

7.2 - Hubungan antar vektor-vektor di ruang \mathbb{R}^2 dan \mathbb{R}^3

Dewi Sintuari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 9 (November 2023)

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

- 1 menjelaskan hasil kali titik antara dua vektor;
- 2 menjelaskan norma komputasi dari sebuah vektor;
- 3 menjelaskan jarak komputasi, sudut, dan proyeksi dua vektor;
- 4 menjelaskan perkalian silang vektor.

Bagian 1: Hasil kali dalam (inner product) & Norma vektor

Hasil kali dalam (*inner product*)

Misalkan \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor di \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Perkalian titik (*dot product*) atau hasil kali dalam (*inner product*) atau perkalian skalar (*scalar product*) dari \mathbf{u} dan \mathbf{v} ditentukan oleh:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Dalam aljabar, perkalian titik adalah jumlah perkalian dari entri-entri yang bersesuaian dari dua barisan bilangan.

Bagaimana Anda menginterpretasikan hasil kali titik dua vektor secara geometris?

- ① Misal $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

① Misal $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(4) + (-2)(5) + (3)(-1) = 4 - 10 - 3 = -9$$

- ① Misal $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(4) + (-2)(5) + (3)(-1) = 4 - 10 - 3 = -9$$

- ② Misal $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$ dan $\mathbf{v} = (6, k, -8, 2)$. Tentukan k sedemikian hingga $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

- ① Misal $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(4) + (-2)(5) + (3)(-1) = 4 - 10 - 3 = -9$$

- ② Misal $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$ dan $\mathbf{v} = (6, k, -8, 2)$. Tentukan k sedemikian hingga $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(6) + 2(k) + 3(-8) + 4(2) = -10 + 2k$$

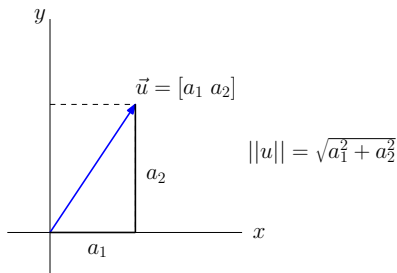
Jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ maka $-10 + 2k = 0$, berarti bahwa $k = 5$.

Norma (panjang)vektor

Norma (*norm*) atau panjang sebuah vektor \mathbf{u} di \mathbb{R}^n didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Ilustrasi secara 2D:



Sebuah vektor \mathbf{u} disebut **vektor satuan** jika $\|\mathbf{u}\| = 1$.

- ① Misalkan $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Tentukan $\|\mathbf{u}\|$.

- ① Misalkan $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Tentukan $\|\mathbf{u}\|$.

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 9 = 55$$

Maka, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$.

- ① Misalkan $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Tentukan $\|\mathbf{u}\|$.

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 9 = 55$$

Maka, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$.

- ② Diberikan vektor $\mathbf{v} = (1, -3, 4, 2)$ dan $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6})$.
Tentukan manakah dari kedua vektor tersebut yang merupakan vektor satuan?

- ① Misalkan $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Tentukan $\|\mathbf{u}\|$.

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 9 = 55$$

$$\text{Maka, } \|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}.$$

- ② Diberikan vektor $\mathbf{v} = (1, -3, 4, 2)$ dan $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6})$.
Tentukan manakah dari kedua vektor tersebut yang merupakan vektor satuan?

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 9 + 16 + 4} = \sqrt{30} \quad \text{dan} \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{1}{36} + \frac{25}{36} + \frac{1}{36}} = 1$$

Oleh karena itu, \mathbf{w} adalah vektor satuan, dan \mathbf{v} bukan vektor satuan.

