Aljabar Linier

[KOMS119602] - 2022/2023

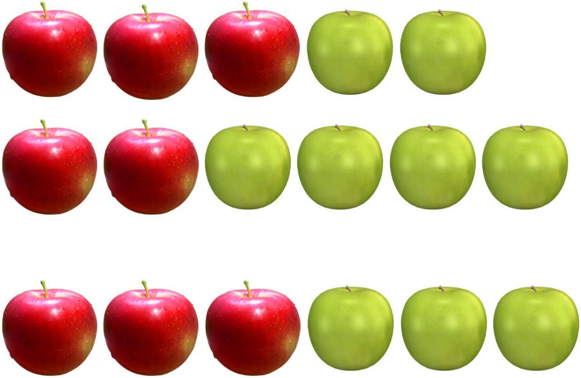
3.1 - Sistem Persamaan Linier

Dewi Sintiari

Computer Science Study Program
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Motivasi

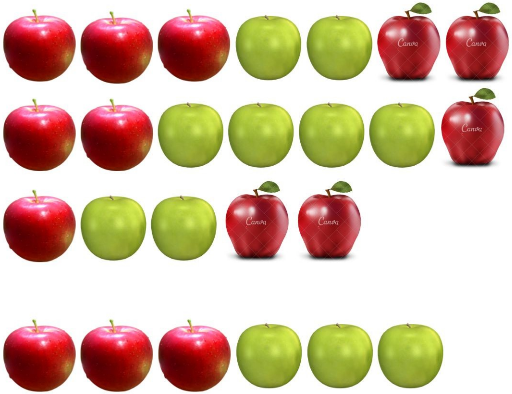


Rp 21.000,00

Rp 22.000,00

???

Motivasi



Rp 26.000,00

Rp 24.500,00

Rp 16.000,00

???

Bagian 1: Sistem Persamaan Linier (SPL)

Tujuan pembelajaran

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan dapat:

1. menganalisis komponen sistem persamaan linier;
2. memverifikasi apakah himpunan yang diberikan adalah solusi dari suatu SPL;
3. mengidentifikasi SPL homogen dan non-homogen;
4. merumuskan matriks *koefisien* dan matriks *augmentasi* dari SPL yang diberikan;
5. menunjukkan bahwa operasi baris elementer memberikan SPL yang ekuivalen;
6. menganalisis interpretasi geometris SPL dengan 1, 2, atau 3 variabel;
7. menerapkan algoritma eliminasi dan substitusi untuk menyelesaikan SPL;
8. menjelaskan konsep SPL yang ditulis dalam matriks segitiga atau dalam bentuk matriks eselon.

Terminologi dan notasi (1)

Diberikan variabel yang tidak diketahui $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sebuah sistem persamaan linier pada variabel tersebut didefinisikan sebagai:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ (ini dapat diganti dengan *field* lain).

Solusi persamaan (1) adalah daftar nilai yang bersesuaian dengan variabel, atau vektor u dalam $\mathbb{R}^n$.

$$x_1 = r_1,\ x_2 = r_2,\ \ldots,\ x_n = r_n \quad \text{or} \quad u = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

Ini berarti:

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots + a_nr_n = b \quad \text{bernilai benar}$$

Dalam hal ini, dikatakan bahwa u memenuhi persamaan (1).

Dalam persamaan (1):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dalam hal ini:

- persamaan ditulis dalam bentuk standar
- konstanta a_k adalah koefisien dari x_k
- b adalah suku konstan dari persamaan

Catatan: Jika n kecil, digunakan huruf yang berbeda untuk menunjukkan variabel, daripada menggunakan pengindeksan.

Diberikan persamaan:

$$2x + 3y - z = 4$$

Dapatkah Anda menemukan solusi untuk persamaan tersebut?

Berapa banyak solusi yang dapat Anda temukan?

