

Aljabar Linier  
[KOMS119602] - 2022/2023

## 7.2 - Relation between Vectors in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

- 1 menjelaskan hasil kali titik antara dua vektor;
- 2 menjelaskan norma komputasi dari sebuah vektor;
- 3 menjelaskan jarak komputasi, sudut, dan proyeksi dua vektor;
- 4 menjelaskan perkalian silang vektor.

# Bagian 1: Inner Product & Norm

# Dot (inner) product

Misalkan  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah vektor di  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Perkalian titik (*dot product*) atau hasil kali dalam (*inner product*) atau perkalian skalar (*scalar product*) dari  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  ditentukan oleh:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Dalam aljabar, perkalian titik adalah jumlah perkalian dari entri-entri yang bersesuaian dari dua barisan bilangan.

*Bagaimana Anda menginterpretasikan hasil kali titik dua vektor secara geometris?*

- ① Misal  $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$ , tentukan  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(4) + (-2)(5) + (3)(-1) = 4 - 10 - 3 = -9$$

- ② Misalkan  $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$  dan  $\mathbf{v} = (6, k, -8, 2)$ . Tentukan  $k$  sedemikian hingga  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(6) + 2(k) + 3(-8) + 4(2) = -10 + 2k$$

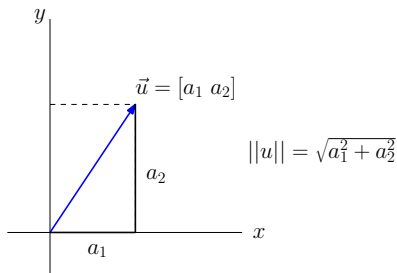
Jika  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  maka  $-10 + 2k = 0$ , berarti bahwa  $k = 5$ .

# Norma (panjang)vektor

Norma (*norm*) atau panjang sebuah vektor  $\mathbf{u}$  di  $\mathbb{R}^n$  didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Ilustrasi secara 2D:



Sebuah vektor  $\mathbf{u}$  adalah **vektor satuan** jika  $\|\mathbf{u}\| = 1$ .

- ① Misalkan  $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$ . Tentukan  $\|\mathbf{u}\|$ .

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 9 = 55$$

Maka,  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$ .

- ② Diberikan vektor  $\mathbf{v} = (1, -3, 4, 2)$  dan  $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ .  
Tentukan manakah dari kedua vektor tersebut yang merupakan vektor satuan?

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 9 + 16 + 4} = \sqrt{30} \quad \text{and} \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{1}{36} + \frac{25}{36} + \frac{1}{36}} = 1$$

Oleh karena itu,  $\mathbf{w}$  adalah vektor satuan, dan  $\mathbf{v}$  bukan vektor satuan.

Vektor satuan standar di  $\mathbb{R}^n$  disusun oleh  $n$  vektor:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

dimana:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

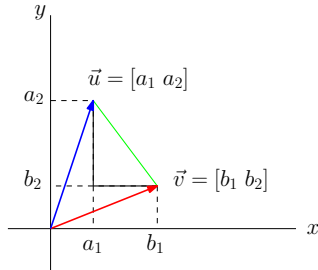


## Bagian 2: Jarak, Sudut, Proyeksi

# Jarak (*distance*)

**Jarak** antara vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  dan  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  dalam  $\mathbb{R}^n$  ditentukan oleh:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

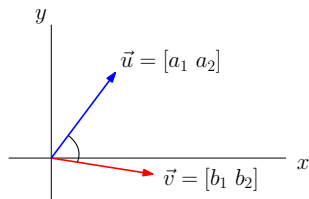


$$\|u - v\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

# Sudut (*angle*) antara dua vektor

Sudut  $\theta$  antara vektor  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$  dalam  $\mathbb{R}^n$  didefinisikan oleh:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$



Apakah ini terdefinisi dengan baik? Perhatikan bahwa nilai  $\cos$  berkisar dari  $-1$  hingga  $1$ . Sehingga:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

**Latihan:** buktikan ketaksamaan berikut!

## Solusi soal latihan:

Jika  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah vektor di  $\mathbb{R}^n$ , maka  $-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$ .

### Theorem (Schwarz inequality)

Untuk setiap vektor  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .

