# CONTENIDOS

# INTRODUCCIÓN

Hasta ahora vimos conceptos físicos claves para simular objetos en nuestros video-juegos, como fuerza, energía, trabajo y sistemas de resortes, entre otros.

Sin embargo, hemos aplicado esos conceptos sobre los cuerpos, suponiendo que estos últimos se comportaban como si fueran una partícula. Es decir, estudiábamos la dinámica de una partícula. Pero supongamos que ahora queremos simular la rueda de un vehículo... Aplicando solamente los conceptos que hemos visto, no podríamos hacerla girar, ya que al tratar al objeto como una partícula, la noción de rotación es inexistente, dado que el resultado de aplicar una fuerza sólo era lograr que el cuerpo se moviera.

Ahora vamos a ampliar nuestro estudio a objetos que ya no se comportan como una partícula, sino que tienen una forma determinada en el espacio y que, además de desplazarse, pueden rotar. Estos objetos son conocidos como *cuerpos rígidos.* Así, con estos nuevos conceptos, podremos describir la mayoría de los movimientos que utilizaremos en el desarrollo de videojuegos.

Como gran parte de las ideas que abordaremos aquí son muy parecidas a las que vimos cuando hablamos de partículas, simplemente ampliaremos los conceptos ya conocidos.

## 4.1. Cuerpos rígidos

**Cuerpo rígido**
Todo cuerpo cuyo tamaño y forma no cambian en el tiempo.

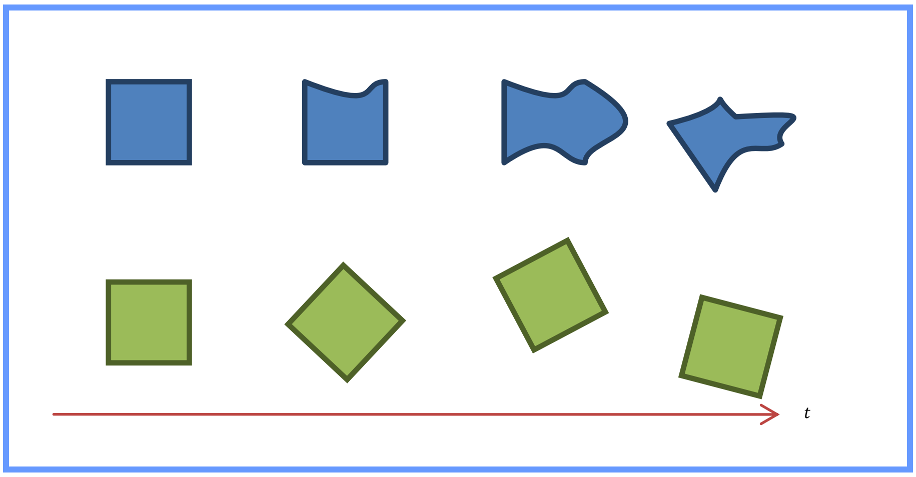
**Cuerpo blando**
También llamado soft body, es todo cuerpo cuyo tamaño y forma pueden cambiar en el tiempo.

Antes de proseguir debemos definir qué se entiende por cuerpo rígido y comprender por qué es distinto al concepto de partícula.

Se denomina *cuerpo rígido* a todo cuerpo cuyo tamaño y forma no cambian en el tiempo. También se puede definir como todo cuerpo que, dados dos puntos cualesquiera del mismo, la distancia entre ellos no cambia durante la simulación.

La gran mayoría de los objetos que vemos en los videojuegos son de este tipo. Cajas que se caen, torres que colapsan, vehículos de transporte, etc. Todos estos fenómenos son ejemplos de cuerpos rígidos.

Como contraposición a los cuerpos rígidos, tenemos los *cuerpos blandos* o *soft bodies.* Los mismos se suelen construir cuales redes de resortes, como vimos anteriormente, y se utilizan para simular partes orgánicas, pelo, ropa, etc.



En la figura anterior mostramos un ejemplo de un cuerpo rígido (verde) y un cuerpo blando (azul). El cuerpo rígido mantiene su forma a lo largo del tiempo, mientras que el otro puede ser deformado.

*Propiedades de los cuerpos rígidos*

Los cuerpos rígidos tienen una serie de propiedades que nos permiten describirlos y simularlos correctamente. Las más importantes son: *masa, momento de inercia, forma y centro de masa.* A lo largo de este capítulo iremos desarrollando cada una de estas propiedades en su contexto apropiado.

### 4.1.1. Movimiento de los cuerpos rígidos

Al igual que sucede con las partículas, para cambiar el estado de un cuerpo rígido es necesario aplicarle una fuerza. Esto se desprende de la primera ley de Newton, que ya hemos visto, pero que repetimos para recordarla:

> Un cuerpo sobre el que no actúa una fuerza neta se mueve con velocidad constante (que puede ser cero) y cero aceleración.

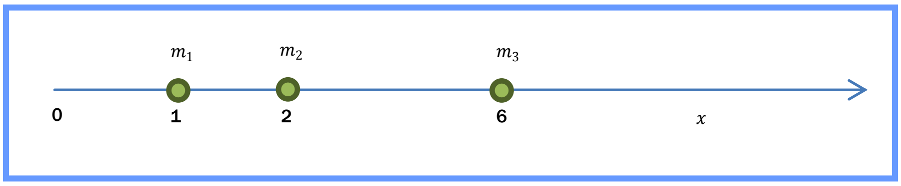
Esto es cierto en los cuerpos rígidos, pero la diferencia con las partículas reside en que la fuerza puede ser aplicada en diferentes puntos de los mismos, permitiéndoles así -además de desplazarse- rotar.

Estudiemos ahora en qué casos el cuerpo no rotará primero y luego trataremos de comprender la dinámica de rotación de un cuerpo rígido.

### 4.1.2. Centro de masa

Imaginemos que tenemos tres masas $m_1, m_2$ y $m_3$ , ubicadas a lo largo del eje $x$ en las posiciones 1,2 y 6, respectivamente, como se muestra en la figura:

**Centro de masa**
Es la sumatoria de todas las masas que componen un cuerpo, multiplicadas por sus posiciones, dividido por la masa total.




