三重积分

#### 定义

* + 来源：三维空间中非均匀物体的质量问题
  + 简明定义：

相当于求点密度为的体积区域的总质量。

：积分空间区域。

：被积函数 🡪 密度函数。

：体积元素，

直角坐标可取

柱面系方程可取

球面系可取

：

* + 定义：【标注关键字版本】

设 是定义在空间有界闭区域 上的有界函数，将 任意分割为n个小闭区域 ， **…** ，用 来表示第 个小闭区域的体积，在每一个 上任取一点

作乘积 并作和式 （该和也称为**黎曼和**），如果当各小闭区域的直径中的最大值趋于零时，和式的极限总存在，则称此极限为函数 在闭区域的三重积分，记作 ，即

其中称为**被积函数**，被称为**被积表达式**，称为**体积元素**，称为**积分区域**。

* + 理解：

1. 看作三维空间中非均匀物体的质量问题：

：定义了空间每一点 (x,y,z) 的密度。

：物体质量。

1. 前提条件： 可积的前提条件是 极限 存在。
2. 被积函数在积分区域连续 🡪 可积

当 在积分区域 连续 时，

🡪 物体一定可以被分成若干质量有限的小块。

🡪理解2中提到的极限一定存在。

🡪被积函数在区域可积。

1. 根据定义，只需

微分后的每个小区域直径最大值 成立，

原积分结果就正确，这是对 的唯一限制，

书中定义：

设 是定义在空间有界闭区域 上的有界函数，将 任意分割为n个小闭区域 ， **…** ，用 来表示第 个小闭区域的体积，在每一个 上任取一点

作乘积 并作和式 （该和也称为**黎曼和**），如果当各小闭区域的直径中的最大值趋于零时，和式的极限总存在，则称此极限为函数 在闭区域的**三重积分**，记作 ，即

其中 称为被积函数， 被称为被积表达式， 称为体积元素， 称为积分区域。