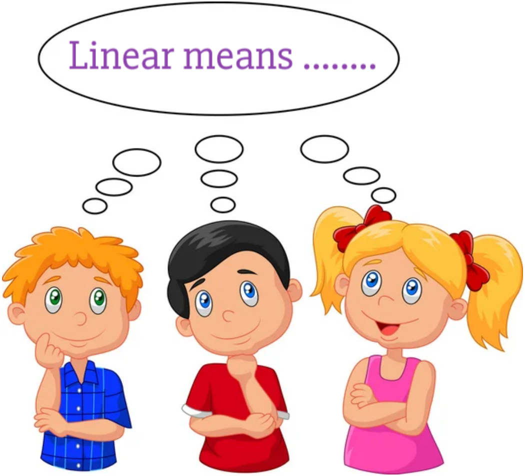
Sistem persamaan linier adalah daftar persamaan linier: $L_1, L_2, \ldots, L_m$ dengan variabel yang sama $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \qquad (4)$$

dimana a_{ij} dan b_i adalah konstanta.

- Sistem persamaan linier ditulis dalam bentuk standar;
- a_{ij} adalah koefisien variabel x_j dalam persamaan L_i;
- bilangan b_i adalah konstanta dari persamaan L_i.

Apa arti kata **“linier”**?



Bagian 2: Jenis-jenis Sistem Persamaan Linear

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- SPL tersebut berukuran $m \times n$

Solusi dari sistem adalah daftar nilai untuk yang tidak diketahui atau vektor u dalam $\mathbb{R}^n$.

$$x_1 = r_1,\ x_2 = r_2,\ \ldots,\ x_n = r_n \quad \text{or} \quad u = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

Contoh: Memverifikasi solusi SPL

Diketahui sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

- Berapa nilai m dan n dalam SPL tersebut?
- Tentukan apakah solusi berikut merupakan solusi dari sistem tersebut!
  1. $u = (-8, 6, 1, 1)$
  2. $v = (-10, 5, 1, 2)$

Matriks augmentasi dan matriks koefisien suatu SPL (1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- matriks sebelah kiri disebut matriks augmentasi;
- matriks sebelah kanan disebut matriks koefisien.

Selanjutnya, vektor:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

disebut vektor konstan (atau matriks konstan) dari sistem.

Diberikan SPL:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Matriks augmentasi dan matriks koefisien didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

SPL **homogen** dan **non-homogen**

Sebuah SPL:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dikatakan homogen jika $b_i = 0, \forall i$. SPL yang tidak homogen dikatakan non-homogen.

Setiap SPL homogen selalu memiliki solusi.

Bisakah Anda menebak solusinya?

Sebuah *persamaan linier* dikatakan ter-degenerasi jika semua koefisiennya adalah nol.

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

Sebuah *sistem persamaan linier* disebut ter-degenerasi jika semua koefisien dari semua persamaannya adalah nol.

Coba pikirkan, **apa syarat suatu SPL ter-degenerasi agar memiliki solusi?**

Sebuah *persamaan linier* dikatakan ter-degenerasi jika semua koefisiennya adalah nol.

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

Sebuah *sistem persamaan linier* disebut ter-degenerasi jika semua koefisien dari semua persamaannya adalah nol.

Coba pikirkan, **apa syarat suatu SPL ter-degenerasi agar memiliki solusi?**

- Jika $b \neq 0$, maka persamaan tidak memiliki solusi.
- Jika $b = 0$, maka setiap vektor $u = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ pada $\mathbb{R}^n$ adalah solusi.

Teorema

Misalkan $\mathcal{L}$ adalah sistem persamaan linier yang memuat persamaan ter-degenerasi L, dengan vektor konstan b.

1. *Jika $b \neq 0$, maka sistem $\mathcal{L}$ tidak memiliki solusi.*
2. *Jika $b = 0$, maka L dapat dihapus dari $\mathcal{L}$ tanpa mengubah himpunan solusi $\mathcal{L}$.*

Bisakah Anda memberikan argumen mengapa teorema tersebut benar?

Variabel *utama* (*leading*) dalam persamaan linier nonter-degenerasi

Diberikan sebuah SPL **non-degenerasi** L.

