Interpolación

La interpolación es un proceso por el cual se define un valor en un punto cualquiera a partir de los valores conocidos en algunos puntos dados. Por ejemplo: podemos tener un segmento con un color en cada extremo y deseamos hallar el color resultante para una posición intermedia. Otra consulta se puede dar cuando tenemos temperatura, presión y viento en distintas localidades que cuentan con estaciones meteorológicas y queremos estimar el clima en un pueblo cualquiera. Suponiendo que las estaciones están razonablemente cercanas, surgen dos preguntas: ¿que estaciones considero? y ¿cómo calculo los valores desconocidos en función de los conocidos?

En general, tenemos un conjunto finito de nodos o puntos fijos con valores nodales asociados a cada uno de ellos: $\{(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)\}$, donde $\mathbf{x}_i = \{x_i, y_i(, z_i)\}$ es la posición del i-ésimo punto y $\mathbf{v}_i$ es un valor o un conjunto de valores conocidos y asociado al punto fijo; se pretende encontrar el valor $\mathbf{v}$ asociado a un punto de coordenadas $\mathbf{x}$ cualquiera.

El proceso de interpolación define el valor asociado al punto variable. Podría, por ejemplo, asignarse el valor del punto más cercano o una combinación de valores cercanos o de todos los conocidos. En una sola dimensión es muy sencillo encontrar el punto más cercano o los dos nodos que "encierran" el punto buscado, pero en más dimensiones resulta más complicado.

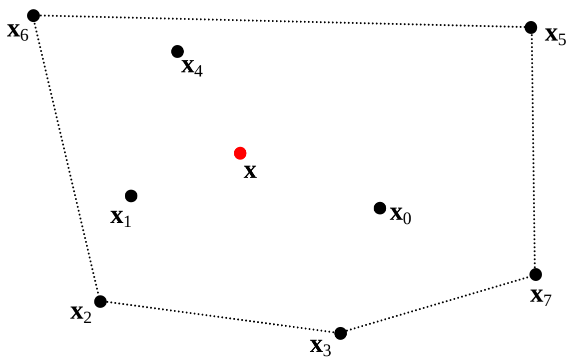
La forma estándar, para variables continuas, consiste en hacer una interpolación lineal o promedio ponderado:

$$v(\mathbf{x}) = (\sum w^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)\, v_i) / \sum w^j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \quad \equiv \quad v(\mathbf{x}) = \sum \alpha^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)\, v_i \qquad (\alpha^i = w^i / \sum w^j \Rightarrow \sum \alpha^i = 1)$$

Como puede verse, el valor v en el punto variable $\mathbf{x}$ se calcula asignando un peso w^i a cada punto fijo. El peso depende del punto fijo en cuestión y de la posición del punto variable.

Normalmente se pretende que el peso de cada punto esté en relación inversa con la distancia, de ese modo el valor estará más influenciado por los puntos más cercanos.

Las coordenadas del punto variable, también se pueden obtener como interpolación lineal de los puntos fijos. Este es el mecanismo para calcular los pesos de la interpolación: una vez hallados los pesos para las coordenadas, se aplican del mismo modo al valor asociado.



Del cálculo de la posición:

$$\mathbf{x} = \sum \alpha^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)\, \mathbf{x}_i \qquad (\sum \alpha^i = 1)$$

se obtienen los α^i y luego con esos pesos se calcula:

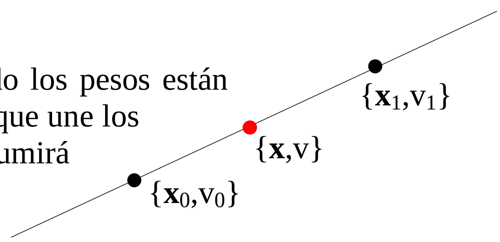
$$v = \sum \alpha^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)\, v_i$$

Los valores nodales y las coordenadas reciben el mismo tratamiento.

En la figura se representa un conjunto de puntos fijos $\mathbf{x}_i$ y un punto variable $\mathbf{x}$, para el cual se pretende interpolar un valor, asignando pesos a los puntos fijos. Además se muestra también el **envoltorio convexo o cápsula convexa o *convex-hull*** del conjunto de puntos fijos. El envoltorio convexo se define como el menor convexo que contiene al conjunto de puntos; es la forma que tomaría una banda elástica envolviendo al conjunto. Ese es el límite de las posiciones que pueden obtenerse con pesos positivos.

