

三重积分算法的一种直观理解

苏文珣

(重庆电力高等专科学校 重庆 400053)

摘要:本文从高等数学教学实践出发,借助三重积分为“非均匀密度立体的质量”的物理模型,同时结合穿针法和截平面法,给三重积分的计算方法以一种全新的理解,有助于教学中学生更形象地理解和掌握三重积分的计算方法。

关键词:三重积分 质量 非均匀密度

中图分类号:G64

文献标识码:A

文章编号:1673-9795(2009)12(a)-0081-01

牛顿——莱布尼兹公式给出了定积分的计算方法,由此而演生的定积分元素法解决了计算已知平行截面面积的立体体积,进而又解决了曲顶柱体的体积计算,给二重积分化为二次积分以一个易理解的几何解释。但由于三重积分的积分区域已是一个空间的立体,无直观的几何模型来辅助理解,因而往往需借助物理模型来作解释,如非均匀密度的立体的质量,虽然利用分割、取近似、求和、取极限的元素法不难理解的,可对于三重积分的计算要化为三次定积分,为什么必须只需化为三次定积分,且在化为三次定积分的过程中可以先求一个定积分,结果再求一个二重积分呢(穿针法)?或者先求一个二重积分,再求一个定积分(截平面法)?怎样理解这里的定积分和二重积分是理解三重积分算法的关键所在,那么除元素法外有没有更为直观的方法可以帮助我们理解呢?

1 分析问题

既然三重积分没有恰当的空间几何模型帮助我们理解,对于它的计算过程,习惯上我们也使用三重积分的物理模型如非均匀立体的质量来认识它,而且我们已经利用定积分和二重积分很好地解决了理想的非均匀密度的直线段和平面薄片的质量,那么为何不将空间立体的质量问题化为平面薄片或直线段质量问题,如果可以的话,这不正好是三重积分计算过程中的二重积分与定积分吗?

2 解决问题

定义:设空间立体 Ω ,在某一平面上的垂直投影区域为质平面 D ,若它在某一直线上的垂直投影为质线段 L ,质平面上任一点为过该点且垂直于质平面的直线被立体所截得的位于立体内部的质点,质线段上任一点为过该点且垂直于质线段的平面截立体所得的截面的质点。

2.1 穿针法

(如图1)设函数 $f(x, y, z)$ 在空间闭区域

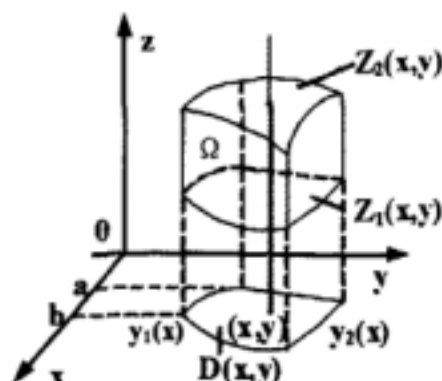


图 1

Ω 上连续且大于零,平行于 Z 轴的且内部的直线与 Ω 至多有两个交点。投影到 XOY 面上得一平面闭区域 D ,以边界曲线为准线作母线平行于 Z 轴的 Ω 的表面为上下两曲面 $s_2: z_2(x, y)$ $z_1(x, y)$,其中: $z_2(x, y), z_1(x, y)$ 在 D 上连续,且 $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ 。

任给 $(x, y) \in D$,过点 (x, y) 作平行于 Z 轴的直线必从 s_1 穿入 s_2 穿出 Ω ,设与 s_1, s_2 的交点 A, B 的竖坐标为 $z_1(x, y), z_2(x, y)$ 。

设想将立体 Ω 作垂直压缩成投影平面薄片,即质平面。这样立体的质量也就是投影平面的质量,即 $M_\Omega = M_D$,而对于 D 上任一点 $C(x, y)$ 实际上也是由线段 BA 压缩而成,故其质量也就是线段 BA 的质量,即 $M_C = M_{BA}$ 。