Ahora vamos a multiplicar cada masa por su posición y a sumarlas:

$$1m_1 + 2m_2 + 6m_3$$

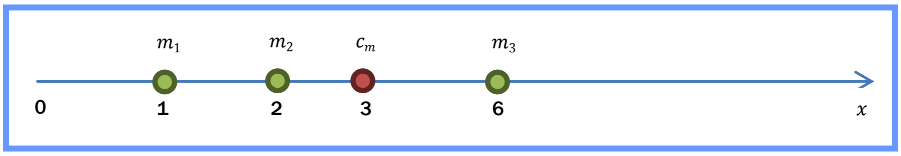
Luego, dividimos esta cantidad por la suma de todas las masas:

$$\frac{1m_1 + 2m_2 + 5m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Esta cantidad se conoce como el *centro de masa del sistema.* Supongamos que las tres masas son iguales a 1, por lo que obtendremos:

$$c_m = \frac{1 + 2 + 6}{3} = 3$$

En este caso, el centro de masa del sistema se encuentra en $x = 3$




Ahora, imaginemos que en lugar de tres partículas, tenemos *N* partículas. Entonces, el centro de masa se define como:

$$c_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{p_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Donde $\boldsymbol{p_i}$ es la posición de cada masa.

Esta cantidad es un escalar en 1D y un vector en 2D y 3D. Es decir, sumamos cada masa multiplicada por su posición y luego dividimos por la suma de todas las masas. Esto puede interpretarse como un promedio de las posiciones, pesada o ponderada por la masa.

Lo que obtenemos, entonces, es un punto que nos dará una idea de dónde se encuentra concentrada la masa en el sistema de partículas.

Ahora bien, esta definición sirve sólo para sistemas de partículas. ¿Qué sucede en el caso de un cuerpo rígido?

Podemos considerar que un cuerpo rígido está formado por muchas masas infinitamente pequeñas, ubicadas infinitamente cerca una de otra. Entonces, tendríamos que sumar estas infinitas masas multiplicadas por sus posiciones. Esto es, aplicar el caso anterior a una sumatoria hasta infinito.

Como dijimos en la primera unidad, esta operación se denomina *integración* y se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{\int_S \boldsymbol{p}\, dm}{\int_s dm} = \frac{\int_S \boldsymbol{p}\, dm}{M}$$

Esto significa la sumatoria infinita de la posición por un pedacito de masa. Es un cálculo complejo, pero en el caso de objetos simples, cuya densidad de masa es constante (cubos, esferas y placas), el centro de masa se encuentra en su centro geométrico.

Algo similar sucede en objetos que tienen un eje de simetría. El centro de masa se encuentra sobre el mismo, e incluso puede estar fuera del cuerpo, como en el caso de un anillo circular, que se encuentra en el centro del mismo.

### 4.1.3. Como si fuera una partícula

Probablemente se estarán preguntando por qué es importante este tema del centro de masa.... La respuesta es muy sencilla, pero muy importante:

> Si aplicamos una fuerza a un cuerpo rígido en su centro de masa, el mismo se comporta como si fuera un cuerpo puntual cuya masa es igual a la suma de las masas individuales.

Esto significa que el cuerpo no rotará y se comportará de la misma manera que las partículas con las que hemos estado trabajando. Es por ello que si no consideramos rotaciones, los cuerpos rígidos pueden ser tratados como partículas con una masa igual al total de la masa del cuerpo rígido.

Si recordamos el concepto de cantidad de movimiento o momento lineal, podemos escribir ahora:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \overline{\boldsymbol{v_{cm}}}M$$

Es decir, la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la velocidad del centro de masa multiplicada por la masa total del sistema. Esto muestra que se puede expresar el comportamiento de un cuerpo rígido como un cuerpo puntual.

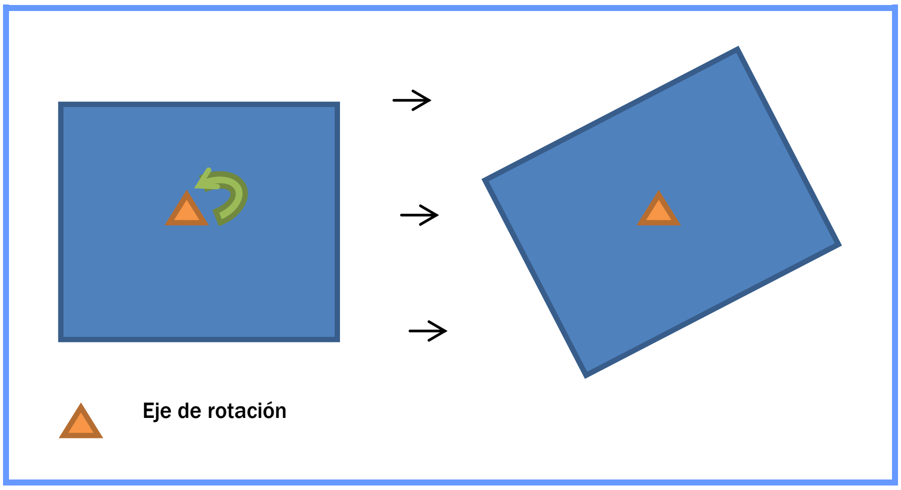
### 4.1.4. Rotación de los cuerpos rígidos

**Rotación de un cuerpo rígido**
Se produce al aplicar una fuerza en un punto de un cuerpo rígido, que no es su centro de masa.

Si a un cuerpo rígido le aplicamos la fuerza en un punto que no es su centro de masa, dicho cuerpo rotará. Este es el fenómeno que estudiaremos a continuación.

