TRIGONOMETRÍA Y FUNCIONES

ÍNDICE:

Bibliografía:

Rojo, Armando, Algebra 1 Ed El Ateneo, Bs As 1994.
Armando Rojo (2006). Álgebra 1. Buenos Aires: El Ateneo. Ralph P. Grimaldi (1998)
Serie Schaum, AUTOR/ES: Ayres, Frank & Mendelson,Elliot AÑO: 2004
Serie Schaum, AUTOR/ES: Spiegel, Murray S.; Moyer, Robert;Llovet, Juan & Delgado, Diego Año 2004
Apuntes de Elementos de Matemática, para las carreras de Tecnicaturas a distancia, de la Licenciada Mariel Díaz Lozano

INTRODUCCIÓN

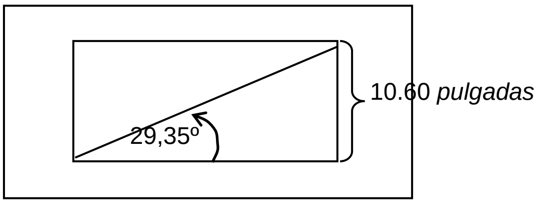
En esta Unidad estudiarás cuestiones referidas a elementos del plano, tales como puntos, ángulos y gráficas de funciones, que serán útiles para el tratamiento de los temas siguientes, sobre todo de aquéllos vinculados a la geometría.
El material de las primeras Sesiones de Estudio forma parte de una disciplina llamada Trigonometría, cuyo desarrollo, ampliamente aplicado hoy a muchos campos del conocimiento, nació a partir del estudio de los triángulos y de las relaciones entre sus lados y sus ángulos.
A partir de la Sexta Sesión de Estudio, abordaremos el tema Funciones, el cual está presente en toda la matemática y se podría decir sin exagerar que está en la base misma del conocimiento en general. Nos referiremos a ello más adelante.

OBJETIVOS

- Convertir medidas de ángulos del sistema sexagesimal al circular y viceversa
- Asociar las representaciones geométricas y algebraicas de puntos del plano.
- Conocer las funciones trigonométricas de un ángulo.
- Identificar y aplicar propiedades y relaciones de las funciones trigonométricas.
- Reconocer ángulos notables y el valor de sus funciones trigonométricas.
- Relacionar el signo de una función trigonométrica con la pertenencia del ángulo a un cuadrante.
- Identificar dominio e imagen de funciones dadas, gráfica y analíticamente
- Reconocer imágenes de puntos en funciones definidas por partes.
- Describir la expresión analítica de una función obtenida por combinación algebraica de funciones básicas.
- Graficar funciones que son múltiplos o traslaciones de funciones básicas.

Problema Disparador!!!!

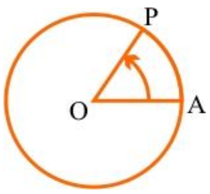
Un estudiante de diseño desea comprar un monitor para su computadora. Como se sabe, el tamaño de la pantalla se especifica en pulgadas y representa la longitud de la diagonal del rectángulo que la misma ocupa.
Además de ello, tiene conocimiento de que los monitores se presentan en dos modelos: el llamado WIDE screen, en el cual la relación ancho-alto de la pantalla es 16:9 y el modelo FULL screen en el que dicha relación es 4:3.



Un amigo le ofrece su monitor y le aporta los siguientes datos sobre el mismo: alto 10,60 pulgadas; ángulo que forma la diagonal con la horizontal 29,35º
El estudiante se pregunta:
a) ¿Cual es tamaño de la pantalla del monitor que me ofrece mi amigo?
b) Es un modelo WIDE screen o FULL screen?

Representación y medición de ángulos

Los ángulos se consideran ubicados como ángulos centrales de una circunferencia de radio 1, a la que se denomina **circunferencia trigonométrica**, tal como puede verse en la figura.
El ángulo se representará limitado por un lado "fijo": la semirrecta que contiene al segmento OA, al cual se llamará **lado inicial** del ángulo, y un lado "móvil": la semirrecta que contiene al segmento OP, al cual se denominará **lado final**.



Observar que, mientras el lado inicial es siempre el mismo para cualquier ángulo, el lado final puede ocupar cualquier posición, es decir, el punto P puede coincidir con cualquier punto de la circunferencia trigonométrica, dependiendo esto de la medida del ángulo.
No sólo es importante la posición final del segmento OP comparada con la posición del lado inicial, sino también el sentido de la rotación que ha dado lugar a esta posición relativa.
Con la flecha en la punta del arco que marca la abertura del ángulo, se indica el sentido en que ha sido generado. Se considera "positivo" al ángulo generado en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y negativo al generado en el sentido opuesto.

También se representan de esta forma ángulos mayores que 360°, indicando la abertura con el arco, el cual en este caso realizará más de un giro. Así, por ejemplo, se tiene:

En vista de que a cada medida de un ángulo en grados, corresponde un número que es la medida del arco correspondiente sobre la circunferencia trigonométrica, podemos medir los ángulos utilizando dichos números.
El sistema de medición de ángulos por medio del número que mide la longitud del arco sobre la circunferencia trigonométrica se denomina **Sistema Circular**, cuya unidad se llama **radián**.
Recordando que el sistema de medición de ángulos en grados se llama *Sistema Sexagesimal,* las que siguen son las fórmulas de conversión del sistema sexagesimal al circular y del sistema circular al sexagesimal.

Fórmula de pasaje del sistema sexagesimal al sistema circular	Fórmula de pasaje del sistema circular al sexagesimal
$\alpha^{rad} = \frac{\alpha^\circ \ \pi}{180^\circ}$	$\alpha^\circ = \frac{\alpha^{rad}\ 180^\circ}{\pi}$

Ejemplo. Calculando la medida de un ángulo en radianes.

Encontrar la longitud del arco de circunferencia unitaria que corresponde a un ángulo de 30°
Solución

La longitud del arco de circunferencia unitaria que corresponde al ángulo de 30° dado es, simplemente, la medida del ángulo en el sistema circular, también llamada medida del ángulo en radianes.

Aplicamos, pues, la primera de las fórmulas dadas: $\alpha^{rad} = \frac{\alpha^\circ \ \pi}{180^\circ}$ y reemplazamos en ella α° por 30°. Resulta así: $\alpha^{\textbf{rad}} = \frac{30^\circ \ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$ (luego de realizar la simplificación correspondiente)

Actividad

Ejercicio 1

Encuentra la longitud del arco de la circunferencia trigonométrica que corresponde a cada uno de los ángulos de la tabla. Completa la misma, anotando los resultados en ella.
Dos recomendaciones:
a) Expresa los resultados como fracciones, simplificando todo lo posible.
Deja indicado el número π, sin traducirlo a su expresión decimal, tal como mostramos, a modo de ejemplo, en las dos primeras columnas de la tabla.

Medida del ángulo en grados	30°	-30°	45°	60°	-90°	135°	330°	180°
Medida del arco de circunferencia trigonométrica	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$						

Ejercicio 2

Con la segunda de las fórmulas dadas, calcula la medida en grados de los ángulos que, en radianes, miden $3\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ y 2.

