CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

En esta unidad abordaremos algunas cuestiones matemáticas necesarias para comprender los temas que desarrollamos en esta materia.

La simulación en los videojuegos tiene fuertes bases en dos ramas de la matemática: álgebra y cálculo. En álgebra lineal veremos los conceptos de *vectores, matrices* y las operaciones que podemos realizar entre ellos. Estos conocimientos nos van a permitir describir los movimientos de los cuerpos y la rotación de los mismos, entre otros usos.

Por otro lado, introduciremos algunas nociones de cálculo diferencial para aprender *integración numérica,* que es un concepto fundamental y central en la simulación.

1.1. MAGNITUDES

En la vida cotidiana frecuentemente se miden diferentes *magnitudes,* tales como longitudes, masas, tiempos, superficies, volúmenes, ángulos, temperaturas, etc.

Para medir la cantidad de una determinada magnitud se procede a compararla con otra cantidad de la misma magnitud que se toma como *unidad.* Así, por ejemplo, para medir una cierta longitud, se toma otra cantidad de la misma magnitud que es el *metro*; para medir un volumen, *el litro,* para medir una temperatura*, el grado Celsius,* etc.

> Una **magnitud** es una variable física usada para describir la situación de un *sistema* particular. Más precisamente, es todo aquello que se puede medir. Se clasifican en escalares y vectoriales.

Por ejemplo, cuando alguien dice coloquialmente *¡Qué calor!,* está expresando su sensibilidad con respecto al estado del tiempo, pero si la temperatura ambiente es de 40º C *(magnitud escalar),* cualquier persona entenderá lo mismo, independientemente de la sensación que le produzca. En este *sistema* (el tiempo), la temperatura es una magnitud que se puede medir directamente. Las magnitudes se clasifican en *escalares y vectoriales*.

Las magnitudes escalares están totalmente definidas y se indican con un *valor numérico* y su *unidad*.

Ejemplos: Longitud: 5 [m]

Tiempo: 3 [s]

Volumen: 2 [m³]

Un *escalar* es un número con su unidad (en oportunidades, para simplificar el cálculo, no usamos la unidad). Recibe este nombre para diferenciarse de los vectores y matrices. Lo utilizamos continuamente para contar, sumar, restar, etc. Es el tipo de elemento matemático más común en la vida diaria. Usamos escalares cuando decimos *2 manzanas, cuesta 3.25* o *mide 2 m*.

> **Escalar**
> Es un número con su unidad. Por ejemplo: 2 manzanas, cuesta 3.25 o mide 2 m.

También resolvemos ecuaciones escalares como:

$$x + 5 = 10 \tag{1}$$

Sistemas de ecuaciones escalares como:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x - 10y + x = 2 \end{cases} \tag{2}$$

La solución en ambos casos es un escalar*,* porque siempre se trata de un solo número.

> ¿Te acordás como se resolvían las ecuaciones (1) y (2)?

1.1.1. Puntos

Vamos a ver ahora qué es un punto.

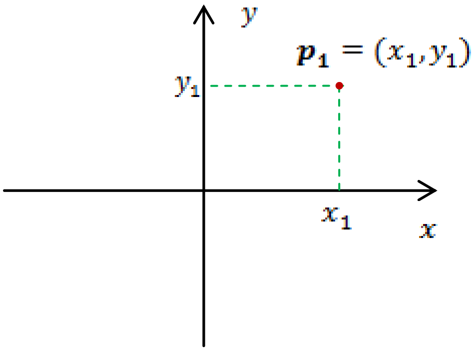
> Un **punto** es una figura geométrica que no posee longitud, área, volumen, ni ningún otro análogo dimensional. No es un objeto físico.

Un punto describe una posición en el espacio respecto a un sistema de coordenadas preestablecido. En nuestro caso, vamos a trabajar sobre el espacio euclídeo bidimensional, es decir, un plano con un sistema de coordenadas asociado. Este es el tipo de espacio que hemos usando hasta ahora y seguiremos viendo a lo largo de la materia.

En 2D (dos dimensiones), un punto se representa como un par de escalares, donde cada uno representa la posición en cada coordenada (*x* e *y*). Es decir, un punto p_1 se representa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{p_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Y a continuación, podemos ver su representación en el espacio 2D, donde x_1 e y_1 son escalares que representan la coordenada en cada eje:



1.1.2. Magnitudes vectoriales

En este tipo de magnitudes, además de especificar un valor numérico y la unidad, es necesario indicar: *punto de aplicación, dirección y sentido*. Es decir, describir si la misma se dirige hacia la derecha o izquierda (empuja o arrastra al objeto), o hacia arriba o abajo (levanta o baja el objeto). Ejemplos de magnitudes sectoriales son la fuerza, la aceleración y la velocidad (que se representan por un *vector)* que adquiere un cuerpo.

> **Vector**
> Analíticamente, es un elemento en un espacio vectorial. Se expresa como una n-tupla de escalares, dónde n es la dimensión del espacio (2 en 2D y 3 en 3D). Geométricamente, el vector es un segmento orientado. Posee un punto de aplicación, módulo, sentido y dirección, pero no tiene una posición definida.

Si bien en otras materias se definió y estudió el tema de vectores, ahora vamos a agregar nuevos conceptos sobre los mismos.

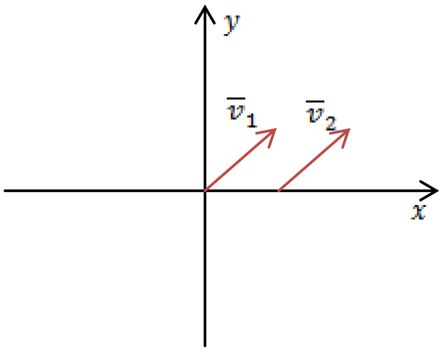
Analíticamente, un vector es un elemento en un espacio vectorial. Un espacio vectorial es una estructura que posee ciertas propiedades matemáticas para la suma y el producto. En nuestro caso en particular, sólo nos interesan los espacios vectoriales euclídeo 2D (dos dimensiones). Todo lo que explicaremos a continuación será sobre estos espacios.

> Una **n-tupla** es una secuencia ordenada de objetos. Es decir, una lista con un número finito de objetos.

Un vector se expresa como una n-tupla de escalares, donde *n* es la dimensión del espacio (2 en 2d y 3 en 3d). Entonces, en 2D, un vector tiene la siguiente forma: $\overline{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

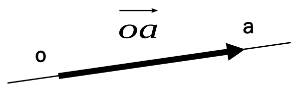
Cada escalar de un vector se denomina *componente* y la cantidad de componentes de un vector, *dimensión.* Los vectores se escriben en **negrita** y con una barra superior para diferenciarlos de los escalares, y se usan corchetes en lugar de paréntesis, para diferenciarlos de los puntos. De cualquier manera, debemos recordar que x e y siguen siendo escalares.

Los vectores *no son* una coordenada dentro del plano, pero veremos que los podemos usar para representar coordenadas. Un vector posee módulo, sentido y dirección, pero no tiene una posición definida.



Geométricamente, un vector es un segmento orientado. Se lo suele indicar con un par de letras ordenadas, que representan origen y extremo, con una flechita arriba, $\overrightarrow{oa}$, o también con una letra minúscula con una flechita arriba $\vec{v}$.

En general, un vector *oa,* con origen en el punto *o* y extremo en el punto *a,* posee:



a) *Un punto de aplicación* Es el origen del vector (punto *o*).

b) *Dirección* Está indicada por la recta que lo contiene o cualquier paralela a ella $\overleftrightarrow{oa}$.

c) *Sentido* Indica hacia dónde apunta el extremo del vector (cada dirección tiene dos sentidos posibles).

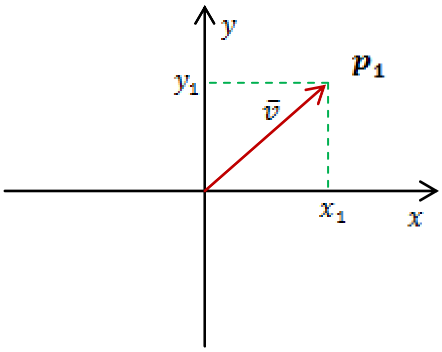
d) *Módulo, intensidad o valor* Indica la medida del segmento y se escribe $\left|\vec{v}\right|$ o $\left|\overrightarrow{oa}\right|$.

En la figura superior se dibujaron dos vectores idénticos $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, orientados a 45° del eje x, pero posicionados en distintos lugares. Ahora, veamos cuáles son las componentes de cada vector: $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Como se puede observar, los dos vectores son idénticos pese a que los hemos dibujado en distintos lugares. Sucede que, como se dijimos anteriormente, un vector no tiene posición, sino sólo dirección, sentido y módulo, y si uno observa la dirección y módulo de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, veremos que efectivamente los vectores son idénticos.

Si suponemos que los vectores tienen origen en el (0,0), podemos usarlos para representar coordenadas. Si bien conceptualmente son muy diferentes a un punto, a la hora de describirlos, ambos se describen como una n-tupla de escalares. Es decir, se puede observar que cada componente del vector representa un desplazamiento desde el origen, equivalentemente a lo que representa cada componente de un punto o coordenada.