Vektor satuan standar di \mathbb{R}^n disusun oleh n vektor:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

dimana:

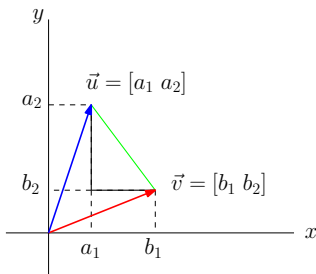
$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Bagian 2: Jarak, Sudut, Proyeksi

Jarak (*distance*)

Jarak antara vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dalam \mathbb{R}^n ditentukan oleh:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

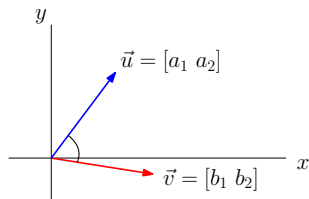


$$\|u - v\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Sudut (*angle*) antara dua vektor

Sudut θ antara vektor $u, v \neq 0$ dalam \mathbb{R}^n didefinisikan oleh:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$



Apakah ini terdefinisi dengan baik? Perhatikan bahwa nilai \cos berkisar dari -1 hingga 1 . Sehingga:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

Latihan: Buktikan ketaksamaan tersebut!

Solusi soal latihan:

Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor di \mathbb{R}^n , maka $-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$.

Teorema (Schwarz inequality)

Untuk setiap vektor \mathbf{u}, \mathbf{v} di \mathbb{R}^n , $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Proof.

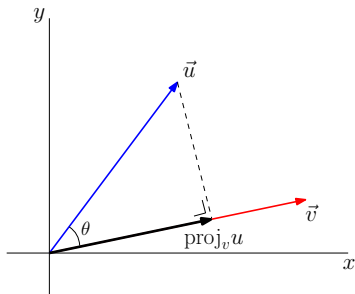
Metode pembuktian lain dapat dibaca di:

https://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/Octagon/volumes/volume1/article1_19.pdf. □

Proyeksi dari vektor \mathbf{u} ke vektor **tak-nol** \mathbf{v} didefinisikan oleh:

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

Panjang vektor $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ adalah $\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)$.
Sehingga,



$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} &= \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) \mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \end{aligned}$$

Latihan.

- *Browsing*-lah di internet tentang alasan mengapa operasi proyeksi vektor dibutuhkan/digunakan.
- Presentasikan hasil diskusi kelompok Anda kepada rekan-rekan yang lain.

Pada bagian sebelumnya, telah dibahas bahwa sudut yang dibentuk oleh dua vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} dapat dihitung dengan:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Perhatikan bahwa:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ jika dan hanya jika } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Definisi (Vektor-vektor yang ortogonal)

Dua vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} di \mathbb{R}^n dikatakan *ortogonal* (atau *tegak lurus*, atau *perpendicular*) jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Catatan: dalam hal ini, vektor **nol** selalu ortogonal dengan setiap vektor di \mathbb{R}^n .

- 1 Tunjukkan bahwa vektor: $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ dan $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ ortogonal di \mathbb{R}^4 .
- 2 Misalkan $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ adalah vektor satuan standar di \mathbb{R}^3 . Tunjukkan bahwa ketiga vektor tersebut saling ortogonal satu sama lain.

Bagian 2: Perkalian Silang (Cross Product)

Perkalian Silang (*Cross Product*)

Misalkan \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor dalam \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Cross product dari \mathbf{u} dan \mathbf{v} didefinisikan oleh:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ini dapat dengan mudah dilihat dengan menggunakan metode berikut:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Diberikan vektor:

$$\mathbf{u} = (0, 1, 7) \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = (1, 4, 5)$$

Vektor dapat direpresentasikan sebagai matriks: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Jadi,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right) \\ &= (5 - 28, -(0 - 7), 0 - 1) \\ &= (-23, 7, -1) \end{aligned}$$

Apa makna $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ secara geometris?