Soluciones

Solución del problema disparador

a) Es un monitor de 21 pulgadas
b) Es un modelo WIDE screen

Solución Ejercicio 1

Medida del ángulo en grados	30°	-30°	45°	60°	-90°	135°	330°	180°
Medida del arco de circunferencia trigonométrica	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	π

Solución Ejercicio 2

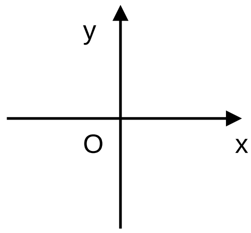
a) $\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{rad} = 270^\circ$

b) $\left(-\frac{\pi}{4}\right)^{rad} = -45^\circ$

c) $2^{rad} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ \cong 115^\circ$

Puntos en el plano

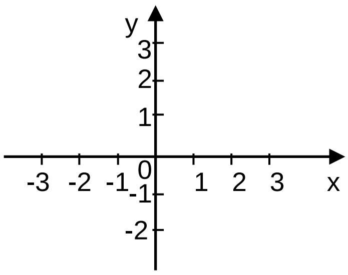
Para introducir un sistema de coordenadas rectangular en un plano dado, consideramos dos líneas perpendiculares entre sí, las cuales se interceptan en un punto que se denota con O. Tomamos una de las líneas horizontalmente, con dirección positiva a la derecha y



la otra línea vertical, con dirección positiva hacia arriba. Para hacerlo más claro, colocamos en cada línea una punta de flecha para indicar la dirección positiva.

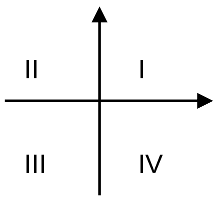
Las dos líneas se llaman **ejes coordenados** y el punto O es llamado **origen de coordenadas**. El eje horizontal es llamado **eje** x, y el eje vertical es llamado **eje** y.

En cada uno de los ejes se representa el conjunto de los números reales.

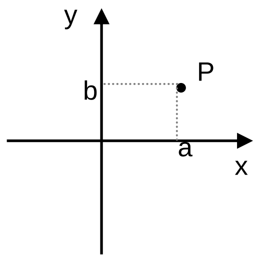


Nos referimos al plano dado, como el **plano coordenado** xy.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas **primero**, **segundo**, **tercero** y **cuarto cuadrantes**, denotados por I, II, III y IV



Podemos ahora asignar a cada punto del plano xy un único par ordenado de números reales. Si P es un punto del plano, construimos líneas que pasen por P, perpendiculares a los ejes x e y que intercepten esos ejes en puntos que se corresponden con los números a y b, respectivamente. Entonces a P se le asigna el par (a,b), tal como aparece en la figura.



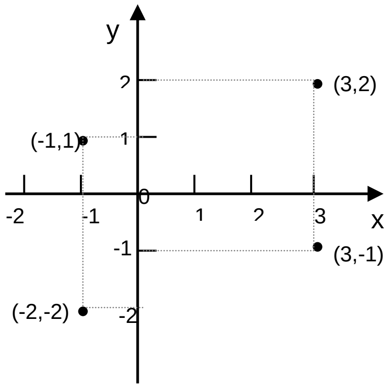
El número a se llama la **primera componente** o **abscisa** de P y el número b se designa como la **segunda componente** u **ordenada** de P. Se dice, también, que P tiene **coordenadas** (a,b) y se escribe $P\ (a,b)$ o bien $P=(a,b)$.

Inversamente, cada par ordenado (a,b) de números reales determina un único punto P del plano con tales coordenadas. Para obtenerlo, basta que construyamos líneas perpendiculares al eje x y al eje y en los puntos que corresponden a los números a y b, respectivamente. La intersección de estas dos líneas es el punto P.

Hemos establecido, entonces, una correspondencia **uno a uno** entre el conjunto de puntos del plano xy y el conjunto de pares ordenados de números reales.

Graficar un punto $P\ (a,b)$, significa localizar, sobre un sistema coordenado rectangular, el punto P con coordenadas (a,b). Este punto se representa por una marca en la posición apropiada.

La figura siguiente ilustra la gráfica de algunos puntos.



Puede observarse que las abscisas son positivas para puntos situados en los cuadrantes I o IV, y negativas para puntos situados en los cuadrantes II o III. Por otro lado, las ordenadas son positivas para puntos situados en los cuadrantes I o II y negativas para puntos situados en los cuadrantes III o IV.

Actividad

Ejercicio 3

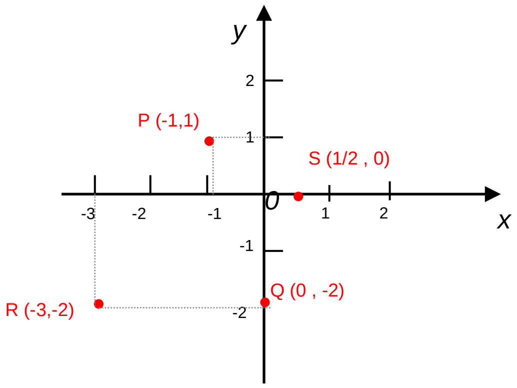
Representa en el plano de coordenadas los puntos $P(-1\,,1)$; $Q(0\,,-2)$; $R(-3\,,-2)$ y $S(\frac{1}{2}\,,0)$

Ejercicio 4

Indica, sin realizar la representación geométrica, en qué cuadrante se ubican los puntos $A(\frac{3}{5},-\frac{1}{5})$; $B(-\sqrt{3},-5)$; $C(0,-2)$, $D(3.51,6)$; $E(-500,2000)$

Soluciones

Ejercicio 3



Ejercicio 4

El punto A está en el cuarto cuadrante, pues la primera componente es positiva y la segunda negativa.

El punto B está en el tercer cuadrante, pues sus dos componentes son negativas.

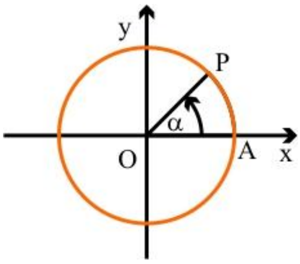
El punto C está sobre el eje *y*, pues su primera componente es cero (los puntos sobre los ejes no pertenecen a ningún cuadrante).

El punto D está en el primer cuadrante, pues sus dos componentes son positivas.

El punto E está en el segundo cuadrante, pues la primera componente es negativa y la segunda positiva.

Definición de las funciones trigonométricas

Consideremos un ángulo α, medido en radianes, con lado inicial OA y lado final OP en la circunferencia trigonométrica.



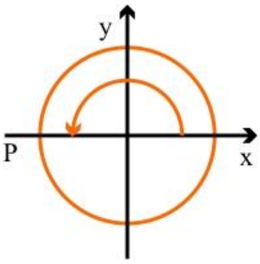
Ubiquemos a la circunferencia centrada en un sistema de coordenadas cartesianas, de forma tal que el lado OA se encuentre en la dirección positiva del eje x, tal como aparece en la figura
Resulta claro que dado el ángulo α, le corresponde un único punto P sobre la circunferencia y, en consecuencia, un único par de números (x_0, y_0) que son las coordenadas de P.

Podemos decir entonces que los valores numéricos de x_0 e y_0 dependen del número que mide la abertura de α, es decir, que tanto x_0 como y_0 son funciones de α.

Llamamos a x_0 el coseno de α y a y_0 el seno de α

$\cos\alpha = x_0$ $\operatorname{sen}\alpha = y_0$

Ejemplo. Calculando seno y coseno de π



Como puede apreciarse en la figura, las coordenadas (x, y) del punto P que corresponde al ángulo π son: $x=-1$; $y=0$.
Por tanto, de acuerdo con la definición, tenemos:
$\operatorname{sen}\pi=0$; $\cos\pi=-1$
Proponemos que, procediendo de manera similar, se encuentren los valores de seno y coseno de otros ángulos.

Actividad

Ejercicio 5

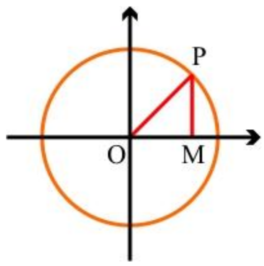
Completar la tabla con los valores de seno y coseno de los ángulos que se indican

α	π	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\alpha$	0					

$\cos\ \alpha$	-1					

Habrás observado que todos los ángulos propuestos en la actividad anterior son tales que su lado final coincide con uno de los ejes coordenados, por lo cual las coordenadas del punto P y en consecuencia, los valores de seno y coseno, pueden evaluarse en forma inmediata por simple inspección visual.
Obviamente, no ocurre lo mismo con otros ángulos; de allí que debamos recurrir a otros métodos para realizar el cálculo.
Te muestro un ejemplo.