### Proof.

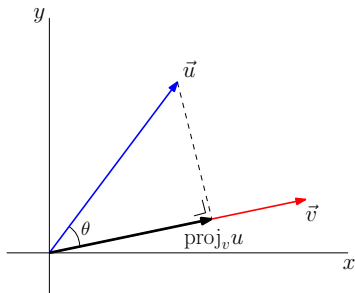
Metode pembuktian lain dapat dibaca di:

[https://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/Octagon/volumes/volume1/article1\\_19.pdf](https://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/Octagon/volumes/volume1/article1_19.pdf). □

**Proyeksi** dari vektor  $\mathbf{u}$  ke vektor **tak-nol**  $\mathbf{v}$  didefinisikan oleh:

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

Panjang vektor  $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$  is  $\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)$ . So,



$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} &= \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) \mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \end{aligned}$$

# Apa kegunaan proyeksi vektor?



## Bagian 2: Perkalian Silang (Cross Product)



# Perkalian Silang (*Cross Product*)

Misalkan  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah vektor dalam  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

**Cross product** dari  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  didefinisikan oleh:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ini dapat dengan mudah dilihat dengan menggunakan metode berikut:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Diberikan vektor:

$$\mathbf{u} = (0, 1, 7) \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = (1, 4, 5)$$

Vektor dapat direpresentasikan sebagai matriks:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Jadi,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left( \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right) \\ &= (5 - 28, -(0 - 7), 0 - 1) \\ &= (-23, 7, -1) \end{aligned}$$

# Apa arti $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ ?

Diberikan:  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ . Ini berarti bahwa:

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{u} \text{ and } \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$$

## Example

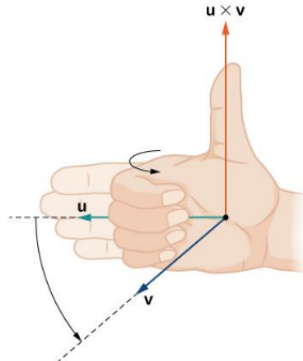
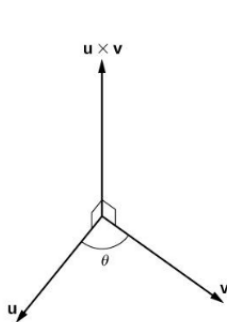
Diberikan  $\mathbf{u} = (0, 1, 7)$  and  $\mathbf{v} = (1, 4, 5)$ , dan:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} = (-23, 7, -1)$$

Perhatikan bahwa

- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (-23, 7, -1) \cdot (0, 1, 7) = 0 + 7 - 7 = 0$
- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (-23, 7, -1) \cdot (1, 4, 5) = -23 + 28 - 5 = 0$

# Sistem tangan kanan



## Theorem

Misalkan  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  adalah vektor dalam  $\mathbb{R}^3$ , dan  $k \in \mathbb{R}$ . Kemudian:

- ①  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- ②  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- ③  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- ④  $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
- ⑤  $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- ⑥  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

# Sifat-sifat dot product and cross product

## Theorem

Misalkan  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  adalah vectors in  $\mathbb{R}^3$ . Then:

- ①  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$   $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  is orthogonal to  $\mathbf{u}$ )
- ②  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$   $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  is orthogonal to  $\mathbf{v}$ )
- ③  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$   $(\text{Lagrange's identity})$
- ④  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$
- ⑤  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$

Buktikan identitas berikut:

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \, ||\mathbf{v}|| \sin \theta$$

dimana  $\theta$  adalah sudut antara  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$ .

**Jawabanr:**

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 &= ||\mathbf{u}||^2 \, ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= ||\mathbf{u}||^2 \, ||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}|| \, ||\mathbf{v}|| \cos \theta)^2 \\ &= ||\mathbf{u}||^2 \, ||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}||^2 \, ||\mathbf{v}||^2 \cos^2 \theta) \\ &= ||\mathbf{u}||^2 \, ||\mathbf{v}||^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= ||\mathbf{u}||^2 \, ||\mathbf{v}||^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Dengan demikian,  $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \, ||\mathbf{v}|| \sin \theta$

# Cross product of standard unit vectors

The standard unit vectors in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

The cross product between  $\mathbf{i}$  and  $\mathbf{j}$  is given by:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

The cross product between  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , and  $\mathbf{k}$ :

- |  |  |  |
|--|--|--|
| • $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  | • $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$  | • $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$  |
| • $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ | • $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ | • $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ |



# Perkalian silang dua vektor

Diberikan:

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

Dengan menggunakan **ekspansi kofaktor**, diperoleh:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

# Perkalian silang dua vektor menggunakan ekspansi kofaktor

Dari contoh sebelumnya:

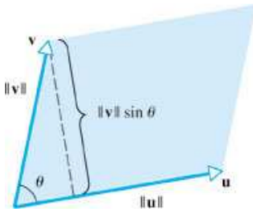
- $\mathbf{u} = (0, 1, 7) = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
- $\mathbf{v} = (1, 4, 5) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

Maka:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (5 - 28)\mathbf{i} - (0 - 7)\mathbf{j} + (0 - 1)\mathbf{k} \\ &= -23\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}\end{aligned}$$

# Interpretasi geometris dari perkalian silang (dalam $\mathbb{R}^2$ )

Perkalian silang dua vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  dalam  $\mathbb{R}^2$  sama dengan **luas** **jajar genjang** yang ditentukan oleh kedua vektor.

