

Linear Algebra
[KOMS120301] - 2023/2024

11.1 - Hubungan Antar Vektor di Ruang Vektor

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 11 (November 2023)

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan mampu:

- 1 menjelaskan karakteristik sub-ruang vektor dan kaitannya dengan kombinasi linier;
- 2 memverifikasi apakah sebuah himpunan vektor merentang suatu ruang vektor atau tidak;
- 3 memverifikasi apakah sebuah himpunan vektor pada suatu ruang vektor independen/bergantung linier atau tidak.

Bagian 1: Sub-ruang vektor dan kombinasi linier

Ingat kembali bahwa **kombinasi linier vektor-vektor** didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan $\mathbf{w} \in V$. Maka w adalah kombinasi linear dari vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ jika \mathbf{w} dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$$

dimana $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$.

Contoh

Misal $\mathbf{v}_1 = (3, 2, -1)$ dan $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 3)$. Maka:

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 2(3, 2, -1) + 3(2, -4, 3) = (12, -8, 7)$$

adalah kombinasi linier dari \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 .

Mendefinisikan kombinasi linier dari vektor

Diberikan sebuah vektor $(5, 9, 5)$. Tuliskan vektor tersebut sebagai kombinasi linier dari vektor:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4), \mathbf{v} = (1, -1, 3), \text{ dan } \mathbf{w} = (3, 2, 5)$$

Mendefinisikan kombinasi linier dari vektor

Diberikan sebuah vektor $(5, 9, 5)$. Tuliskan vektor tersebut sebagai kombinasi linier dari vektor:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4), \mathbf{v} = (1, -1, 3), \text{ dan } \mathbf{w} = (3, 2, 5)$$

Solusi: Misalkan $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ sedemikian rupa sehingga:

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem linier:

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + 3k_3 = 3 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 9 \\ 4k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 5 \end{cases}$$

Dengan eliminasi Gauss, diperoleh:

$$k_1 = 3, k_2 = -4, k_3 = 2$$

Teorema

Jika $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$ adalah himpunan vektor dalam ruang vektor V . Kemudian:

- ① Himpunan W yang berisi semua kombinasi linier dari vektor-vektor dalam S adalah subruang dari V .*
- ② W adalah subruang vektor terkecil dari V yang berisi vektor dalam S , yaitu, semua subruang lain yang berisi vektor juga berisi W .*

Bagian 2: Himpunan merentang

Himpunan vektor yang membentuk subruang vektor

- Misalkan V adalah ruang vektor, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$.
- Misalkan W adalah subruang dari V sedemikian sehingga $\forall \mathbf{w} \in W$,

$$\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n$$

di mana k_1, k_2, \dots, k_n .

Maka, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dikatakan **merentang** W .

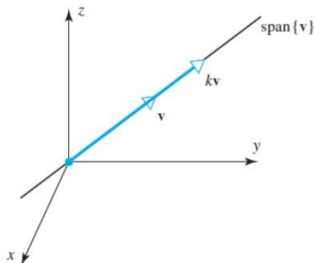
S disebut **himpunan merentang**, dan dinotasikan sebagai:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ or } \text{span}(S)$$

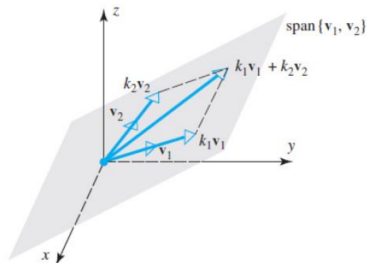
Contoh: Ruang yang direntang oleh satu vektor

Misalkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ adalah vektor-vektor yang *tak-kolinier* di \mathbb{R}^3 , dengan titik awalnya di titik asal, maka:

- $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ terdiri dari semua kombinasi linier $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$, adalah bidang yang ditentukan oleh vektor \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 .
- jika $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ adalah sebuah vektor di \mathbb{R}^2 atau \mathbb{R}^3 , maka $\text{span}\{\mathbf{v}\}$ yang seluruhnya merupakan kelipatan skalar $k\mathbf{v}$, adalah garisnya ditentukan oleh \mathbf{v} .



(a) $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ is the line through the origin determined by \mathbf{v} .



(b) $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is the plane through the origin determined by \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 .

Rentang vektor satuan standar berikut \mathbb{R}^3 .

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Rentang vektor satuan standar berikut \mathbb{R}^3 .

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Hal ini karena, setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linier:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Dalam hal ini, $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Polinom $1, x, x^2, \dots, x^n$ merentang ruang vektor.

Hal ini karena, setiap polinomial $\mathbf{p} \in P_n$ dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

yang merupakan kombinasi linier dari yang merupakan kombinasi linier dari $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Dalam hal ini, $P_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Tentukan apakah vektor-vektor berikut ini merentang \mathbb{R}^3 !

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3), \mathbf{v}_2 = (4, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$$

Tentukan apakah vektor-vektor berikut ini merentang \mathbb{R}^3 !

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3), \mathbf{v}_2 = (4, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$$

Misal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ adalah vektor di \mathbb{R}^3 , dan $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

Jika himpunan vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merentang di \mathbb{R}^3 , maka semestinya:

$$(u_1, u_2, u_3) = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

Kita akan memeriksa apakah sistem linier berikut memiliki solusi.

$$2k_1 + 4k_2 + 8k_3 = u_1, \quad -k_1 + k_2 - k_3 = u_2, \quad 3k_1 + 2k_2 + 8k_3 = u_3$$

Latihan 4 (cont.)

