

# 05 - Algoritma Rekursif

[KOMS120403]

Desain dan Analisis Algoritma (2022/2023)

Dewi Sintiar

Prodi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 5 (April 2023)

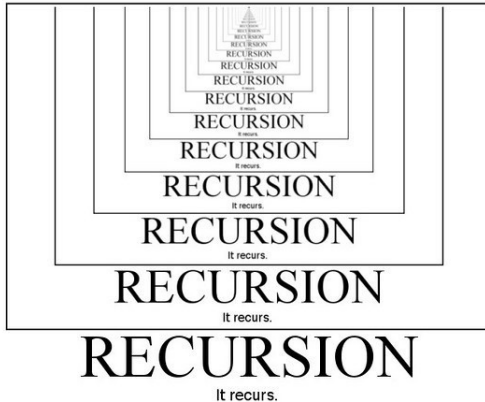
# Daftar isi

- Prinsip algoritma rekursif
- Beberapa contoh algoritma rekursif
  - ① Menghitung faktorial
  - ② Membuktikan kebenaran FAKTORIAL dengan induksi
  - ③ Menemukan Elemen Maksimum dari Array
  - ④ Menghitung jumlah elemen dalam array
  - ⑤ Menghitung maks secara rekursif
- Masalah Menara Hanoi
- Algoritma pencarian biner
- Perpangkatan rekursif
- *Redundansi* dalam algoritma rekursif
- Deret Fibonacci
- Kelebihan dan kekurangan dari algoritma rekursif

# Tujuan pembelajaran

Anda diharapkan mampu untuk:

- 1 Menjelaskan prinsip algoritma rekursif
- 2 Menerapkan algoritma rekursif untuk penyelesaian masalah algoritmik
- 3 Menganalisis kelebihan dan kekurangan algoritma rekursif
- 4 Memutuskan kapan menerapkan algoritma rekursif untuk menyelesaikan masalah algoritmik



Apa itu **rekursi** atau **algoritma rekursif**?

# Bagian 1. Prinsip algoritma rekursif

# Prinsip algoritma rekursif

**Algoritma rekursif** adalah sebuah algoritma yang 'memanggil' dirinya sendiri dengan nilai input "lebih kecil (atau lebih sederhana)", dimana output (untuk input yang diberikan) diperoleh berdasarkan output dari input yang lebih kecil (atau lebih sederhana) tersebut.

## Karakteristik algoritma rekursif:

- 1 Algoritma memanggil dirinya secara rekursif
- 2 Algoritma memiliki kasus dasar (*base case*)
- 3 Algoritma mengubah *state*-nya dan bergerak menuju *base-case*.

**Base case** adalah kondisi yang memungkinkan algoritma berhenti berulang: kasus dasar biasanya merupakan masalah yang cukup kecil untuk diselesaikan secara langsung.

**Perubahan *state*** berarti bahwa beberapa data yang digunakan algoritma diubah. Biasanya data yang mewakili masalah kita menjadi lebih kecil.

# Perbedaan Rekursi dan Iterasi

**Iterasi:** Suatu fungsi yang mengulangi proses yang ditentukan sampai terdapat *stopping condition*. Ini biasanya dilakukan melalui perulangan, seperti perulangan *for* atau *while* dengan *counter* dan pernyataan komparatif yang membentuk kondisi yang akan gagal. Perulangan iterasi secara *infinite* (tak terbatas) terjadi ketika *stopping condition* tidak pernah terpenuhi.

**Rekursi:** Alih-alih menjalankan proses tertentu di dalam fungsi, fungsi tersebut memanggil dirinya berulang kali hingga kondisi tertentu terpenuhi (kondisi ini menjadi kasus dasar). Kasus dasar secara eksplisit dinyatakan untuk mengembalikan nilai tertentu ketika kondisi tertentu terpenuhi. Loop rekursif yang berulang secara *infinite* terjadi ketika fungsi tidak mengurangi inputnya, sehingga tidak menuju kasus dasarnya (*base case*).

## Bagian 2. Contoh sederhana algoritma rekursif



## 2.1. Komputasi faktorial

## 2.1 - Komputasi faktorial (1): Pernyataan masalah

Diberikan formula faktorial:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Rumusnya dapat dinyatakan secara rekursif:

$$n! = \begin{cases} n \times (n - 1)!, & \text{if } n > 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

## 2.1 - Komputasi faktorial (2): Pseudocode

---

### Algorithm 1 Factorial of a number

---

```
1: procedure FACTORIAL( $n$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:     return 1
4:   else
5:     temp = FACTORIAL( $n - 1$ )
6:     return  $n * \text{temp}$ 
7:   end if
8: end procedure
```

---

- Apakah *base case*-nya?
- Deskripsikan *change-of-state*-nya!
- Berapakah kompleksitasnya?

