggal, tidak memiliki solusi, atau memiliki banyak solusi tak terhingga.

Bagian 1: Algoritma untuk menyelesaikan sistem

sistem persamaan linier dalam **dua variabel**

1. Algoritma Eliminasi (1)

Diberikan SPL:

$$\begin{cases} L_1: & x - y = -4 \\ L_2: & 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Selesaikan SPL tersebut!

- Kalikan persamaan pertama dengan 2.

$$\begin{cases} 2L_1: & 2x - 2y = -8 \\ L_2: & 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- Eliminasi variabel y, dengan menambahkan dua persamaan.

$$2L_1 + L_2: \; 5x = 4 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{4}{5}$$

- Substitusi $x = \frac{4}{5}$ kembali ke L_1 atau L_2 untuk menemukan y.

$$x - y = -4 \;\Leftrightarrow\; y = x + 4 = \frac{4}{5} + 4 = \frac{24}{5}$$

1. Algoritma Eliminasi (2)

Asumsikan bahwa sistem yang diberikan memiliki solusi tunggal.

Input: Persamaan linier non-degenerasi L_1 dan L_2 dalam dua variabel.

Langkah 1: *Eliminasi maju*

- Kalikan setiap persamaan dengan konstanta s.t. koefisien yang dihasilkan dari satu variabel adalah sama (atau negatif dari yang lain).
- Kurangi (atau tambah) kedua persamaan untuk mengeliminasi salah satu variabel.

Langkah 2: *Substitusi mundur*

- Substitusikan nilai variabel ke persamaan sistem linier, untuk mendapatkan nilai variabel lainnya.

Diberikan:

$$\begin{cases} L_1 : & x - y = -4 \\ L_2 : & 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Selesaikan sistem berikut!

- Nyatakan x dalam y, dalam persamaan L_1.

$$x = y - 4 \tag{1}$$

- Substitusi nilai x dalam persamaan (1) ke L_2

$$3(y-4) + 2y = 12 \Leftrightarrow 5y = 24 \Leftrightarrow y = \frac{24}{5}$$

- Substitusikan $y = \frac{24}{5}$ ke persamaan (1)

$$x = \frac{24}{5} - 4 = \frac{4}{5}$$

Input: Persamaan linear non-degenerasi L_1 dan L_2.

Untuk penyederhanaan, misalkan variabelnya adalah x dan y.

Langkah 1:

- Nyatakan satu variabel, misalnya x, sebagai persamaan dalam y dalam persamaan L_1. Kemudian substitusikan nilai x ke dalam L_1 ke L_2, untuk mendapatkan nilai y.

Langkah 2:

- Substitusikan nilai variabel y ke persamaan L_1 atau L_2, untuk mendapatkan nilai variabel x.

Latihan

Selesaikan sistem linear berikut menggunakan algoritma eliminasi dan substitusi.

1. Selesaikan:

$$\begin{cases} L_1: \; x - 3y = 4 \\ L_2: \; -2x + 6y = 5 \end{cases}$$

2. Selesaikan:

$$\begin{cases} L_1: \; x - 3y = 4 \\ L_2: \; -2x + 6y = -8 \end{cases}$$

Latihan solution (1)

Pada Latihan 1, kita dapat menyederhanakan persamaan kedua, dan memperoleh:

$$\begin{cases} L_1 : \; x - 3y = 4 \\ L_2 : \; x - 3y = 5 \end{cases}$$

Hasilnya adalah $4 = 5$ (tidak benar). Jadi, tidak ada nilai x dan y yang memenuhi sistem.

Latihan solusi (2)

Pada Latihan 2, dapat disederhanakan persamaan kedua, dan diperoleh:

$$\begin{cases} L_1: \; x - 3y = 4 \\ L_2: \; x - 3y = 4 \end{cases}$$

Kedua persamaan linier tersebut ekuivalen, yang berarti bahwa garis-garis yang mewakilinya berpotongan (berpotongan di semua titik pada sistem koordinat), dan semua titik pada garis memenuhi kedua persamaan.

Bagaimana cara merepresentasikan himpunan solusi?

$$x - 3y = 4$$

Misalkan $y = t$ untuk $t \in \mathbb{R}$. Maka $x = 3y + 4 = 3t + 4$.