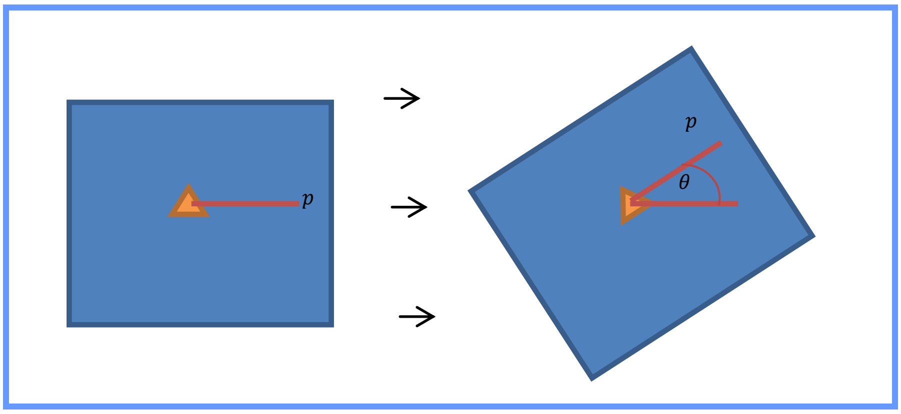
*Posición angular*

Pensemos en un cuerpo rígido que rota sobre un eje fijo que se encuentra en reposo en algún marco de referencia inercial:




Luego, necesitaremos una forma para medir la posición del cuerpo respecto a la rotación, esto es, una coordenada que nos permita saber en qué medida está rotado el cuerpo.

Para ello usaremos ángulos. Elegiremos un punto $\boldsymbol{p}$, perteneciente al cuerpo, y trazaremos la línea que une $\boldsymbol{p}$ con el eje de rotación:




Después, al rotarlo, la línea se verá formando un ángulo θ con la horizontal (eje *x*). Este es el ángulo que utilizaremos para describir la posición de rotación del cuerpo. Generalmente se mide en radianes.

### *Velocidad y aceleración angulares*

Así como el cuerpo tiene una posición de rotación, también posee una velocidad y una aceleración de rotación.

En el caso de desplazamiento del cuerpo, la velocidad se describe como el cambio de posición sobre el intervalo de tiempo. Con respecto a las rotaciones, la definición es similar, pero ahora se considera el cambio de posición angular sobre el intervalo de tiempo:

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta \mathrm{t}}$$

Esta cantidad se denomina *velocidad angular* del cuerpo. En este caso, estaremos obteniendo la velocidad angular promedio entre los instantes $t_1$ y $t_2$. Si medimos el ángulo en radianes, la unidad será $\frac{rad}{s}$. También es posible emplear otras unidades, como revoluciones por minuto, para lo cual podemos utilizar las siguientes relaciones, a fin de encontrar la equivalencia:

$$1\,\frac{rev}{s} = 2\pi\,\frac{rad}{s} \quad y \quad 1\,\frac{rev}{min} = 1\,rpm = \frac{2\pi}{60}\,\frac{rad}{s}$$

Es decir $1\,\frac{rad}{s}$ es alrededor de 10 rpm.

Como el cuerpo es rígido, todos los puntos del mismo giran el mismo ángulo en el mismo intervalo. Por lo tanto, la velocidad angular de todos los puntos de un cuerpo rígido es la *misma.*

Esto es interesante, pero no nos permite diferenciar la velocidad que tendrán los puntos, ya que para recorrer la misma distancia angular en el mismo tiempo, los puntos más alejados del eje de rotación deben recorrer más distancia.

Siguiendo con la analogía del movimiento rectilíneo, ahora definiremos la aceleración angular como el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo.

Para ello, usaremos la velocidad angular ω:

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

A esta cantidad la llamaremos *aceleración angular.*

Al igual que en el caso lineal, es útil pensar en ω y α como las componentes de un vector $\overline{\omega}\ y\ \overline{\alpha}$ , respectivamente, cuya dirección será coincidente con el eje de rotación y su sentido dependerá del signo de ω y α. Aquí, la regla de la mano derecha también nos dará el sentido de rotación.

### *Rotación con aceleración constante*

Para deducir ecuaciones de la velocidad y la posición angulares podemos usar los mismos procedimientos que empleamos cuando trabajamos con el movimiento rectilíneo con aceleración constante.

Si $\omega_0$ es la velocidad en el instante $t = 0$ , luego de la definición de aceleración angular podemos obtener:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t - 0}$$

Es decir:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Que es idéntica a la ecuación para la velocidad de un movimiento rectilíneo uniforme, con la diferencia que aquí las velocidades y aceleraciones son angulares.

Notando que:

$$\omega_{med} = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

Es decir, la velocidad angular media, que se obtiene como el promedio de la velocidad al comienzo y al fin del intervalo. Pero también sabemos que:

$$\omega_{med} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0}$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones y multiplicando el resultado por $t$ , obtenemos:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$

Pero como $\omega = \omega_0 + \alpha t$, podemos reescribirlo así:

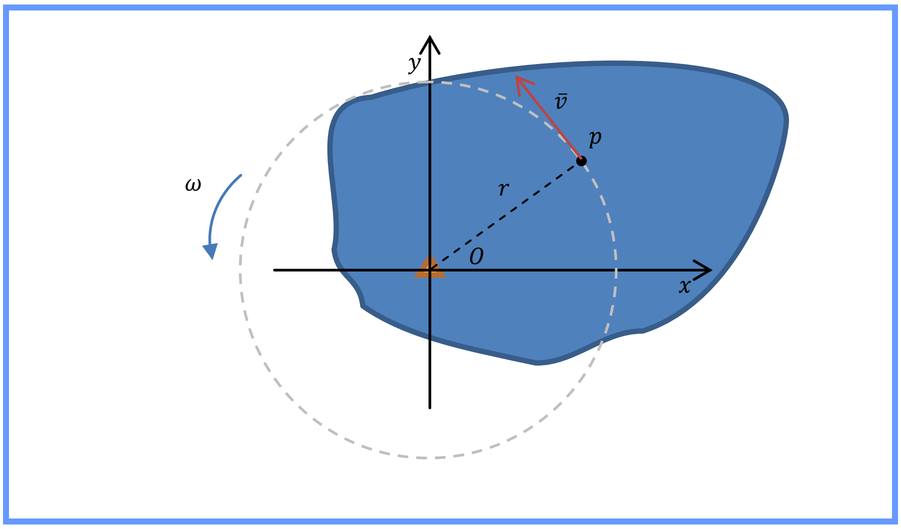
$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\big(\omega_0 + (\omega_0 + \alpha t)\big)t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Que es análoga a la ecuación para la posición de un MRUA.