又当 x, y 取定时,线段 BA 的密度为 Z 的函数 $f(x, y, z)$,且 $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$ 。线段 BA 的质量为:

$$M_{BA} = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = F(x, y)$$

因为点 (X, Y) 为质线段 BA 的质点,所以就平面薄片 D 来说,函数 $F(x, y)$ 也就是点 (X, Y) 处的密度,故根据二重积分应用于求非均匀密度的平面薄片的质量可知:

$$M_D = \iint_D F(x, y) dx dy = \iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

若 D 又可表示成:

$$a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

则

$$M_D = \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right]$$

而 $M_\Omega = \iiint_\Omega f(x, y, z) dv = M_D$,若将其投影到其它坐标面上可得其余几种积分顺序的计算方法(见图1、2)。

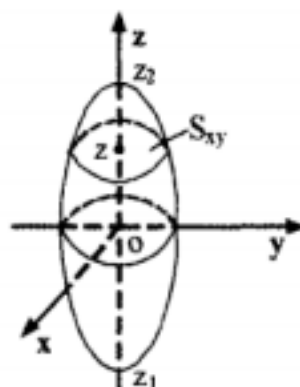


图 2

$z)$ 和 Ω ,将 Ω 沿 z_1, z_2 ,则线段 $z_1 z_2$ 为 Ω 的质量在 XOY 面的平均质量 M_z 也

x, y 的函数,

S_{xy} 为一非均匀平面薄片,其密度就是 $f(x, y, z)$,故其质量为:

$$M_{S_{xy}} = \iint_{S_{xy}} f(x, y, z) dx dy = F(z)$$

随着 Z 取值的不同, $F(z)$ 也表示不同截面的质量,同时 Z 又是该截面的质点,因此函数 $F(z)$ 也就是线段 $z_1 z_2$ 上任一点 Z 处的密度,故线段 $z_1 z_2$ 的质量即立体的质量为:

$$\begin{aligned} M_{z_1 z_2} &= M_\Omega = \int_{z_1}^{z_2} F(z) dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \left[\iint_{S_{xy}} f(x, y, z) dx dy \right] dz \\ &= \iiint_\Omega f(x, y, z) dv \end{aligned}$$

同样地,将立体投影到其它坐标轴上将得到其余两种形式的积分方法。如果我们将非均匀密度的平面薄片压缩到坐标轴上,不难理解上述的二重积分化为二次积分,进一步,也就不难理解上述的三次积分。

在上述过程中,定积分被理解为线段的质量,二重积分被理解为平面薄片的质量,在穿针法中立体质量为平面薄片的质量;在截平面法中,立体质量为线段的质量。类似于定积分与二重积分给面积体积赋以负值一样,我们给质量也赋以负值则不难认识上述的三重积分对于 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上小于零也成立。

3 结语

数学来源于万事万物的高度抽象与概括,恰当的物理模型有助于我们更好地理解一些概念、理论、方法,使之变得直观而易于接受。这不仅可以降低学生学习理论的难度,又可以加强理论与实践的联系,提高应用理论知识解决实际问题的能力。

参考文献

- [1] 韩成茂,高卫华.利用积分的物理意义推导三重积分的两个公式[J].科技信息(学术版),2008(27).
- [2] 何事天,柴春江.高等数学研究[J].2005(8).
- [3] 杨玉敏.三重积分的计算方法小结[J].鞍山师范学院学报,2007(2).