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x = 3t + 4, y = t, \text{ where } t \in \mathbb{R}\}$

Bagian 2: Sistem dalam bentuk segitiga dan bentuk eselon (*echelon form*)

Sistem berikut dikatakan dalam bentuk segitiga.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 9 \\ \quad\quad 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad\quad\quad\quad 7x_3 - x_4 = 3 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 2x_4 = 8 \end{cases} \tag{1}$$

Ingat bahwa **matriks segitiga (triangular matrix)** memiliki salah satu bentuk berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Apa yang bisa kamu amati?

Suatu sistem persamaan linear berbentuk segitiga jika matriks koefisien yang bersesuaian adalah matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah, yaitu:

1. Matriks adalah matriks persegi;
2. Entri di bawah diagonal utama (atau, di atas diagonal utama, untuk matriks segitiga atas) adalah 0;

Remark:

- Dalam hal ini, ingatlah bahwa nilai di diagonal utama tidak ditentukan (boleh bernilai 0)

Sistem penyelesaian dalam bentuk segitiga (*atas*)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 9 \\ \qquad\quad 5x_2 - \ x_3 + 3x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 7x_3 - \ x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x_4 = 8 \end{cases} \tag{2}$$

Algoritma untuk menyelesaikan sistem:

1. Selesaikan persamaan terakhir untuk mendapatkan x_4;
2. Substitusikan x_4 ke persamaan ketiga untuk mendapatkan x_3;
3. Substitusikan x_3 dan x_4 ke persamaan kedua untuk mendapatkan x_2;
4. Substitusikan x_2, x_3, dan x_4 ke persamaan pertama untuk mendapatkan x_1.

Latihan: Temukan solusi dari sistem!

- Dari persamaan terakhir, kita mendapatkan: $x_4 = 4$
- Dari persamaan ketiga:

$$x_3 = \frac{x_4 + 3}{7} = \frac{4 + 3}{7} = 1$$

- Dari persamaan kedua:

$$x_2 = \frac{x_3 - 3x_4 + 1}{5} = \frac{1 - 3(4) + 1}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

- Dari persamaan pertama:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 9}{2} = \frac{3(-2) - 5(1) + 2(4) + 9}{2} \\ &= \frac{-6 - 5 + 8 + 9}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Jadi, solusinya adalah: $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 4$

Nah, bagaimana jika matriks koefisiennya bukan matriks persegi ???

$$
\begin{cases}
2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 9 \\
2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 1 \\
x_3 - x_4 = 3
\end{cases}
$$

Sistem dikatakan dalam bentuk eselon (*echelon form*), yakni:

1. Semua baris yang hanya terdiri dari nol ada di bagian bawah.
2. Koefisien paling depan (juga disebut pivot, atau koefesien utama) dari baris bukan nol selalu tepat di sebelah kanan koefisien utama dari baris di atasnya.

Karakteristik

- Variabel utama (x_1, x_2, x_3) dalam sistem disebut pivot;
- Variabel lainnya (x_4 dan x_5) adalah variabel free.

Bentuk eselon (*echelon form*) (bentuk umum)

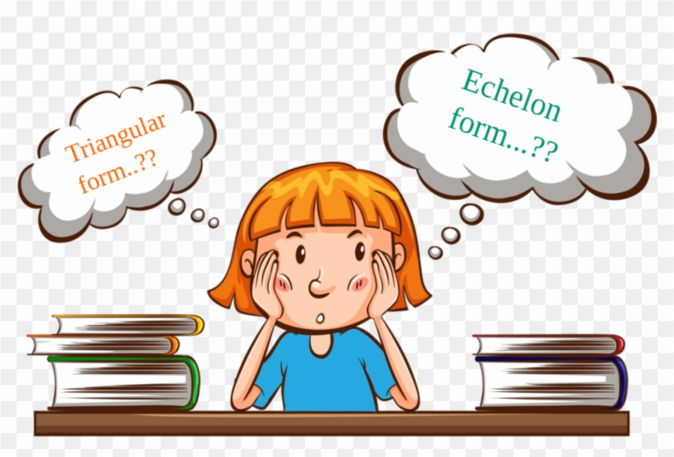
$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2j_2}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r
\end{aligned}
$$

dimana $1 < j_2 < \cdots < j_r$ and $a_{11}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$.

Variabel **pivot** adalah: $x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$

Catatan: agar sistem memiliki solusi, maka haruslah $r \leq n$.

Lalu...apakah ada perbedaan antara bentuk segitiga (*triangular form*) dan bentuk eselon (*echelon form*)?