Ejemplo. Calculando seno y coseno de $\dfrac{\pi}{4}$



La gráfica siguiente muestra que el punto P de intersección del lado final del ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ tiene sus dos coordenadas iguales. Llamamos x a ambas
El triángulo OMP es rectángulo y tiene sus dos catetos iguales. La longitud de cada uno de ellos es x .
Por el Teorema de Pitágoras, se sabe que:
$$OP^2 = OM^2 + MP^2$$
Reemplazando, se tiene:
$1 = x^2 + x^2$ de donde resulta $2x^2 = 1$

y entonces $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2}$ para eliminar la raíz del denominador, se obtiene $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego: $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Las funciones seno y coseno son dos de las seis funciones trigonométricas. Al igual que las dos primeras, las restantes también se definen en términos de las coordenadas del punto de intersección del lado final del ángulo con la circunferencia trigonométrica.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	
Función	**Definición**

Seno	$sen\,\alpha = y$
Coseno	$\cos\alpha = x$
Tangente	$tg\ \alpha = \frac{y}{x}$
Cotangente	$cotg\ \alpha = \frac{x}{y}$
Secante	$\sec\alpha = \frac{1}{x}$
Cosecante	$cosec\,\alpha = \frac{1}{y}$

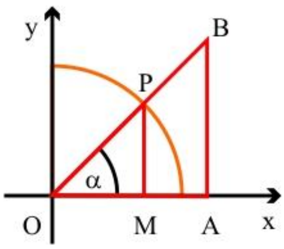
Observando la definición de las funciones trigonométricas, podemos ver que, mientras que las funciones seno y coseno están definidas para cualquier valor de α, no ocurre lo mismo con las otras cuatro.

Por ejemplo, la función tangente no está definida para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ya que en ese caso x es igual a cero.

Ocurre lo mismo para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + 3\pi$ y para cualquier ángulo α cuyo lado final coincida con el eje vertical.

Antes de proseguir con el estudio de las funciones trigonométricas, te resultará útil saber que los valores de las mismas también pueden obtenerse, para ángulos entre cero y 90 grados, como cociente de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo

En efecto, como puede verse en la figura, los triángulos OMP y OAB son rectángulos y tienen en común el ángulo α. Luego, son semejantes, razón por la cual tienen sus lados proporcionales.



Las funciones trigonométricas de α pueden definirse entonces en términos de los lados del triángulo rectángulo OAB:

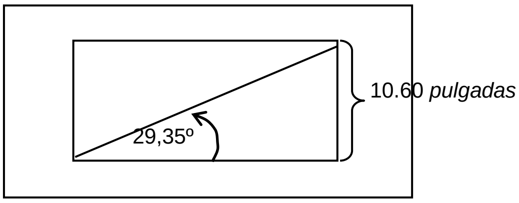
$$sen\,\alpha = y = \frac{y}{1} = \frac{PM}{OP} = \frac{AB}{OB} = \frac{cat.opuesto}{hipotenusa}\ ;\ \cos\alpha = x = \frac{x}{1} = \frac{OM}{OP} = \frac{OA}{OB} = \frac{cat.adyacente}{hipotenusa}$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x} = \frac{PM}{OM} = \frac{AB}{OA} = \frac{cat.opuesto}{cat.adyacente}\ ;\ \cot g\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{OM}{PM} = \frac{OA}{AB} = \frac{cat.adyacente}{cat.opuesto}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{OP}{OM} = \frac{OB}{OA} = \frac{hipotenusa}{cat.adyacente}\ ;\ \cos ec\,\alpha = \frac{1}{y} = \frac{OP}{PM} = \frac{OB}{AB} = \frac{hipotenusa}{cat.opuesto}$$

Ejemplo. Resolución del problema disparador !!!!

Recordemos que el problema se refiere a la compra de un monitor del cual se tienen los datos que aparecen en la figura:



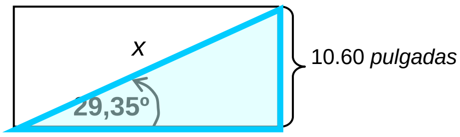
Sobre el mismo, se pregunta:

a) ¿Cual es tamaño de la pantalla del monitor?

b) Es un modelo WIDE screen o FULL screen?

Solución

a) El tamaño del monitor está dado por la medida en pulgadas de la diagonal de la pantalla. Si se considera en ella el triángulo rectángulo señalado, se puede ver que es necesario conocer la longitud de la hipotenusa (*x*).



Teniendo en cuenta que $sen\alpha = \dfrac{cat.opuesto}{hipotenusa}$, se tiene en este caso $sen\ 29{,}35º = \dfrac{10{,}60}{x}$, de donde, despejando *x* y con ayuda de una calculadora, se obtiene: $x = \dfrac{10{,}60}{sen\ 29{,}35º} = \dfrac{10{,}60}{0{,}49} \cong 21{,}6$

El tamaño del monitor es de 21 pulgadas

b) Un modelo WIDE screen tiene una relación ancho/alto igual a 16/9 ($\cong$1,78), en cambio en un modelo FULL screen dicha relación es 4/3 ($\cong$ 1,34)

Para saber cuál es el modelo del monitor, se debe averiguar al ancho del mismo, que ahora será la incógnita *x*. La función tangente relaciona los dos catetos del triángulo:

$tg\ \ 29{,}35º = \dfrac{10{,}60}{x}$, luego $x = \dfrac{10{,}60}{tg\ \ 29{,}35º} = \dfrac{10{,}60}{0{,}56} \cong 18{,}9$

El ancho de la pantalla es 18,9

La relación ancho/alto es $\dfrac{18{,}9}{10{,}6} \cong 1{,}78$

El monitor es, entonces, un modelo WIDE sceen.

Ejercicio 6

1. Menciona tres valores de α para los cuales la cotangente no está definida.
2. ¿Qué número es el máximo valor que puede tomar $\operatorname{sen}\alpha$, cualquiera sea α?
3. ¿Cuál es el mínimo valor para $\operatorname{sen}\alpha$?
4. ¿Entre qué valores puede variar $\cos\alpha$?

Solución Ejercicio 5

α	π	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
sen α	0	0	1	-1	-1	1
cos α	-1	1	0	0	0	0

Solución Ejercicio 6

1. Por ejemplo, $\alpha = 0$; $\alpha = \pi$; $\alpha = 3\pi$, pues en estos ángulos, la ordenada del punto final P es cero.
2. El máximo valor del seno de un ángulo es 1, pues $sen\alpha = y$ (ordenada de P) y el máximo valor que puede tener la ordenada de P es 1.
3. -1
4. Entre 1 y -1

Propiedades y relaciones entre las funciones trigonométricas

Son importantes las siguientes relaciones entre las funciones trigonométricas de un ángulo:

Relación entre tangente y cotangente de un ángulo α.

$$cotg\ \alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Relación entre tangente, seno y coseno de un ángulo.

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

Relación entre las funciones seno y cosecante de un ángulo

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{sen\ \alpha} \quad (sen\ \alpha \neq 0)$$

Relación entre coseno y secante de un ángulo

$$sec\ \alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{cos\ \alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$$

Otra importante relación entre las funciones trigonométricas de un ángulo es la llamada *identidad pitagórica*: $sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Resulta conveniente tener a la vista una síntesis de las relaciones básicas entre las funciones trigonométricas de un ángulo. Algunas de ellas fueron verificadas anteriormente.

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un ángulo α.