## 2.1 - Komputasi faktorial (2): Pseudocode

---

### Algorithm 2 Factorial of a number

---

```
1: procedure FACTORIAL( $n$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:     return 1
4:   else
5:     temp = FACTORIAL( $n - 1$ )
6:     return  $n * \text{temp}$ 
7:   end if
8: end procedure
```

---

- Apakah *base case*-nya?  $n = 1$
- Deskripsikan *change-of-state*-nya! nilai  $n$  menurun
- Berapakah kompleksitasnya?  $\mathcal{O}(n)$

## 2.1 - Komputasi faktorial (3): Diagram

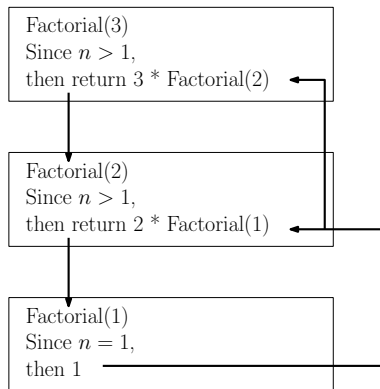


Figure: Ilustrasi algoritma rekursif FACTORIAL dimana  $n = 3$

## 2.1 - Komputasi faktorial (4): Pembuktian kebenaran dengan induksi

- **Basis induksi:** dari baris ke-1, kita melihat bahwa fungsi bernilai benar untuk  $n = 1$ .
- **Hipotesis:** misalkan fungsi bernilai benar untuk suatu input berukuran  $n = m$ , untuk suatu integer  $m \geq 1$ .
- **Tahap induksi:** Kita buktikan bahwa fungsi tersebut bernilai benar ketika dipanggil dengan input  $n = m + 1$ . Berdasarkan hipotesis, kita tahu bahwa panggilan rekursif bekerja dengan benar untuk  $n = m$  dan memberikan hasil  $m!$ .

Selanjutnya, jika dikalikan dengan  $n = m + 1$ , maka menghasilkan  $(m + 1)!$ . Dan ini adalah nilai yang menjadi output program, dan merupakan nilai yang benar.

## 2.2. Menemukan elemen maksimum dari array

## 2.2 - Menemukan elemen maksimum dari array (1)

Untuk menghitung nilai maks elemen  $n$  untuk  $n > 1$  secara rekursif:

- Hitung maks dari  $n - 1$  elemen
- Bandingkan dengan elemen terakhir untuk menemukan seluruh maks



## 2.2 - Menemukan elemen maksimum dari array (1)

Untuk menghitung nilai maks elemen  $n$  untuk  $n > 1$  secara rekursif:

- Hitung maks dari  $n - 1$  elemen
- Bandingkan dengan elemen terakhir untuk menemukan seluruh maks

---

### Algorithm 4 Finding maximum of an array

---

```
1: procedure MAX( $A[0..n-1]$ , int  $n$ )
2:   if  $n = 1$  then return  $A[0]$ 
3:   else
4:      $T = \text{MAX}(A, n - 1)$ 
5:     if  $T < A[n - 1]$  then
6:       return  $A[n - 1]$ 
7:     else
8:       return  $T$ 
9:     end if
10:  end if
11: end procedure
```

---

## 2.2 - Menemukan elemen maksimum dari array (2)

### Tugas:

- Hitunglah kompleksitas algoritma di atas!
- Periksalah kebenaran algoritma di atas!

## 2.3. Menghitung jumlah elemen pada array

## 2.3 - Menghitung jumlah elemen pada array (1)

**Permasalahan:** Diberikan sebuah array dari  $n$  elemen  $A[0..n-1]$ . Kita ingin menghitung nilai dari:  $S = \sum_{i=0}^{n-1} A[i]$

---

### Algorithm 5 Sum of an array

---

```
1: procedure SUM( $A[0..n]$ , int  $n$ )
2:   if  $n = 1$  then return  $A[0]$ 
3:   else
4:      $S = \text{SUM}(A, n - 1)$ 
5:      $S = S + A[n - 1]$ 
6:     if  $T < A[n - 1]$  then
7:       return  $S$ 
8:     end if
9:   end if
10: end procedure
```

---

## 2.3 - Menghitung jumlah elemen pada array (2)

### Tugas:

- Hitunglah kompleksitas algoritma di atas!
- Periksalah kebenaran algoritma di atas!

## 2.4. Recursive MAX

## 2.4. Recursive MAX, metode kedua (1)

**Permasalahan:** Diberikan array  $A$  dari  $n$  elemen, kita bertujuan untuk menemukan elemen dengan nilai maksimum array.

**metode:**

- 1 Bagilah array menjadi dua bagian sub-array, yaitu sub-array **Left** dan sub-array **Right**.
- 2 Temukan maks dari setiap sub-array.
- 3 Bandingkan nilai maksimum array kiri dan array kanan.
- 4 Mengembalikan maksimum dari dua nilai.

