

Matematika Diskrit
[KOMS119602] - 2022/2023

12.1. Graf (bagian 1)

Dewi Sintiar

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 13 (Desember 2022)

Graf

Contoh graf



Sejarah graf

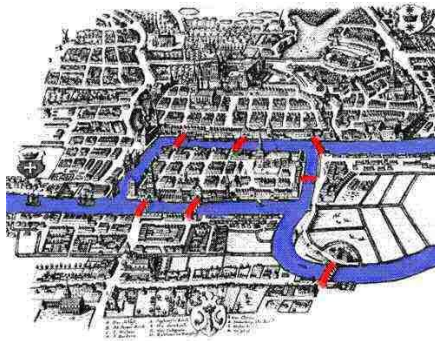


Figure: Permasalahan jemabatan Königsberg

Permasalahan: bisakah seseorang mengunjungi setiap kota dengan melalui jembatan tepat satu kali, dan kembali ke titik awal?

Sejarah graf

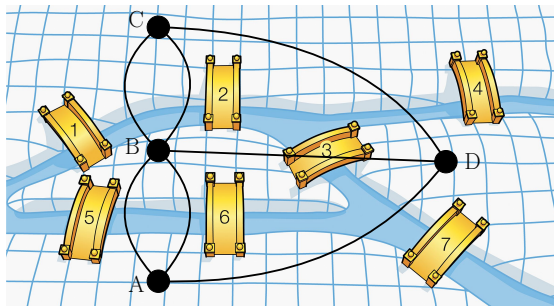
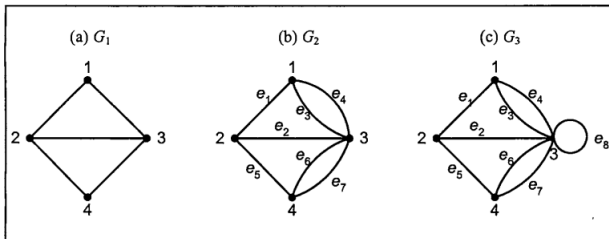


Figure: Solusi permasalahan jembatan Königsberg oleh Leonhard Euler

Notasi Graf

Graf $G = (V, E)$ memiliki dua komponen, yaitu:

- ▶ **Simpul/titik/verteks**, himpunannya dinotasikan dengan $V(G)$
- ▶ **Sisi**, himpunannya dinotasikan dengan $E(G)$



Latihan: Tentukan himpunan simpul dan himpunan sisi dari graf pada gambar di atas.

Jenis graf: graf sederhana dan tak-sederhana

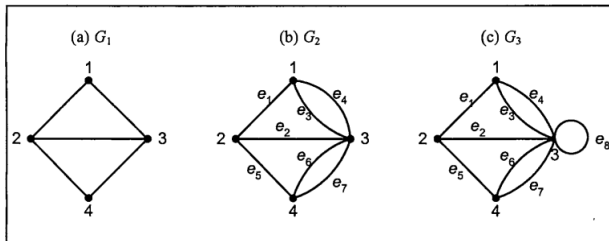
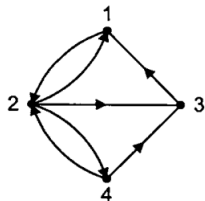


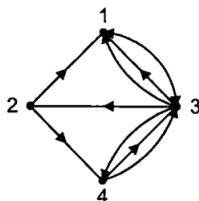
Figure: Graf sederhana (1) dan graf tak-sederhana (2 dan 3)

Contoh permasalahan pada graf sederhana dan tak sederhana

Jenis graf: graf berarah dan tak berarah



(a) G_4



(b) G_5

Tugas:

Buatlah tabel jenis-jenis graf beserta karakteristik sisi-sisinya.

Contoh permasalahan pada graf berarah dan tak berarah

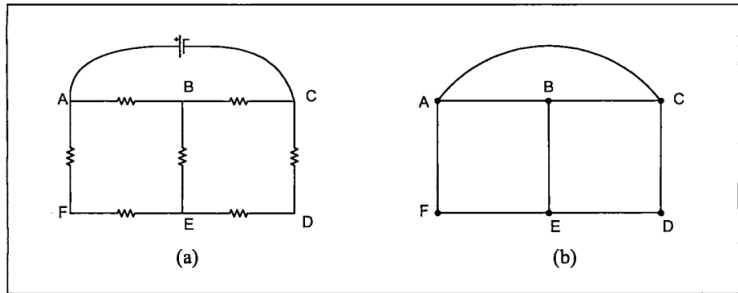
Latihan

Rangkumlah karakteristik dari jenis-jenis graf: sederhana, tak sederhana, berarah, dan tak berarah.