Dadas dos coordenadas x_1 e y_1, veamos qué representan si las observamos como un punto y como un vector:



Si las vemos como un vector con origen en el (0,0), obtenemos v_1, como se muestra en la figura superior. Por otro lado, si las vemos como un punto, obtenemos p_1. Como se puede observar, $\bar{v}_1$ termina en el punto p_1.

A veces se utilizan vectores para representar coordenadas debido a la similitud que comparten, pero siempre debemos tener mucho cuidado en no confundirlos conceptualmente.

1.1.3. Tipos de vectores

a) *Equipolentes o iguales* Cuando los vectores tienen igual módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

b) *Opuestos* Cuando los vectores tienen la misma dirección, igual módulo y distinto sentido.

c) *Colineales* Cuando los vectores tienen igual dirección.

d) *Concurrentes* Cuando las direcciones de los vectores se cortan en un solo punto.

Es común que se suprima el operador * en las expresiones. Por ello, siempre que veas dos variables sin operador, las mismas estarán multiplicando.

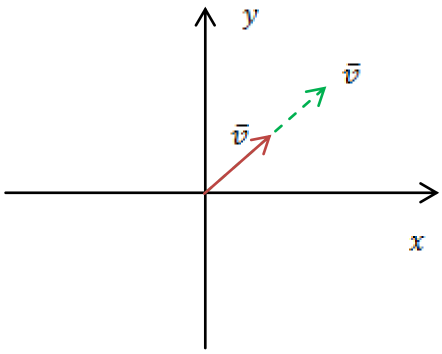
1.1.4. Producto de un vector por un escalar

Multiplicar un vector por un escalar es muy sencillo, simplemente se multiplica cada una de las componentes por el escalar. Sea α un escalar y $\overline{v}$ un vector del plano, entonces el producto se calcula de la siguiente manera:

$$\alpha * \overline{v} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

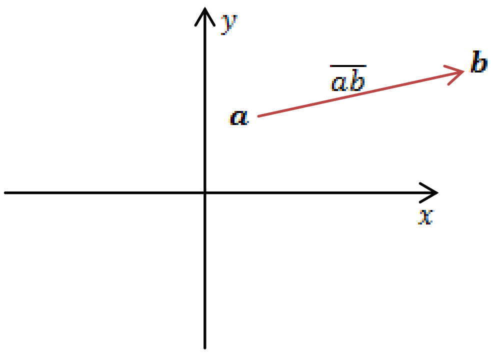
El efecto que tiene dicha operación es la de cambiar el módulo y el sentido del vector, pero no su dirección. Es decir que el escalar hace al vector *más largo, más corto*, e incluso lo invierte.

Por ejemplo: si $\alpha > 1$, lo que sucede es que, como se muestra en la siguiente figura, el vector se estira:



1.1.5. La inversa de un vector

Como dijimos anteriormente, el sentido es una de las propiedades que define a un vector. Por ejemplo, si tenemos un vector entre dos puntos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, como se muestra en la figura:



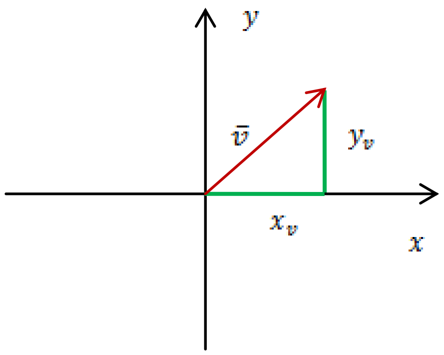
Podemos definir un vector que comience en $\boldsymbol{a}$ y termine en $\boldsymbol{b}$, denominándolo $\overline{\boldsymbol{ab}}$. Este vector tiene una dirección definida y el sentido partedesde $\boldsymbol{a}$ hacia $\boldsymbol{b}$. No ocurre lo mismo si definimos al vector $\overline{\boldsymbol{ba}}$ porque en este caso obtenemos un vector con el mismo módulo, la misma dirección, pero el sentido inverso. Por ello, a este vector, lo llamamos *vector inverso*.

Existe una relación entre un vector y su inverso. Dado un vector $\overline{\boldsymbol{ab}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, su inversa se obtiene multiplicando el vector por -1: $\overline{\boldsymbol{ba}} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

1.1.6. Módulo de un vector

El módulo es otra de las propiedades importantes de un vector. Para calcularlo, utilizamos el teorema de Pitágoras.

Definamos un vector $\overline{\boldsymbol{v}}$, que se encuentre en el primer cuadrante del plano, de la siguiente manera:



En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa (el lado más largo) es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos (los dos lados menores que conforman el ángulo recto).

Trazamos, en color verde, dos líneas perpendiculares entre sí, que forman con $\overline{\boldsymbol{v}}$ un triángulo rectángulo. El lado y_v es perpendicular al eje *x* y paralelo al eje *y*, mientras que el lado x_v es paralelo al eje *x* y perpendicular al eje *y*. Nótese que x_v e y_v son, justamente, las componentes del vector $\overline{\boldsymbol{v}}$. El módulo de $\overline{\boldsymbol{v}}$ es la hipotenusa del triángulo que denotaremos $\|\overline{\boldsymbol{v}}\|$.

Una vez que tenemos la construcción hecha, recordamos el teorema de Pitágoras.

En nuestro caso, la longitud de los catetos es conocida: son las componentes del vector. Entonces, aplicando Pitágoras, podemos obtener la longitud de $\overline{\boldsymbol{v}}$, que denominamos *módulo:*

$$\|\overline{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$$

Los vectores que cumplen $\|\overline{\boldsymbol{v}}\| = 1$ se denominan *unitarios, los cuales –como veremos más adelante–* son muy útiles.

Ahora supongamos que tenemos un vector cuyo módulo es mayor a 1.

Existe una manera de lograr que su módulo sea unitario sin cambiar su dirección ni sentido. Esto se llama *normalizar* el vector y para ello se debe dividir a cada una de las componentes por el módulo del mismo:

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{unitario} = \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{\|\overline{\boldsymbol{v}}\|} = \begin{bmatrix} \frac{v_x}{\|\overline{\boldsymbol{v}}\|} \\ \frac{v_y}{\|\overline{\boldsymbol{v}}\|} \end{bmatrix}$$

De esta forma, obtenemos un vector cuya norma o módulo es unitario, pero mantiene su dirección.

1.1.7. Operaciones entre vectores

Suma de vectores: método gráfico

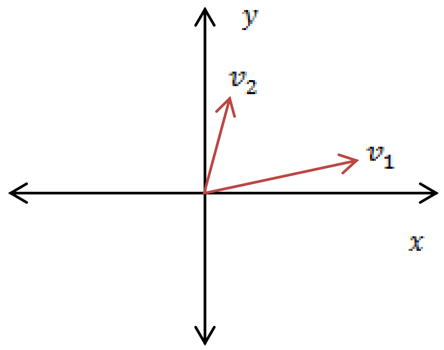
La suma de dos vectores se realiza componente a componente. Para poder sumar dos vectores $\overline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{bmatrix}$ y $\overline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2_x} \\ v_{2_y} \end{bmatrix}$, ambos deben poseer la misma cantidad de componentes, es decir, la misma dimensión. La suma se realiza de la siguiente manera:

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{2_x} \\ v_{2_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1_x} + v_{2_x} \\ v_{1_y} + v_{2_y} \end{bmatrix}$$

Ahora veamos qué representa sumar dos vectores gráficamente. Para ello, utilizaremos la *regla del paralelogramo.*

Imaginemos que los vectores $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ se encuentran de la siguiente manera en el plano:

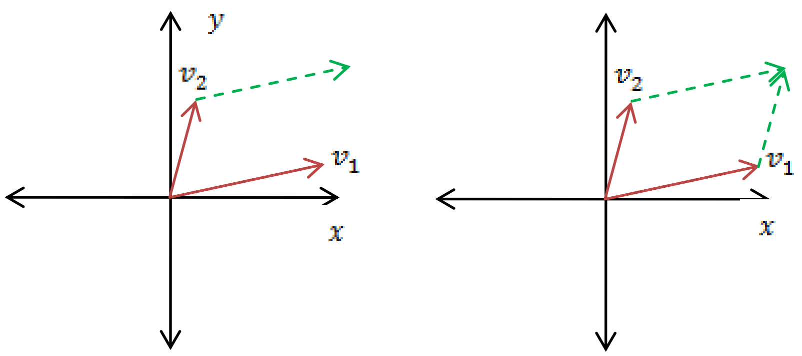
Un paralelogramo es un polígono formado por cuatro lados, cuyos lados opuestos son paralelos.



La regla del paralelogramo nos indica gráficamente cómo será el vector resultante de esa suma.

Ahora, veamos paso por paso cómo realizarla.