- Apa yang dapat Anda katakan tentang *koefisien L?*

Variabel *utama* (*leading*) dalam persamaan linier nonter-degenerasi

Diberikan sebuah SPL **non-degenerasi** L.

- Apa yang dapat Anda katakan tentang *koefisien* L*?*

  L memiliki setidaknya satu *koefisien tak-nol*

Example

Berikut ini adalah contoh SPL non-degenerasi.

$$0x_1 + 0x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 8x_6 = 7 \text{ and } 0x + 2y - 4z = 5$$

Dalam hal ini, koefesien yang bernilai 0 biasanya diabaikan.

$$5x_3 + 6x_4 + 8x_6 = 7 \text{ and } 2y - 4z = 5$$

Bagian 3: Operasi baris elementer

Diberikan bentuk umum SPL:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (4)$$

Kalikan persamaan m dengan konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_m$:

$$(c_1a_{11}+\cdots+c_ma_{m1})x_1+\cdots+(c_1a_{1n}+\cdots+c_ma_{mn})x_n = c_1b_1+\cdots+c_mb_m$$

Ini adalah kombinasi linier dari persamaan-persamaan dalam SPL.

Contoh

$$
\begin{array}{rll}
3L1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\
-2L_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\
4L_1: & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \\
\hline
(\text{Sum})L: & 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 29x_4 & = 25
\end{array}
$$

- L adalah kombinasi linier dari L_1, L_2, dan L_3
- Apakah $u = (-8, 6, 1, 1)$ adalah solusi sistem?
- Apakah $u = (-8, 6, 1, 1)$ adalah solusi kombinasi linier?

Apa yang dapat Anda simpulkan?

Sistem yang *ekuivalen*

Teorema

Diberikan dua SPL, misalkan $\mathcal{L}_1$ dan $\mathcal{L}_2$. Kedua SPL memiliki solusi yang sama jika dan hanya jika setiap persamaan di $\mathcal{L}_1$ adalah kombinasi linier dari persamaan di $\mathcal{L}_2$.

Definition

Dua sistem persamaan linier dikatakan ekivalen jika keduanya memiliki solusi yang sama.

Operasi elementer

Diberikan persamaan linier $L_1, L_2, \ldots, L_m$. Operasi berikut disebut operasi dasar.

- **[E1]** Tukarkan dua persamaan

  $$\text{Interchange } L_i \text{ and } L_j \quad \text{or} \quad L_i \leftrightarrow L_j$$

- **[E2]** Ganti persamaan dengan kelipatan bukan nol dari dirinya sendiri.

  $$\text{Replace } L_i \text{ by } kL_i \quad \text{or} \quad kL_i \to L_i$$

- **[E3]** Ganti persamaan dengan jumlah kelipatan dari persamaan lain dan dirinya sendiri.

  $$\text{Replace } L_j \text{ by } kL_i + L_j \quad \text{or} \quad kL_i + L_j \to L_j$$

Teorema

Diberikan sebuah sistem $\mathcal{L}$. Misalkan $\mathcal{M}$ adalah sistem yang diperoleh dari $\mathcal{L}$ oleh urutan elemen operasi berhingga.

Maka SPL $\mathcal{M}$ dan $\mathcal{L}$ memiliki solusi yang sama.

Catatan: Terkadang E_2 dan E_3 dapat diterapkan dalam satu langkah:

[E] Ganti persamaan L_j dengan $kL_i + k'L_j$ (dengan $k, k' \neq 0$)

$$kL_i + k'L_j \to L_j$$

Bagaimana cara mencari solusi sistem persamaan linier?

- Aplikasikan operasi elementer untuk mengubah sistem yang diberikan menjadi *sebuah sistem ekuivalen yang solusinya dapat dengan mudah diperoleh*.

Ini disebut **Metode Eliminasi Gauss** (akan dibahas nanti).

Bagian 4: SPL dengan ≤ 3 variabel

Example

Selesaikan SPL satu variabel berikut:

- $4x - 1 = x + 6$
- $2x - 5 - x = x + 3$
- $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$

Apa yang bisa Anda simpulkan?