$sen^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$ *de la cual surgen* $sen\,\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ *y* $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\,\alpha}$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\,\alpha} \qquad cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \qquad cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} \qquad 1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad 1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$$

Ejemplo. Calculando todas las funciones de α

Calcular $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $cotg\alpha$, $sec\alpha$ y $cosec\,\alpha$ sabiendo que $sen\,\alpha = \frac{4}{5}$ y que todas las funciones tienen valores positivos.

Solución

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\alpha}$; dado que todas las funciones tienen valores positivos, se toma el valor positivo de la raíz. Resulta entonces:

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot g\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \quad \cos ec\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{3}$$

Actividad

Ejercicio 7

En los ejercicios que siguen, trabaja sin operar con decimales, es decir, realiza los cálculos con fracciones y raíces exactas.

1. Si sabes que $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ ¿Puedes decir cuál es el valor de $cosec\,\alpha$?

2. Calcula $tg\alpha$, sabiendo que $sen\alpha = \frac{5}{13}$ y $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

3. Calcula $\cot g\,\alpha$, sabiendo que $tg\alpha = -\frac{5}{3}$

4. Calcula $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$ y $\mathrm{cosec}\,\alpha$ sabiendo que $sen\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que todas las funciones tienen valores positivos.

Soluciones

Solución Ejercicio 7

1. o que $sen\,\alpha = y = \frac{1}{3}$, resulta $cosec\,\alpha = \frac{1}{y} = 3$
2. $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$
3. $\cot g\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}$
4.

$$cos\,\alpha = \sqrt{1 - sen^2\,\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\ ;$$

$$cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ;$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\ ;$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Tabla de ángulos notables

α *en grados*	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
α *en radianes*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Actividad

Ejercicio 8

Calcula $tg\ x, cotg\ x$, $sec\ x$ y $cosec\ x$ para $x = \frac{\pi}{6}$

Ejercicio 9

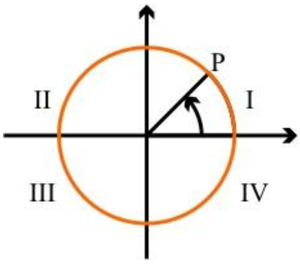
Encuentra el valor de la expresión: $\cos 0 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - tg\,\frac{\pi}{4}$

Ejercicio 10

Verifica la identidad pitagórica para $\theta = \frac{\pi}{4}$ y para $\theta = \frac{3\pi}{2}$

Signo de las Funciones Trigonométricas

Como se vio en la segunda sesión de estudio, el sistema de ejes coordenados divide al plano en cuatro regiones o *cuadrantes:* I, II, III y IV.



De acuerdo con la ubicación del punto P del lado final de un dado ángulo α, diremos que éste pertenece al primero, segundo, tercer o cuarto cuadrante.
En la figura se hace evidente que:

α pertenece al primer cuadrante ($\alpha \in$ I C) si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

α pertenece al segundo cuadrante ($\alpha \in$ II C) si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

α pertenece al tercer cuadrante ($\alpha \in$ III C) si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

α pertenece al cuarto cuadrante ($\alpha \in$ IV C) si $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Según el cuadrante al que pertenece el punto P(x, y), los signos de sus coordenadas x e y varían. En consecuencia, **los signos de las funciones trigonométricas de un ángulo dado, dependen del cuadrante al cual pertenece el ángulo.**

Por ejemplo, en el segundo cuadrante x es negativo, en tanto que y es positivo; luego, el seno del ángulo es positivo, el coseno es negativo, la tangente es un número negativo, etc.

Actividad

Ejercicio 11

Completa la tabla con los signos de las funciones en los cuatro cuadrantes.

Cuadrante	$sen\ \alpha$	$\cos\ \alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$	$cotg\ \alpha$	$\sec\ \alpha$	$cosec\ \alpha$
I						
II	+	-	-			
III						
IV						

Solución Ejercicio 8

$$tg\,\frac{\pi}{6}=\frac{sen\,\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ \cot g\,\frac{\pi}{6}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{sen\,\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ \cos ec\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{sen\,\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

Solución Ejercicio 9

$$\cos\,0+sen\frac{\pi}{6}-tg\,\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{2}-\frac{sen\,\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=1+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$$

Solución Ejercicio 10

$$sen^2\,\frac{\pi}{4}+\cos^2\,\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1$$

$$sen^2\,\frac{3\pi}{2}+\cos^2\,\frac{3\pi}{2}=(-1)^2+0^2=1$$

Solución Ejercicio 11

Cuadrante	sen α	cos α	tg α	*cotg* α	sec α	*cosec* α
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Comenzarás el tema de Funciones. Las funciones surgen en variadísimas cuestiones, provenientes de todos los ámbitos disciplinares. Desde los problemas vinculados a la física, pasando por los de biología, hasta los que abordan las ciencias sociales, todos los campos del conocimiento humano utilizan modelos basados en la noción de función. Tan importante y usado es el concepto, que el término función está incorporado al lenguaje común.
Es así como resulta comprensible decir que expresamos el desplazamiento de un móvil en función del tiempo, el consumo familiar en función del ingreso familiar, el crecimiento poblacional en función de las tasas de natalidad y mortalidad, etc., etc., etc.
Esa comprensión intuitiva del concepto de función, que es importante, no es suficiente, por supuesto, para hacer uso del mismo en cuestiones científicas y técnicas. Es necesario un tratamiento más riguroso de la noción de función.
Es cierto que el aprendizaje de este tema se inicia en el nivel secundario. Por ello, muchas de las nociones que estudiarás en este capítulo te serán familiares. Sin embargo, creemos importante que vuelvas a reflexionar sobre ellas, por lo cual comenzaremos desde la definición misma de función.

Concepto de función

Sea D un conjunto de números reales. Por **función** definida en D entendemos una regla por la cual, *a cada* número de D, se le asigna *un único* número.

Ejemplo. Definiendo una función

Sea *D* el conjunto de los tres primeros números naturales, $D = \{ 1, 2, 3 \}$. Se define una función en *D* estableciendo que: *a cada número le corresponde el doble de dicho número*.
De esta forma, a 1 se le asigna 2 ; a 2 se le asigna 4 y a 3 se le asigna 6.
Ejemplo. Una regla que no define una función
Sea $D = \{4, 9\}$. La regla : *a cada número de D se le asigna la raíz cuadrada de dicho número* no define una función en *D*, pues, por ejemplo, $\sqrt{4} = 2$, pero también $\sqrt{4} = -2$, luego esta regla asigna al número 4 *dos* valores: 2 y -2.

Ejemplo. Otra regla que no define una función

Sea $D = \{2, 3, 4\}$. La regla: *a cada número par de D se le asigna la mitad de dicho número* tampoco define una función en *D*, ya que esta regla no determina cuál es el número que corresponde al elemento 3.
Notación
Suele denotarse una función con las letras f ; g ; h, etc. Si *x* es un elemento de *D,* el número que la función f asigna a *x* se denota $f(x)$ y se dice que es **la imagen de *x* por f .**
La función f es el conjunto de pares de la forma $(\ x\ ,\ f(x)\ )$, con *x* perteneciente a *D* y $f(x)$ perteneciente a $\Re$ (el conjunto de los reales)

Ejemplo. Expresando las imágenes de cada elemento.

Si se llama f a la función del ejemplo primero, se tiene que:
2 es la imagen de 1 por *f*
4 es la imagen de 2 por *f*
6 es la imagen de 3 por *f*
y se puede sintetizar esto escribiendo : $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 6$
La función *f* es el conjunto de pares: $f = \{ (1, 2), (2, 4), (3, 6) \}$

Dominio e Imagen

El conjunto *D* sobre el cual se define una función f se llama **Dominio** de la función y se denota con $Dom(f)$.

El conjunto de valores asignados a cada elemento del dominio, se llama Imagen de la función y se denota con $\operatorname{Im}(f)$. Obsérvese que $\operatorname{Im}(f)$ es el conjunto de las imágenes de cada elemento del dominio.