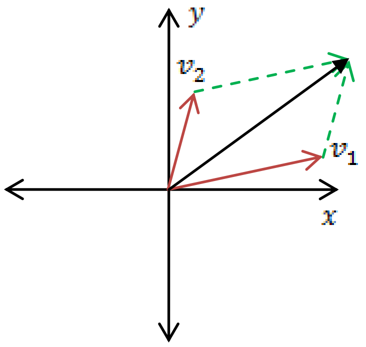
En primer lugar, tomamos $\overline{v}_1$ y lo copiamos, posicionándolo como si tuviera origen en el final de $\overline{v}_2$, sin cambiar su dirección, de manera que siga siendo paralelo al vector original, tal como se muestra en el primer gráfico de la siguiente figura:



Luego, hacemos algo similar con $\overline{v}_2$: lo copiamos y lo posicionamos como si comenzara donde termina $\overline{v}_1$, como se muestra en la segunda figura del gráfico superior.

Así, es posible observar que estos dos vectores que copiamos juntos con los dos originales forman un paralelogramo (de aquí el nombre del método).

Luego, para obtener el vector resultante, trazamos una línea que nace en el origen de coordenadas (dónde se juntan $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$) y termina donde se juntan las puntas de los vectores copiados (con línea de puntos en el gráfico). Esta línea que hemos trazado es el vector resultado de la suma, que se muestra en la siguiente figura:



El vector de color negro es el vector resultado de la suma.

La suma de vectores cumple con las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v}_2 + \overline{v}_1$
- Asociativa: $(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) + \overline{v}_3 = \overline{v}_1 + (\overline{v}_2 + \overline{v}_3)$

Diferencia de dos vectores: método gráfico

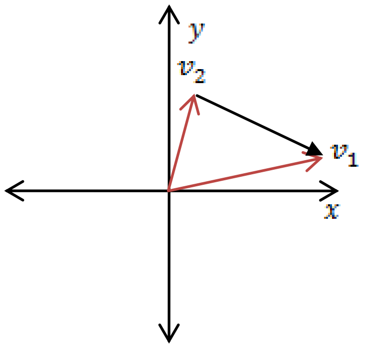
La diferencia de dos vectores es similar a la suma. Dados dos vectores $\overline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix}$ y $\overline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix}$, para obtener el vector diferencia se opera restando componente a componente. Al igual que en la suma, esto toma la siguiente forma:

$$\overline{v}_1 - \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} - v_{2x} \\ v_{1y} - v_{2y} \end{bmatrix}$$

En este caso, no se cumple la propiedad conmutativa, pero sí la asociativa. Es decir:

- *No* es conmutativa: $\overline{v}_1 - \overline{v}_2 \neq \overline{v}_2 - \overline{v}_1$
- Asociativa: $(\overline{v}_1 - \overline{v}_2) - \overline{v}_3 = \overline{v}_1 - (\overline{v}_2 - \overline{v}_3)$

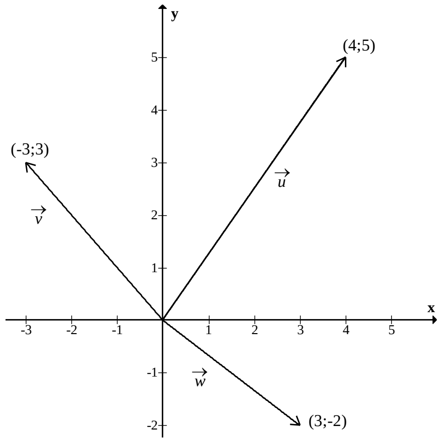
Ahora veamos gráficamente qué representa la diferencia de dos vectores. Dados dos vectores $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$, si calculamos $\overline{v}_1 - \overline{v}_2$, obtenemos el vector de color negro de la siguiente figura:



Como se puede observar, la diferencia nos da un vector que comienza en el extremo final de $\overline{v}_2$ y termina en el extremo final de $\overline{v}_1$. La magnitud de dicho vector es la distancia en línea recta entre los extremos de cada vector, y la dirección viene dada por el orden de la resta. El vector resultante siempre apunta al primer operador. En el ejemplo de arriba, si hubiésemos hecho la diferencia exactamente al revés, es decir, $\overline{v}_2 - \overline{v}_1$, obtendríamos el vector inverso.

Suma y resta de vectores: método analítico

Tomemos la siguiente figura:



Como se observa, el vector $\vec{u}$ forma un ángulo α , supongamos 30º con la dirección del semieje positivo de las *x* en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Con el mismo análisis, podríamos demostrar que el vector $\vec{v}$ describe un ángulo β, que podría ser de 135º a partir del eje *x* positivo, el cual también se puede tomar como un ángulo de 45º, ubicado en el segundo cuadrante (recordemos que es el que está desde 90º a 180º).

Si nuestro objetivo es sumar estos dos vectores de forma *analítica,* se procede de la siguiente manera:

1) Se descompone a cada vector en sus respectivas *componentes vectoriales,* utilizando las *funciones trigonométricas del seno y coseno.* De esta manera podemos descomponer al vector $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como:

   $u.\cos 30°$, segmento ubicado sobre el eje **x** positivo.

   $u.sen30°$, segmento ubicado sobre el eje **y** positivo.

   $v.\cos 135°$ o $v.\cos 45°$, segmento ubicado sobre el eje ***x*** negativo.

   $v.sen135°$ o $v.sen45°$, segmento ubicado sobre el eje ***y*** positivo.

2) Se suman las componentes vectoriales, pero siempre respetando a cada una en su respectivo eje. Entonces:

   $\sum$ = (símbolo de sumatoria)

   $\sum ejex = u.\cos 30 + v.\cos 135$ o $\sum ejex = u.\cos 30 - v.\cos 45$

   $\sum ejey = u.sen30 + v.sen135$ o $\sum ejey = u.sen30 + v.sen45$

   En las expresiones anteriores, cuando se hace referencia a los vectores *u* y *v*, debemos entender que son sus módulos, que se conocen o calculan con el famoso teorema de Pitágoras (raíz cuadrada de la suma de sus catetos, cada uno elevado al cuadrado)

   Así, para el vector ***u***, su módulo es aproximadamente 6,40. En tanto, para el vector *v*, el módulo tiene un valor aproximado de 4,24.

3) Por lo tanto, llegaremos a un solo valor en el eje *x* y a otro valor en el eje

   $\sum ejex = 6{,}40.\cos 30 + 4{,}24.\cos 135 = 6{,}40.0{,}866 + 4{,}24.(-0{,}707) \cong 4{,}27$

$$\sum ejey = 6{,}40.sen30 + 4{,}24.sen135 = 6{,}40.0{,}5 + 4{,}24.0.707 \cong 6{,}20$$

4) De lo anterior deducimos que sólo hay un vector *resultante en el eje x,* cuyo módulo es 4,27, y un solo vector *resultante en el eje y*, con módulo 6,20. Para obtener el módulo del vector suma de estos dos últimos (o sea, el resultante total), utilizamos el Teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

   $R = \sqrt{4{,}24^2 + 6{,}20^2} \cong 7{,}53$ 7,53 es aproximadamente el módulo de dicho vector.

5) Pero anteriormente vimos que una magnitud vectorial (un vector) se expresa con *módulo, dirección* y *sentido.* Esto significa que a nuestro análisis le faltan estas dos últimas características, las cuales se obtienen usando la función trigonométrica *tangente de un ángulo.* Si hacemos un poco de memoria, recordaremos que la misma es el cociente entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente (también se toma como el seno de un ángulo sobre el coseno del mismo ángulo).

6) Para nuestro análisis, la dirección y sentido del vector resultante está dado por el valor del *ángulo* que forman los dos vectores ubicados sobre el eje *y* y sobre el eje *x.* Así:

   $tg\,\alpha = catetoopuesto / catetoadyacente$

   $tg\,\alpha = 6{,}20 / 4{,}27$

   $\alpha = tg^{-1}(6{,}20 / 4{,}27) = 55{,}6°$

   Llegados a este punto, estamos en condiciones de decir que el vector resultante de sumar los vectores **U** y **V**, es $\vec{R}$ = (7,53 ; 55,6º) o $\vec{R}$ = 7,53 55,6º.

1.1.8. Vector a partir de dos puntos

Dados dos puntos en el plano, podemos obtener el vector que los une simplemente pensando a los puntos como vectores y aplicando la diferencia de vectores que ya aprendimos.

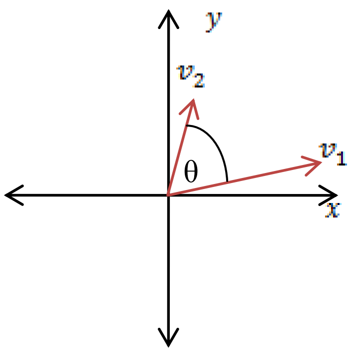
Producto interno

El producto interno o producto punto es una de las operaciones más comunes entre vectores. Como resultado, el producto interno nos da un escalar. Dados dos vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_1$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_2$, el producto interno entre ellos se denota como $\overline{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_2$. El producto interno se calcula de la siguiente manera: $\overline{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{2_x} \\ v_{2_y} \end{bmatrix} = v_{1_x} v_{2_x} + v_{1_y} v_{2_y}$

Existe una relación entre el producto interno y el ángulo que separa los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_1$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_2$. El producto interno entre dos vectores es igual al producto de sus módulos y el ángulo que los separa: $\overline{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_2 = \|\overline{\boldsymbol{v}}_1\| \|\overline{\boldsymbol{v}}_2\| \cos(\theta)$

Recordemos que el módulo de un vector es un escalar y el coseno de un ángulo es otro escalar, por lo que el resultado concuerda con lo que esperábamos: otro escalar.