Example

Selesaikan SPL satu variabel berikut:

- $4x - 1 = x + 6$
- $2x - 5 - x = x + 3$
- $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$

Apa yang bisa Anda simpulkan?

Teorema

Diberikan sistem persamaan linier (tunggal) $ax = b$.

1. *Jika $a \neq 0$, maka $x = \frac{b}{a}$ adalah solusi unik dari sistem.*
2. *Jika $a = 0$, tetapi $b \neq 0$, maka sistem tidak memiliki solusi.*
3. *Jika $a = 0$ dan $b = 0$, maka setiap skalar k adalah solusi dari $ax = b$.*

Contoh

Example

Selesaikan SPL satu variabel berikut:

- $4x - 1 = x + 6$ (teorema 7 (1))
  Dalam bentuk standar, SPL adalah: $3x = 7$.
  Maka $x = \frac{7}{3}$ adalah solusi uniknya.
- $2x - 5 - x = x + 3$ (teorema 7 (2))
  Dalam bentuk standar, SPL adalah: $0x = 8$.
  Maka persamaan tidak memiliki solusi.
- $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$ (teorema 7 (3))
  Dalam bentuk standar, SPL adalah: $0x = 0$.
  Maka setiap skalar k adalah solusi.

Sistem persamaan linier dalam **dua variabel**

Diberikan sistem dua persamaan linier non-degenerasi dalam dua variabel:

$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2$$

Example

Selesaikan sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{cases} L_1: & x - y = -4 \\ L_2: & 3x + 2y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} L_1: & x + 3y = 3 \\ L_2: & 2x + 6y = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} L_1: & x + 2y = 4 \\ L_2: & 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

Apa yang dapat Anda simpulkan?

1. SPL memiliki sebuah solusi.

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x - y = -4 \\ L_2 &: \quad 3x + 2y = 12 \end{aligned}$$

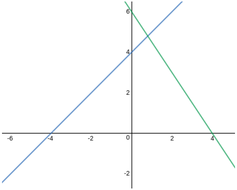
2. SPL tidak memiliki solusi.

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x + 3y = 3 \\ L_2 &: \quad 2x + 6y = -8 \end{aligned}$$

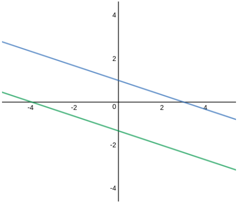
3. Sistem memiliki tak hingga banyaknya solusi.

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x + 2y = 4 \\ L_2 &: \quad 2x + 4y = 8 \end{aligned}$$

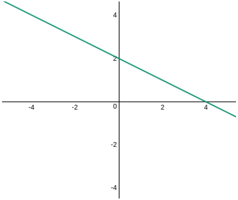
Interpretasi geometris



(a) Exactly one solution



(b) No solution



(c) Infinitely many solution

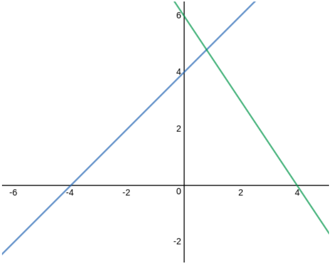
1. Sistem dengan satu solusi

- Diberikan SPL:

$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2$$

- Kedua garis yang merepresentasikan SPL tersebut *berpotongan* di sebuah titik yang sama.

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{or} \quad A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$$



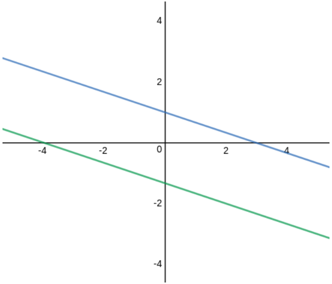
2. SPL yang tidak memiliki solusi

- Diberikan SPL:

$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2$$

- Kedua garis yang merepresentasikan SPL tersebut *sejajar*.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \qquad \text{dimana} \quad A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

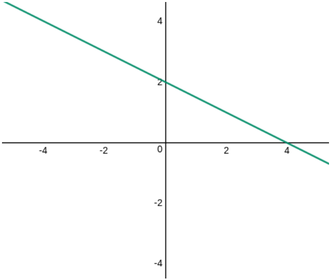


- Given:

$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2$$

- Kedua garis yang merepresentasikan SPL tersebut *berhimpit*.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad \text{dimana} \quad A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$



Recap

- Sistem memiliki tepat satu solusi ketika $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$.
- Sistem memiliki tidak ada solusi dari banyak solusi ketika $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$.