## 2.4. Recursive MAX, metode kedua (2)

---

### Algorithm 6 Finding max of an array

---

```
1: procedure FINDMAX( $A[i..j]$ ,  $n$ )                                ▷  $i, j$  are respectively the index of start, end of  $A$ 
2:   if  $n = 1$  then return  $A[S]$ 
3:   end if
4:    $m = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$ 
5:    $T_1 = \text{FINDMAX}(A[i..m], \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$                                 ▷ Recursive call the left sub-array
6:    $T_2 = \text{FINDMAX}(A[(m+1)..j], n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$                     ▷ Rec. call right sub-array
7:   if  $T_1 \geq T_2$  then return  $T_1$                                 ▷ Compare the two max elements
8:   else return  $T_2$ 
9:   end if
10: end procedure
```

---

**Catatan.** Fungsi *floor*  $\lfloor x \rfloor$  berarti bilangan bulat terbesar yang  $\leq x$ ;  
contoh:  $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$



## 2.4. Recursive MAX, metode kedua (3)

**Analisis kompleksitas:** Kasus khusus ketika  $n = 2^k$

Misalkan  $f(n)$ : jumlah perbandingan kunci untuk menemukan maks dari  $n$ -array, dengan  $n = 2^k$  untuk beberapa bilangan bulat positif  $k$ . Sehingga:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1 + 2f(n/2), & n \geq 2 \end{cases}$$

Dengan substitusi berulang:

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 + 2f(n/2) \\ &= 1 + 2[1 + 2f(n/4)] = 1 + 2 + 2f(n/4) \\ &= 1 + 2 + 4 + 8f(n/4) \\ &\vdots \\ &= 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} + 2^k f(n/2^k) \\ &= 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} \\ &= 2^k - 1 / (2 - 1) = 2^k - 1 \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

## 2.4. Recursive MAX, metode kedua (4)

Misal  $f(n)$ : banyaknya perbandingan kunci untuk menemukan maksimum  $n$ -array, dengan  $n = 2^k$  untuk beberapa  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

**Analisis kompleksitas:** Untuk bilangan bulat  $n$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & n \geq 2 \end{cases}$$

**Buktikan bahwa:**

Dengan induksi, diperoleh  $f(n) = n - 1$ . Coba Anda jelaskan bagaimana hasil ini diperoleh dengan menggunakan induksi?

# Bagian 3. Masalah Menara Hanoi

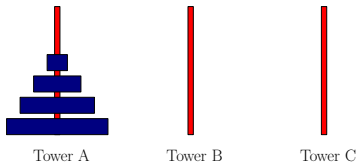
# Masalah Menara Hanoi (1): Deskripsi masalah

**Permasalahan:** terdapat tiga menara  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ . Awalnya, ada  $n$  cakram dengan berbagai ukuran yang ditumpuk di menara  $A$ , diurutkan berdasarkan ukurannya, dengan cakram terbesar terletak paling bawah dan yang terkecil paling atas. Tujuannya adalah untuk memindahkan semua cakram ke menara ke-2 dengan menjaga urutannya.

- Hanya satu cakram yang dapat dipindahkan pada satu waktu secara terbatas, dari puncak satu menara ke puncak menara lainnya.
- Cakram yang lebih besar tidak boleh diletakkan di atas cakram yang lebih kecil.

Untuk melihat ilustrasi permasalahannya, Anda dapat mengakses:

<https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html>



## Masalah Menara Hanoi (2): Ilustrasi

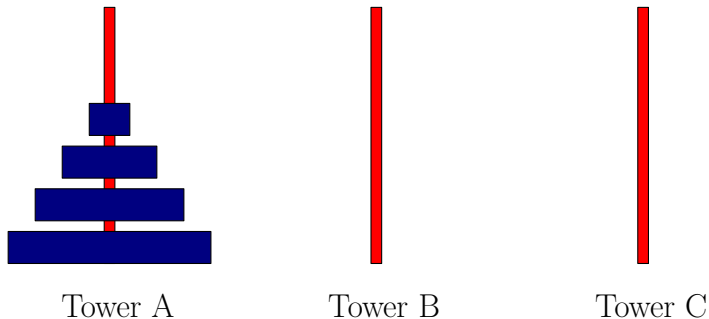
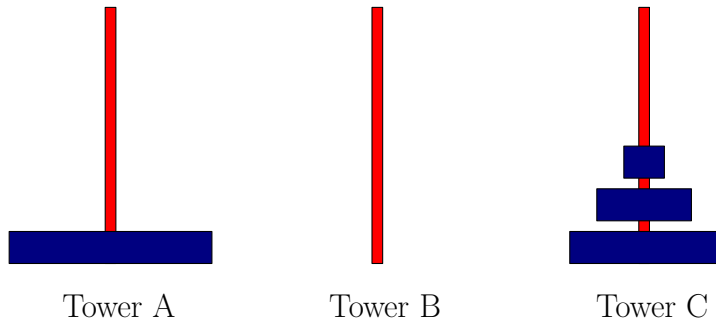