θ es el menor ángulo que separa los vectores, como se aprecia a continuación:



Esta relación nos da una forma sencilla de obtener dicho ángulo, simplemente despejando de la ecuación:

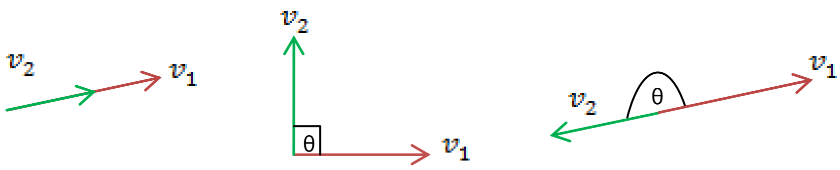
$$\theta = \frac{\cos^{-1}(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2)}{\|\overline{v}_1\| \|\overline{v}_2\|}$$

En el caso que $\|\overline{v}_1\| = \|\overline{v}_2\| = 1$, entonces obtenemos directamente:

$$\theta = \cos^{-1}(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2)$$

Dónde $\cos^{-1}$ indica la inversa del coseno.

Ahora veamos cuánto vale el producto punto en cada uno de los siguientes casos:



En el primer caso, el ángulo θ es nulo, por lo que su coseno vale 1; luego el producto interno vale directamente:

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \|\overline{v}_1\| \|\overline{v}_2\|$$

En el segundo caso, el ángulo es de 90°, por lo que su coseno es igual a 0, por lo tanto:

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \|\overline{v}_1\| \|\overline{v}_2\| 0 = 0$$

Esto nos provee una forma sencilla de determinar si dos vectores son perpendiculares. Simplemente calculamos el producto interno y vemos si es igual a 0.

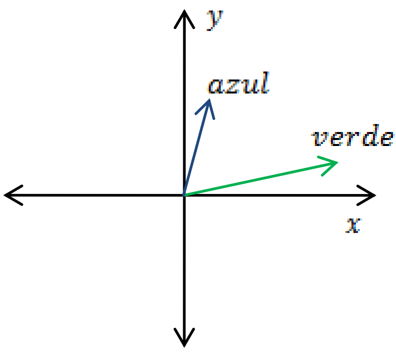
En el último ejemplo de la figura observamos dos vectores separados por un ángulo de 180°. En este caso, $\cos(180) = -1$, obtenemos el mismo resultado que cuando eran coincidentes, pero con el signo cambiado:

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = -\|\overline{v}_1\| \|\overline{v}_2\|$$

Si los vectores del primer y último caso fueran unitarios, los productos internos darían 1 y -1, respectivamente. Esto nos permite saber rápidamente si los vectores forman un ángulo de más de 90° o no.

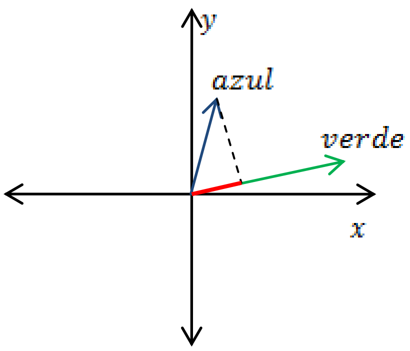
1.1.9. Proyección

Imaginemos que tenemos dos vectores $\overline{azul}$ y $\overline{verde}$ que se encuentran de la siguiente manera en el plano:



Tanto $\overline{azul}$ como $\overline{verde}$ poseen un módulo, sentido y una dirección determinada.

Supongamos que queremos ver que *tanto* $\overline{azul}$ como $\overline{verde}$ tienen la misma dirección y sentido, es decir, que el vector azul crece en la dirección de verde. Para esto, utilizaremos una operación denominada *proyección.* Podemos imaginar que dibujamos la sombra que el vector $\overline{azul}$ hace sobre el $\overline{verde}$. Para esto, trazamos una línea perpendicular al vector $\overline{verde}$ que lo una con el punto final del vector $\overline{azul}$, como se muestra en la siguiente figura:



La *sombra* que se dibujó en rojo se denomina la proyección de $\overline{azul}$ sobre $\overline{verde}$ y la escribiremos de la siguiente manera: $\overline{azul}_{\rightarrow verde}$. Esta operación nos da una idea del *parecido* entre vectores. Para calcular analíticamente esta idea, utilizamos el producto interno explicado anteriormente:

$$\overline{azul}_{\rightarrow verde} = \frac{\overline{azul} \cdot \overline{verde}}{\|\overline{verde}\|}$$

Si $\overline{verde}$ fuera unitario, la expresión se reduciría directamente a:

$$\overline{azul}_{\rightarrow verde} = \overline{azul} \cdot \overline{verde}$$

1.2. MATRICES

¿Qué son?

A priori podemos decir que una matriz es un arreglo bidimensional de escalares, donde la dimensión del arreglo puede ser cualquiera, es decir, podemos tener una matriz de *2x2*, *3x3*, *2x6*, *1000x4*, etc. A esta propiedad se la conoce simplemente como *dimensión de la matriz.* Un ejemplo de matriz de una matriz de *2x2*:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 3{,}25 & 5 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

Para escribir las matrices, usaremos letras mayúsculas en negrita y con dos barras superiores, para diferenciarlas de los vectores y escalares. Por otro lado, recordaremos que cada elemento dentro de la matriz es un escalar.

Al igual que en los vectores, cada elemento de una matriz se llama *componente.* Para hacer referencia a un componente dentro de una matriz hace falta dar sus dos índices. En general, se los llama *i,j* respectivamente(esta convención de notación es sólo arbitraria, al igual que llamar a los ejes *x* e *y*).

Los índices corren en el siguiente sentido:

$$\begin{array}{cc} & j \Rightarrow \\ i\Downarrow & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

Es decir, como vemos en la matriz (3), ésta es de dimensión *nxm* y el índice *i* comienza desde la esquina superior izquierda y crece a medida que bajamos en las filas de la matriz; luego, el índice determina la fila del componente.

Por otro lado, el índice *j* comienza en la misma esquina superior izquierda y crece a medida que pasamos las columnas de la matriz; luego, el índice determina la columna del componente. Por eso vemos que, por ejemplo, el componente $a_{2,1}$ se encuentra en la fila 2 y la columna 1 de la matriz.

1.2.1. Notación y elementos

Una *matriz* es un arreglo o disposición rectangular de números, encerrados por corchetes o paréntesis, de la forma $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Los números $a_{11}, a_{12},..., a_{mn}$ se llaman *elementos* de la matriz.

Ejemplo 1:

$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 25 & 3 \end{bmatrix}$ es una matriz. Los números -1 , 6 , 25 y 3 son sus elementos.

1.2.3. Filas y columnas

Las líneas horizontales se llaman *filas* o *renglones* de la matriz. Las líneas verticales se llaman *columnas* de la matriz.

Dado un elemento a_{ij} de una matriz, el primer subíndice indica la fila a la que pertenece el elemento y el segundo subíndice indica la columna.

Ejemplo:

La matriz $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tiene 2 filas y 3 columnas. En ella, el elemento a_{11}(o elemento 1,1) es 4; el elemento a_{12} es 1; $a_{13}=7$; $a_{21}=3$; $a_{22}=0$; $a_{23}=2$

1.2.4. Tamaño de una matriz

Una matriz de m renglones y n columnas se dice que es una matriz de *tamaño* $m \times n$.

Si el número de filas es igual al de columnas, se dice que la matriz es una *matriz cuadrada.*

En una matriz cuadrada, la línea oblicua formada por los elementos a_{ij} con $i = j$, es llamada diagonal principal de la matriz.

Una matriz es, conceptualmente, lo mismo que un vector, sólo que con componentes indexados por dos índices.

Ejemplos:

La matriz $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 25 & 3 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de tamaño 2x2.

La matriz $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 8 & 6 & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de tamaño 3x3. La diagonal principal está formada por los elementos 0, 6 y 5.

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ no es cuadrada. Su tamaño es 2x3. Tiene 2 filas y 3 columnas.

1.2.5. ¿Para qué sirven las matrices?

El principal uso consiste en representar y resolver sistemas de ecuaciones lineales. Esto significa que:

- Una matriz puede representar todo un sistema de ecuaciones, compuesto por cualquier cantidad de ecuaciones.

- Para esto, la condición es que las ecuaciones del sistema de ecuaciones sea de la siguiente forma: $\alpha + \beta\, \boldsymbol{x} + \gamma\, \boldsymbol{y} + \delta\, \boldsymbol{z} + \cdots = \omega$

  Las letras del alfabeto griego(α, β, γ,δ, ω, etc.) son constantes y las letras en negrita con variables.