Diberikan: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$. Ini berarti bahwa:

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{u} \text{ and } \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$$

Contoh

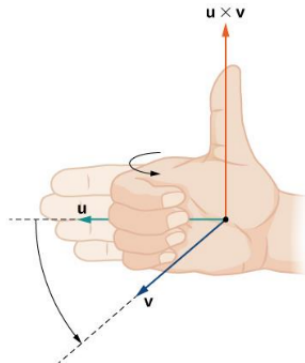
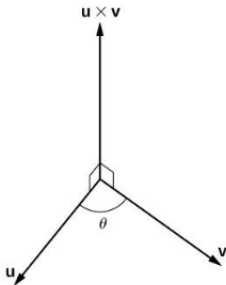
Diberikan $\mathbf{u} = (0, 1, 7)$ dan $\mathbf{v} = (1, 4, 5)$, dan:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} = (-23, 7, -1)$$

Perhatikan bahwa

- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (-23, 7, -1) \cdot (0, 1, 7) = 0 + 7 - 7 = 0$
- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (-23, 7, -1) \cdot (1, 4, 5) = -23 + 28 - 5 = 0$

Aturan tangan kanan



Teorema

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ adalah vektor dalam \mathbb{R}^3 , dan $k \in \mathbb{R}$. Maka:

- ① $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- ② $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- ③ $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- ④ $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
- ⑤ $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- ⑥ $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Sifat-sifat dot product dan cross product

Teorema

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ adalah vektor dalam \mathbb{R}^3 . Maka:

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ ortogonal terhadap } \mathbf{u})$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ ortogonal terhadap } \mathbf{v})$$

$$\textcircled{3} \quad \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (\text{identitas Lagrange})$$

$$\textcircled{4} \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

$$\textcircled{5} \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$$

Latihan: Berikan sebuah contoh yang menunjukkan kebenaran teorema di atas (satu contoh untuk masing-masing sifat).

Buktikan identitas berikut:

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \, ||\mathbf{v}|| \sin \theta$$

dimana θ adalah sudut antara \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

Buktikan identitas berikut:

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \ ||\mathbf{v}|| \sin \theta$$

dimana θ adalah sudut antara \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

Jawaban:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 &= ||\mathbf{u}||^2 \ ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= ||\mathbf{u}||^2 \ ||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}|| \ ||\mathbf{v}|| \cos \theta)^2 \\ &= ||\mathbf{u}||^2 \ ||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}||^2 \ ||\mathbf{v}||^2 \cos^2 \theta) \\ &= ||\mathbf{u}||^2 \ ||\mathbf{v}||^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= ||\mathbf{u}||^2 \ ||\mathbf{v}||^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Dengan demikian, $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \ ||\mathbf{v}|| \sin \theta$

Perkalian silang dari vektor satuan standar

Vektor satuan standar dalam \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Perkalian silang antara \mathbf{i} dan \mathbf{j} diberikan oleh:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

Latihan:

Selidiki hasil perkalian silang antara \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k} :

Perkalian silang dari vektor satuan standar

Vektor satuan standar dalam \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Perkalian silang antara \mathbf{i} dan \mathbf{j} diberikan oleh:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

Latihan:

Selidiki hasil perkalian silang antara \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k} :

• $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$

• $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$

• $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

• $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$

• $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$

• $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

Perkalian silang dua vektor

Diberikan:

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

Dengan menggunakan **ekspansi kofaktor**, diperoleh:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Perkalian silang dua vektor menggunakan ekspansi kofaktor

Dari contoh sebelumnya:

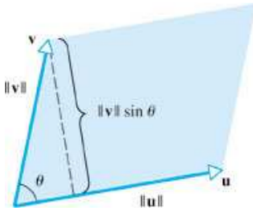
- $\mathbf{u} = (0, 1, 7) = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
- $\mathbf{v} = (1, 4, 5) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

Maka:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (5 - 28)\mathbf{i} - (0 - 7)\mathbf{j} + (0 - 1)\mathbf{k} \\ &= -23\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}\end{aligned}$$

Interpretasi geometris dari perkalian silang (dalam \mathbb{R}^2)

Perkalian silang dua vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} dalam \mathbb{R}^2 sama dengan **luas** **jajar genjang** yang ditentukan oleh kedua vektor.



$$\begin{aligned}\text{Luas} &= \text{alas} \times \text{tinggi} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|\end{aligned}$$