El caso más simple lo constituye la interpolación 1D entre dos puntos:

$$\mathbf{x} = \alpha^0\, \mathbf{x}_0 + \alpha^1\, \mathbf{x}_1, \text{ con } \alpha^0 + \alpha^1 = 1.$$



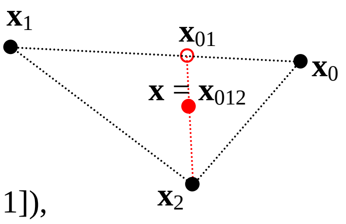
El resultado es un punto en la línea que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_1$. Cuando los pesos están limitados al rango [0,1] el punto variable estará en el segmento que une los dos puntos y se garantiza que cualquier variable asociada asumirá también un valor intermedio. Si en cambio, algunos de los parámetros sale del intervalo [0,1], el punto sale del segmento y el proceso se denomina extrapolación, el valor asociado también sale del intervalo $[v_0, v_1]$.

Para aclarar este último punto reescribimos la ecuación anterior, asumiendo que v representa cualquier coordenada (x, y o z) o cualquier valor asociado (temperatura, presión, humedad, color):

$$v = \alpha^0 v_0 + \alpha^1 v_1 = (1-\alpha^1) v_0 + \alpha^1 v_1 = v_0 + (v_1 - v_0)\, \alpha^1.$$

Así vista la ecuación, cuando $\alpha^1 \in [0,1]$, queda claro que v adopta valores entre v_0 y v_1, incluidos v_0 y v_1, para cualquier variable que sea: coordenada o variable anexada. El punto se mantiene en el envoltorio convexo de los dos puntos fijos, que es simplemente el segmento $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ y cualquier valor se mantiene en el rango de valores $[v_0, v_1]$. El procedimiento, en este caso, se denomina **interpolación** en sentido estricto o bien combinación convexa.

Si se pretende calcular una interpolación (o extrapolación) lineal con dos puntos fijos, no pueden obtenerse puntos fuera de la recta que los une y por lo tanto la interpolación no está definida fuera de la recta.



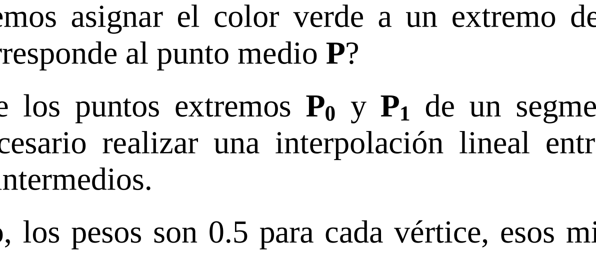
Pasemos a tres puntos fijos en 2D. En la figura ahora agregamos el punto $\mathbf{x}_2$. Podemos ver a $\mathbf{x}_{01}$ como combinación afín 1D entre los puntos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ y también se ve a $\mathbf{x}_{012}$ como combinación afín de $\mathbf{x}_{01}$ y $\mathbf{x}_2$ y, por lo tanto de $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

En el caso convexo (cuando los coeficientes α están limitados al rango [0,1]), el resultado obtenido estará dentro del triángulo marcado: el envoltorio convexo de los tres puntos.

Se pueden mencionar también algunas aplicaciones interesantes. Por ejemplo, se suelen obtener datos del clima (más de un valor: presión, temperatura, dirección del viento, velocidad, etc.) en distintos nodos o puntos de muestreo, que en este caso son estaciones meteorológicas. Para obtener en forma aproximada un valor en una localidad cualquiera se puede realizar una interpolación lineal, pero no queda claro cuales estaciones meteorológicas deben tenerse en cuenta, cuales tienen peso no-nulo y que peso tiene cada una. Un método estándar consiste en realizar una división del envoltorio convexo en triángulos no solapados y cuyos vértices son los nodos, esto es: una triangulación del dominio. Para calcular el valor en un punto cualquiera se pueden utilizan sólo las estaciones del triángulo que encierra al punto. Ésta técnica se conoce como interpolación poli-lineal, las variantes están dadas por los distintos métodos para realizar la triangulación.