Klarifikasi

Matriks berikut adalah dalam bentuk **eselon, tetapi bukan segitiga**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks berikut adalah dalam bentuk **segitiga tetapi tidak eselon**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks berikut adalah dalam bentuk **eselon dan segitiga** (KIRI), dan **bukan eselon dan bukan segitiga** (KANAN)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Catatan. Untuk matriks bujur sangkar non-tunggal, "baris eselon" dan "segitiga atas" adalah ekuivalen.

Latihan

Berikan sebuah contoh matriks yang merupakan:

- bentuk **eselon, tetapi bukan segitiga**
- bentuk **segitiga tetapi tidak eselon**
- bentuk **eselon dan segitiga**
- **bukan eselon dan bukan segitiga**

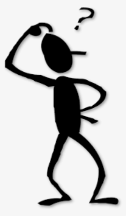
Bagian 3: Bagaimana cara menentukan banyaknya penyelesaian?

Bagaimana cara menentukan banyaknya penyelesaian?

Diberikan sistem persamaan linier dengan *r* persamaan dengan *n* variabel.

Tentukan kondisi sedemikian sehingga:

- sistem memiliki **solusi tunggal**?
- sistem **tidak memiliki solusi**?
- sistem memiliki **tak hingga banyaknya solusi**?



Bagaimana cara menentukan banyaknya penyelesaian?

Diberikan sistem persamaan linier dengan r persamaan dan n variabel.

Maka:

- sistem memiliki **solusi tunggal**
  - when $r = n$ (dalam hal ini, tidak ada persamaan yang merupakan kombinasi linier dari persamaan lain)
- sistem **tidak memiliki solusi**?
  - ketika $r > n$, dan tidak ada persamaan yang merupakan kombinasi linier dari persamaan lain
- sistem memiliki **tak hingga banyaknya solusi**?
  - ketika $r < n$

Bagaimana cara menulis solusi jika jumlahnya tak terhingga? *(jika $r < n$)*

Diberikan:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 9 \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

- Variabel pivot: x_1, x_2, x_3
- Variabel bebas: x_4, x_5

Algoritma untuk penyelesaian SPL:

1. Tetapkan *parameter* ke variabel bebas;

$$x_4 = a \quad \text{and} \quad x_5 = b$$

2. Substitusi variabel kembali untuk mendapatkan nilai variabel pivot.

- Dari persamaan ketiga:

$$x_3 = x_4 + 3 = a + 3$$

- Dari persamaan kedua:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 1 \\ &= 2(a+3) - 4a + 2b + 1 = -2a + 2b + 7 \end{aligned}$$

- Dari persamaan pertama:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 + 9 \\ &= 3(-2a + 2b + 7) - 5(a+3) + 2a - b + 9 \\ &= -9a + 5b + 15 \end{aligned}$$

Himpunan solusi:

$$\{-9a + 5b + 15, -2a + 2b + 7, a + 3, a, b\}$$

Gunakan substitusi kembali untuk menyelesaikan sistem, dan dapatkan variabel pivot.

$$\begin{cases} x_1 &= 4x_2 - 5x_3 + 2_4 - x_5 - 9 \\ x_2 &= 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 + 1 \\ x_3 &= x_4 + 3 \\ x_4 &= \text{free variable} \\ x_5 &= \text{free variable} \end{cases}$$

Himpunan solusi:

$$\{(4x_2 - 5x_3 + 2_4 - x_5 - 9),\ (2x_3 - 4x_4 + 2x_5 + 1),\ (x_4 + 3),\ x_4,\ x_5\}$$

Bagian 4: Bentuk eselon baris tereduksi (*reduced row echelon form*)

Bentuk eselon baris tereduksi (*reduced row echelon form*)

Suatu matriks merupakan bentuk baris eselon tereduksi (*reduced row echelon form*) (juga disebut row canonical form), jika memenuhi kondisi berikut ini:

1. Bentuk eselon baris (*row echelon form*).
2. Entri utama di setiap baris bukan nol adalah 1 (disebut *leading* 1).
3. Setiap kolom yang berisi *leading* 1 memiliki nol di semua entri lainnya.

Matriks manakah yang berada pada baris tereduksi bentuk eselon (*eselon form*)?

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bagaimana cara mengubah matriks koefisien menjadi bentuk baris segitiga atau (diperkecil) bentuk eselon (*bentuk eselon*)?

Terapkan **operasi baris elementer**.

Pada kuliah berikutnya, kita akan mempelajari

cara menyelesaikan sistem persamaan linier dengan mentransformasikan matriks koefisien ke dalam bentuk eselon baris tereduksi (reduced row echelon form).

bersambung...