Ejemplo. Determinando Dominio e Imagen.

Siguiendo con la función f dada en el primer ejemplo, se tiene $Dom(f)=\{1,2,3\}$ y $\operatorname{Im}(f)=\{2,4,6\}$

Ejemplo. Una función con dominio infinito

Considérese la función definida por $f(x)=2x$; x perteneciente a $[0,1]$, en donde con $[0,1]$ se representa el conjunto de todos los números reales que están entre cero y uno, incluidos cero y uno.
En este caso, *x* puede tomar infinitos valores.

Por ejemplo, $x=0$; $x=0.3$; $x=\frac{1}{2}$; $x=0.635$; $x=\frac{3}{4}$; $x=1$, etc. , son algunos de ellos. El dominio de la función es el conjunto de tales valores: $Dom(f)=[0,1]$

Algunas de las imágenes $f(x)$ son : $f(0)=0$; $f(0.3)=0.6$; $f(\frac{1}{2})=1$; $f(1)=2$, etc. El conjunto Imagen está formado por todas ellas, es decir, por todos los duplos de los elementos del dominio. Luego: $\operatorname{Im}(f)=[0,2]$

Cuando en la definición de la función no se especifica el dominio, se toma como tal al conjunto numérico más amplio para el cual la definición tiene sentido. En otras palabras, se considera que el dominio está formado por *todos* los números reales de *x* para los cuales $f(x)$ es un número real.

Ejemplos. Funciones con dominio no especificado

Determinar el dominio de las funciones definidas por $f(x)=x+1$ y $g(x)=\sqrt{x}$

Para la primera de las funciones, el dominio está formado por todos los números reales, puesto que, cualquiera que sea x real, $x+1$ es un número real bien determinado.

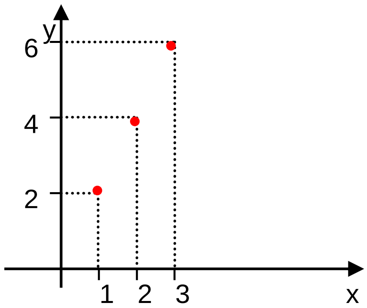
La segunda de las funciones, en cambio, tiene como dominio el conjunto de los números reales no negativos, puesto que la raíz de un número negativo no es un número real.

Gráfica de una función

Los distintos pares de números $(x, f(x))$ que componen una función pueden representarse como puntos del plano. El conjunto de dichos puntos se llama gráfica de la función.

Ejemplo. Graficando una función

Realizar la gráfica de la función $f(x)=2x$, con x perteneciente a $\{1,2,3\}$

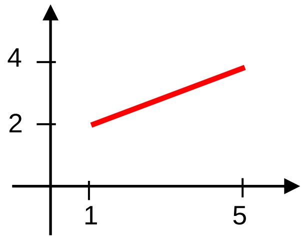


Actividades

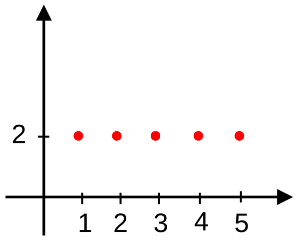
Ejercicio 12

Indicar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones definidas en el intervalo [1 , 5].

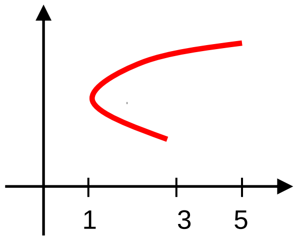
a)



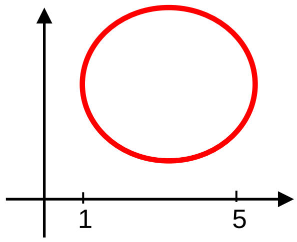
b)



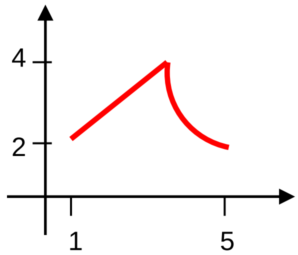
c)



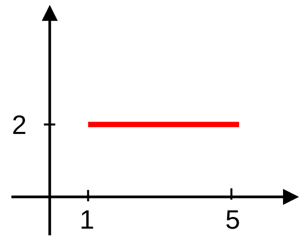
d)



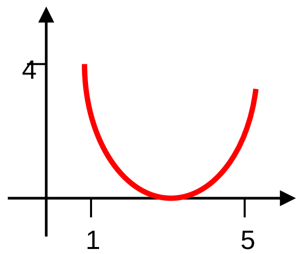
g)



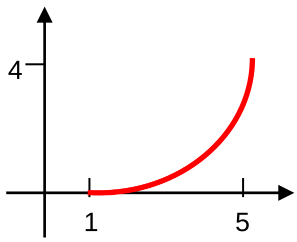
h)



e)



f)



Ejercicio 13

Indicar, observando las gráficas del Ejercicio 1 que corresponden a funciones, cuál es el conjunto imagen de cada función.

Ejercicio 14

¿Cuál de las gráficas del Ejercicio 1 corresponde a una función definida en $D = \Re$? (Con $\Re$ denotamos al conjunto de los números reales).

Ejercicio 15

En las siguientes funciones definidas en $\Re$, calcular $f(-3)$, $f(10)$, $f(-x)$, $f(x+1)$

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 2$

Ejercicio 16

Especificar el dominio de cada función:

$f(x) = x^2$; x real

$f(x) = x^2$; $x \in [-1, 1]$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x}$; $x > 4$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Soluciones

Solución Ejercicio 12

Son funciones definidas en [1,5] las de los apartados a), e), f), g) y h).
La gráfica de c) no corresponde a un función pues por ejemplo dos puntos de la gráfica tienen primera componente 2.
La gráfica de b) no corresponde a una función definida en [1,5]. Por ejemplo, el número 2.5 no es primera componente de ningún punto de la gráfica.
La gráfica de d) tampoco es la de una función

Solución Ejercicio 13

Función del apartado a) $I_m(f) = [2, 4]$

Función del apartado e) $I_m(f) = [0, 4]$

Función del apartado f) $I_m(f) = [0, 4]$

Función del apartado g) $I_m(f) = [2, 4]$

Función del apartado h) $I_m(f) = \{2\}$

Solución Ejercicio 14

Ninguna. Todas las funciones están definidas en el intervalo [0 , 5]

Solución Ejercicio 15

a) $f(-3) = (-3)^2 = 9$

$f(10) = 10^2 = 100$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

$f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $f(-3) = -4; \quad f(10) = 9, \quad f(-x) = -x - 1; \quad f(x+1) = x$

c) $f(-3) = -29; \quad f(10) = 998; \quad f(-x) = -x^3 - 2;$

$f(x+1) = (x+1)^3 - 2$

Solución Ejercicio 16

a) $dom(f) = (-\infty, \infty)$ o bien: $dom(f) = \Re$

b) $dom(f) = [-1,1]$

c) $dom(f) = [0, \infty)$ o bien $dom(f) = \{x \geq 0\}$

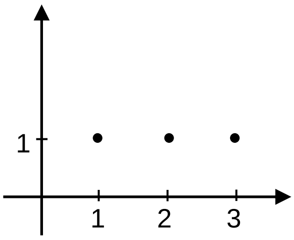
d) $dom(f) = (4, \infty)$ o bien $dom(f) = \{x > 4\}$

e) $dom(f) = (0, \infty)$ o bien $dom(f) = \{x > 0\}$

Formas de definir una función

Algunas veces la regla que define la función está dada en forma implícita, como por ejemplo en el caso siguiente:

$D = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$



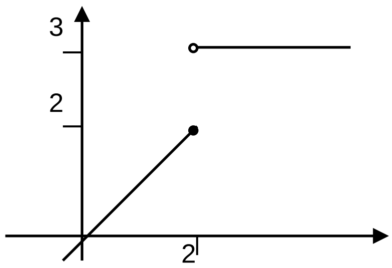
No hay dudas de que los pares $(1\ ,1)$, $(2\ ,1)$ y $(3\ ,1)$ son los pares de la función, por lo que la regla de formación de los pares ordenados, está dada claramente por la misma gráfica.
La mayoría de las veces, la gráfica no es suficiente para determinar fehacientemente cuáles son los pares ordenados de números que constituyen la función, por lo que lo más usual es que la regla esté dada por una igualdad, como en los ejemplos que siguen:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3$, x real

$f(x) = x^2 - 5$; $x \geq 0$

$f(x) = \sqrt{x+2}$

Las funciones "responden" a *la* igualdad que las define en *todo* su dominio.
Otras veces, no basta con dar *una* igualdad para definir una función, puesto que ésta se "comporta" de manera diferente en distintas porciones de su dominio.
Es el caso de funciones como la de la gráfica siguiente:



Se puede observar que hasta $x=2$ inclusive, la función responde a la igualdad $f(x) = x$. Para todo valor de x mayor que 2, la función toma el valor constante 3. El punto $(2\ ,\ 2)$ está señalado como *punto lleno* para indicar que la función toma el valor 2 en $x = 2$. En cambio, el punto $(2\ ,3)$ está señalado como *punto vacío*, pues no pertenece a la gráfica de la función.
En casos como este, se dice que la función está **definida a trozos** y la definición se expresa por medio de más de una igualdad. Particularmente, en el ejemplo precedente se expresa por dos igualdades:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$$

El dominio de una función definida por trozos se determina analizando su definición: en este caso, se trata de una función que toma valores reales para todo x, pues si x es menor que 2, $f(x)$ es igual a x, si $x = 2$, $f(x) = x = 2$, y si x es mayor que 2, $f(x) = 2$. Por tanto, cualquiera sea x, $f(x)$ existe y es real, luego $dom(f) = \Re$.

Mirando la gráfica es fácil ver que la función toma todos los valores reales menores o iguales que 2 y luego toma el valor 3, por lo que $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 2] \cup \{3\}$.

Actividad

Ejercicio 17

Determinar si las funciones están definidas en los puntos que se indican. En caso de estar definidas, calcular el valor de la función en el punto.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 3 - x & x \geq 0 \end{cases}$ $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 2 \\ x - 4 & x \geq 2 \end{cases}$ $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$

d) $f(x) = \begin{cases} 4 & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 3 & x > 1 \end{cases}$ $x = -2$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & -3 < x < -1 \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ $x = -5$, $x = -3$, $x = -1$, $x = 5$

Soluciones

Solución Ejercicio 17

a) $f(-1) = 3; f(1) = 2; f(0) = 3$

b) $f(-2) = 4; f(0) = 0; f(3) = 3$

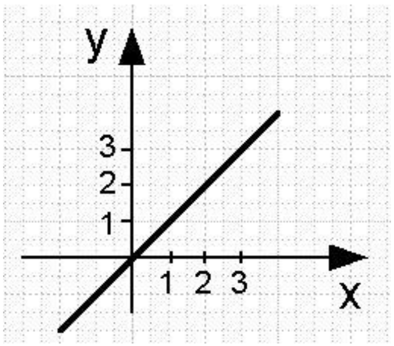
c) no está definida en $x = 0$; $f(2) = -2;$ $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$

d) no está definida en $x = -2$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4;$ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$

e) no está definida en: $x = -5$; $x = -3$; $x = 5$; $f(-1) = 0$

Funciones básicas

Función identidad

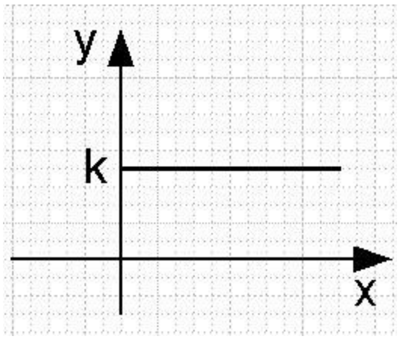


$f(x) = x$

$dom(f) = \Re$

$I_m(f) = \Re$

Función constante

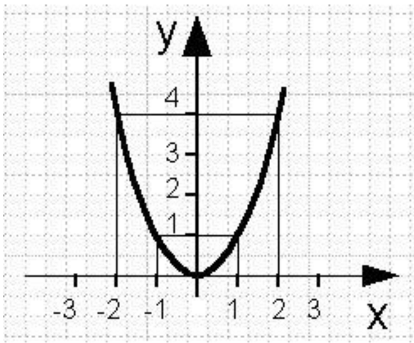


$f(x) = k$

$dom(f) = \Re$

$I_m(f) = \{\Re\}$

Función cuadrática

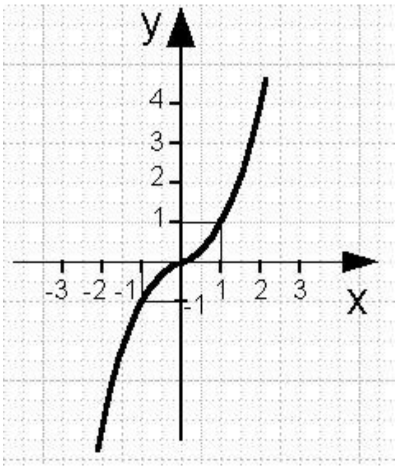


$f(x) = x^2$

$dom(f) = \Re$

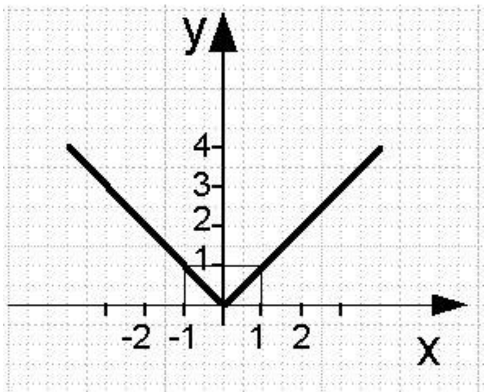
$I_m(f) = [0, \infty)$

Función cúbica



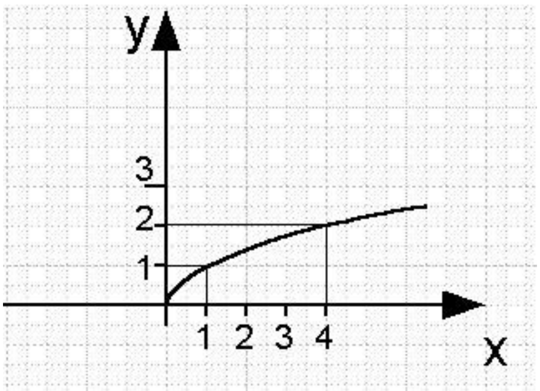
$$f(x) = x^3$$
$$dom(f) = \Re$$
$$I_m(f) = \Re$$

Función Valor Absoluto



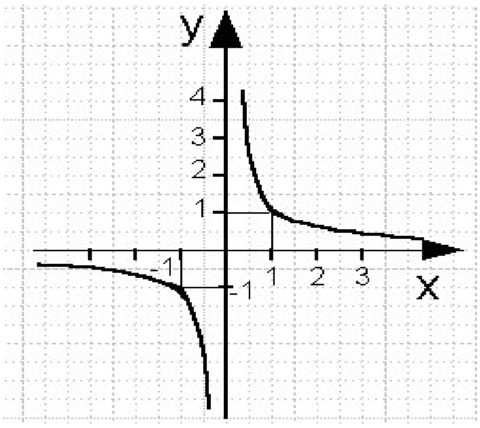
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$
$$dom(f) = \Re$$
$$I_m(f) = [0, \infty)$$