### *Relación entre la cinemática lineal y angular de un cuerpo*

Supongamos que tenemos un cuerpo que rota sobre un eje $O$ con una velocidad angular ω y que tenemos un punto $p$ sobre el cuerpo de la siguiente manera:




Al rotar el cuerpo, el punto $p$ describe una trayectoria circular (línea de puntos). Como dijimos anteriormente, todos los puntos del cuerpo poseen la misma velocidad angular, pero está claro que, para que el cuerpo no se deforme, los puntos que se encuentran más alejados deben recorrer una distancia mayor, pero en el mismo tiempo, que los puntos que están más cerca.

Entonces, veamos ahora cuál es la velocidad lineal del punto. La misma se calcula como:

$$v = r\omega$$

Esta es la rapidez que tendría la partícula si se desprendiera del cuerpo y siguiera un movimiento rectilíneo uniforme. Según esta relación, la rapidez de una partícula es directamente proporcional a la velocidad angular del cuerpo. A medida que la partícula se mueve a lo largo de su trayectoria circular, el vector de velocidad varía en dirección (y magnitud, si cambia $\omega$), pero siempre se mantiene tangencial al círculo que describe su trayectoria. Las partículas que se encuentran más lejos del eje de rotación tendrán una rapidez mucho mayor que las que se encuentran cerca del mismo.

Ya conocida la velocidad, veamos a continuación qué sucede con la aceleración de un punto $p$ de un cuerpo que se encuentra rotando.

Al tratarse de un movimiento circular, la aceleración puede descomponerse en dos componentes: una *aceleración centrípeta* y una *aceleración tangencial.* La aceleración centrípeta está asociada al cambio de dirección del vector velocidad y siempre apunta hacia el eje de rotación.

Para calcular su magnitud usamos:

$$a_{cent} = \frac{v^2}{r}$$

O, en función de la velocidad angular:

$$a_{cent} = \omega^2 r$$

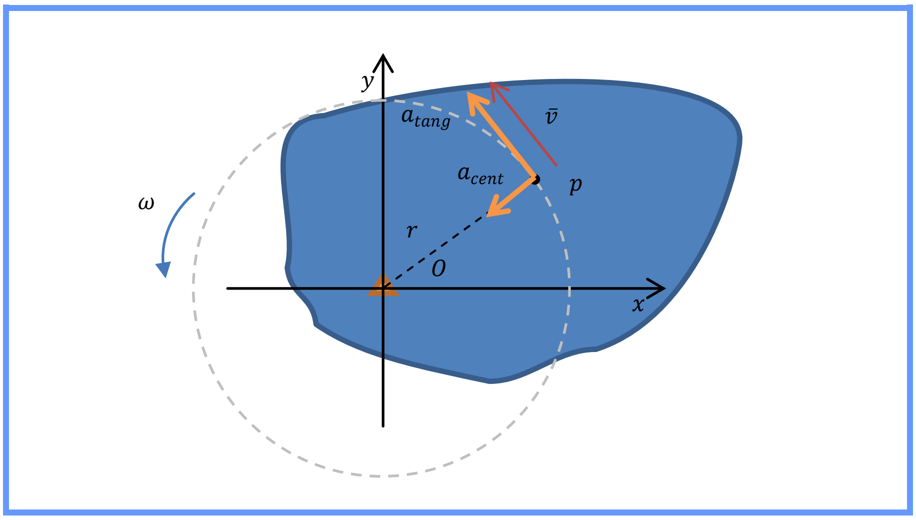
Esta aceleración es la que *tira* la partícula hacia el centro, evitando que siga una trayectoria recta.

Por otro lado, la aceleración tangencial tiene la misma dirección que el vector velocidad y es la que se asocia a la variación de la rapidez (magnitud de la velocidad). La misma se calcula como:

$$a_{tang} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} = r\alpha$$

Dónde α es la aceleración angular del cuerpo.

En la siguiente figura se muestran ambas componentes:




Si sumamos ambas componentes, obtendremos la aceleración lineal de la partícula.

### *Energía*

Un cuerpo rígido que rota posee una energía cinética, ya que es una masa en movimiento. Pero pensemos que el cuerpo está compuesto por muchas partículas que describen trayectorias circulares alrededor de algún eje. Más precisamente, que el cuerpo está formado por $n$ partículas $p_1, p_2 \dots p_n$ con masas $m_1, m_2 \dots m_n$ , cuyas distancias al eje de rotación está dada por los vectores $r_1, r_2 \dots r_n$.

Ahora observemos a la partícula i-ésima y su velocidad:

$$v_i = \omega r_i$$

Para todas las partículas *ω* será la misma (por ser cuerpo rígido), pero $r_i$ cambiará de acuerdo a su posición. La energía cinética de dicha partícula será:

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Pero el cuerpo está compuesto por *n* partículas, por lo que sumaremos las energías cinéticas de todas las partículas:

$$K = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \cdots = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Pero como *ω* es constante:

$$K = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

La cantidad que se encuentra entre paréntesis se denomina *momento de inercia* del cuerpo:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

El momento de inercia de un cuerpo depende de la distribución espacial de masa del mismo. Si mantenemos constante la masa de un cuerpo, al alejar las partículas del eje de rotación, el momento de inercia crecerá, mientras que al acercarlas, disminuirá. La unidad del momento de inercia en el Sistema Internacional (SI) es $kg.m^2$.

Luego:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Es la energía cinética de rotación del cuerpo rígido.

A partir de esta última ecuación podemos obtener una idea bastante intuitiva de qué es, en realidad, el momento de inercia: al aumentar el momento de inercia, aumentará la energía cinética. Pero en unidades anteriores hemos aprendido que la energía cinética es igual al trabajo *W* que debemos hacer para acelerar el cuerpo desde el reposo. Así que cuanto mayor sea el momento de inercia, más difícil será poner a rotar o detener un cuerpo. El momento de inercia es análogo a la masa en el caso rectilíneo.