三重积分计算法的一种直观理解

作者：[苏文珣](#)

作者单位：[重庆电力高等专科学校, 重庆, 400053](#)

刊名：[中国科教创新导刊](#)

英文刊名：[CHINA EDUCATION INNOVATION HERALD](#)

年，卷(期)：[2009, \(34\)](#)

引用次数：[0次](#)

参考文献(3条)

1. 韩成茂. 高卫华 利用积分的物理意义推导三重积分的两个公式 [期刊论文] -科技信息(学术版) 2008(27)
2. 何率天. 柴春江 查看详情 [期刊论文] -高等数学研究 2005(8)
3. 杨玉敏 三重积分的计算方法小结 [期刊论文] -鞍山师范学院学报 2007(2)

相似文献(6条)

- 1.期刊论文 [张鑫](#). [崔永强](#). [ZHANG Xi CUI Yong-qiang](#) 求物体质量要准确把握积分概念 - 株洲师范高等专科学校学报2007,12(2)
文章分别用定积分、二重积分和三重积分对一道求质量的数学应用题进行了求解,通过对比,进一步促进学生全面把握积分的概念.

- 2.学位论文 [王为标](#) 有限长声表面波器件的精确模拟 2004

表面声波器件已广泛应用于雷达、通信等领域。特别是在移动通信系统中，需要大量的高频低损耗高性能表面波器件。目前广泛使用的等效电路模型以及耦合模理论 (COM)等唯像模型，很难精确的预测表面波滤波器通带内的损耗，因为这些模型通常忽略了换能器和反射栅的末端效应，以及体波散射引起的损耗。声表面波领域的器件设计与理论研究均迫切需要更加严格的理论工具以实现 对器件的精确模拟，尤其是对插入损耗的精确预测。

广义格林函数理论是实现声表面波器件精确模拟的理论基础。本文首先讨论了用矩阵法计算慢度域的广义格林函数的详细过程，矩阵法与经典的 Christoffel 方程法相比，优点在于在数学处理和程序运算要简洁的多，使得程序编写的工作量大为减少。空间域广义格林函数由慢度域的广义格林函数作付氏变换得到。但是慢度域广义格林函数快速变化，且具有极点，这给付氏变换的积分运算带来困难。根据其物理性质，将慢度域广义格林函数分解成若干个部分的和，这些部分各自的积分运算能够得到解析解或者适宜于数值计算。这样我们便得到空间域广义格林函数的严格计算公式。通过对表面波常用材料的慢度域广义格林函数的分析和归纳，我们发现慢度域广义格林函数均具有一定的对称性，到目前为止，共发现有四种不同类型的对称性。对广义格林函数对称性的认识有助于对材料性质的进一步理解和广义格林函数的进一步应用。

从严格的广义格林函数理论和有限长表面波器件的边界条件出发，将界面上的电荷和应力分布展开为Fourier级数，并且将电极的质量加载效应考虑在内，导出了有限长声表面波器件的理论模型。利用格林函数法（或称为边界元法boundary element methodBEM）模拟半无限大基片表面上的应力和电荷对声波的激发。用有限元法（finite element method，FEM）求解电极的质量加载效应，得到电极与基片界面上位移与应力的关系。联合有限元法和边界元法，即可得到系统的线性方程组。因此这一方法一般称为有限长器件的有限元／边界元法FEM／BEM。快速准确的计算出系统方程组的系数矩阵是这一方法的关键。通过复杂的数学处理，我们将计算系数矩阵的二重和三重积分降为易于数值计算的一重积分或者得到解析形式。在理论推导和程序计算中，我们采取了一系列的措施使得计算量降到最低水平。

我们将有限元／边界元法理论这一有力的工具成功地应用于三个具体问题的研究 1)（由有限元／边界元法可以得到电极与基片界面上的电荷与应力分布，由此出发，我们推导了声表面波器件向基片体内辐射的三种体波各自的辐射功率以及辐射功率的角度分布的计算公式。将标量阻密度的概念推广到包括质量加载效应在内，可以表示为三4x4量量的广义阻密度。广义阻密度将体波的辐射功率与表面应力和电荷分布直接联系起来2)（声表面波器件 (DM滤波器）往往存在局部的非同步区域。在非同步区域上体波散射引起的损耗是低损耗器件的主要损耗之一。为了研究这种现象，我们以典型的hiccup单端对谐振器作为参考结构，用结构参数缓慢变化的间隙取代其中间的自由间隙。我们发现改变间隙参数可以在保持谐振频率不变的同时，大大提高谐振器的Q值。对两种间隙结构进行了对比，一种是分布间隙，另一种是风琴间隙，结果表明前者优于后者。将DM滤波器中的金属化间隙以分布间隙取代，我们找到一个优化的分布间隙结构，使插损降低3dB （3）。最近人们发现在普通的Z-LiNbO<3上可以激发漏纵波，而且在适当的电极厚度下可以实现良好的器件性能。我们着重研究了基Z-LiNbO<3上漏纵波同步单端对谐振器的谐振特性随膜厚、金属化比，反射栅指条数，换能器指条数的变化关系。