  Lo más importante es que todas las variables tienen como exponente 1 y no hay términos con variables multiplicadas cruzadas, es decir, no hay término con la forma $\alpha \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$.

  Esto hace que la ecuación sea lineal y, por ende, que el sistema de ecuaciones formado por ecuaciones lineales sea lineal.

Más adelante veremos cómo se usa la operación de multiplicación entre una matriz y un vector para hacer esta representación, pero ahora les mostraremos un ejemplo de cómo se forma una matriz que representa un sistema.

En primer lugar, representamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y & = 4 \\ 6x - 10 & = 2 \end{cases}$$

La matriz que lo representa es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Es decir que con esa matriz y con el vector de la derecha podemos representar todo el sistema. Más adelante, cuando estudiemos algunas operaciones con matrices y vectores, observaremos cómo se lo formó.

1.2.6. Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son *iguales* cuando tienen el mismo tamaño y los elementos correspondientes a la misma posición, iguales.

Ejemplo:

Las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *no* son iguales, puesto que no tienen el mismo tamaño.

1.2.7. Matriz nula

La matriz *mxn,* cuyos elementos son todos *0*, se denomina *matriz cero* mxn o *matriz nula* mxn.

Ejemplo:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz nula 2x2 ; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz nula 1x5 (o vector fila cero).

1.2.8. Operaciones

Suma de matrices

La suma de matrices está definida para matrices del mismo tamaño: la suma de dos matrices mxn $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ y $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ es la matriz $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ cuyos elementos son $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1,\ldots m$; $j = 1,\ldots n$

Se indica: $C = A + B$

Ejemplo 1: sumando dos matrices.

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$, calcular $A + B$

Solución:

Teniendo en cuenta la definición, la igualdad $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ indica que cada elemento de la matriz $A + B$ es la suma de los elementos que ocupan *la misma posición* en las matrices A y B. Luego:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 0+4 \\ -1+1 & 3+8 \\ 5-3 & 9-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 11 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

- Si A, B y C son matrices mxn, entonces $(A+B)+C = A+(B+C)$ (asociativa).
- Si A y B son matrices mxn, entonces $A + B = B + A$ (conmutativa).
- La matriz nula O mxn es elemento neutro de la suma: si A es una matriz mxn, $A + O = O + A = A$.

- Toda matriz tiene una opuesta: si $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ es una matriz mxn, entonces la matriz mxn $B = \lfloor -a_{ij} \rfloor$, verifica que $A + B = B + A = O$. Se denota $B = -A$

Ejemplo 2: calculando la opuesta

Encontrar la opuesta de $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

Los elementos de $-A$ son los opuestos de los respectivos elementos de A. Por tanto:

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que $A + (-A) = 0$

Diferencia de matrices

Dadas A y B matrices mxn, se define la diferencia $A - B = A + (-B)$

Ejemplo 3: restando matrices

Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, calcular $A - B$

Solución:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Producto de número por matriz

Dados un número real α y una matriz mxn $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, el producto $\alpha . A$ es la matriz mxn $\lfloor b_{ij} \rfloor$, donde $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$; $i = 1,\ldots,m \quad ; \quad j = 1,\ldots,n$

Ejemplo 4: calculando el duplo de una matriz

Calcular $2A$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 8 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solución:

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 8 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & 2.(-1) & 2.2 \\ 2.8 & 2.10 & 2(-1) \\ 2.0 & 2.0 & 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 16 & 20 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5: calculando un múltiplo de un vector

Dado el vector $u = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, encontrar el vector $5u$

Solución:

$$5u = 5\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-15\\10\\0\end{bmatrix}$$

Propiedades del producto de número por matriz

- Si A es una matriz mxn y $\alpha,\beta \in \Re$, entonces $\alpha.(\beta.A) = (\alpha.\beta).A$
- Si A es una matriz mxn y $\alpha,\beta \in \Re$, entonces $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$
- Si A y B son matrices mxn y $\alpha \in \Re$, entonces $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$

El símbolo $\in$ se lee pertenece a o perteneciente a. Con el símbolo $\Re$ representaremos al conjunto de los números reales. Por ejemplo, la primera propiedad se lee: Si A es una matriz de tamaño mxn y α y β pertenecen al conjunto de los números reales, entonces $\alpha.(\beta.A) = (\alpha.\beta).A$
Veamos ahora algunos ejemplos en los que intervienen varias de las operaciones.

Ejemplo 6: combinando operaciones

Calcular $2\,(2A - B)$, con $A = \begin{bmatrix}-1 & 2\\7 & -4\end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$

Solución:

$$2\,(2A - B) = 2\,(2\begin{bmatrix}-1 & 2\\7 & -4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}) = 2\,(\begin{bmatrix}-2 & 4\\14 & -8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{bmatrix})$$

$$= 2\begin{bmatrix}-5 & 6\\14 & -9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10 & 12\\28 & -18\end{bmatrix}$$

También puede resolverse así:

$2\,(2A - B) = 4\,A - 2\,B = \begin{bmatrix}-10 & 12\\28 & -18\end{bmatrix}$, teniendo en cuenta las propiedades del producto.

Ejemplo 7: resolviendo una ecuación matricial

Dadas las matrices $E = \begin{bmatrix}-1 & 4 & 0\\0 & -3 & 6\\\frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}$ y $F = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\-2 & 0 & 2\\5 & 5 & 0\end{bmatrix}$, encontrar X tal que:

$$2X + 2E = F$$

Solución:

Si $2X + 2E = F$, entonces $2X = F - 2E$, luego $X = \frac{1}{2}(F - 2E)$

Reemplazando E y F:

$$X = \frac{1}{2}(\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\-2 & 0 & 2\\5 & 5 & 0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-1 & 4 & 0\\0 & -3 & 6\\\frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}) = \frac{1}{2}(\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\-2 & 0 & 2\\5 & 5 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & 8 & 0\\0 & -6 & 12\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & -7 & 1\\-2 & 6 & -10\\4 & 5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2}\\-1 & 3 & -5\\2 & \frac{5}{2} & 1\end{bmatrix}$$

1.2.9. Unarias

Transpuesta

La transpuesta de una matriz se obtiene al intercambiar filas por columnas. La transpuesta de una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

se denota A^T y se obtiene como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Determinante

El determinante es un número especial asociado a matrices cuadradas. Veremos cómo calcularlo para matrices de 3x3. El determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

se denota $|A|$. Para calcularlo seguiremos varios pasos.

En primer lugar, multiplicamos los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + \cdots$$

Luego, comenzamos por el elemento $a_{1,2}$ y recorremos nuevamente siguiendo la diagonal. Cuando termina la matriz, volvemos a entrar por el lado izquierdo siguiendo la diagonal, como se muestra en la figura:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Después, si a lo que teníamos le sumamos el producto que describimos, obtenemos:

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + \cdots$$

Ahora, hacemos lo mismo arrancando del elemento $a_{1,3}$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Entonces, tenemos:

$$|A| = (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}) - \cdots$$

A continuación, repetimos el proceso, pero recorriendo las diagonales, como muestra la siguiente figura:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

La suma de los productos de estas diagonales irá restando la suma de las diagonales principales. De modo que el determinante nos queda:

$$|A| = (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}) - (a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} + a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2})$$

Esta forma de calcular el determinante se denomina *regla de Sarrus* y sólo sirve para matrices de 3x3.

1.3. PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial, también conocido como producto cruz, se lleva a cabo entre dos vectores y da como resultado un tercer vector, que es perpendicular al plano formado por los otros dos. El producto vectorial se define para vectores en 3D solamente, pero lo podemos usar en 2D si a la tercera coordenada del vector la seteamos a 0.

Demoramos hasta aquí el estudio de este producto porque usaremos algunas propiedades y operaciones de las matrices para calcularlo.