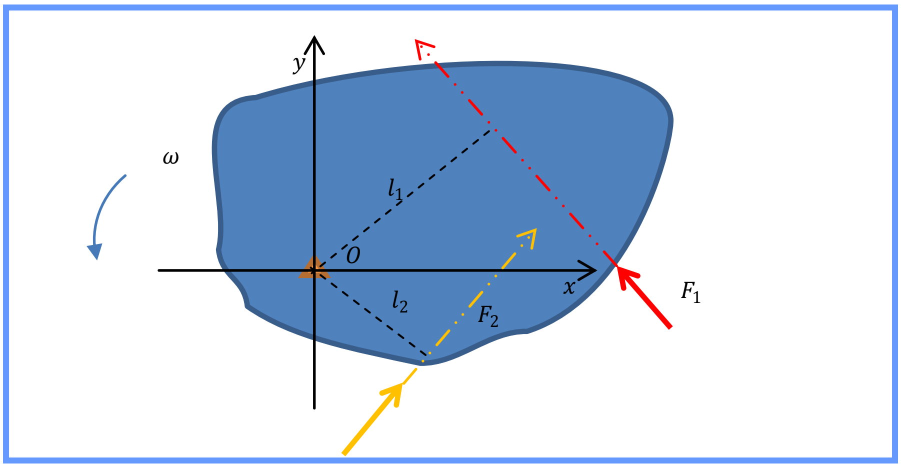
El cálculo del momento de inercia puede tornarse complicado, pero para los cuerpos simples como prismas, esferas, etc., son valores conocidos.

### 4.1.5. Dinámica del movimiento de rotación

Ahora que hemos estudiado algunas propiedades de los cuerpos rígidos en rotación, ya podemos comenzar a analizar el problema que planteamos al principio: ¿qué sucede cuando a un cuerpo rígido le aplicamos una fuerza en un punto que no es su centro de masa? Cómo dijimos anteriormente, el cuerpo rota. A continuación, estudiaremos con mayor detalle este fenómeno.

#### *Torque*

Imaginemos que tenemos un cuerpo rígido que se encuentra fijado a un eje de rotación *O* y que ponemos el origen de nuestro sistema coordenado en dicho punto.




Luego, aplicamos una fuerza $F_1$ , como se muestra en la figura. Esta fuerza hará que el cuerpo tienda a rotar.

*La medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo se denomina* momento de torsión o torque.

**Momento de torsión o torque**
Es la medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo.

Imaginemos que, dada $F_1$ , trazamos en línea de puntos su línea de acción imaginaria (prolongación). La tendencia de $F_1$ para causar una rotación alrededor de $O$ depende de la magnitud de dicha fuerza y de la distancia perpendicular $l_1$ entre su línea de acción y el origen de rotación. La distancia $l_1$ se denomina *brazo de palanca* o *brazo de momento* de $F_1$ alrededor de $O$. El momento de torsión se representa con la letra griega $\tau$ (tau).

Entonces, lo podemos definir como:

$$\tau = |F|\, l$$

Y su unidad en el SI es el $N.m$.

Ahora, tomando en cuenta $F_2$ , podemos definir los momentos de torsión provocados por cada una de las fuerzas:

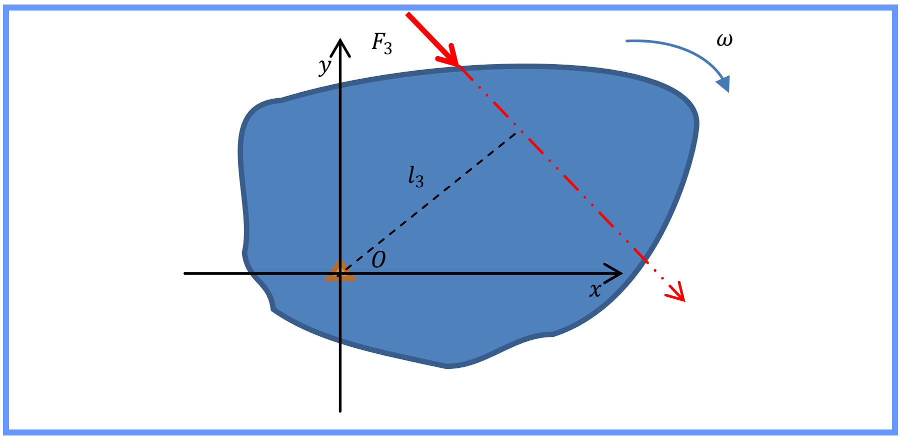
$$\tau_1 = |F_1|\, l_1$$
$$\tau_2 = |F_2|\, l_2$$

Luego, el momento de torsión total del cuerpo será:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

Estos momentos de torsión dependen del punto con respecto al cual se definen. Si cambiamos de posición el punto $O$ , el momento de torsión de las fuerzas cambiará.

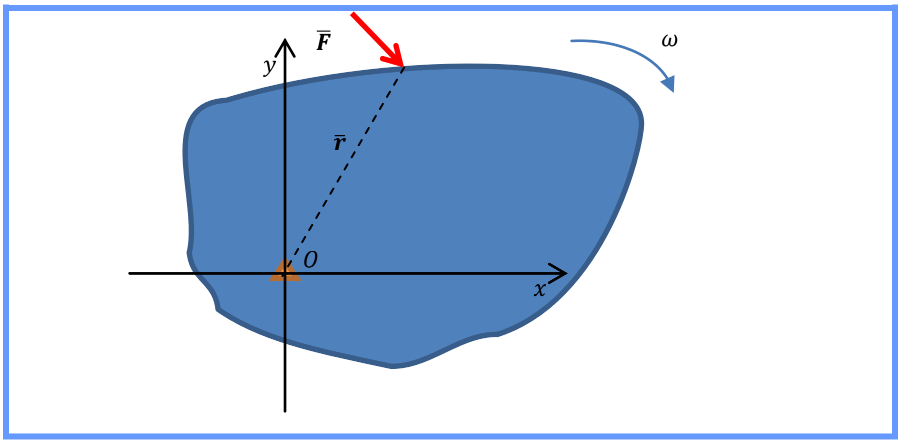
En el ejemplo, las fuerzas $F_1$ y $F_2$ tienden a causar una rotación antihoraria alrededor de $O$. Pero podría suceder que tengamos una fuerza $F_3$ , como se muestra a continuación:




Esta fuerza causará una rotación en sentido horario. Para poder diferenciar ambos torques, debemos definir un sentido de rotación positivo. Por convención, se establece como positivo el sentido de rotación antihorario $(F_1, F_2)$ y como negativo, el sentido horario $(F_3)$. Usando esta convención:

$\tau_3 = -|F_3|\, l_3$

El momento de torsión puede y suele representarse como un vector $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , cuyo módulo es la cantidad que hemos calculado anteriormente.