本文在Yentura理论的框架下，建立了有限长器件的精确分析理论—有限元／边界元理论，在此过程中，我们对这一理论作了一系列的改进，使之成为一套完整的、严密的、高效率的精确理论。并应用这一理论做了几个具有创新性的工作1)研究了声表面波器件中非同步区域体波辐射的规律，并得到了可以大幅度减少体波散射引起的损耗的优化结构；2) 将有限元／边界元理论进一步应用于体波辐射的分析，推导了三个体波各自的辐射功率以及辐射功率随能流角度分布的计算公式，并推广了阻密度的概念，对体声波辐射和散射的理论有重要价值3) 对有重要实用意义的氮化锂上纵漏波给出了许多规律，为今后研究该波动模式的机制提供了重要的素材。

- 3.期刊论文 [罗俊芝](#) "物理意义"下积分问题的解决 - 高等数学研究 2008,11(2)

数学是物理的基础与工具物理为数学提供背景和应用借助物理意义去构建和理解数学知识十分必要特别地 我们在积分问题中讨论物理意义的应用,比如在"质量"意义下进一步把握三重积分的定理在"质量"与"质心"意义下处理重积分、线面积分的计算问题还可以进一步挖掘或转移数学知识本身的物理意义以利于问题的进一步解决.

- 4.学位论文 [詹卫许](#) 无线中继网络统计模型及其特性研究 2009

频谱带宽濒临饱和与发射功率受限是4G移动通信系统面临的主要技术挑战之一。无线中继技术能取得新的空间分集增益——协作分集，能节省频谱资源，减少通信盲区并扩大小区的覆盖范围，不需要在一个终端上布置多根天线就能够增强系统通信质量，同时提高传输容量，是目前无线通信领域的研究热点之一。

信道统计特性是研究无线通信的基础，直接关系到通信系统性能、天线选择、通信距离计算以及编码调制方式选择等方面的理论研究及其优化设计和工程实施。为此，本文从理论上研究了无线中继信道的二阶统计特性。其中针对三节点的无线中继系统，研究了瑞利(Rayleigh)衰落条件下、基于不同中继策略的无线中继信道的平均幅度穿越率LCR和平均衰落时间(AOD)，其关键点在如何将传统的直接计算方法需要进行三重积分表达式化简为一重积分表达式。运用我们得到的简化结果可以方便地计算相应的LCR和AOD从而刻画无线中继信道在时间上的衰落频率和严重程度，为确定符号速率、数据包长度和时序长度等无线中继网络系统参数设计问题提供参考依据。

在蜂窝系统中，当用户离基站较远、信号比较弱时不能够和基站进行直接通信，借助空闲的用户终端作为中继进行协作通信，能提高用户的信噪比并满足用户通信的要求，也能够提高整个系统的吞吐量。对此，本文提出了工程上易于实现的两两匹配的用户协作策略，建立了基于系统和容量最大化的“最大容量的匹配模型”和系统和功率最小化的“最小功率的匹配模型”。并通过图论的相关理论和方法，把上述两种模型转化为相应图论中的加权