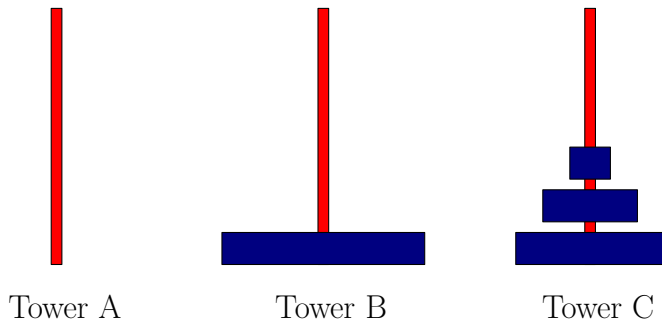
Figure: Konfigurasi awal dengan 4 cakram di Tower A

## Masalah Menara Hanoi (2): Ilustrasi



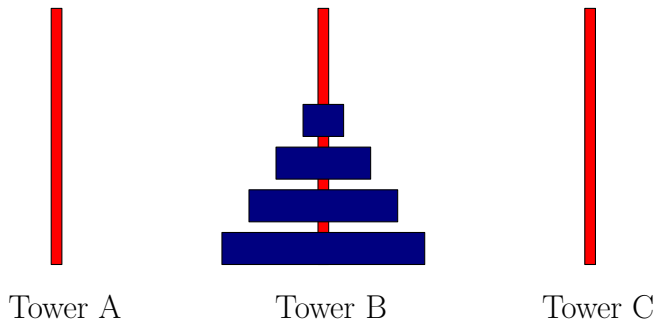
**Figure:** Konfigurasi setelah secara rekursif memindahkan 3 cakram teratas dari Tower A ke Tower C

## Masalah Menara Hanoi (2): Ilustrasi



**Figure:** Konfigurasi setelah memindahkan cakram terbawah dari Menara A ke Menara B

## Masalah Menara Hanoi (2): Ilustrasi



**Figure:** Konfigurasi setelah secara rekursif memindahkan 3 cakram dari Tower C ke Tower B



## Masalah Menara Hanoi (3): Pseudocode

**Tugas:** Tuliskan pseudocode untuk Masalah Menara Hanoi!

## Masalah Menara Hanoi (3): Pseudocode

**Tugas:** Tuliskan pseudocode untuk Masalah Menara Hanoi!

---

### Algorithm 8 Tower of Hanoi

---

```
1: procedure TOWERS( $A, B, C, n$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:     MOVEONE( $A, B$ )
4:   return
5: end if
6:   TOWERS( $A, C, B, n - 1$ )
7:   MOVEONE( $A, B$ )
8:   TOWERS( $C, B, A, n - 1$ )
9: end procedure
```

---

### Prosedur:

- TOWERS( $A, B, C, n$ ): memindahkan  $n$  cakram dari A ke B, dengan menggunakan tower A, B, C
- MOVEONE( $A, B$ ): memindahkan satu cakram dari A ke B

## Masalah Menara Hanoi (4): Pembuktian kebenaran

Untuk membuktikan kebenaran algoritma, kita gunakan teknik **induksi**.

- **Kasus dasar:** Untuk  $n = 1$ , cakram dapat dipindahkan dalam satu langkah dari A ke B. Jadi algoritma bekerja dengan benar untuk  $n = 1$ .
- Misal  $n \geq 2$ . **Hipotesis:** algoritma bekerja dengan benar untuk  $n - 1$ .
- Berdasarkan hipotesis, panggilan rekursif (baris 6) bekerja dengan benar dan memindahkan  $n - 1$  cakram teratas ke C, meninggalkan cakram terbawah (terbesar) di menara A.
- Langkah selanjutnya (baris 7), kita memindahkan cakram paling bawah ke B.
- Selanjutnya, panggilan rekursif (baris 8) bekerja dengan benar (berdasarkan hipotesis induksi, karena hanya ada  $n - 1$  cakram) dan memindahkan kembali  $n - 1$  cakram dari C ke B.
- Dengan demikian, seluruh algoritma bekerja dengan benar untuk  $n$ .

terbukti.

### 3. Masalah Menara Hanoi (5): Analisis kompleksitas waktu

#### Persamaan rekurens untuk menganalisis kompleksitas waktu

Misalkan  $f(n)$ : jumlah gerakan tunggal untuk menyelesaikan masalah  $n$  cakram

Sehingga diperoleh hubungan berikut:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ 1 + 2f(n-1), & n \geq 2 \end{cases}$$

**Catatan.** Rumus di atas dikenal sebagai **rumus rekursif**; baca [halaman ini](#) atau tonton [video ini](#) untuk pemahaman lebih detail.

Untuk mendapatkan rumus eksplisit  $f(n)$ , kita harus menyelesaikan persamaan rekurens untuk  $f(n)$ . Terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan rekurens. Di sini kita akan membahas dua metode yang dapat digunakan.