El producto entre dos vectores $\bar{\boldsymbol{u}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}$ se denota de la siguiente manera:

$$\bar{\boldsymbol{u}} \times \bar{\boldsymbol{v}}$$

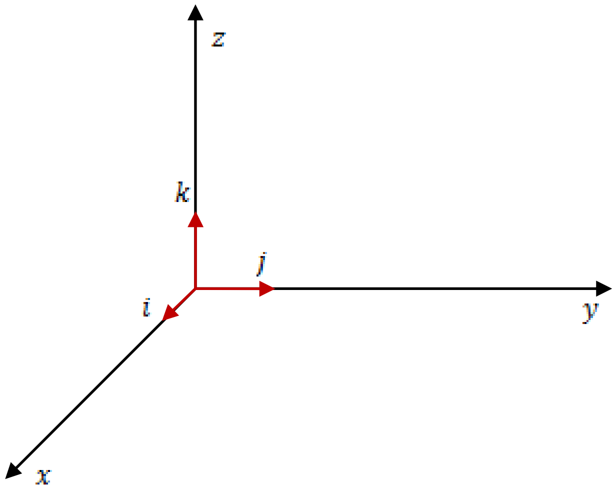
Para calcularlo, lo haremos mediante el determinante de la siguiente manera:

$$\bar{\boldsymbol{u}} \times \bar{\boldsymbol{v}} = det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3)\boldsymbol{i} + (u_3v_1 - v_3u_1)\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - v_1u_2)\boldsymbol{k}$$

Donde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ son los tres vectores unitarios que apuntan en cada una de las direcciones coordenadas:

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el siguiente gráfico se observan dichos vectores:

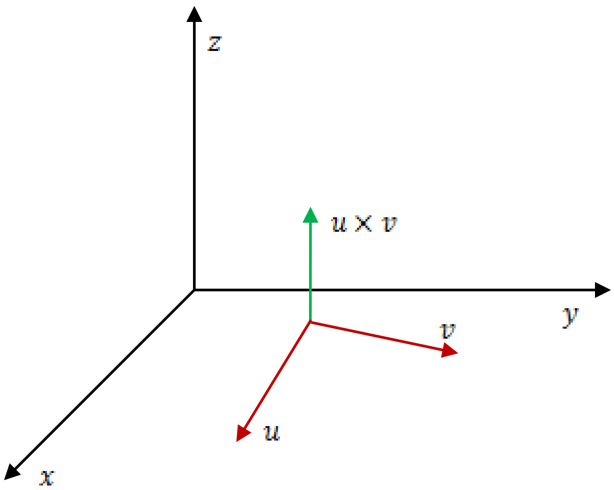


Estos tres vectores unitarios, denominados *versores,* nos permiten escribir un vector de la siguiente manera:

$$\overline{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

Es decir, escribimos el vector $\overline{v}$ como una combinación de los tres versores multiplicados cada uno por un escalar a, b y c. En este caso, a viene a ser la componente en x, b la componente en y, y c la componente en el eje *z.*

En nuestro caso, como estamos trabajando con vectores en el plano *xy*, al darnos el producto escalar como resultado un vector que es perpendicular a dicho plano, estamos obteniendo un vector que sólo tiene componente en *z.* Es decir, un vector que apunta hacia afuera del plano, como muestra la siguiente figura:



En esta figura, los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ tienen componentes en las direcciones *x* e *y*, pero 0 en la componente *z,* es decir, los vectores están en el plano *xy.* Como se puede observar, el resultado da un vector perpendicular a los otros dos. En este caso particular, el vector tiene componente *z* positiva.

Ahora, volviéndonos un poco más formales, decir que el resultado del producto vectorial es perpendicular al plano *xy* quiere decir que es perpendicular tanto a $\overline{u}$ como a $\overline{v}$. Luego, por la propiedad del producto interno que ya vimos:

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{u} = (\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{v} = 0$$

El producto vectorial no es conmutativo:

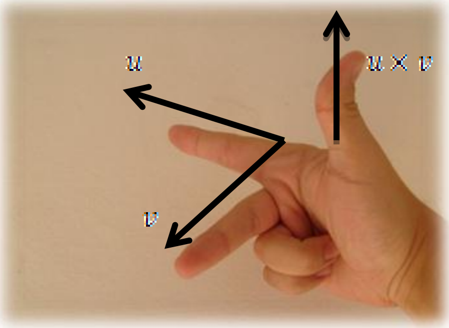
$(\overline{u} \times \overline{v}) \neq (\overline{v} \times \overline{u})$

En el ejemplo que dimos un poco más arriba, el vector resultante tiene dirección $+z$, pero esto no siempre es así, ya que el mismo podría estar apuntando para *abajo*($-z$).

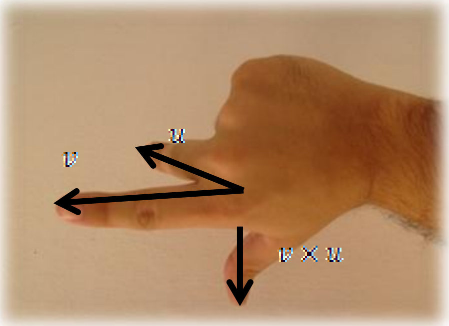
Una forma rápida y sencilla de determinar esto es utilizando la famosa *regla de la mano derecha.*

En primer lugar, posicionamos nuestros dedos pulgar, índice y anular, formando 90° entre sí, simulando los ejes coordenados:

Si con el dedo índice apuntamos en la dirección del primer vector y con el dedo anular apuntamos en la dirección del segundo vector, entonces el pulgar nos indica la dirección del vector resultante del producto. La figura ejemplifica lo dicho:

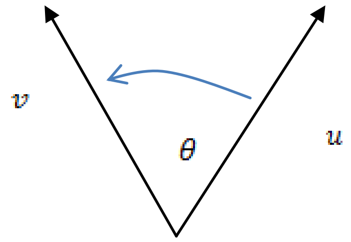


Si diéramos vuelta la operación, nuestro dedo índice apuntaría a *v* y deberíamos dar vuelta la mano para que el dedo anular pueda apuntar a *u.* De esta forma, el pulgar apunta exactamente en la otra dirección.



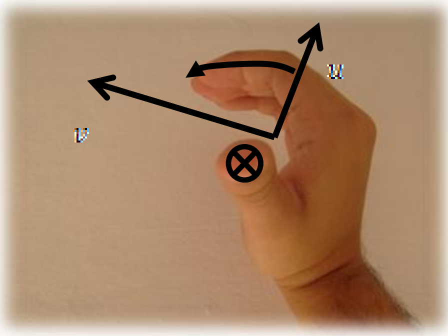
Otra forma de visualizar esta regla es observando el sentido del ángulo.

Si hacemos el producto $(\overline{u} \times \overline{v})$ podemos pensar que el sentido del ángulo es desde u a v de la siguiente manera:



Es decir que se recorre desde u hacia v.

Ahora, si ubicamos nuestra mano con el pulgar extendido como saliendo de la hoja y cerramos el resto de los dedos en la dirección del ángulo, vamos a obtener la dirección del vector resultante, indicada por el pulgar:



1.3.1. Producto de matrices

Para realizar el *producto* $A.B$ de dos matrices A y B, es necesario que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda. Se dice entonces que las matrices A y B son *compatibles* para el producto $A.B$

Sean dos matrices $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, de tamaño $m \times p$, y $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ de tamaño $p \times n$. El producto $A.B$ es otra matriz $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$, de tamaño $m \times n$, cuyos elementos se obtienen de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} . + a_{i2}\ b_{2j} + \cdots + a_{ip}.b_{pj}$$

Observemos que el elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene realizando la suma de los productos de los elementos de la fila *i* de la primera matriz por los elementos de la columna *j* de la segunda.

Ejemplo 1: calculando un elemento de la matriz producto

Encontrar el elemento 1,2 de la matriz producto $L.M$, siendo $L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

El elemento 1,2 de la matriz *L.M* se obtiene operando con la fila 1 de *L* y la columna 2 de

M: $0.0+2.0+2.2=4$. Luego, el elemento 1,2 de *L.M* es 4.

Ejemplo 2: calculando el producto de dos matrices

Calcular $P.Q$, siendo $P=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ y $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

La matriz P es 2x3 y la matriz Q es 3x2, luego la matriz $P.Q$ es 2x2.

Sus elementos se calculan así:

Elemento 1,1 de $P.Q$: fila 1 de P y columna 1 de Q $5.1+(-2).0+0.10=5$

Elemento 1,2 de $P.Q$: fila 1 de P y columna 2 de Q $5.0+(-2).4+0.0=-8$

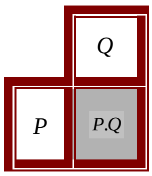
Elemento 2,1 de $P.Q$: fila 2 de P y columna 1 de Q $1.1+1.0+6.10=61$

Elemento 2,2 de $P.Q$: fila 2 de P y columna 2 de Q $.1.0+1.4+6.0=4$

Por tanto, $P.Q = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 61 & 4 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3: un procedimiento que facilita el cálculo del producto

Una forma de facilitar el cálculo del producto es disponiendo las matrices dadas en un cuadro como el siguiente:



De esta manera, es fácil visualizar cuáles son la fila de P y la columna de Q que intervienen en el cálculo de cada elemento de $P.Q$. En el caso del ejemplo precedente se pondrá:

			1	0
			0	4
			10	0
5	-2	0	5	-8
1	1	6	61	4

1.3.2. Propiedades del producto

- Sean A, B y C matrices de tamaños $m \times p$, $p \times n$ y $n \times q$, respectivamente.

  Entonces: $(A.B).C = A.(B.C)$ (propiedad asociativa).

- El producto de matrices no es conmutativo: en general, $A.B \neq B.A$, aún cuando A y B sean compatibles tanto para el producto $A.B$ como para $B.A$.

- La matriz cuadrada $n \times n$: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, se llama *matriz unidad* de orden *n,* y se verifica que: si A es $m \times n$, entonces $A \, . \, I_n = A$; si B es $n \times p$, entonces $I_n . B = B$

- Sean A, B y C matrices de tamaños $m \times p$, $p \times n$ y $p \times n$, respectivamente. Entonces: $A.(B \pm C) = A.B \pm A.C$ (propiedad distributiva).