二分图的最优匹配问题，最后利用计算量较小的uhn-Munkre算法得到问题的最优解，研究结果表明该方法能够较大地提高系统的和容量和节省系统的总功率。

未来的无线通信，要求不仅在物理层PHY能够为用户提供高速的传输速率，而且在媒体接入层MAC能够满足用户的QoS需求。本文通过运用排队论、马尔可夫(Markov)过程、流体模型、矩阵论等理论和分析方法研究了三节点的无线中继增量网络数据队列的统计模型及其统计特性和有效容量。首先根据无线信道的Markov过程模型建立了无线中继网络的数据包队列状态模型，模型中信息源节点信息包的到达过程建模为马尔可夫调制泊松过程(MMPP，并使用一个依赖于信道状态信息的马尔可夫相位过程刻画发射过程，从而建立了一个描述物理层和媒体层的理论模型，得出了系统容量的概率平衡方程，再利用母函数方法求出了用户数据包队列长度的平稳分布概率，通过矩阵几何分析方法获得了系统有效容量表达式和系统平衡的条件，同时对队列分布概率、平均长度等参数进行了理论分析。理论分析结果与计算机仿真结果一致。

5.期刊论文 任惠娟. 贺西平. 胡新伟. REN Hui-juan . HE Xi-ping . HU Xin-wei 方形活塞声源辐射阻抗的数值计算 -

陕西师范大学学报(自然科学版) 2006,34(3)

利用高斯数值积分方法推导了方形活塞辐射阻抗的三重积分表达式计算了方形活塞声源的辐射阻抗结果表明 方形活塞的辐射阻抗是波数和活塞边长乘积的函数 系统在高频段向外辐射的声功率比低频段大高频段同振质量比低频段小 .

6.学位论文 强建科 起伏地形三维电阻率正演模拟与反演成像研究 2006

长期以来，研究起伏地形条件下的地电异常是电法勘探中一个难题，一方面是由于问题本身比较复杂，另一方面是由于不同时期科技发展水平达不到，比如，三维问题，如果计算机的速度和内存发展不够快，即使有再好的理论作指导也无法实现。如今计算机的发展已经能够满足速度、精度的要求了，也就为研究更复杂的地球物理问题提供了有利的发展机会。

起伏地形二维或二维半电阻率正演模拟与反演成像经过国内外专家十多年的努力，已经基本解决，而且已广泛应用于生产实践中。水平地形三维正演模拟与反演问题最近几年也有较快发展，研究的方法主要是积分方程法、有限差分法、有限单元法、共轭梯度法等。三维起伏地形对电阻率的影响问题，徐世浙用边界元法较好的解决了正演问题。本文在第一章绪论部分详细讨论了电阻率法的研究意义以及研究方法、正演模拟和反演成像等方面的最新发展。电阻率法方面的这些研究成果为进一步解决三维起伏地形下电阻率的正演模拟和反演成像奠定了基础。

在数值模拟方法中，有限单元法具有很多优点：精度高、解题过程比较规范、能自动满足内部边界条件、适合于各种复杂的物性分布问题。所以本论文的研究方法选择了有限单元法。有限单元法属于区域型数值计算方法，需要在全区域内进行单元剖分。剖分后的单元和节点数目较大，最后得到一个大型线性方程组，求解该方程组就可得到所有节点上的电位值。

地形起伏会导致稳定电流场畸变，模拟起伏地形应该选择合适的剖分单元，三棱柱具有这样的特点，只要给定地面上任何三点的高程，就可以唯一确定一块小面积，而且对高程的变化没有限制，这就意味着三棱柱单元可以模拟任意坡度的地形。本文第二章从稳定电流场的基本方程出发，推导了三维区域满足的边值问题，进而把边值问题转化为相应的变分问题，得出变分方程。求解变分方程，需要把目标区域离散成许许多多的三棱柱单元，推导单元三线性插值型函数是有限单元法的关键。本文涉及的三棱柱是含有地形特征的不规则三棱柱，有五个面六个节点，单元刚度矩阵含有元素，其中有21个非零元素，每个元素由多项含有5个变量的三重积分组成，如果手工计算非常复杂且容易出错，本文通过编制积分算法程序，只要计算一次就可得12项元素的数学表达式。