# Masalah Menara Hanoi (6): Analisis kompleksitas waktu

## Metode 1: Substitusi berulang

# Masalah Menara Hanoi (6): Analisis kompleksitas waktu

## Metode 1: Substitusi berulang

$$\begin{aligned}f(n) &= 1 + 2 \cdot f(n-1) \\&= 1 + 2 + 4 \cdot f(n-2) \\&= 1 + 2 + 4 + 8 \cdot f(n-3) \\&= \dots \\&= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \cdot f(1)\end{aligned}$$

Substitusikan *base case*  $f(1) = 1$ . Dengan rumus *deret geometris* ([klik di sini](#) untuk membaca rumus), diperoleh:

$$f(n) = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

## Masalah Menara Hanoi (7): Analisis kompleksitas waktu

**Metode 2: Tebak solusinya dan buktikan dengan induksi**

# Masalah Menara Hanoi (7): Analisis kompleksitas waktu

## Metode 2: Tebak solusinya dan buktikan dengan induksi

Misalkan tebakan kita adalah " $f(n)$  adalah fungsi eksponensial"

Maka **fungsi tebakan**:  $f(n) = a \cdot 2^n + b$

### Pembuktian induktif:

- **Basis induksi**:  $n = 1$ 
  - ▶  $f(1) = 1$  (dari rekurens)
  - ▶  $f(1) = 2a + b$  (dari bentuk solusinya)

Sehingga  $2a + b = 1$

- **Induksi**: Misalkan solusinya benar untuk suatu integer  $n \geq 1$ :

$$f(n) = a \cdot 2^n + b$$

Maka solusinya haruslah benar juga untuk  $n + 1$ , yaitu:

$$f(n + 1) = a \cdot 2^{n+1} + b$$



## Masalah Menara Hanoi (8): Analisis kompleksitas waktu

- Dari analisis rekurens, diperoleh

$$\begin{aligned}f(n+1) &= 2f(n) + 1 \\&= 2(a \cdot 2^n + b) + 1 \\&= a \cdot 2^{n+1} + (2b + 1)\end{aligned}$$

- Dari kedua persamaan diperoleh:

$$a \cdot 2^{n+1} + b = a \cdot 2^{n+1} + (2b + 1) \Leftrightarrow 2b + 1 = b \Leftrightarrow b = -1$$

Sehingga  $2a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1$ . Jadi,  $b = -1$ .

- Dengan demikian, diperoleh  $f(n) = a \cdot 2^n + b = 2^n - 1$ .

# Bagian 4. Binary Search

## 4. Algoritma Binary Search (1): Prinsip

**Binary search** merupakan sebuah algoritma pencarian suatu elemen kunci pada sebuah array yang terurut.

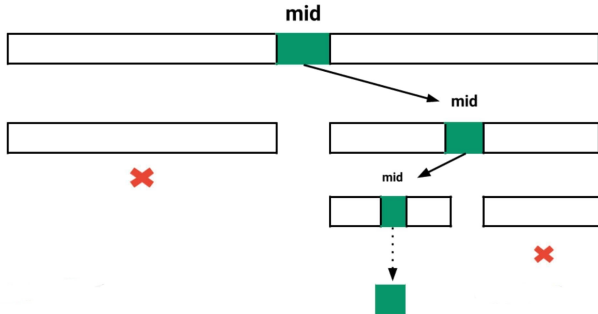
**Permasalahan:** Diberikan array terurut  $A[0..n-1]$  dan kunci pencarian  $KEY$ . Algoritma melakukan langkah-langkah berikut:

- Jika  $KEY = A[m]$ , maka  $m$
- Jika  $KEY < A[m]$ , maka cari secara rekursif di bagian kiri array
- Jika  $KEY > A[m]$ , maka cari secara rekursif di bagian kanan array

Kata kunci dari algoritma ini adalah, pada setiap langkah, ukuran pencarian (atau ukuran array input) *berkurang setengahnya*.

# Binary Search (2): Diagram

## The Idea of **Binary** Search



source: <https://www.enjoyalgorithms.com/blog/binary-search-algorithm>

## Binary Search (3): Pseudocode

---

### Algorithm 9 Algorithm Binary Search

---

```
1: procedure BINSEARCH( $A, i, j, KEY$ )
2:   if  $i > j$  then
3:     return  $-1$                                 ▷ Base case is reached but KEY is not found
4:   end if
5:    $m = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$                                 ▷ Choose the pivot
6:   if  $KEY = A[m]$  then
7:     return  $m$                                     ▷ KEY is found at index m
8:   else
9:     if  $KEY < A[m]$  then                            ▷ The KEY is located on the Left sub-array
10:      return BINSEARCH( $A, i, m - 1, KEY$ )            ▷ Rec-call left part
11:    else
12:      return BINSEARCH( $A, m + 1, j, KEY$ )            ▷ Rec-call right part
13:    end if
14:  end if
15: end procedure
```

## Binary Search (4): Analisis kompleksitas waktu

Misalkan  $f(n)$  adalah banyaknya perbandingan.

**Analisis kompleksitas:** kasus khusus ketika  $n = 2^k$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1 + f(n/2), & n \geq 2 \end{cases}$$

Dengan substitusi berulang, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 + f(n/2) \\ &= 1 + 1 + f(n/4) \\ &= 1 + 1 + 1 + f(n/8) \\ &\vdots \\ &= k + f(n/2^k) \\ &= k + f(1) \\ &= k + 1 \\ &= \log n + 1 \end{aligned}$$

## Binary Search (5): Analisis kompleksitas waktu

Analisis kompleksitas: untuk sebarang nilai  $n$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1 + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), & n \geq 2 \end{cases}$$

Dengan induksi, diperoleh:  $f(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$

Sebagai latihan, coba tuliskan secara runut pembuktian dengan induksi tersebut.