Sistem linier memiliki matriks koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 20 - 40 = 0$$

Oleh karena itu, tidak ada solusi untuk sistem linier, artinya $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tidak mencakup \mathbb{R}^3 .

Latihan: Cari sebuah vektor di \mathbb{R}^3 yang bukan merupakan kombinasi linier dari \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , dan \mathbf{v}_3 .

Bagian 3: Independensi linier

Independensi linier di \mathbb{R}^2 dan \mathbb{R}^3

Misalkan V adalah ruang vektor. Himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ dikatakan **independen linier** jika dan hanya jika kombinasi liniernya

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (1)$$

memiliki **tepatnya satu solusi**, yang merupakan **solusi trivial**:

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$$

Sebaliknya, himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ dikatakan **tidak independen linier** atau **dependen linier**, jika kombinasi linier (1) memiliki **solusi non-trivial** (yaitu, solusi selain $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$).

Contoh himpunan independen/dependen linier (1)

Vektor-vektor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, dan $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ adalah vektor-vektor bebas linier pada \mathbb{R}^3 .

Contoh himpunan independen/dependen linier (1)

Vektor-vektor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, dan $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ adalah vektor-vektor bebas linier pada \mathbb{R}^3 .

Mengapa?

Perhatikan bahwa untuk skalar $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, kita mempunyai:

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

yang ekuivalen dengan:

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Jelasnya, tidak ada solusi selain $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, dan $k_3 = 0$.

Artinya $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bebas linier.

Dengan cara serupa kita dapat menunjukkan bahwa:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \text{ dan } \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Contoh himpunan independen/dependen linier (2)

Tentukan apakah vektor:

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1), \text{ dan } \mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$$

bebas linier atau tidak!

Solusi:

Perhatikan bahwa: $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

Ini berarti bahwa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bebas linier.

Contoh himpunan independen/dependen linier (3)

Tentukan apakah polinomial:

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \text{dan} \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

bebas linier atau tidak!

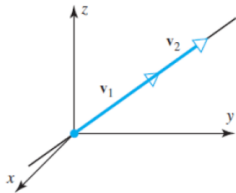
Solusi:

Perhatikan bahwa $3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$.

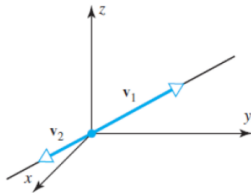
Oleh karena itu, vektor-vektornya bergantung linier.

Bagian 3: Interpretasi geometris

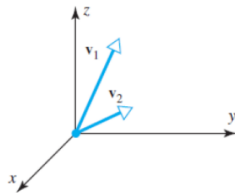
Interpretasi geometris dari independensi linier dalam \mathbb{R}^2 dan \mathbb{R}^3



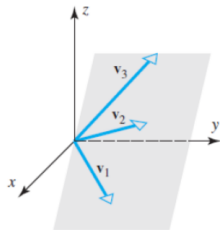
(a) Linearly dependent



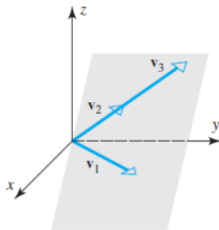
(b) Linearly dependent



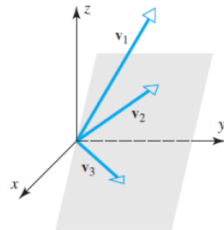
(c) Linearly independent



(a) Linearly dependent



(b) Linearly dependent



(c) Linearly independent

Menentukan independensi/ketergantungan linier (1)

Tentukan ketergantungan linier dari vektor:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \text{ dan } \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

Menentukan independensi/ketergantungan linier (1)

Tentukan ketergantungan linier dari vektor:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \text{ dan } \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

Solusi:

Kita periksa apakah persamaan vektor $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ memiliki solusi di \mathbb{R} .

Persamaannya setara dengan:

$$\begin{aligned} k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) &= (0, 0, 0) \\ (k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Selesaikan sistem:

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0 \\ 2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Memecahkan sistem menggunakan eliminasi Gaussian, kita mendapatkan:

$$k_1 = -\frac{1}{2}t, \quad k_2 = -\frac{1}{2}t, \quad k_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Oleh karena itu, sistem memiliki solusi non-trivial, sehingga vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bergantung linier.

Menentukan independensi/ketergantungan linier (2)

Tunjukkan bahwa polinomial membentuk himpunan vektor bebas linier dalam P_n .

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

Solusi:

Misalkan a_0, a_1, \dots, a_n sedemikian rupa sehingga:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

Kita harus menunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari polinomial untuk $x \in (-\infty, \infty)$ is:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Dari konsep Aljabar, kita tahu bahwa:

Teorema

Setiap polinomial derajat bukan nol n memiliki paling banyak n akar.

Ini mengakibatkan bahwa $a_0 = a_1 = \dots = a_n$ (atau, polinomialnya adalah polinomial nol).

Jika tidak, itu adalah polinomial bukan nol, memiliki jumlah akar tak terbatas (yaitu, $x \in (-\infty, \infty)$), bertentangan dengan teorema.

bersambung...