- Sean A, B y C matrices de tamaños $m \times p$, $m \times p$ y $p \times n$, respectivamente. Entonces: $(A.\pm B).C = A.C \pm B.C$ (propiedad distributiva).

Ejemplo 6: matrices que no conmutan

Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, calcular $A.B$ y $B.A$

Solución:

Realizando el producto $A.B$, se tiene:

		1	1
		0	0
1	0	1	1
1	0	1	1

Luego, $A.B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora, el producto $B.A$:

		1	0
		1	0
1	1	2	0
0	0	0	0

Es decir, $B.A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A.B \cdot$

Ello prueba que las matrices dadas no conmutan.

1.3.3. Significado del producto matricial

El resultado de una multiplicación matricial tiene un significado bien definido, el cual le da valor a la operación, como así también a su definición, tal como la vimos.

Al multiplicar dos matrices(o N matrices, ya que el resultado se acumula), la matriz resultante corresponde a la composición de la transformación lineal de las dos matrices que operan. Si bien todavía no hemos visto qué es una transformación lineal (lo haremos más adelante), asumamos que una matriz, y a su vez una transformación lineal, es una *transformación* que modificará a un objeto, rotándolo, haciéndolo más grande o más pequeño, entre otras posibles modificaciones.

Entonces, poder componer las transformaciones lineales de varias matrices significa que *se puede* crear una matriz, la resultante, que realizará sobre el objeto las transformaciones de todas las matrices que se multiplicaron para conseguir esa. Es decir, si tenemos una cierta matriz $\bar{\bar{A}}$ que rotará un objeto y otra $\bar{\bar{B}}$ que escalará el objeto, luego $\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{C}}$ significará que la matriz $\bar{\bar{C}}$ representará, primero, una transformación de rotación y, luego, una de escalado.

Podemos interpretar la multiplicación /composición de matrices como una operación que le otorga cierta memoria a las matrices, ya que una matriz que constituye el resultado de una multiplicación entre varias matrices en determinado orden, *recordará* estas operaciones en ese mismo orden.

1.3.4. Producto entre una matriz y un vector

Si pensamos un vector con n componentes como una matriz que tiene dimensiones $1xn$ o $nx1$, podríamos realizar operaciones con otras matrices, siempre y cuando las mismas estén definidas *claramente*.

Al realizar una multiplicación entre un vector y una matriz, se aplicarán las mismas reglas expuestas anteriormente, por lo que el resultado podrá ser una matriz o un vector (es decir, una matriz de dimensiones $1xn$ o $nx1$).

Entonces, algunas multiplicaciones posibles son:

- *Se obtiene* un vector:

$$\bar{\bar{A}}\bar{v} = \bar{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 \end{bmatrix}$$

- *Se obtiene* un escalar:

$$\bar{b}\bar{v} = c$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = b_1v_1 + b_2v_2$$

- *Se obtiene* una matriz:

$$\bar{b}\bar{v} = \bar{\bar{C}}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1v_1 & b_1v_2 \\ b_2v_1 & b_2v_2 \end{bmatrix}$$

Como vemos, si bien los resultados son distintos en los ejemplos, en todos ellos sólo se aplica la regla de la multiplicación de matrices y el resultado *depende de aplicar* las reglas que mencionamos en el apartado anterior.

1.3.5. Inversa de una matriz

Dada A, una matriz cuadrada de orden n, se dice que la matriz A es *invertible* si existe una matriz B, cuadrada de orden n, tal que $A.B = I_n$ y $B.A = I_n$. En este caso, se dice que B es la *inversa* de A y se escribe $B = A^{-1}$.

Una matriz cuadrada que no tiene inversa se denomina *no invertible* o *singular.*

Ejemplo: matriz inversa

Verificar que $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Solución:

Para comprobarlo, basta con realizar los productos:

		4	0
		0	-2
$\frac{1}{4}$	0	1	0
0	$-\frac{1}{2}$	0	1

		$\frac{1}{4}$	0
		0	$-\frac{1}{2}$
4	0	1	0
0	-2	0	1

Como se ve, $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y también $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propiedades de la inversa

- Si una matriz es invertible, entonces su inversa es única.
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- Si A y B son invertibles, también lo es $A.B$ y $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

1.4. TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Si A es una matriz $m \times n$, la *transpuesta* de A, denotada por A^t, es una matriz $n \times m$, cuyo renglón i es la columna i de A y cuya columna j es el renglón j de A.

Ejemplo: calculando la transpuesta

Encontrar la transpuesta de $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

Solución:

La transpuesta de una matriz tiene por filas las columnas de la matriz dada.

La transpuesta de $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ es, entonces, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Propiedades de la transposición

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$
- $(A.B)^t = B^t.A^t$
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Ejemplo: aplicando propiedades de la transpuesta

Sabiendo que $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ y $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, usar las propiedades de la transposición para encontrar $(3A+2B)^t$

Solución:

$$(3A+2B)^t = (3A)^t + (2B)^t = 3A^t + 2B^t = 3\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 11 & 4 \\ 3 & 7 & 11 \\ 2 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

1.5. TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

- Una matriz cuadrada A se llama simétrica si $A = A^t$. Si $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ y simétrica, entonces $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, \forall j$.

- Una matriz cuadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ se llama triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$
- Una matriz cuadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ se llama triangular inferior si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$
- Una matriz cuadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ se llama matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$

Ejemplo: una matriz simétrica

La matriz $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 & 11 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 9 & -3 & 2 & 25 \\ 11 & 0 & 25 & 7 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica. Observar que se verifica la condición $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, \forall j$ ($a_{12} = a_{21}$; $a_{13} = a_{31}$; $a_{14} = a_{41}$; $a_{23} = a_{32}$ ......etc.) y que ello significa que *los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal de la matriz* son *iguales.*

Ejemplo: una matriz triangular superior

La matriz $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ es triangular superior: los elementos que ocupan las posiciones 2,1; 3,1 y 3,2 ($i > j$) son iguales a cero. Observar que no importa el valor del resto de los elementos, los cuales pueden o no ser cero.

1.6. TRANSFORMACIONES LINEALES

Siendo $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ dos espacios vectoriales, una transformación (o mapeo) lineal asigna a cada vector $\overline{\boldsymbol{x}}$ perteneciente a $\boldsymbol{V}$ a un vector $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$ perteneciente a $\boldsymbol{W}$, y suponiendo que $\overline{\boldsymbol{u}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}$ son vectores pertenecientes a $\boldsymbol{V}$ y α un escalar, luego satisface las dos siguientes condiciones:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $f(av) = af(v)$

Transformación lineal
Siendo $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ dos espacios vectoriales, una transformación (o mapeo) lineal asigna a cada vector $\overline{\boldsymbol{x}}$ perteneciente a $\boldsymbol{V}$ a un vector $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$ perteneciente a $\boldsymbol{W}$, y suponiendo que $\overline{\boldsymbol{u}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}$ son vectores pertenecientes a $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ un escalar, luego satisface las dos siguientes condiciones:
1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $f(av) = af(v)$

Ahora bien, si trabajamos en un espacio vectorial de dimensiones finitas (algo que haremos en el transcurso de esta materia), toda transformación lineal puede ser representada por una matriz. Es aquí donde las mismas cobran valor para nosotros. Concretamente, como trabajaremos en 2D, acotaremos todavía más el uso de matrices, ya que nos limitaremos a usar las de dimensión $2x2$. ¿Qué significa esto?

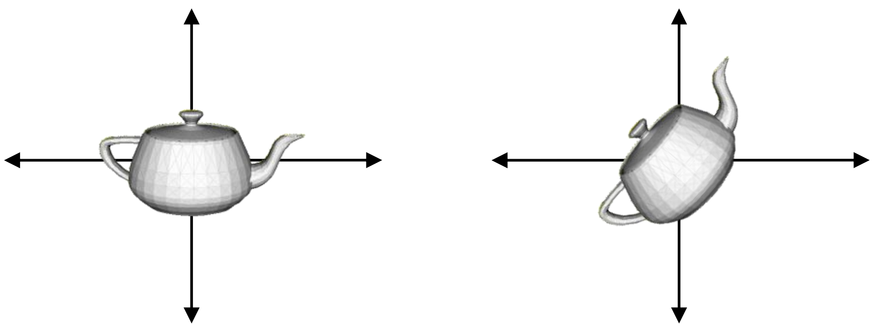
$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\,\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{x}} \qquad (1)$$

Que con una operación como la de arriba, utilizando la multiplicación de una matriz por un vector, se pueden realizar las transformaciones lineales como las definimos anteriormente, enfocándonos en lo que nos interesa. En otras palabras, si usamos matrices podremos realizar transformaciones sobre objetos para manipularlos en 2D o en 3D (o en *n* dimensiones).

Estrictamente hablando, una ecuación es lineal cuando cumple las dos siguientes condiciones:
1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(ax) = af(x)$
Donde x e y son variables y α una cte. En nuestro caso, la ecuación es la f.