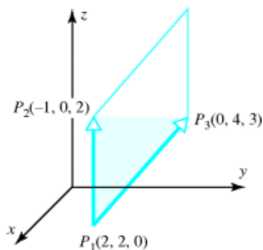


$$\begin{aligned}\text{Area} &= \text{base} \times \text{height} \\ &= ||\mathbf{u}|| \, ||\mathbf{v}|| \sin \theta \\ &= ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\end{aligned}$$

# Contoh

Tentukan luas segitiga yang ditentukan oleh titik-titik:

$$P_1 = (2, 2, 0), \quad P_2 = (-1, 0, 2), \quad \text{and} \quad P_3 = (0, 4, 3)$$



$$\text{Area of } \triangle = 1/2 \text{ Area of parallelogram}$$

Two vectors that determine the parallelogram:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= P_1 \vec{P}_2 = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1 \\ &= (-1, 0, 2) - (2, 2, 0) = (-3, -2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= P_1 \vec{P}_3 = \vec{OP}_3 - \vec{OP}_1 \\ &= (0, 4, 3) - (2, 2, 0) = (-2, 2, 3) \end{aligned}$$

$$\text{Hence: } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-10, 5, -10)$$

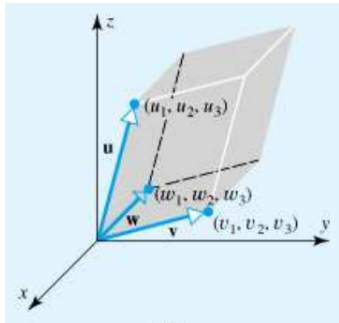
Jadi, luas jajaran genjang adalah:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-10)^2 + (5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15$$

dan luas segitiga adalah  $15/2 = 7,5$ .

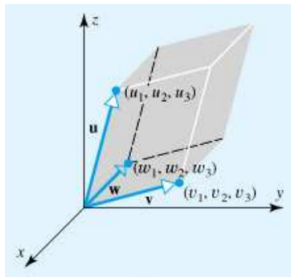
# Interpretasi geometris dari perkalian silang (dalam $\mathbb{R}^3$ )

Perkalian silang dari tiga vektor  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , dan  $\mathbf{w}$  dalam  $\mathbb{R}^3$  sama dengan **volume paralelepiped yang ditentukan oleh ketiga vektor**.



$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{area of base} \times \text{height} \\ &= \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \cdot (\|\text{proj}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\|) \\ &= \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \cdot \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} \\ &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|\end{aligned}$$

# Interpretasi geometris dari perkalian silang (dalam $\mathbb{R}^3$ )



$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left( \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

which is the determinant of matrix whose first row is composed of elements of  $\mathbf{u}$  and the 2nd and 3rd rows are composed with the elements of  $\mathbf{v}$

The volume of the parallelepide is equal to  $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$

# Example

Find the volume of the *parallelepide* formed by three vectors:

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

**Solution:**

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 60 + 4 - 15 \\ &= 49\end{aligned}$$

Tentukan luas jajar genjang yang dibentuk oleh dua buah vektor:

$$\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

**Solution:**

$$\det \left( \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 9 = -25$$

Jadi, luas jajar genjang adalah  $|-25| = 25$ .



## Exercise 2

Diberikan tiga vektor:

$$\mathbf{u} = (1, 1, 2), \mathbf{v} = (1, 1, 5), \mathbf{w} = (3, 3, 1)$$

Tentukan volume paralelepide yang dibentuk oleh ketiga vektor tersebut!

**Solution:**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= (1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-14) - (-1)(-14) + (2)(0) \\ &= -14 + 14 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

*Kita telah mendiskusikan:*

- the definition of vectors in Linear Algebra;
- some operations on vectors:
  - penjumlahan vektor dan perkalian skalar;
  - kombinasi linier;
  - hasil kali titik antara dua vektor;
  - komputasi norma dari sebuah vektor;
  - menghitung jarak, sudut, dan proyeksi dua vektor

**Task:** tulislah ringkasan tentang diskusi kita, dan kerjakan latihannya!

*bersambung...*