Función Raíz Cuadrada



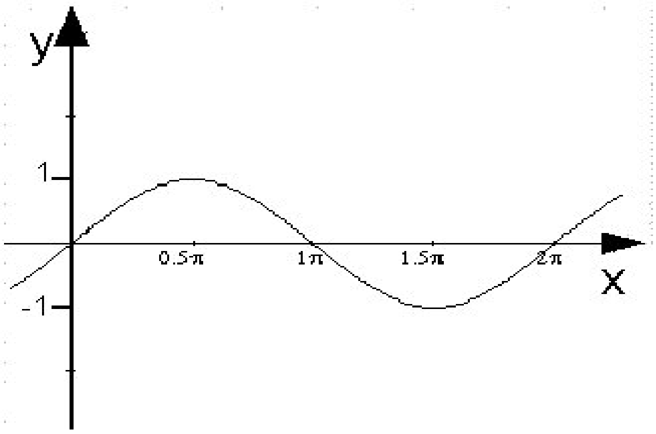
$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$dom(f) = [0, \infty)$$
$$I_m(f) = [0, \infty)$$

Función Racional



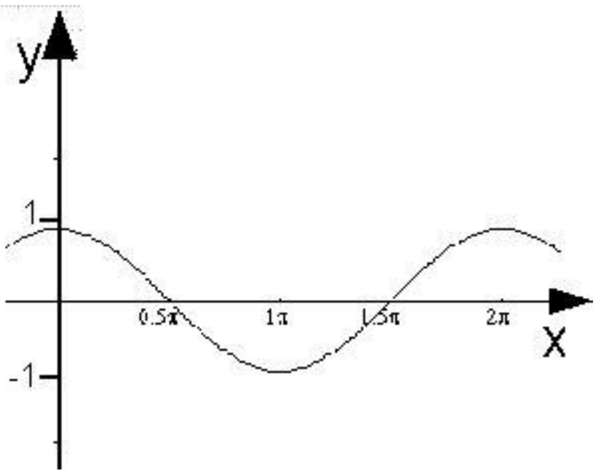
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$dom(f) = \Re - \{0\}$$
$$I_m(f) = \Re - \{0\}$$

Función Seno



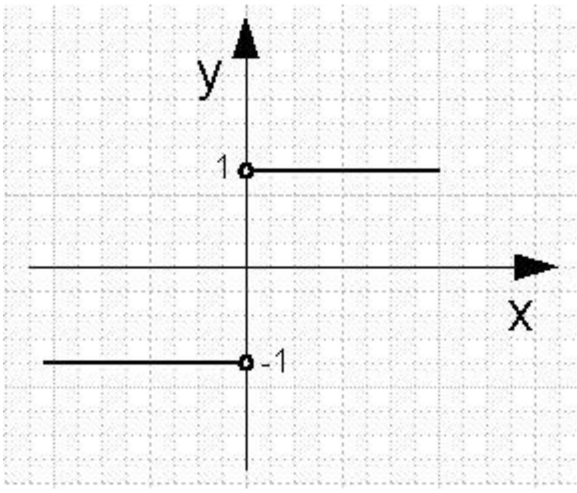
$$f(x) = sen(x)$$
$$dom(f) = \Re$$
$$I_m(f) = [-1,1]$$

Función Coseno



$$f(x) = \boldsymbol{cosen(}\ x)$$
$$dom(f) = \Re$$
$$I_m(f) = [-1,1]$$

Función Signo

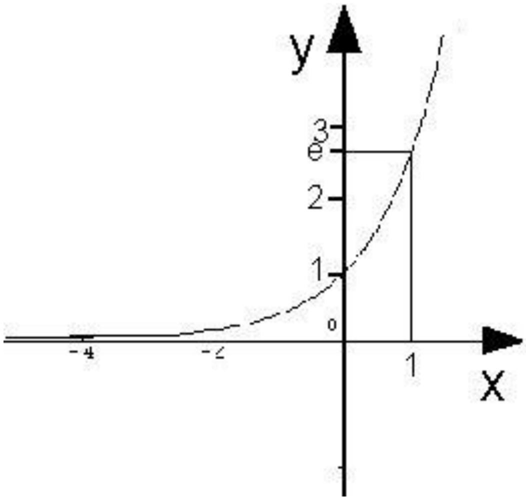


$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$dom(f)=\Re-\{0\}$

$I_m(f)=\{-1,1\}$

Función Exponencial



$f(x)=e^x$

$e \cong 2,7$

$dom(f)=\Re$

$I_m(f)=(0,\infty)$

Operaciones algebraicas con funciones

Dadas dos funciones f y g definidas en el mismo dominio, se definen:

- Suma de funciones: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- Diferencia de funciones: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- Producto de funciones: $(f.g)(x)=f(x).g(x)$
- Cociente de funciones: $(\frac{f}{g})(x)=f(x)/g(x)$ siempre que $g(x)\neq 0$

Ejemplo. Combinando funciones

Dadas $f(x)=x$ y $g(x)=senx$, determinar las funciones $f+g$ y $f.g$, calculando luego sus valores en $x=\pi$

Solución

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+senx$; luego $(f+g)(\pi)=\pi+sen\pi=\pi+0=\pi$

$(f.g)(x)=f(x).g(x)=x\ \ senx$; luego $(f.g)(\pi)=\pi.sen\pi=\pi.0=0$

Ejemplo. Sumando una función constante

Encontrar la expresión que define a la función h que es suma de $f(x)=x$ y $g(x)=5$

Solución

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+5$ Luego: $h(x)=x+5$

Actividad

Ejercicio 18

Dadas $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=x^2-1$, determinar cuáles son:

i) $f+g$ ii) $f-g$ iii) $g-f$ iv) $f.g$ v) $g.f$

vi) $\frac{1}{g}$ vii) $\frac{g}{f}$ viii) $2f-g$

Ejercicio 19

Dadas $f(x)=|x|$ y $g(x)=2$

i) Encuentra la expresión de $(f+g)(x)$.

ii) Calcula $(f+g)(-3)$; $(f+g)(-1)$; $(f+g)(0)$; $(f+g)(2)$; $(f+g)(3)$

iii) Encuentra la expresión de $(f-g)(x)$

iv) Calcula $(f-g)(-3)$; $(f-g)(-1)$; $(f-g)(0)$; $(f-g)(2)$; $(f-g)(3)$

v) Dibuja, en un mismo sistema de ejes coordenados, las gráficas de $f+g$ y $f-g$ (puedes usar como guía los valores que calculaste en ii. y en iv.).

vi) Incorpora al dibujo la gráfica de f, utilizando un trazo más grueso.

vii) A partir de la observación del gráfico obtenido en vi. : ¿Puedes dibujar en el mismo la gráfica de $|x|+4$, sin realizar cálculos previos?

Ejercicio 20

Encuentra directamente las gráficas de las funciones que se indican, utilizando en cada caso la función básica adecuada:

i) $y=x-3$, tomando como base la función identidad.

ii) $f(x)=x^2+1$; $x\geq 0$, tomando como base la función cuadrática definida en $x\geq 0$.

iii) $h(x)=1+\operatorname{sen} x$; $0\leq x\leq \pi$

Ejercicio 21

a) Considera la función $f(x)=x$; $0\leq x\leq 3$ y realiza su gráfica. Luego, encuentra la expresión que define a la función $((-1)f)$ y dibújala con trazo más fino u otro color, en el mismo sistema de ejes, a fin de poder comparar ambas gráficas.

b) Desarrolla la misma actividad del apartado a) precedente, pero ahora con las funciones $|x|$ y $-|x|$, consideradas en todo su dominio.

c) Sobre la base de las actividades a) y b) anteriores, realiza la gráfica aproximada de la función $y = -\operatorname{sen} x \quad ; \quad 0 \leq x \leq 2\pi$, tomando como guía la gráfica de $\operatorname{sen} x$ en el mismo intervalo.