Contoh

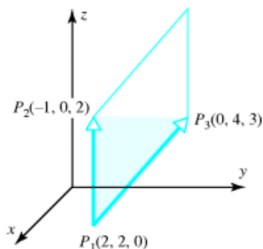
Tentukan luas segitiga yang ditentukan oleh titik-titik:

$$P_1 = (2, 2, 0), \quad P_2 = (-1, 0, 2), \quad \text{dan} \quad P_3 = (0, 4, 3)$$

Contoh

Tentukan luas segitiga yang ditentukan oleh titik-titik:

$$P_1 = (2, 2, 0), \quad P_2 = (-1, 0, 2), \quad \text{dan} \quad P_3 = (0, 4, 3)$$



Luas dari $\triangle = 1/2$ Luas dari *jajargenjang*

Dua vektor yang mendefinisikan jajargenjang

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (-1, 0, 2) - (2, 2, 0) = (-3, -2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (0, 4, 3) - (2, 2, 0) = (-2, 2, 3) \end{aligned}$$

Dengan demikian:

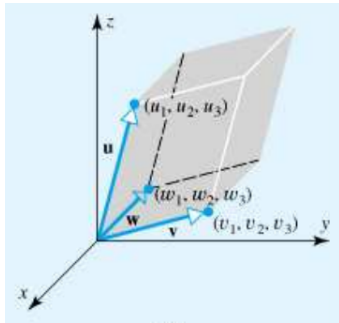
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-10, 5, -10)$$

Jadi, luas jajargenjang adalah:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-10)^2 + (5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15$$

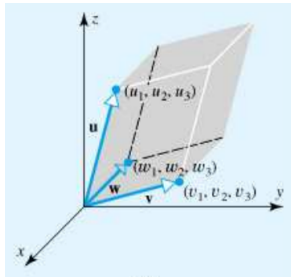
Interpretasi geometris dari perkalian silang (dalam \mathbb{R}^3)

Perkalian silang dari tiga vektor \mathbf{u} , \mathbf{v} , dan \mathbf{w} dalam \mathbb{R}^3 sama dengan *volume paralelepiped* yang ditentukan oleh ketiga vektor.



$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{area of base} \times \text{height} \\ &= \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \cdot (\|\text{proj}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\|) \\ &= \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \cdot \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} \\ &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|\end{aligned}$$

Interpretasi geometris dari perkalian silang (dalam \mathbb{R}^3)



$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

yang merupakan determinan matriks yang baris pertamanya terdiri dari elemen \mathbf{u} dan baris ke-2 dan ke-3 terdiri dari elemen \mathbf{v} dan \mathbf{w} .

Volume *parallelepiped* sama dengan $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$

Temukan volume *parallelepide* yang dibentuk oleh tiga vektor:

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Solusi:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 60 + 4 - 15 \\ &= 49\end{aligned}$$

Tentukan luas jajar genjang yang dibentuk oleh dua buah vektor:

$$\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

Solusi:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 9 = -25$$

Jadi, luas jajar genjang adalah $|-25| = 25$.

Latihan 2

Diberikan tiga vektor:

$$\mathbf{u} = (1, 1, 2), \mathbf{v} = (1, 1, 5), \mathbf{w} = (3, 3, 1)$$

Tentukan volume *parallelepiped* yang dibentuk oleh ketiga vektor tersebut!

Solusi:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= (1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-14) - (-1)(-14) + (2)(0) \\ &= -14 + 14 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Kita telah mendiskusikan:

- definisi vektor dalam Aljabar Linier;
- berbagai operasi pada vektor:
 - penjumlahan vektor dan perkalian skalar;
 - kombinasi linier;
 - hasil kali titik antara dua vektor;
 - komputasi norma dari sebuah vektor;
 - menghitung jarak, sudut, dan proyeksi dua vektor

Task: tulislah ringkasan tentang diskusi kita, dan kerjakan latihannya!

bersambung...