Matematika Diskrit

[KOMS119602] - 2022/2023

9.3 - Kombinasi

Dewi Sintiari

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 10 (Oktober 2022)

Bagian 6: Kombinasi

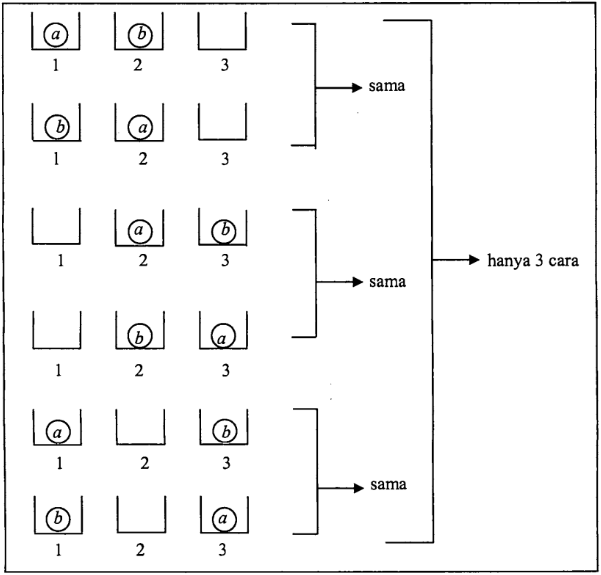
Contoh motivasi

Misalkan ada 2 bola berwarna merah, yaitu bola a dan bola b, serta 3 kotak.

Kita ingin memasukkan bola ke dalam kotak, dimana setiap kotak memuat paling banyak 1 bola.

> *Tentukan banyaknya cara menempatkan bola ke dalam kotak-kotak tersebut.*

Solusi



a
b
1
2
3
b
a
1
2
3
sama
a
b
1
2
3
b
a
1
2
3
sama
hanya 3 cara
a
b
1
2
3
b
a
1
2
3
sama

Kaitan kombinasi dengan permutasi

Apa yang membedakan permutasi dan kombinasi?

- ...
- ...

Aturan kombinasi

Banyaknya cara memasukkan bola:

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Mengapa $\frac{P(3,2)}{2}$ *?*

Aturan kombinasi

Banyaknya cara memasukkan bola:

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Mengapa $\frac{P(3,2)}{2}$ *?*

Bagaimana jika terdapat 3 bola dan 10 kotak? Ada berapa cara berbeda untuk meletakkan bola ke dalam kotak?

Aturan kombinasi

Misalkan terdapat r bola berwarna sama dan n kotak. Berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola ke dalam kotak?

Aturan kombinasi

Misalkan terdapat r bola berwarna sama dan n kotak. Berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola ke dalam kotak?

Dalam hal ini haruslah $r \leq n$. *Mengapa?*

Banyaknya cara adalah:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Ini dinotasikan dengan:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Artinya kita mengambil r objek dari n objek.

Aturan kombinasi

Misalkan terdapat r bola berwarna sama dan n kotak. Berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola ke dalam kotak?

Dalam hal ini haruslah $r \leq n$. *Mengapa?*

Banyaknya cara adalah:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Ini dinotasikan dengan:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Artinya kita mengambil r objek dari n objek.

Hubungan permutasi dan kombinasi dapat dituliskan sebagai:

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot r!$$

Latihan 1

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan banyaknya himpunan bagian dengan dua elemen yang dapat dibentuk dari himpunan A.

Solusi:

$$\left.\begin{array}{l}\{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\}\end{array}\right\rangle \quad \text{3 buah}$$

Latihan 2: permutasi atau kombinasi?

Tentukan banyaknya cara memilih 3 dari 4 elemen himpunan $A = \{a, b, c, d\}$.

Solusi:

Himpunan bagian A dengan 3 elemen	Permutasi setiap himpunan bagian
$\{a, b, c\}$	$abc, acb, bca, bac, cab, cba$
$\{a, b, d\}$	$abd, adb, bda, bad, dab, dba$
$\{a, c, d\}$	$acd, adc, cda, cad, dac, dca$
$\{b, c, d\}$	$bcd, bdc, cdb, cbd, dbc, dcb$

Banyaknya cara memilih 3 elemen dari 4 elemen pada himpunan adalah:

$$C(4, 3) = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4$$

Latihan 3: permutasi atau kombinasi?