研究大型稀疏矩阵的存储问题可以节约内存，提高运算效率。在第二章中，我们采用变带宽、一维数组方式集成所有单元的刚度矩阵，可以节约大量内存。解线性方程组时利用乔勒斯基分解法只分解一次大型稀疏矩阵，通过同代的方法，可以很快解出上百个不同供电点位置时所有网格节点的电位值，这项措施是提高三维止演模拟速度的一个重要环节。试算结果表明，在CPU主频为2.9GHz的计算机上，当依次在25个地面节点上供电，计算18630个节点上的电位时所花费的时间只有分钟。

为了验证正演模拟算法的正确性，本文在第二章第七节计算了几种标准模型，计算结果满足误差要求。如二层、三层水平地电断面，三维结果与解析解或二维数值解基本一致，相对误差小于%；在二维山脊上的二极剖面 and 三维山谷上的中间梯度剖面上，其三维计算结果与相应模型的土槽实验结果或边界元法计算结果基本吻合。

众所周知，地形对电阻率法勘探有显著的影响，严重时会使实测数据面目全非，要正确处理和解释这些野外测量数据，首先必须从理论上分析、认识各种地形情况下异常畸变的特征，因此，第三章讨论了复杂地形对直流电法视电阻率的影响问题。在直流电阻率法中，电极的排列组合有很多种，如中间梯度法、二极法、三极法、对称四极法、偶极法等等，可以做剖面测量，也可做测深断面；同一种地形对于不同电极装置，其纯地形引起的异常也完全不同。本章计算了一些特殊的地形纯异常，如三维山谷、三维山脊，二维山谷山脊组合地形以及极端情况下的陡坎地形，一方面说明三维正演算法适合各种地形模拟，另一方面也为其他研究者提供一些参考数据。

本文第四章研究了三维反演问题，总体思路为选择比较成熟的阻尼广义逆迭代反演方法，首先假定地下介质是均匀分布的，用正演的方法计算电场分布，并计算视电阻率。然后与实测的视电阻率值进行对比，如果两者误差较大就修改原来的模型，再进行正演计算，重复上述过程，直到计算值与实测值之间的误差达到规定的要求，此时得出的模型即为所求结果。上述过程就是将非线性地球物理反问题线性化后组成线性方程组求解的过程，其中最关键的技术是形成线性方程组的系数矩阵，也就是偏导数矩阵或雅克比矩阵。偏导数矩阵的计算时间和计算精度，直接影响反演计算的时间和精度，因此，偏导数矩阵的计算是反演问题的关键之一。根据稳定电场的互换原理，通过组合正演过程中计算的各节点电位值，形成电位对模型电导率的偏导数，再按电极排列装置合成视电阻率对模型电导率的偏导数，这样可以大大缩短形成雅克比矩阵的过程，节约计算时间。该矩阵常常不对称，求解时采用了奇异值分解的方法。为了抑制病态的奇异值，需要增加一个阻尼系数，以便使反演过程稳定收敛。模型计算表明，三维反演思路和过程是正确的，而且对于低阻体反演的结果好于高阻体。但是，总体而言，三维反演的效果还不是很理想，还需要继续优化算法，提高反演成像的质量。

本文在第五章总结了研究中的一些主要成果，并对今后进一步优化完善提出了建议。主要的创新点在于：

- (1) 推导了起伏地形三维有限单元中三棱柱单元三线性插值函数；
- (2) 编制了一套模拟三维起伏地形条件下各种排列装置的视电阻率算法程序，并采用了一些措施，大大提高了计算效率；
- (3) 推导出含有地形信息的雅克比矩阵，实现了起伏地形三维反演成像算法；
- (4) 计算分析了各种复杂地形的视电阻率异常，证明正演程序适应各种地形条件。

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_rdsta200934064.aspx

下载时间：2010年5月24日