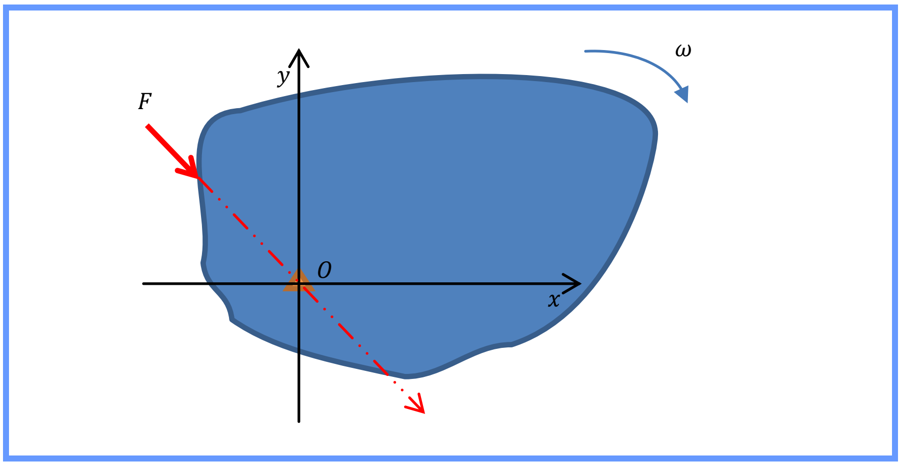

Si una fuerza $\bar{\boldsymbol{F}}$ actúa sobre un punto $\bar{\boldsymbol{r}}$ de un cuerpo, ésta provocará un torque dado por:

$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{F}}$

$\bar{\boldsymbol{\tau}}$ será un vector perpendicular al plano de la hoja (como vimos en el producto cruz) y su sentido podrá ser determinado por la regla de la mano derecha, que mencionamos anteriormente.

En el caso de la figura $\tau$ , será un vector que *entra* en la hoja, es decir, apuntará hacia adentro de la misma. La magnitud de dicho vector, como vimos anteriormente, está dada por $\tau$.

Llegados a este punto también podemos concluir que si la línea de acción de la fuerza pasa por el eje de rotación, no habrá torque. La siguiente figura ilustra este caso:




Su brazo de palanca $l$ será *0*. Por lo tanto, si lo vemos como el módulo:

$$\tau = |F|\, 0 = 0$$

El torque en el movimiento de rotación es el análogo a una fuerza en el movimiento lineal, como veremos en lo que resta de esta unidad.

### *Torque y aceleración angular*

Sabiendo, ahora, qué es el torque, estamos en condiciones de estudiar qué relación guarda con la aceleración angular de un cuerpo.

Para el caso lineal habíamos visto, por la segunda ley de Newton, que:

$$F = m\, a$$

En el caso del torque, también podemos establecer un análogo a dicha ley, pero esta vez, en lugar de usar la masa, utilizaremos el momento de inercia $I$ y, en vez de emplear la aceleración lineal, recurriremos a la aceleración angular $\alpha$:

$$\tau = I\, \alpha$$

Esto quiere decir que el momento de torsión neto de un cuerpo es igual a su aceleración angular por su momento de inercia alrededor del eje de rotación.

En general:

$$\sum \tau_i = I\, \alpha$$

## 4.2. Articulando contenidos

A continuación analizaremos una afirmación trascendente para la simulación de cuerpos rígidos, la cual explicará cómo encaja todo lo que hemos estado estudiando en esta unidad:

> Cada posible movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una combinación de un movimiento traslacional del centro de masa y de una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

Esto es válido, aunque el centro de masa se acelere. Y tiene una consecuencia práctica muy importante: se pueden tratar ambos movimientos de manera separada sin perder validez. Esto significa que podemos analizar, por un lado, la traslación del centro de masa (como si no existiese rotación) y, por otro, estudiar la rotación del cuerpo debido a los torques.

En conclusión, un cuerpo rígido se puede describir por las siguientes ecuaciones que hemos visto:

$$\sum \bar{F} = M\,\bar{a}$$
$$\sum \tau = I_{cm}\,\alpha$$

Dónde $I_{cm}$ es el momento de inercia respecto al centro de masa.

### 4.2.1. Trabajo

Al igual que en el caso lineal, en el movimiento de rotación también tendremos la noción de trabajo producido por un torque. Aquí vale recordar que definíamos al trabajo como la fuerza por la distancia.

En este caso, usaremos el análogo de fuerza para rotación –torque- $\tau$ y, para la distancia, mediremos el cambio del ángulo por la rotación $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, cuando el cuerpo rota de la posición$\theta_1$ a $\theta_2$.