## Binary Search (6): Bukti induktif untuk kompleksitas

- **Basis induksi:**  $n = 1$ :

Dari perulangan,  $f(1) = 1$ , dan solusi yang diklaim  $f(1) = \lfloor \log 1 \rfloor + 1 = 1$ .  
Jadi basis induksi benar.

- **Pembuktian hipotesis:** Misalkan rumus tersebut benar untuk semua nilai yang lebih kecil.

$$f(m) = \lfloor \log m \rfloor, \quad \forall m < n$$

Setiap bilangan bulat  $n$  dapat dinyatakan sebagai:

$$2^{k-1} \leq \lfloor n/2 \rfloor < 2^k$$

untuk beberapa bilangan bulat  $k$ .

Jadi,  $\lfloor \log \lfloor n/2 \rfloor \rfloor = k - 1$ .

Berdasarkan fungsi rekursif:

$$f(\lfloor n/2 \rfloor) = \lfloor \log \lfloor n/2 \rfloor \rfloor + 1 = (k - 1) + 1 = k = \lfloor \log n \rfloor$$

Maka:

$$f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 = k + 1 = \lfloor \log n \rfloor + 1$$



# Contoh lanjut: Recursive powering

## Recursive powering (1): Deskripsi masalah

**Permasalahan:** Diberikan  $X$  dan bilangan bulat  $n$ . Kita ingin menghitung  $X^n$ .

---

### Algorithm 10 Recursive powering (*brute force*)

---

```
1: procedure POWER1( $X, n$ )  
2:    $T = X$   
3:   for  $i = 2$  to  $n$  do  
4:      $T = T * X$   
5:   end for  
6: end procedure
```

---

**Kompleksitas**  $\mathcal{O}(n)$ . Selidikilah mengapa?

## Recursive powering (2): Penyelesaian

**Ide:** tuliskan  $X^{16} = (((X^2)^2)^2)^2$

Diberikan  $n = 2^k$ , kita dapat mencari kuadrat-nya secara berulang.

---

### Algorithm 11 Improvement brute force

---

```
1: procedure POWER2( $X, n = 2^k$ )
2:    $T = X$ 
3:   for  $i = 2$  to  $k$  do
4:      $T = T * T$ 
5:   end for
6: end procedure
```

---

**Kompleksitas:**  $\mathcal{O}(\log n)$ . Dapatkah Anda jelaskan mengapa?

## Recursive powering (3): Penyelesaian

Generalisasi untuk sebarang nilai  $n$ : Hitunglah  $X^n$  untuk  $n \in \mathbb{Z}^+$

- Hitung  $X^2 = X * X$
- Hitung  $X^3 = X^2 * X$
- Hitung  $X^6 = X^3 * X^3$
- Hitung  $X^{12} = X^6 * X^6$
- Hitung  $X^{13} = X^{12} * X$

## Recursive powering (4): Penyelesaian

**Ide dasar:** Bagi  $n$  dengan 2,  $n = n/2 + n/2$ . Jadi

$$X^n = X^{(n/2+n/2)} = X^{n/2} \cdot X^{n/2}$$

Masalahnya adalah  $n/2$  tidak selalu bilangan bulat. Jadi kita harus menerapkan sedikit modifikasi:

- Untuk  $n = 0$ , lalu  $X^n = 1$
- Untuk  $n > 0$ , maka:
  - ▶ Jika  $n$  *genap*, maka  $X^n = X^{n/2} \cdot X^{n/2}$
  - ▶ Jika  $n$  *ganjil*, maka  $X^n = X^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot X^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot X$

## Recursive powering (5): Pseudocode

---

### Algorithm 12 Recursive powering

---

```
1: procedure POWER3( $X, n$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:     return  $X$ 
4:   end if
5:    $T = \text{POWER3}(X, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 
6:    $T = T * T$ 
7:   if  $n \bmod 2 = 1$  then
8:      $T = T * X$ 
9:     return  $T$ 
10:  end if
11: end procedure
```

---

▷  $T = T^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} * T^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$   
▷ *skipped*

Berapakah kompleksitas waktunya?

## Recursive powering (6): Contoh penerapan

Contoh: Hitung  $3^{16}$

$$\begin{aligned}3^{16} &= 3^8 \cdot 3^8 = (3^8)^2 \\&= ((3^4)^2)^2 \\&= (((3^2)^2)^2)^2 \\&= (((3^1)^2)^2)^2 \\&= (((3^0) \cdot 3)^2)^2)^2 \\&= (((1 \cdot 3)^2)^2)^2 \\&= (((3)^2)^2)^2 \\&= (((9)^2)^2)^2 \\&= ((81)^2)^2 \\&= (6561)^2 \\&= 43,046,721\end{aligned}$$

## Recursive powering (7): Kebenaran algoritma

---

**Algorithm 14** Power by multiplications

---

```
1: procedure POWER3( $X, n$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:     return  $X$ 
4:   end if
5:    $T = \text{POWER}(X, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 
6:    $T = T * T$ 
7:   if  $n \bmod 2 = 1$  then
8:      $T = T * X$ 
9:   return  $T$ 
10: end if
11: end procedure
```

---

Misalkan  $n = 2m + r$ , dimana  $r \in \{0, 1\}$ .