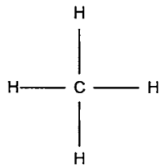


Aplikasi Teori Graf

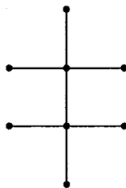
Aplikasi graf 1: Rangkaian listrik



Aplikasi graf 2: Isomer senyawa kimia karbon



metana (CH_4)

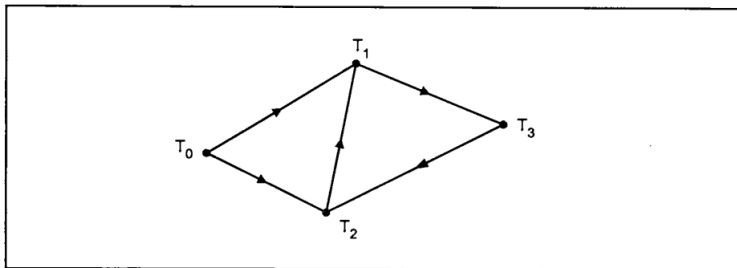


etana (C_2H_6)



propana (C_3H_8)

Aplikasi graf 3: Transaksi konkuren pada basis data terpusat



- ▶ Transaksi T_0 menunggu transaksi T_1 dan T_2 ;
- ▶ Transaksi T_2 menunggu transaksi T_1 ;
- ▶ Transaksi T_1 menunggu transaksi T_3 ;
- ▶ Transaksi T_3 menunggu transaksi T_2 ;

Aplikasi graf 4: Turnamen *Round-Robin*

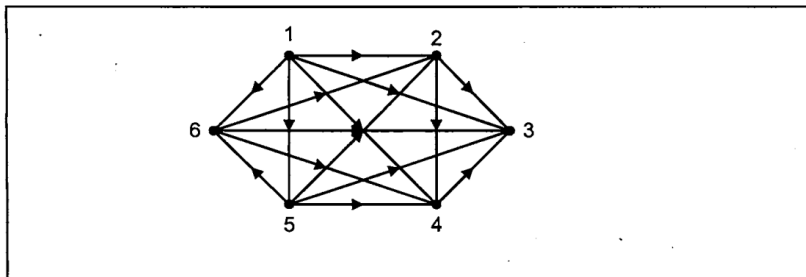


Figure: Turnamen *Round-Robin* untuk 6 tim. Busur (a, b) berarti tim a berhasil memukul tim b .

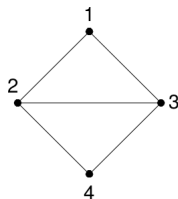
Terminologi Graf

Terminologi Dasar

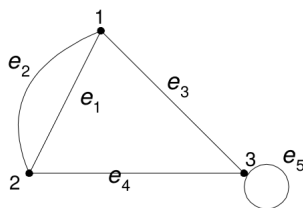
1. Bertetangga (*adjacent*)
2. Bersisian (*incident*)
3. Simpul terpencil (*isolated vertex*)
4. Graf kosong (*null graph* atau *empty graph*)
5. Derajat (*degree*)

Ketetanggaan (*adjacency*)

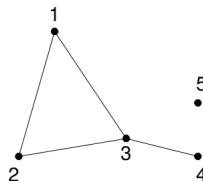
Dua simpul dikatakan **bertetangga** jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi.



G_1



G_2

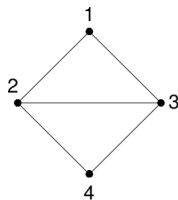


G_3

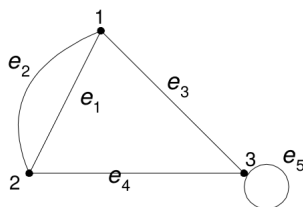
Insidensi

Misal $e = (v_1, v_2)$ adalah sisi pada graf. Maka dikatakan bahwa:

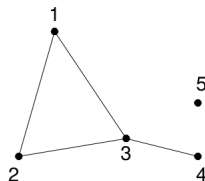
- ▶ e berisisian dengan v_1 ; dan
- ▶ e berisisian dengan v_2 .