Luego, podemos definir:

$$W = \tau(\theta_2 - \theta_1) = \tau\Delta\theta$$

Esto es válido siempre y cuando $\tau$ se mantenga constante entre $\theta_1$ y $\theta_2$. Aquí también su unidad será el *Joule.*

### 4.2.2. Momento angular y su conservación

Retomaremos ahora la definición de la cantidad de movimiento o momento lineal de una partícula:

$$\bar{} = m\bar{\boldsymbol{v}}$$

Análogamente, definiremos la cantidad de movimiento angular o momento angular de una partícula *i* como:

$$\bar{\boldsymbol{L}}_i = \bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times \bar{\boldsymbol{p}}_i$$

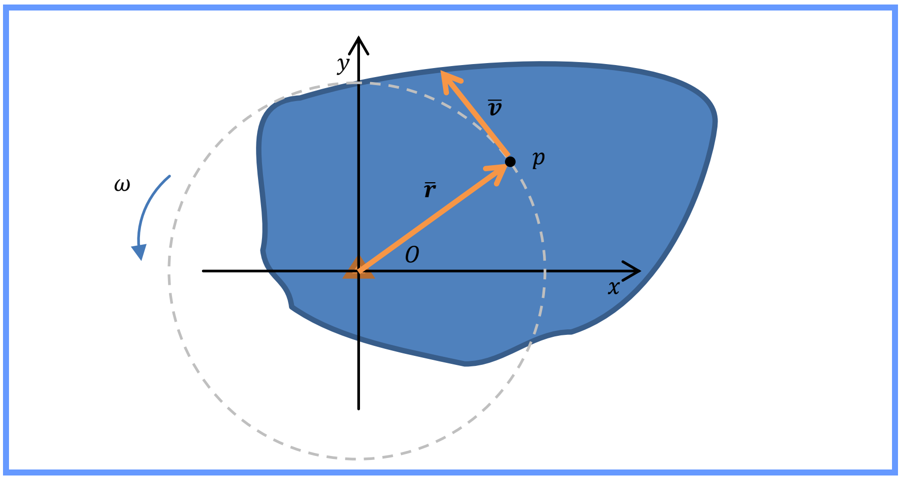
Es decir, la cantidad de movimiento de una partícula por el brazo de palanca, utilizando el producto vectorial. Esto también se puede escribir como:

$$\bar{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{i}} = \bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \times m_i\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$$

Asimismo, es posible escribirlo en módulo como (utilizando las propiedades del producto vectorial):

$$L_i = m_i v_i r_i\ sen(\theta)$$

Siendo $\theta$ el ángulo que separa $\bar{\boldsymbol{r}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}$ , como se muestra en la figura:




Pero en el caso del movimiento circular, $\bar{r}$ y $\bar{v}$ son siempre perpendiculares, por lo que $\theta = 90°$. Luego:

$$L_i = m_i v_i r_i\, sen(\theta) = m_i v_i r_i$$

Pero $v_i = \omega_i r_i$, entonces:

$$L_i = m_i(\omega_i r_i) r_i = m_i r_i^2 \omega_i$$

Ahora, si sumamos sobre todas las partículas del cuerpo:

$$L = \sum_i L_i = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

Pero, como vimos anteriormente $\left(\sum_i m_i r_i^2\right)$ , es el momento de inercia $I$. Por lo tanto, el momento angular se define como:

$$L = I\, \omega$$

Y al igual que en el caso lineal, podemos relacionar el cambio de momento angular con los torques aplicados como:

$$\sum \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Por último, enunciemos la ley de conservación de momento angular, similar a la enunciada para el caso lineal:

Si el momento de torsión externo neto que actúa sobre un sistema es 0, el momento angular total del sistema es constante (se conserva).

### 4.2.3. Equilibrio de cuerpos rígidos

Se dice que un cuerpo rígido está en equilibrio si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\sum \boldsymbol{F_x} = \mathbf{0},\quad \sum \boldsymbol{F_y} = \mathbf{0},\quad \sum \boldsymbol{F_z} = \mathbf{0}$
- $\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ alrededor de cualquier punto

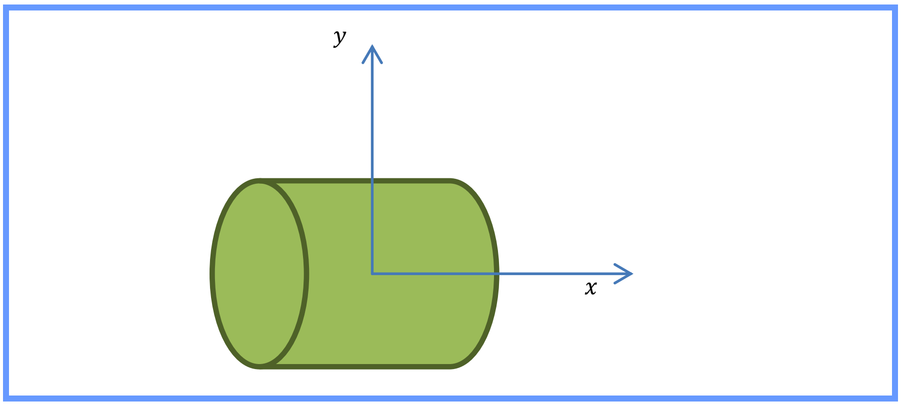
Estas condiciones indican que el cuerpo no tendrá aceleración lineal ni angular. Por lo tanto, mantendrá su estado. Así, si el cuerpo se está moviendo con una velocidad determinada, lo seguirá haciendo. Del mismo modo, si el mismo se encuentra en reposo y cumple con las condiciones de equilibrio, estará en *equilibrio estático.*

### 4.2.4. Generalización del momento de inercia

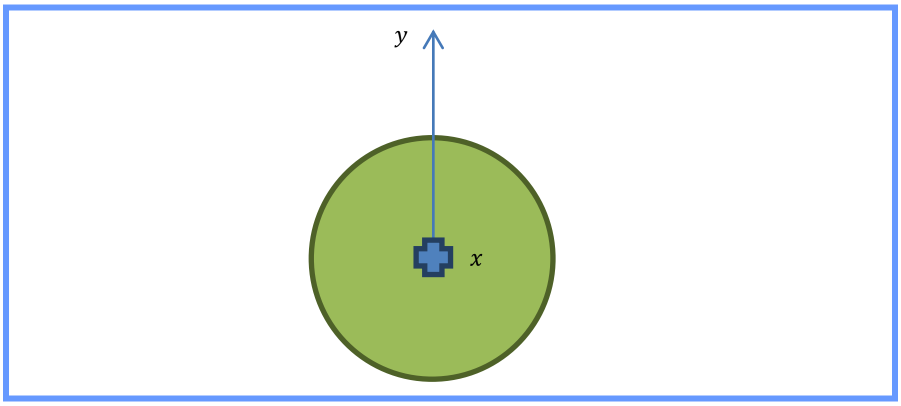
Cuando definimos el momento de inercia, lo hicimos respecto a un eje de rotación que pasaba por un origen $O$. Pero este momento de inercia sólo es válido si el cuerpo rota alrededor de dicho eje.

