Linear Algebra

[KOMS120301] - 2023/2024

11.1 - Hubungan Antar Vektor di Ruang Vektor

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 11 (November 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan karakteristik sub-ruang vektor dan kaitannya dengan kombinasi linier;
2. memverifikasi apakah sebuah himpunan vektor merentang suatu ruang vektor atau tidak;
3. memverifikasi apakah sebuah himpunan vektor pada suatu ruang vektor independen/bergantung linier atau tidak.

Bagian 1: Sub-ruang vektor dan kombinasi linier

Kombinasi linier

Ingat kembali bahwa kombinasi linier vektor-vektor didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan $\mathbf{w} \in V$. Maka w adalah kombinasi linear dari vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ jika $\mathbf{w}$ dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

dimana $k_1, k_2, \ldots, kn \in \mathbb{R}$.

Contoh

Misal $\mathbf{v}_1 = (3, 2, -1)$ *dan* $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 3)$. *Maka:*

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 2(3, 2, -1) + 3(2, -4, 3) = (12, -8, 7)$$

adalah kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1$ *dan* $\mathbf{v}_2$.

Mendefinisikan kombinasi linier dari vektor

Diberikan sebuah vektor $(5, 9, 5)$. Cara merepresentasikan vektor sebagai kombinasi linier dari vektor:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4),\ \mathbf{v} = (1, -1, 3),\ \text{dan } \mathbf{w} = (3, 2, 5)$$

Solusi: Misalkan $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ sedemikian rupa sehingga:

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem linier:

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + 3k_3 = 3 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 9 \\ 4k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 5 \end{cases}$$

Dengan eliminasi Gauss, diperoleh:

$$k_1 = 3,\ k_2 = -4,\ k_3 = 2$$

Kombinasi linier membentuk subruang

Teorema

Jika $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ *adalah himpunan vektor dalam ruang vektor* V*. Kemudian:*

1. *Himpunan* W *yang berisi semua kombinasi linier dari vektor-vektor dalam* S *adalah subruang dari* V*.*
2. W *adalah subruang vektor terkecil dari* V *yang berisi vektor dalam* S*, yaitu, semua subruang lain yang berisi vektor juga berisi* W*.*

Bagian 2: Himpunan merentang

- Misalkan V adalah ruang vektor, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$.
- Misalkan W madalah subruang dari V s.t. $\forall \mathbf{w} \in W$,

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_3\mathbf{v}_3$$

di mana $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

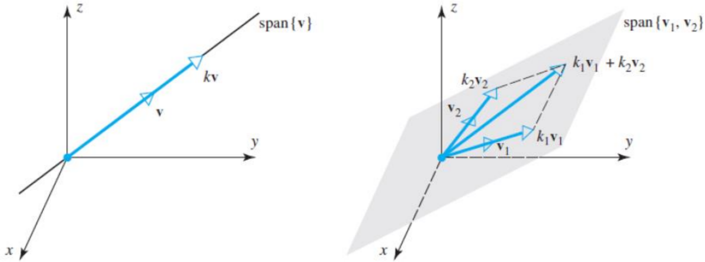
Maka, $= \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}\}$ dikatakan merentang W.
S disebut himpunan merentang, dan dinotasikan sebagai:

$$span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}\} \quad \text{or} \quad span(S)$$

Contoh: *Ruang yang direntang oleh satu vektor*

Misalkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ adalah vektor-vektor yang *tak-kolinier* di $\mathbb{R}^3$, dengan titik awalnya di titik asal, maka:

- *span*$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ terdiri dari semua kombinasi linier $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$, adalah bidang yang ditentukan oleh vektor $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$.
- jika $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ adalah sebuah vektor di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, maka *span*$\{\mathbf{v}\}$ yang seluruhnya merupakan kelipatan skalar $k\mathbf{v}$, adalah garisnya ditentukan oleh $\mathbf{v}$.



(*a*) Span$\{\mathbf{v}\}$ is the line through the origin determined by $\mathbf{v}$.

(*b*) Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is the plane through the origin determined by $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

Latihan 1

Rentang vektor satuan standar berikut $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0),\ \mathbf{j} = (0, 1, 0),\ \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Hal ini karena, setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linier:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Dalam hal ini, $\mathbb{R}^3 = span\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Latihan 2

Polinom $1, x, x^2, \ldots, x^n$ P_n *merentang ruang vektor.*

Hal ini karena, setiap polinomial $\mathbf{p} \in P_n$ dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_n x^n$$

yang merupakan kombinasi linier dari yang merupakan kombinasi linier dari $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Dalam hal ini, $P_n = span\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Latihan 3

Tentukan apakah vektor-vektor berikut ini merentang $\mathbb{R}^3$ *!*

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3),\ \mathbf{v}_2 = (4, 1, 2),\ \mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$$

Misal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$, dan $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

Jika himpunan vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merentang di $\mathbb{R}^3$, maka semestinya:

$$(u_1, u_2, u_3) = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

Kita akan memeriksa apakah sistem linier berikut memiliki solusi.

$$2k_1 + 4k_2 + 8k_3 = u_1, \quad -k_1 + k_2 - k_3 = u_2, \quad 3k_1 + 2k_2 + 8k_3 = u_3$$

Sistem linier memiliki matriks koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 20 - 40 = 0$$

Oleh karena itu, tidak ada solusi untuk sistem linier, artinya $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tidak mencakup $\mathbb{R}^3$.