Interpolación de color en un segmento

Supongamos que se desea dibujar una línea entre los puntos $\mathbf{P_0}$ y $\mathbf{P_1}$ pintándola con un degrade de colores que va del rojo al verde:



Para realizar tal tarea, podemos asignar el color verde a un extremo de la línea, y el rojo al otro extremo. ¿Pero que color corresponde al punto medio **P**?

Basándonos en los datos de los puntos extremos $\mathbf{P_0}$ y $\mathbf{P_1}$ de un segmento y sus valores de color (R;G;B) asociados, será necesario realizar una interpolación lineal entre los puntos $\mathbf{P_0}$ y $\mathbf{P_1}$ para obtener los valores de color intermedios.

Dado que es el punto medio, los pesos son 0.5 para cada vértice, esos mismos pesos se usan para la interpolación:

$v = (1-0.5)\, v_0 + 0.5\, v_1$

Recordemos que debido a que deseamos obtener el color resultante en el punto central **P** del segmento, debemos resolver tres ecuaciones, correspondientes a R, G y B. Es de importancia mencionar que en un extremos del segmento tenemos color rojo (con valores RGB = 1;0;0) y en el otro extremo verde (con valores RGB = 0,1,0). Por lo tanto las tres ecuaciones quedan:

$R = (1-0.5)\ 1 + (0.5)\ 0 = 0.5 + 0 = 0.5$

$G = (1-0.5)\ 0 + (0.5)\ 1 = 0 + 0.5 = 0.5$

$B = (1-0.5)\ 0 + (0.5)\ 0 = 0 + 0 = 0$

Finalmente, el color resultante en el punto central **P** del segmento es RGB = 0.5;0.5;0.

Este resultado analítico se puede verificar con los valores informados en la ventana de consola correspondiente al ejemplo del triángulo de color.

Supongamos que queremos el color de un punto que esta más cerca del vértice rojo, digamos 1/4 y ¾, o 0.32 y 0.68, pues bueno, esas mismas proporciones son los pesos que deben aplicarse, el peso más grande corresponde al vértice más cercano.

¼, ¾: RGB=(¾,0, ¼)

0.32,0.68: RGB=(0.68,0,0.32)

Como dijimos que estábamos más cerca del vértice rojo, los pesos mayores son para el color rojo.

Un ejemplo entre otros dos colores: P_0 con RGB=(0.3,0.5,0.7); P_1 con (0.8,0.4,0.2); el punto que queremos calcular está mas cerca de P_0; a 1/3 del camino hacia P_1:

P: RGB=(2/3*.3+1/3*.8, 2/3*.5+1/3*.4, 2/3*.7+1/3*.2)

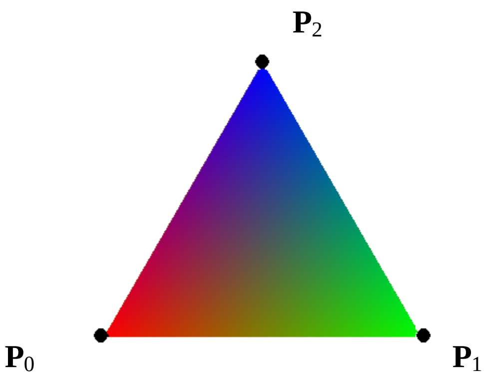
El 2/3 surgió de la suma uno.

Interpolación de color en triángulos

Lo visto en el ejemplo anterior se puede llevar a triángulos. Como vimos en la unidad de color, si configuramos OpenGL para realizar un sombreado de Gouraud (GL_SMOOTH), calculará el color en los puntos intermedios por medio de la interpolación lineal. Es decir, podemos asignarle un color distinto a cada vértice de un triángulo y hacer que OpenGL interpole automáticamente estos colores en su interior.

Analizaremos ahora la forma analítica de resolverlo, que deriva de la empleada en segmentos anteriormente.

Utilizaremos como ejemplo, el caso de un triangulo a cuyos vértices se le asignan los colores primarios.