Soluciones

Solución Ejercicio 18

i) $(f+g)(x) = 2x^2$

ii) $(f-g)(x) = 2$

iii) $(g-f)(x) = -2$

iv) $(f\,.\,g)(x) = x^4 - 1$

v) $(g\,.\,f)(x) = x^4 - 1$

vi) $\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

vii) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

viii) $(2f-g)(x) = x^2+3$

Solución Ejercicio 19

i) $(f+g)(x) = |x| + 2$

ii) $(f+g)(-3) = 5$; $(f+g)(-1) = 3$; $(f+g)(0) = 2$;

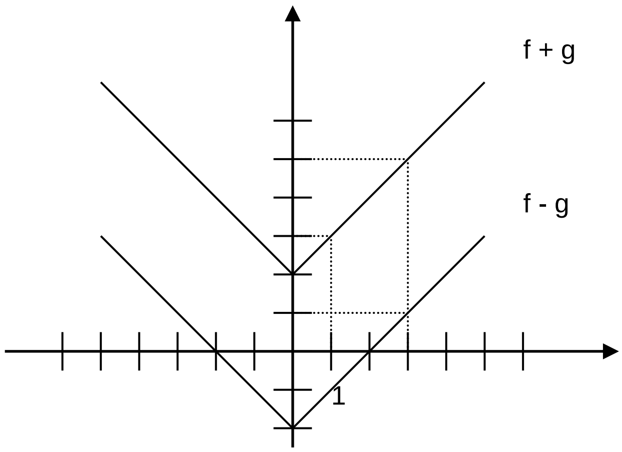
$(f+g)(2) = 4$; $(f+g)(3) = 5$;

iii) $(f-g)(x) = |x| - 2$

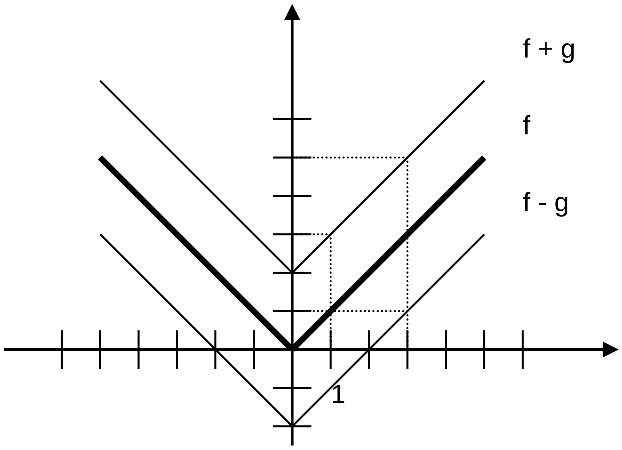
iv) $(f-g)(-3) = 1$; $(f-g)(-1) = -1$; $(f-g)(0) = -2$;

$(f-g)(2) = 0$; $(f-g)(3) = 1$

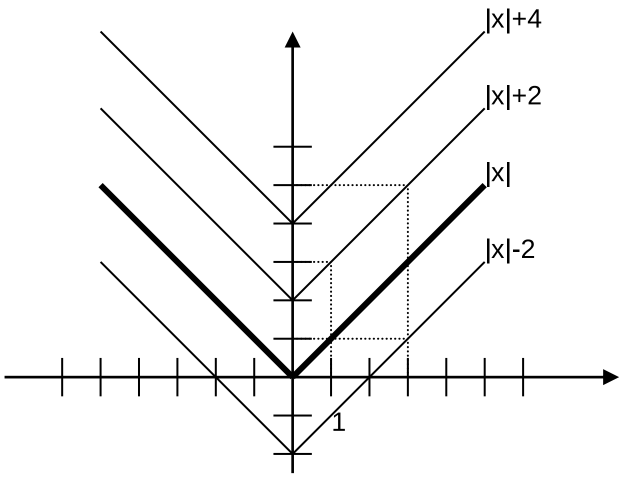
v)



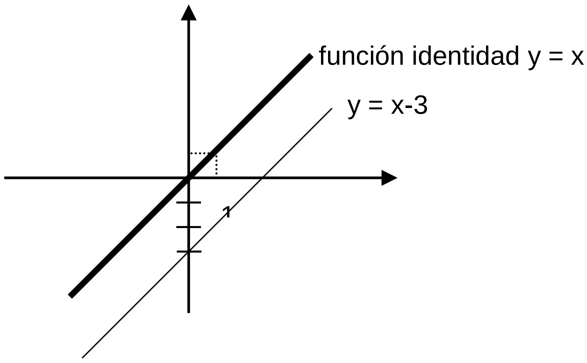
vi)



vii)

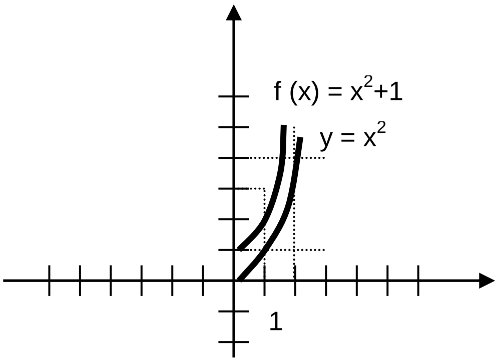


i)

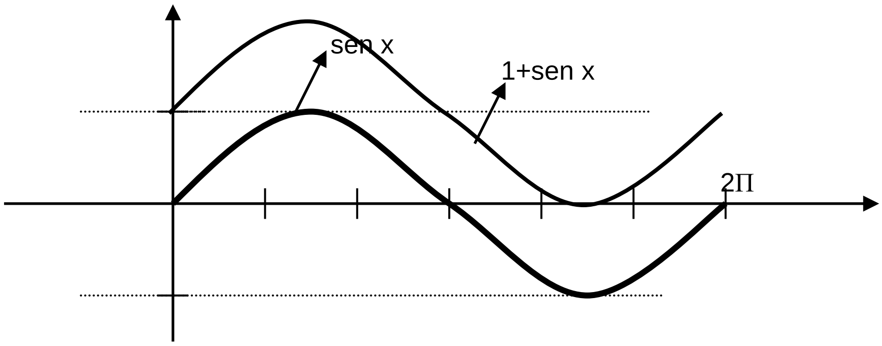


Solución Ejercicio 20

ii)

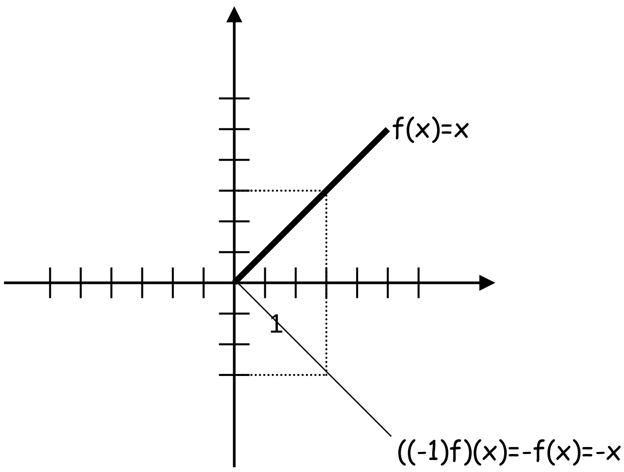


iii)

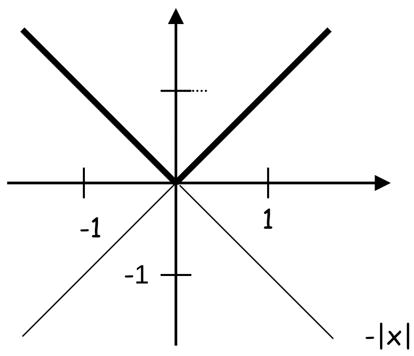


Solución Ejercicio 21

a)



b)



c)