- Algoritma melakukan panggilan rekursif untuk menghitung  $T = X^m$ .
- Kuadratkan  $T$  untuk mendapatkan  $T = X^{2m}$ . Jika  $r = 0$ , maka *return*.
- Jika tidak, ketika  $r = 1$ , algoritma mengalikan  $T$  dengan  $X$ , untuk menghasilkan  $T = X^{2m+1}$ .



## Recursive powering (8): Analisis kompleksitas waktu

Misalkan  $f(n)$ : jumlah kasus terburuk dari banyaknya perkalian untuk menghitung  $X^n$ .

Untuk menghitung  $f(n)$ , perhatikan bahwa operasi yang dilakukan adalah:

- Panggilan rekursif untuk menghitung  $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ .
- Kemudian diikuti dengan satu perkalian lagi. Dalam kasus terburuk, ketika  $n$  ganjil, satu perkalian tambahan dibutuhkan.

Jadi, fungsi rekurens-nya adalah:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2, & \text{if } n \geq 2, n \text{ ganjil} \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & \text{if } n \geq 2, n \text{ genap} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa  $f(n) = 2\lfloor \log n \rfloor$  (coba gunakan induksi).

## Recursive powering (8): Analisis kompleksitas waktu

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2, & \text{if } n \geq 2, n \text{ ganjil} \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & \text{if } n \geq 2, n \text{ genap} \end{cases}$$

Dua kasus terakhir memiliki perbedaan kecil. Jadi kita dapat mengaproksimasi fungsi di atas dengan fungsi berikut untuk menyederhanakan perhitungan:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2, & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$

## Recursive powering (9): Pembuktian induktif

Tujuan: untuk menunjukkan bahwa  $f(n) = 2^{\lfloor \log n \rfloor}$ .

- **Basis induksi** ( $n = 1$ ): Dari pengulangan diperoleh  $f(1) = 0$ , dan dari rumus diperoleh  $f(1) = 2^{\lfloor \log 1 \rfloor} = 0$ . (Jadi basis induksi bernilai benar.)
- **Pembuktian induktif**: Misalkan rumusnya benar untuk semua nilai yang lebih kecil.

$$f(m) = 2^{\lfloor \log m \rfloor}, \quad \forall m < n$$

Setiap bilangan bulat  $n$  dapat dinyatakan sebagai:

$$2^k \leq n < 2^{k+1} \quad \text{untuk suatu bilangan bulat } k$$

Jadi,  $\lfloor \log n \rfloor = k$ , and  $\lfloor \frac{\log n}{2} \rfloor = k - 1$ . Dengan fungsi rekursif:

$$f(n) = f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2 = 2(k - 1) + 2 = 2k = 2^{\lfloor \log n \rfloor}$$

**Catatan.** Metode ini memberikan kompleksitas yang lebih baik dibandingkan *brute-force* ( $\mathcal{O}(n)$ ).

## Bagian 5. *Redundancy* pada algoritma rekursif

## Contoh 1: Recursive powering (1)

---

**Algorithm 14** Power by multiplications

---

```
1: procedure POWER3( $X, n$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:     return  $X$ 
4:   end if
5:    $T = \text{POWER}(X, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 
6:    $T = T * T$ 
7:   if  $n \bmod 2 = 1$  then
8:      $T = T * X$ 
9:   return  $T$ 
10: end if
11: end procedure
```

---

Apakah perlu untuk menyimpan  $\text{POWER}(X, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$  dalam beberapa variabel  $T$ ?

## Contoh 1: Recursive powering (2)

Misalkan bahwa  $n = 2^k$  untuk beberapa nilai  $k$ .

---

### Algorithm 13 Recursive powering

---

```
1: procedure POWER4( $X, n$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:     return  $X$ 
4:   end if
5:   return POWER( $X, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ) * POWER( $X, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ )
6: end procedure
```

---

- Apakah algoritmanya benar?
- Bagaimana kompleksitasnya?

## Contoh 1: Recursive powering (3)

Algoritmanya benar.

Jumlah panggilan rekursif:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$

Dengan induksi, kita dapat membuktikan bahwa  $f(n) = n - 1$  (lebih buruk secara asimtotik dari algoritma sebelumnya).

Apa yang dapat Anda simpulkan?

## Contoh 1: Recursive powering (3)

Algoritmanya benar.

Jumlah panggilan rekursif:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$

Dengan induksi, kita dapat membuktikan bahwa  $f(n) = n - 1$  (lebih buruk secara asimtotik dari algoritma sebelumnya).