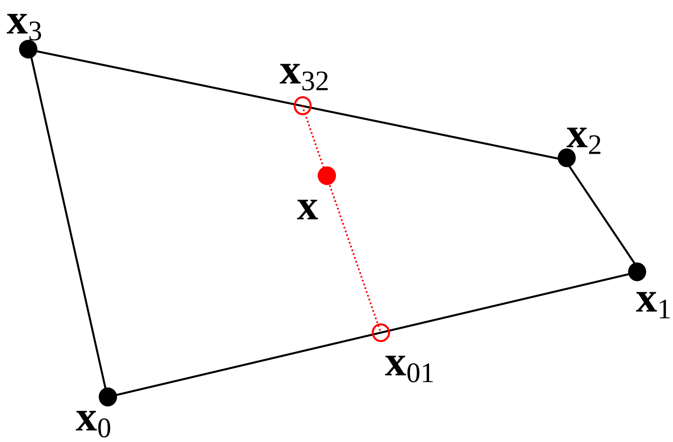
El baricentro o centro de gravedad de un triángulo de vértices {A, B, C} es el punto que se obtiene promediando los tres vértices con un peso de 1/3 para cada uno. El color en el baricentro del triángulo será entonces un gris, con RGB = (1/3; 1/3; 1/3).

Este resultado analítico se puede verificar con los valores informados en la ventana de consola correspondiente al ejemplo del triángulo de color.

Para cualquier otro punto, dadas las proporciones de coordenadas, se utilizan las mismas proporciones para calcular el color (o la textura por ejemplo).

Interpolación bilineal

Cuando disponemos de cuatro puntos en el espacio con valores asociados podemos usar la interpolación bilineal para obtener los valores intermedios. Se denomina así a una forma particular de expresar, en función de dos parámetros, la combinación afín de cuatro puntos que forman un cuadrángulo, en el plano o en el espacio.



La combinación bilineal consiste en tomar la misma combinación afín en dos líneas opuestas, con uno de los parámetros y luego interpolar los dos puntos resultantes con el otro parámetro:

$$x_{01} = (1-u)\ x_0 + u\ x_1$$

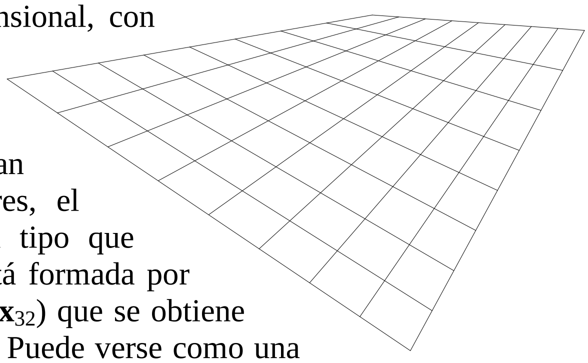
$$x_{32} = (1-u)\ x_3 + u\ x_2$$

$$x = (1-v)\ x_{01} + v\ x_{32} = (1-v)\ (1-u)\ x_0 + (1-v)\ u\ x_1 + v\ u\ x_2 + v\ (1-u)\ x_3$$

El resultado es idéntico si primero se hace la combinación con v en los segmentos ($\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_3$) y ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$), para luego combinar con u los puntos resultantes (probar).

La denominación de bilineal proviene del uso de los parámetros, normalmente identificados con las coordenadas de un cuadrado unitario en el espacio de parámetros. Un polinomio formado así, con productos de monomios lineales, sin ningún término cuadrático en u ni en v, se denomina bilineal.

Los cuatro parámetros de la combinación afín resultante: {(1-v) (1-u), (1-v) u, v u, v (1-u)} suman uno y, si $u,v \in [0,1]^2$ también estarán en el rango [0,1]. El resultado es una interpolación lineal de los cuatro puntos y valores; una simple combinación afín, con una receta para la asignación de los pesos.