G_1



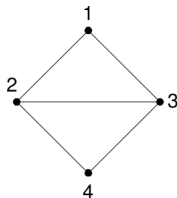
G_2



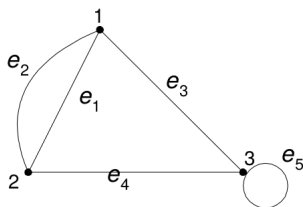
G_3

Simpul terpencil (*isolated vertex*)

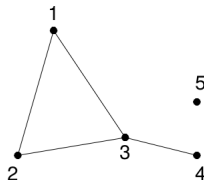
Sebuah simpul dikatakan **terpencil** (*isolated*) jika tidak ada sisi yang bersisian dengannya.



G_1



G_2



G_3

Graf kosong (*null graph*)

Graf yang tidak memiliki sisi.

Dengan kata lain, semua simpulnya merupakan simpul terpencil.



$n = 2$



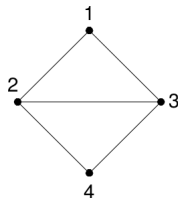
$n = 3$



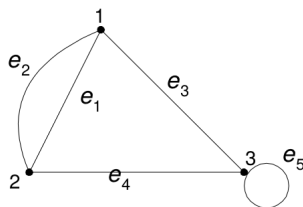
$n = 4$

Derajat simpul (*degree*)

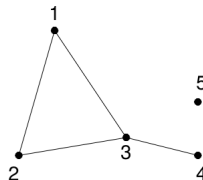
Derajat dari suatu simpul adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.



G_1

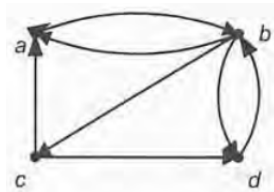


G_2



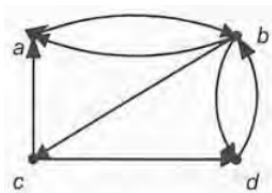
G_3

Derajat simpul (*degree*)



Permasalahan terkait dengan derajat simpul

Latihan 1: derajat simpul pada graf berarah



Tentukan derajat dari setiap simpul pada graf tersebut.

Untuk setiap simpul pada graf:

- ▶ Derajat masuk (*in-degree*)
- ▶ Derajat keluar (*out-degree*)

Latihan 2: derajat simpul

Tunjukkan bahwa:

Lemma

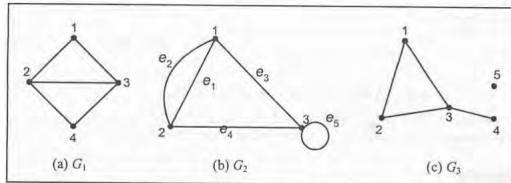
Untuk setiap graf G , banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

Lemma

Setiap graf $G = (V, E)$ memenuhi:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Ilustrasikan lemma tersebut pada graf berikut.



Komponenten Graf

Lintasan (*Path*)

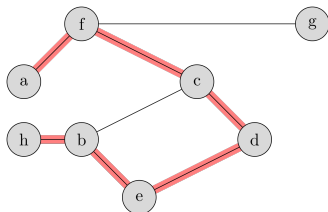
Lintasan dengan panjang n dari simpul awal v_0 ke simpul akhir v_n pada graf G adalah barisan simpul dan sisi yang terbentuk

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sedemikian sehingga

$$e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$$

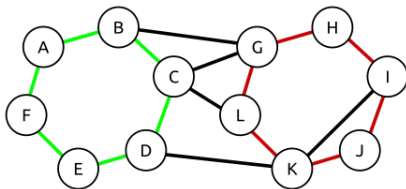
adalah sisi-sisi dari graf G .



Panjang lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut.

Siklus (*cycle*) atau sirkuit (*circuit*)

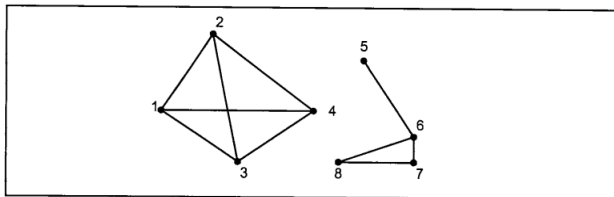
Siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.