Apa yang dapat Anda simpulkan?

POWER4 juga tidak efisien, karena kita melakukan dua pemanggilan rekursif untuk fungsi yang sama  $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$



## Contoh 2: Barisan Fibonacci (1)

Barisan Fibonacci didefinisikan sebagai berikut.

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & n \geq 3 \end{cases}$$

Barisan Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

## Contoh 2: Barisan Fibonacci (1)

Barisan Fibonacci didefinisikan sebagai berikut.

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & n \geq 3 \end{cases}$$

Barisan Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Konstruksilah sebuah algoritma untuk menghitung deret Fibonacci!

- Dengan algoritma naif (brute force), kita dapat mencapai kompleksitas  $\mathcal{O}(n)$ . Dapatkah Anda jelaskan bagaimana metodenya?

## Contoh 2: Barisan Fibonacci (1)

Barisan Fibonacci didefinisikan sebagai berikut.

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & n \geq 3 \end{cases}$$

Barisan Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Konstruksilah sebuah algoritma untuk menghitung deret Fibonacci!

- Dengan algoritma naif (brute force), kita dapat mencapai **kompleksitas  $\mathcal{O}(n)$** . Dapatkah Anda jelaskan bagaimana metodenya?

*Dengan menggunakan looping, kita menambahkan bilangan pada barisan Fibonacci satu per satu.*

## Contoh 2: Barisan Fibonacci (1)

Barisan Fibonacci didefinisikan sebagai berikut.

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & n \geq 3 \end{cases}$$

Barisan Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Konstruksilah sebuah algoritma untuk menghitung deret Fibonacci!

- Dengan algoritma naif (brute force), kita dapat mencapai **kompleksitas  $\mathcal{O}(n)$** . Dapatkah Anda jelaskan bagaimana metodenya?

*Dengan menggunakan looping, kita menambahkan bilangan pada barisan Fibonacci satu per satu.*

- Buatlah algoritma rekursif untuk barisan Fibonacci di atas!

## Contoh 2: Barisan Fibonacci (2)

---

### Algorithm 14 Barisan Fibonacci

---

```
1: procedure FIB( $n$ )  
2:   if  $n \leq 2$  then return 1  
3:   end if  
4:   return (FIB( $n - 1$ ) + FIB( $n - 2$ ))  
5: end procedure
```

---

## Contoh 2: Barisan Fibonacci (2)

---

### Algorithm 15 Barisan Fibonacci

---

```
1: procedure FIB( $n$ )  
2:   if  $n \leq 2$  then return 1  
3:   end if  
4:   return (FIB( $n - 1$ ) + FIB( $n - 2$ ))  
5: end procedure
```

---

Program ini membuat panggilan rekursif dengan banyak **perhitungan yang tumpang tindih**, sehingga menyebabkan inefisiensi yang sangat besar.

## Contoh 2: Barisan Fibonacci (2)

---

### Algorithm 16 Barisan Fibonacci

---

```
1: procedure FIB( $n$ )
2:   if  $n \leq 2$  then return 1
3:   end if
4:   return (FIB( $n - 1$ ) + FIB( $n - 2$ ))
5: end procedure
```

---

Program ini membuat panggilan rekursif dengan banyak **perhitungan yang tumpang tindih**, sehingga menyebabkan inefisiensi yang sangat besar.

Kompleksitas:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 0, & n = 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + 1, & n \geq 3 \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa: fungsi eksplisit  $T(n) \geq (1.618)^{n-2}$ .

## Bagian 6. Kelebihan & kekurangan algoritma rekursif



# Kelebihan & kekurangan algoritma rekursif (1)

## Kelebihan

- Rekursi memberikan kejelasan dan mengurangi waktu yang dibutuhkan untuk menulis dan men-debug kode (karena mengurangi panjang kode).
- Bermanfaat pada penyelesaian masalah yang secara alami bersifat rekursif, misalnya Masalah Menara Hanoi.
- Rekursi dapat mengurangi kompleksitas waktu (*terkadang kontra-intuitif*).
- Mengurangi pemanggilan fungsi yang tidak perlu.

# Kelebihan dan kekurangan algoritma rekursif (2)

## Kekurangan

- Fungsi rekursif umumnya lebih lambat daripada fungsi non-rekursif.
- Mungkin memerlukan banyak ruang memori untuk menyimpan “hasil antara” pada proses rekursi.
- Cenderung sulit untuk menganalisis atau memahami kode.
- Tidak lebih efisien dari segi kompleksitas ruang dan waktu (bisa lambat).
- Komputer mungkin kehabisan memori jika panggilan rekursif tidak diperiksa dengan benar.

# Rangkuman...

# What have we learned today?

- 1 Peninjauan kembali algoritma brute force
- 2 Memahami konsep algoritma rekursif
- 3 Beberapa contoh algoritma rekursif
- 4 Persamaan perulangan untuk menganalisis kompleksitas waktu
- 5 Redundansi dalam rekursi → jadi, berhati-hatilah saat menuliskan kode
- 6 Algoritma Binary Search

*end of slide...*