Tentukan banyaknya cara menyusun menu nasi goreng dalam seminggu.

Solusi:

- Nasi goreng dapat diasumsikan sebagai bola;
- Hari dalam seminggu dapat diasumsikan sebagai kotak.

Banyaknya cara berbeda adalah:

$$C(7,3) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

Bagian 7: Permutasi & kombinasi bentuk umum

Contoh motivasi

Misalkan diberikan 10 bola, sebagai berikut:

- 2 bola berwarna merah;
- 3 bola berwarna hijau;
- 5 bola berwarna kuning.

Tentukan banyaknya cara memasukkan 10 bola tersebut ke dalam 10 kotak.

Solusi:

Solusi contoh motivasi

Jika semua bola berbeda, maka bola-bola dapat dimasukkan dalam:

$$P(10, 10) = 10! \quad \text{cara}$$

Jika setiap bola dianggap berbeda, maka:

- Bola merah dapat dimasukkan dalam 2! cara
- Bola hijau dapat dimasukkan dalam 3! cara
- Bola kuning dapat dimasukkan dalam 5! cara

Maka, banyaknya cara memasukkan 10 bola ke dalam 10 kotak adalah:

$$\frac{P(10, 10)}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$$

Perumuman aturan

Jika terdapat bola-bola sebagai berikut:

- n_1 bola berwarna 1;
- n_2 bola berwarna 2;
- $\ldots$
- n_k bola berwarna k;

dimana: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Maka banyaknya cara untuk memasukkan bola ke dalam kotak adalah:

$$P(n_1; n_2; \cdots; n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

Latihan dapat dilihat pada Conoh 6.36 s.d. 6.39 pada Buku Referensi Matematika Diskrit (oleh Rinaldi Munir)...

Bagian 8: Kombinasi dengan perulangan

Contoh motivasi

Diberikan r bola berwarna **sama** dan n kotak, berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola-bola ke dalam kotak jika:

> *setiap kotak boleh diisi dengan* **lebih dari satu** *bola.*

Contoh motivasi

Diberikan r bola berwarna **sama** dan n kotak, berapakah banyaknya cara berbeda untuk memasukkan bola-bola ke dalam kotak jika:

> *setiap kotak boleh diisi dengan* **lebih dari satu** *bola.*

Solusi:

Banyaknya cara adalah:

$$C(n+r-1,r$$

Mengapa?

> *Ini dapat dilihat sebagai banyaknya cara menaruh* $(n-1)$ *sekat di antara* r *bola yang ada.*

Latihan dapat dilihat pada Conoh 6.40 s.d. 6.45 pada Buku Referensi Matematika Diskrit (oleh Rinaldi Munir)...

Bagian 9: Koefisien binomial

Contoh motivasi

Bagaimanakah cara menjabarkan bentuk:

$$(x + y)^n$$

Contoh motivasi

Bagaimanakah cara menjabarkan bentuk:

$$(x+y)^n$$

Solusi:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

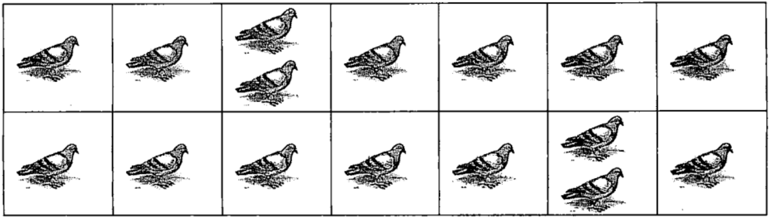
latihan dapat dilihat pada Conoh 6.46 s.d. 6.48 pada Buku Referensi Matematika Diskrit (oleh Rinaldi Munir)...

Bagian 9: Prinsip sarang merpati (*pigeon hole*)

Konsep "Prinsip Sarang Merpati"

Teorema (Prinsip Sarang Merpati)

Jika $(n + 1)$ *objek ditempatkan dalam n kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek*



latihan dapat dilihat pada Conoh 6.49 s.d. 6.53 pada Buku Referensi Matematika Diskrit (oleh Rinaldi Munir)...

end of slide...