Panjang sirkuit adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut.

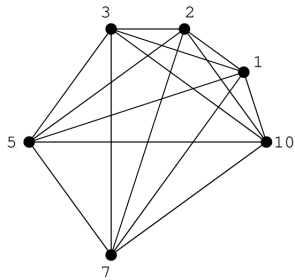
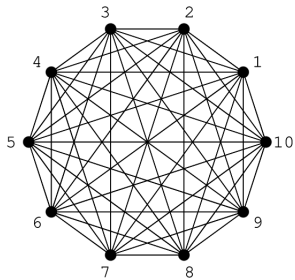
Konektivitas/keterhubungan (*connectivity*)

Sebuah graf G dikatakan **terhubung** jika untuk setiap simpul u dan v di G , terdapat lintasan yang menghubungkan u dan v .



Subgraf

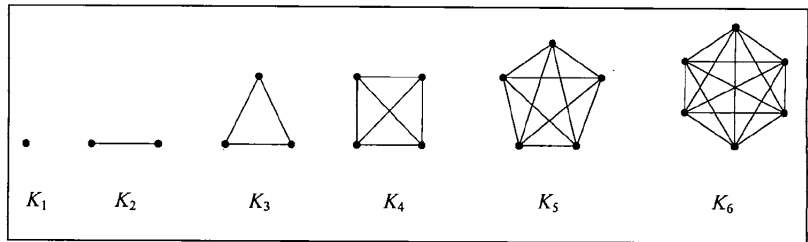
Subgraf



Permasalahan terkait subgraf

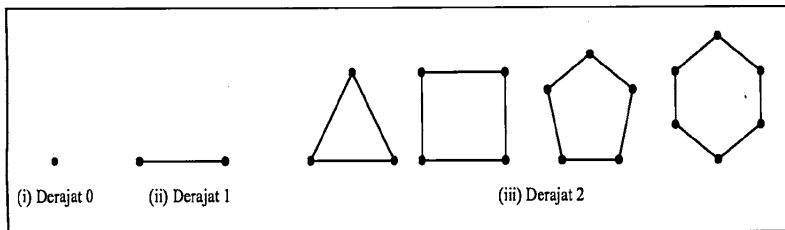
Beberapa Contoh Graf

Graf lengkap



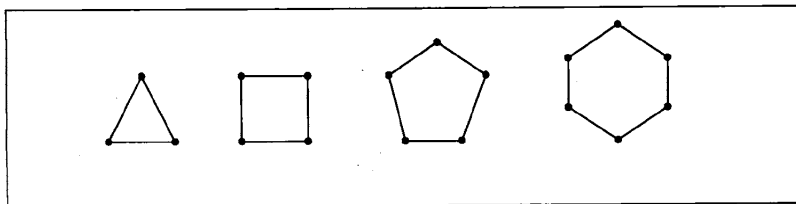
Permasalahan terkait graf lengkap

Graf lingkaran

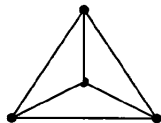


Permasalahan terkait graf lengkap

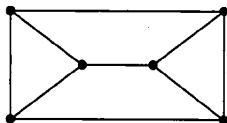
Graf teratur (*regular*)



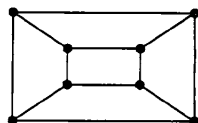
Graf teratur (*regular*)



(i) $n = 4, r = 3$



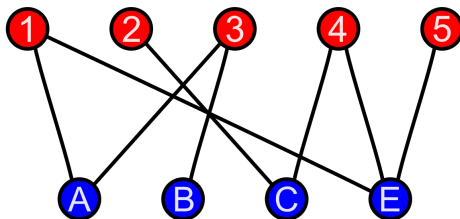
(ii) $n = 6, r = 3$



(iii) $n = 8, r = 3$

Permasalahan terkait graf teratur

Graf bipartit



Permasalahan terkait graf bipartit

Tugas

Pilihlah sebuah topik terkait dengan graf yang dibahas pada slide (misalnya graf teratur, derajat simpul, dsb.

Carilah contoh penerapan konsep graf yang terkait dengan topik yang dipilih.