Bagian 3: Independensi linier

Misalkan V adalah ruang vektor. Himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ dikatakan independen linier jika dan hanya jika kombinasi liniernya

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \tag{1}$$

memiliki tepatnya satu solusi, yang merupakan solusi trivial:

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ \ldots, k_n = 0$$

Sebaliknya, himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ dikatakan tidak independen linier atau dependen linier, jika kombinasi linier (1) memiliki solusi non-trivial (yaitu, solusi selain $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ \ldots, k_n = 0$).

Contoh himpunan independen/dependen linier (1)

Vektor-vektor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, *dan* $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ *adalah vektor-vektor bebas linier pada* $\mathbb{R}^3$*.*

Mengapa?

Perhatikan bahwa untuk skalar $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, kita mempunyai:
$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$,

yang ekuivalen dengan:

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \;\Leftrightarrow\; (k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Jelasnya, tidak ada solusi selain $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, dan $k_3 = 0$.

Artinya $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bebas linier.

Dengan cara serupa kita dapat menunjukkan bahwa:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\; \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\; \text{dan } \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Contoh himpunan independen/dependen linier (2)

Tentukan apakah vektor:

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3),\ \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1), \quad \text{dan} \quad \mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$$

bebas linier atau tidak!

Solusi:

Perhatikan bahwa: $3\mathbf{v}_1 + v_2 - v_3 = \mathbf{0}$.

Ini berarti bahwa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bebas linier.

Contoh himpunan independen/dependen linier (3)

Tentukan apakah polinomial:

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \text{dan} \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

bebas linier atau tidak!

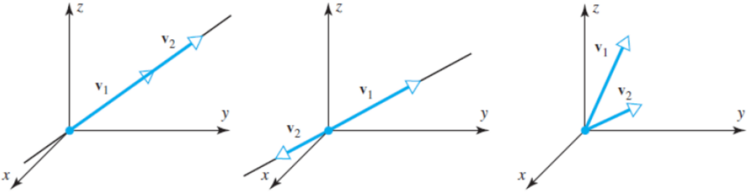
Solusi:

Perhatikan bahwa $3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$.

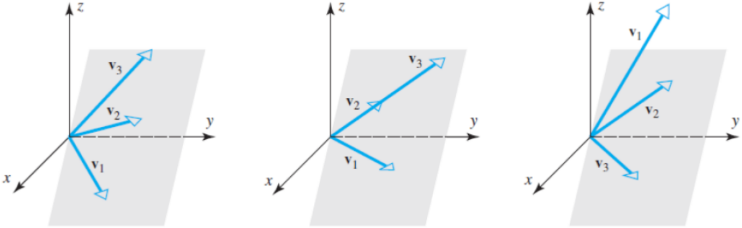
Oleh karena itu, vektor-vektornya bergantung linier.

Bagian 3: Interpretasi geometris

Interpretasi geometris dari independensi linier dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$



(a) Linearly dependent (b) Linearly dependent (c) Linearly independent



(a) Linearly dependent (b) Linearly dependent (c) Linearly independent

Tentukan ketergantungan linier dari vektor:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \;\; \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \text{dan} \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

Solusi:

Kita periksa apakah persamaan vektor $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ memiliki solusi di $\mathbb{R}$.
Persamaannya setara dengan:

$$\begin{aligned} k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) &= (0, 0, 0) \\ (k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Selesaikan sistem:

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0 \\ 2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Memecahkan sistem menggunakan eliminasi Gaussian, kita mendapatkan:

$$k_1 = -\frac{1}{2}t, \;\; k_2 = -\frac{1}{2}t, \;\; k_3 = t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Oleh karena itu, sistem memiliki solusi non-trivial, sehingga vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bergantung linier.

Tunjukkan bahwa polinomial membentuk himpunan vektor bebas linier dalam P_n.

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

Solusi:

Misalkan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sedemikian rupa sehingga:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \mathbf{0}$$

Kita harus menunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari polinomial untuk $x \in (-\infty, \infty)$ is:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Dari konsep Aljabar, kita tahu bahwa:

Teorema

Setiap polinomial derajat bukan nol n memiliki paling banyak n akar.

Ini mengakibatkan bahwa $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$ (atau, polinomialnya adalah polinomial nol).

Jika tidak, itu adalah polinomial bukan nol, memiliki jumlah akar tak terbatas (yaitu, $x \in (-\infty, \infty)$), bertentangan dengan teorema.

bersambung...