Guia N° 1 – Modelos y algoritmos para videojuegos II

Ejercicio 1

Anotar Verdadero o Falso (V o F), según corresponda.

a) Todos los vectores son matrices .... ☐

b) Todas las matrices son vectores... ☐

c) Algunas matrices son vectores .... ☐

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2 filas... ☐

e) El elemento (3,2) de una matriz está donde se cruzan el renglón 3 y la columna 2 .... ☐

f) El elemento (3,2) de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ es cero .... ☐

g) En la matriz $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, los elementos (1,2) y (2,1) son iguales .... ☐

h) En una matriz de tamaño 3x4, no existe el elemento a_{41} .... ☐

i) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño 2x3 .... ☐

j) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -7 \\ \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}$ son matrices de igual tamaño .... ☐

k) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices iguales... ☐

l) Existe una única matriz cero de tamaño 2x2 .... ☐

m) Existe una única matriz cero que es cuadrada .... ☐

n) Hay matrices cero que no son cuadradas... ☐

ñ) La matriz cero de tamaño 2x3 es igual a la matriz cero de tamaño 3x2. .... ☐

o) En la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ se verifica que a_{ij} es igual a 1 cuando $i = j$ .... ▢

Ejercicio 2

¿Cuáles de los siguientes pares de vectores y de matrices son iguales?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1+0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 3 & 4-5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 4-2 \\ \frac{27}{9} & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a = d$ y $b = c$

Ejercicio 3

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,

y los vectores $u = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 15 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$, calcular:

a) $A + B$

b) $C - D$

c) $4\,A - 2\,B$

d) $\frac{1}{2}C - \frac{1}{3}D$

e) $-u - 3v$

Ejercicio 4

Dadas las matrices $E=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 6\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 5 & 5 & 0\end{bmatrix}$ y $G=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$, encontrar X tal que:

a) $2E-G+X=O$ (O matriz nula)

b) $\frac{1}{3}X-E=G-F$

Ejercicio 5

Completar las líneas de puntos:

a) Dos matrices A y B son compatibles para el producto $A.B$, cuando...

b) Si A es una matriz de tamaño 5x3 y B es una matriz de tamaño 3x1, entonces A.B es una matriz de tamaño..

Si C y D son dos matrices compatibles para el producto C.D, entonces el número de filas de C.D es igual al número de filas de ....

Si C y D son dos matrices compatibles para el producto C.D, entonces el número de columnas de C.D es igual al número de columnas de ....

Ejercicio 6

a) Encontrar el elemento (3,1) de la matriz $L.M$, con $L=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 6 & 0 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ y $M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 6 & 2\end{bmatrix}$

b) Calcular $M.N$, siendo $M=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{4} & -2\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 4 & -5\end{bmatrix}$ y $N=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 0 & 8\\ 5 & 0\end{bmatrix}$

c) Dadas los vectores $U=\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\end{bmatrix}$ y $V=\begin{bmatrix}-1\\ 5\\ 3\end{bmatrix}$, encontrar los productos $U\cdot V$ y $V\cdot U$

Ejercicio 7

Calcular el producto cruz de los siguientes vectores:

a) $U=\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}$ y $V=\begin{bmatrix}2\\14\end{bmatrix}$. ¿Nota algo particular de este caso? ¿Que conclusión puede sacar?

b) $U=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ y $V=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

c) $U=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$ y $V=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

Ejercicio 8

Pruebe la igualdad

$$(\bar{\boldsymbol{u}} \times \bar{\boldsymbol{v}}) \cdot \bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{\boldsymbol{u}} \times \bar{\boldsymbol{v}}) \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = 0$$

Para los vectores $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$. (Primero demuéstrelo para la primer parte y luego para la segunda)

Ejercicio 9

Utilizando los mismos vectores del punto anterior muestre que el producto cruz no es conmutativo.

Ejercicio 10

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

a) Si A es una matriz invertible de tamaño 2x2, su inversa también es 2x2.

b) La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

c) La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ del ejercicio d) es singular. Una matriz es singular si su determinante es distinto de 0.

d) Si tanto A como B son las inversas de una cierta matriz C, entonces A es igual a B

Ejercicio 11

Encontrar las transpuestas de las matrices

a) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -9 & 16 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 12

Sabiendo que $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ y $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, usar las propiedades de la transposición para encontrar

a) $(A+B)^t$ b) $(A.B)^t$ c) $(B.A)^t$

Ejercicio 13

Para cada una de las siguientes matrices, indicar si es: simétrica, triangular superior, triangular inferior, diagonal.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 14

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 2 \end{bmatrix}$, determinar las condiciones que deben verificar α, β y γ para que A sea:

a) Triangular superior
b) Triangular inferior
c) Simétrica
d) Diagonal

Ejercicio 15

Dado el vector $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

a)Realice las operaciones necesarias para rotarlo 90° en sentido horario.

b)Ahora rótelo 30° en sentido antihorario

Ejercicio 16

Dados los vectores $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$

a)Encuentre la proyección de u sobre v

b)Encuentre la proyección de u sobre el eje x e y respectivamente. Repita lo mismo para el vector v.

Ejercicio 17

Responda V o F:

a) Si es A es una matriz de nxn y b es un vector de n componentes: Ab siempre es una transformación lineal.. ▢
b) Todas las transformaciones afines son lineales.. ▢
c) Con las trasformaciones lineales podemos realizar traslaciones... ▢
d) Con una trasnformación afin, sólo podemos desplazar un cuerpo, pero no rotarlo...................... ▢
e) Las rotaciones se puede expresar como transformaciones lineales. .... ▢