Linear Algebra
[KOMS120301] - 2023/2024

10 - Sub-ruang vektor

Dewi Sintiari

Program Studi Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 10 (November 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan konsep subruang vektor;
2. menganalisis jika himpunan vektor tertentu dalam ruang vektor merupakan subruang dari ruang vektor.

Sub-ruang vektor (*subspace*)

Sub-ruang vektor (*subspace*)

Misalkan V adalah ruang vektor. Himpunan $W \subseteq V$ adalah subruang dari V, jika W adalah ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Contoh: Misalkan $V = \mathbb{R}^3$ dan W adalah sebuah bidang yang melalui titik $(0, 0, 0)$.

Proof.

W harus memiliki fungsi: $ax + by + cz = 0$.

- *Closure:* Misalkan $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ menjadi poin di W, dan $k \in \mathbb{R}$. Kemudian:
    - $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$, karena $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$.
    - $k\mathbf{u} = (kx_1, ky_1, kz_1) \in W$ karena $kx_1 + kx_2 + kx_3 = 0$.
- *Identitas:* Elemen nol adalah $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ dan elemen satu adalah 1. Jelasnya, $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ dan $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$, untuk setiap $\mathbf{u} \in W$.
- *Invers* dari $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ adalah $-\mathbf{u} = (-x_1, -y_1, -z_1)$. Jelasnya, $\mathbf{u} = (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
- Jelasnya, sifat komutatif, asosiatif, dan distributif terpenuhi.

Teorema (Menentukan sub-ruang vektor)

Misalkan V adalah ruang vektor. Jika W adalah himpunan yang mengandung setidaknya satu vektor V, maka W adalah subruang dari V jika kondisi berikut terpenuhi.

1. *Jika* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, *maka* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in W$.
2. *Jika* k *adalah skalar, dan* $\mathbf{u} \in W$, *maka* $k\mathbf{u} \in W$.

Dengan teorema ini, maka untuk memeriksa bahwa W adalah subruang dari V, cukup dengan memeriksa properti **Axiom 1** (closed under penjumlahan dan closed under scalar multiplication) .

Proof.

Karena V adalah ruang vektor, maka aksioma: *komutatifitas, asosiatif, identitas, invers,* dan *distribusi* terpenuhi.

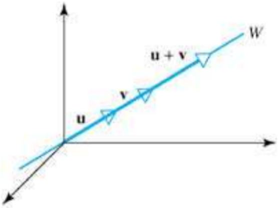
Karena properti berlaku untuk setiap vektor di V, maka properti tersebut berlaku untuk subset W.

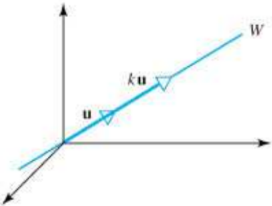
Cukup dengan memeriksa properti *closure*.

$\square$

Garis yang melalui titik asal $\mathbb{R}^3$ adalah subruang dari $\mathbb{R}^3$, dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar, adalah subruang dari $\mathbb{R}^3$.

Bukti geometris





Misalkan L adalah garis yang melalui titik asal $\mathbb{R}^3$. Diberikan dua vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$. Jelasnya, vektornya:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \text{ dan } k\mathbf{u},\ k \in \mathbb{R}$$

terletak pada garis (mereka adalah vektor-vektor yang arahnya sama, tetapi besarnya berbeda). Jadi properti penutupan terpenuhi.

Latihan: *Bukti algebraik*

Secara Aljabar, buktikan bahwa garis yang melalui titik asal $\mathbb{R}^3$ adalah subruang dari $\mathbb{R}^3$, dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar, adalah subruang dari $\mathbb{R}^3$.

Contoh sub-ruang vektor (2)

Himpunan titik-titik pada bidang yang melalui titik asal di $\mathbb{R}^3$, dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar, merupakan subruang dari $\mathbb{R}^3$.

Himpunan titik yang melalui titik asal $\mathbb{R}^3$ mempunyai fungsi:

$$ax + by + cz = 0$$

Periksa apakah sifat penjumlahan dan perkalian skalar terpenuhi.

1. Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor dalam $\mathbb{R}^3$. Kemudian:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Jelas,

$$\begin{aligned} a(u_1 + v_1) &+ b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) \\ &= (au_1 + bu_2 + cu_3) + (av_1 + bv_2 + cv_3) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Contoh non sub-ruang vektor

Himpunan W dari semua titik (x, y) di $\mathbb{R}^2$ s.t. $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, tidak boleh merupakan subruang dari $\mathbb{R}^3$.

W adalah tidak tertutup pada perkalian skalar. Misalnya:

$$\mathbf{v} = (1, 1) \in W \quad \text{tetapi} \quad (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} = (-1, -1) \notin W$$

Silakan membaca materi dan mengerjakan latihan yang relevan di buku Howard Anton

Gunakan Teorema 4.2.1 untuk menentukan apakah himpunan berikut merupakan sub-ruang vektor atau tidak.

1. Himpunan matriks diagonal berukuran $n\times$.
2. Himpunan matriks A berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $\det(A) = 0$.
3. Himpunan matriks A berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $\det(A) = 0$.
4. Himpunan matriks simetris berukuran $n \times n$.
5. Himpunan matriks A berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $A^T = -A$.
6. Himpunan matriks A berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $AB = BA$ untuk suatu matriks B tertentu.

Jawaban latihan