Cuando simulamos cuerpos rígidos, éstos podrán rotar alrededor de cualquier eje $(x, y, z)$, por lo que ya no es suficiente sólo un momento de inercia. Como tenemos tres ejes posibles de rotación, habrá tres momentos de inercia. Si bien todos los ejes pasan por el centro de masa del cuerpo, los momentos que generará no necesariamente serán iguales.

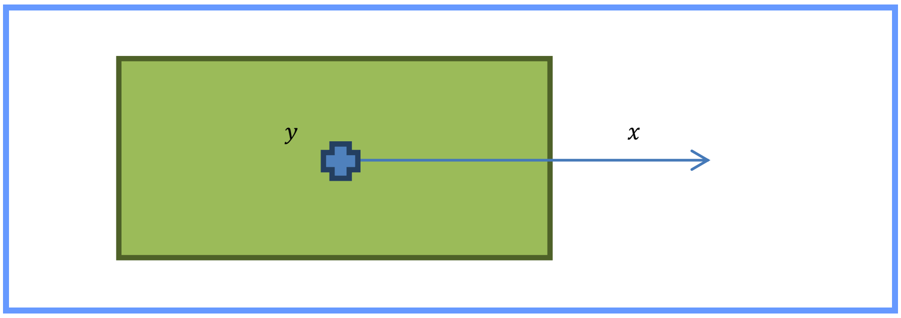
Por ejemplo, si observamos el cuerpo:




Situando los ejes que pasan por el centro de masa del cuerpo, es posible notar que si contemplamos el objeto situándonos en $x$ positivos y mirando hacia el lado negativo, veremos un círculo:




En este caso, el eje $x$ apunta hacia afuera de la hoja, por lo que calcularemos el momento de inercia para un círculo con origen en su centro. Este será el momento de inercia alrededor del eje $x$. Luego, situándonos en la posición de las $y$ positivas y mirando hacia los negativos, veremos:




Después, calcularemos el momento de inercia alrededor de $y$ para una figura que es un rectángulo. Como el momento de inercia depende de la distribución de masa del cuerpo, está claro que ambos momentos serán diferentes. Es por ello que se necesitan dos momentos de inercia para calcular rotaciones alrededor de estos dos posibles ejes. Más aún, necesitamos un tercer momento de inercia para el eje *z*.

Si bien es cierto que el cuerpo puede rotar en cualquier eje, una rotación siempre se puede expresar como una combinación de rotaciones alrededor de estos tres ejes canónicos $x, y$ y $z$.

Por lo tanto, en 3D necesitaríamos los momentos de inercia $I_x, I_y$ e $I_z$. Pero a veces sucede que, al aplicar un torque a un cuerpo alrededor de un eje, debido a su forma, también rota en algún otro eje. Es decir, si aplicamos un torque a un cuerpo alrededor del eje $x$ puede suceder que el cuerpo rote también en el eje $y$ o $z$. $I_x$ sólo describe cuánto cuesta rotar un cuerpo alrededor del eje $x$ al aplicarle un torque en el eje $x$. Pero, como dijimos anteriormente, esto no alcanza, por lo que definimos las cantidades $I_{xy}$ , que es la resistencia de un cuerpo a girar en el eje y al aplicarle un torque en $x$ y $I_{xz}$ , que es la resistencia de un cuerpo a girar en el eje z, al aplicarle un torque en el eje $x$. Entonces, con las cantidades $(I_x, I_{xy}$ y $I_{xz})$ podemos describir cómo rotará un cuerpo al aplicarle un torque alrededor del eje $x$. Si usamos las mismas ideas para los torques alrededor de $y$ y z, obtendremos las cantidades: $(I_{yx}, I_y, Y_{yz})$ y $(I_{zx}, I_{zy}, I_z)$.

Si escribimos dichas componentes en forma matricial:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Obtenemos lo que se conoce como *tensor de inercia*, el cual describe cómo rotará un cuerpo al aplicarle un torque. Este tensor contiene información sobre todas las direcciones posibles de rotación. En los motores físicos, por ejemplo, es un parámetro muy importante a configurar. Al igual que la masa, este tensor describe cómo se moverá un cuerpo ante una fuerza.

Como las figuras de colisión son figuras geométricas sencillas, los motores físicos también ofrecen la posibilidad de calcular automáticamente el tensor de inercia, dada la densidad del cuerpo. Es por ello que en Box2D le pasábamos como argumento la densidad y la forma de colisión.

En 2D, particularmente, sólo podemos rotar alrededor de un eje, por lo que el tensor de inercia se reduce a un solo valor escalar, el cual es la componente $I_{zz}$. En Box2d, la clase `b2MassData` nos permite forzarle a un b2Body las propiedades de masa y de inercia:

```
b2MassData d;
d.mass=1.0f; //masa
d.I=1.0f; //inercia

//aplicamos el cambio
body->SetMassData(&d);
```

# BIBLIOGRAFÍA

Gettys W.; Keller, F.; Skove, M. *Física Clásica y Moderna.* McGraw-Hill Inc., Madrid, 1991.

Sears, F.; Zemansky, M.; Young, H.; Freedman, R. *Física Universitaria.* Vol. 1, Addison Wesley Longman, 1998.

Resnic, Halliday*. Física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería*. Parte I, México, Compañía Editorial Continental SA, 1967.

Alonso, Finn. Física: Vol. I: Mecánica. *Fondo Educativo Interamericano*, 1970.

Botto, J.; González, N.; Muñoz, J. *Física.* Buenos Aires, Tinta Fresca, 2006.

Gaisman, M.; Waldegg Casanova, G.; Adúriz-Bravo, A.; Díaz, F.; Lerner, A.; Rossi, D. Física. *Movimiento, interacciones y transformaciones de la energía.* Buenos Aires, Santillana, 2007.