Nilai $A_1 B_2 - A_2 B_1$ disebut determinan orde dua.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Q: Dapatkah Anda menjelaskan keterkaitan solusi SPL dengan determinan?

Recap

- Sistem memiliki tepat satu solusi ketika $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.
- Sistem memiliki tidak ada solusi dari banyak solusi ketika $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

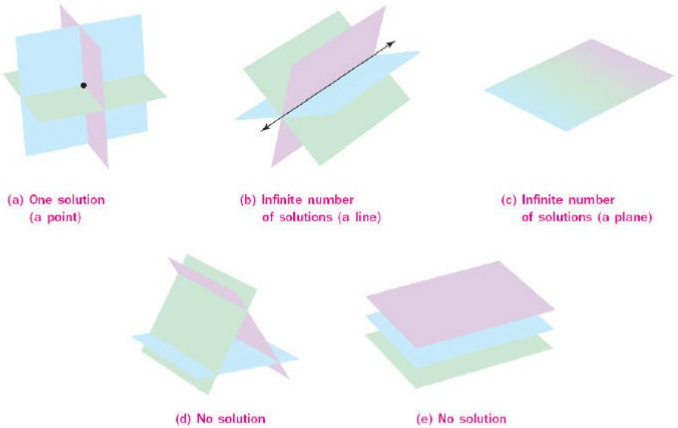
Nilai $A_1B_2 - A_2B_1$ disebut determinan orde dua.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Q: Dapatkah Anda menjelaskan keterkaitan solusi SPL dengan determinan?

Remark: Suatu sistem memiliki *solusi tunggal jika determinan koefisiennya bukan nol*.

Banyaknya solusi dari SPL berukuran (3×3)



Contoh 1: Solusi tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gaussian elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

SPL tersebut memiliki himpunan solusi:

$$x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; x_3 = -1$$

Contoh 2: Solusi tak terhingga banyaknya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gaussian elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dari baris terakhir, dapat diturunkan persamaan:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

yang dapat dipenuhi oleh banyak nilai x. Solusinya dapat ditulis dalam bentuk parametrik:

- Misal $x_3 = k$, dengan $k \in \mathbb{R}$.
- Kemudian $x_2 = 2 - k$ dan
  $x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 = 4 - (2 - k) - 2k = 2 - k$.

Ini berarti terdapat tak terhingga banyaknya solusi, karena ada tak hingga banyaknya kemungkinan nilai k.

Contoh 3: SPL yang tidak memiliki solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gaussian elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dari baris terakhir, dapat diturunkan persamaan:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \tag{1}$$

Sehingga, tidak ada kemungkinan nilai $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ yang dapat memenuhi persamaan (1).

Catatan:

- Untuk SPL dengan lebih dari 3 variabel, sulit untuk menafsirkannya secara geometris.
- Namun jumlah solusi yang mungkin dapat diketahui dengan melihat **bentuk dari matriks eselon tereduksi**.

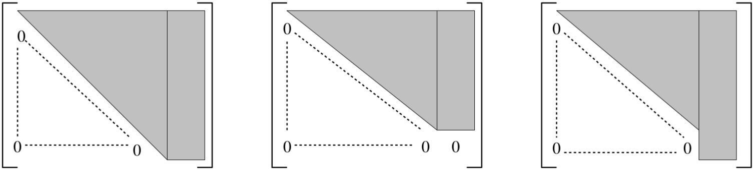


Figure: Left (unique solution), middle (many solutions), right (no solution) — *source: lecture notes of Rinaldi Munir, ITB* *bersambung...*