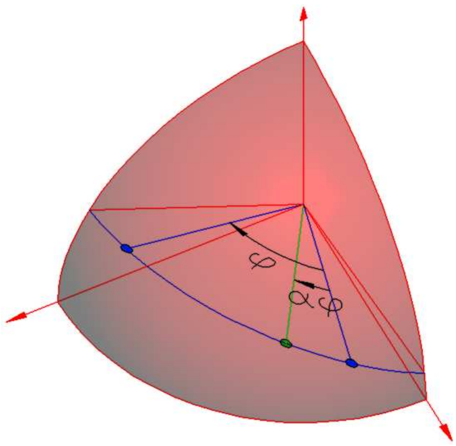


Es muy importante recalcar que en el espacio tridimensional, con cuatro puntos no coplanares, se obtiene una superficie reglada (bilineal), que tiene por bordes a los cuatro segmentos. Las coordenadas baricéntricas de cuatro puntos tienen tres grados de libertad porque suman uno; aquí, en cambio, hay sólo dos parámetros libres, el conjunto tiene una restricción paramétrica $\alpha^i(u,v)$ del tipo que mencionamos antes. La superficie es reglada porque está formada por una sucesión infinita de segmentos rectos como el ($\mathbf{x}_{01}$, $\mathbf{x}_{32}$) que se obtiene barriendo u entre cero y uno (lo mismo sucederá con v). Puede verse como una pompa de jabón entre cuatro alambres rectos no coplanares.

Interpolación esférica lineal o Slerp (Spherical Linear Interpolation)

La interpolación lineal funciona muy bien con valores lineales: aquellos que están en una línea, mientras se mueve el punto variable, varían igual que las coordenadas, ¿pero que pasa con los ángulos (o las normales o las direcciones o los ejes de rotacion)?. Todas esas magnitudes se definen mediante vectores unitarios; es decir que al cambiar de un valor a otro siempre la punta de la flecha del vector esta en una esfera de radio unitario. Para interpolar estas variables se utiliza la SLERP.

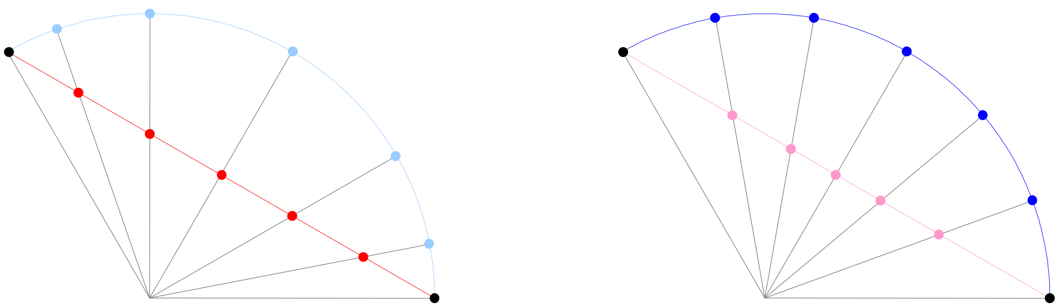
La SLERP se trata, entonces, de un método de interpolación entre dos puntos de una esfera unitaria y se utiliza para interpolar vectores unitarios. Se interpolan coordenadas de los vectores, aquí no hay otras variables asociadas.



La interpolación esférica entre dos puntos es un punto intermedio, pero en la esfera. Lo que se hace es una interpolación lineal de los ángulos centrales: Si $\varphi \in [0,180)$ es el ángulo central entre los puntos extremos, con vértice en el origen y $\alpha \in [0,1]$ el parámetro de la interpolación; queremos un punto intermedio, en el plano del ángulo, pero angularmente distanciado $\alpha\varphi$ del primer punto y en dirección al segundo punto:

$\mathbf{x} = \text{slerp}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \alpha)$ donde **x** son las tres coordenadas de un vector unitario.

La interpolación esférica es lineal en la superficie de la esfera pero no en el espacio, el camino recorrido por el punto móvil es un arco de longitud $\alpha\varphi$ (porque el radio es uno). El camino recorrido por unidad de "tiempo" ($d/d\alpha$) es constante, pero no el vector velocidad, que no cambia su módulo pero sí su dirección (aceleración centrípeta).



En las figuras de arriba se hace evidente la diferencia entre una interpolación lineal de direcciones y una esférica. La diferencia se puede apreciar visualmente al interpolar normales para iluminación.

Las fórmulas se pueden buscar en cualquier fuente, pero lo importante es saber que a los vectores unitarios no se los puede interpolar linealmente como antes.