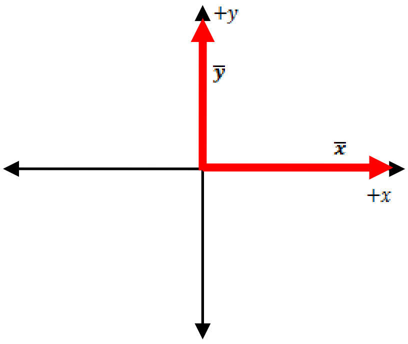
Entonces, ¿lo usamos para algo?

Vamos a derivar cómo sería una matriz de transformación para realizar una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj en un ángulo θ de un objeto en 2D:

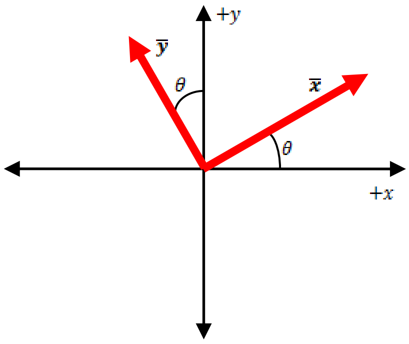


Para deducir una transformación de la forma más simple, debemos ver cómo lograr la transformación deseada sobre los versores. Es decir que, para deducir la transformación de rotación, tenemos que ver cómo mapear los versores $\overline{\boldsymbol{x}}$ e $\overline{\boldsymbol{y}}$.

Rotar un objeto es igual a rotar un vector, por lo que realizar la rotación anterior es lo mismo que hacer lo siguiente:



Los versores $\overline{x}$ e $\overline{y}$ antes de la rotación.



Los versores $\overline{x}$ e $\overline{y}$ luego de rotar θ grados en sentido contrario a las agujas del reloj.

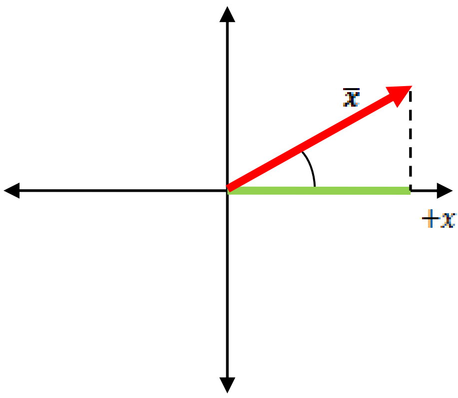
Para realizar esta rotación debemos transformar el valor del vector, tanto en el eje *x* como en el eje *y*. Esto es, una transformación de la forma:

$$\begin{cases} x' = h(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

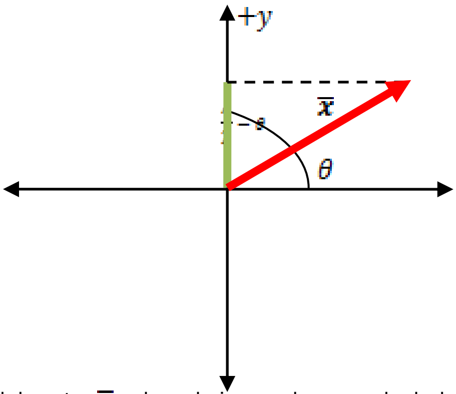
Donde $h(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones que no conocemos (recordemos que deben ser lineales), pero que deduciremos a continuación.

Componentes del versor $\overline{x}$

Utilizando la definición del coseno y seno en la circunferencia unitaria, luego:



La proyección verde del versor $\overline{x}$ sobre el eje x podemos calcularla como: $\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{proy\,x}} = \cos(\theta)$



La proyección verde del vector $\bar{x}$ sobre el eje *y* podemos calcularla como:

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{proy\,y}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{proy\,y}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) sin(\theta)$$

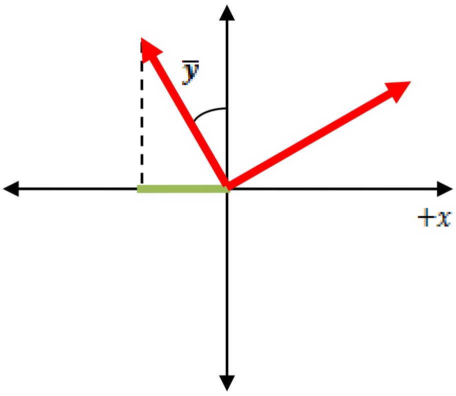
$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{proy\,y}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0\cos(\theta) + 1\sin(\theta)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{proy\,y}} = \sin(\theta)$$

Utilizamos una identidad trigonométrica que dice:

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp sen(\alpha)sen(\beta)$

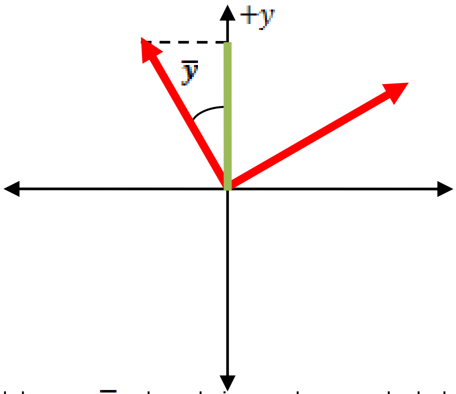
Componentes del versor $\bar{y}$



La proyección verde del versor $\bar{y}$ sobre el eje *x* podemos calcularla como:

$$\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{proy\,x}} = -\sin(\theta)$$

Notamos que el resultado es negativo porque el versor $\bar{y}$ se proyecta sobre la parte negativa del eje *x*.



La proyección verde del versor $\bar{\mathbf{y}}$ sobre el eje *y* podemos calcularla como:

$$\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{proy\,y}} = \boldsymbol{cos(\theta)}$$

Entonces, ya calculamos cómo se ven afectados los versores en la transformación de rotación.

Ahora, la transformación será la combinación de la transformación que corresponde a los dos versores:

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = \sin(\theta)\,x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

O sea, de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Y la usamos como lo hicimos en la fórmula (4) de la siguiente forma:

$$\bar{v}' = \bar{\bar{R}}\,\bar{v}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\,x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)\,x + \cos(\theta)y \end{bmatrix}$$

Existen otras transformaciones lineales en 2D muy usadas como la reflexión, el escalado, el shear, la proyección, etc. Su deducción, en general, es similar a la que usamos aquí y no la explicaremos en este apunte. En el aula podrán encontrar un anexo donde se la describe de modo conciso.

1.6.1. Interpretación geométrica de una transformación lineal

Geométricamente, una transformación lineal se interpreta de la siguiente manera:

- Una lineal se transforma en una línea o en un punto, pero jamás en una curva.
- Las líneas paralelas continúan siendo paralelas.
- No puede realizar traslaciones.

Esta última limitación se deduce de las condiciones de transformación lineal, ya que de cierta forma ésta requiere que el vector cero se transforme siempre en vector cero. Es decir,si F es una transformación lineal y pedimos que $F(\overline{\mathbf{0}}) = \overline{\boldsymbol{a}}$, donde $\overline{\boldsymbol{a}}$ es distinto al vector cero.

Luego, la segunda condición de una transformación lineal no se puede cumplir porque debería ser $F(\alpha\overline{\mathbf{0}}) = \overline{\boldsymbol{a}}$ y luego:

$$F(\alpha\overline{\mathbf{0}}) \neq \alpha F(\overline{\mathbf{0}})$$

$$\overline{\boldsymbol{a}} \neq \alpha\overline{\boldsymbol{a}}$$

Entonces, en una transformación lineal, el vector cero debe transformarse en el vector cero, siempre.

Esta limitación, la de no poder realizar traslaciones, es la más importante que tienen las transformaciones lineales. Significa que una transformación lineal puede solucionarnos el problema si deseáramos rotar un tanque en 45° grados, pero no podría mover ese tanque. La solución a esta limitación es dada por las transformaciones afines.

1.6.2. Transformaciones afines

Transformación afín
Es una transformación lineal seguida de una traslación.

Una transformación afín es, básicamente, una transformación lineal seguida de una traslación. Es decir que primero se realiza la transformación lineal, como lo vimos en el parágrafo anterior, y luego se realiza una transformación. Por lo tanto, una transformación afín es:

$$\overline{\boldsymbol{v}}' = \overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\,\overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\boldsymbol{t}}$$

Donde $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}$ es una matriz de transformación lineal, $\overline{\boldsymbol{t}}$ es un vector que da la traslación del objeto, $\overline{\boldsymbol{v}}$ es el vector que se desea transformar y $\overline{\boldsymbol{v}}'$ es el vector transformado por la transformación afín.

De modo que el problema enunciado al final del parágrafo anterior, sobre el tanque que debe girar y luego trasladarse en un video juego, puede ser resuelto enteramente mediante una transformación afín, donde $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}$ sería una matriz de rotación, como la que se vio en el parágrafo de transformaciones lineales, y $\overline{\boldsymbol{t}}$ el vector que permite el desplazamiento del tanque.

1.7. CÁLCULO

Además de los conceptos que hemos visto de álgebra lineal, también necesitaremos algunas nociones de cálculo. Las mismas nos permitirán entender mejor las ecuaciones del movimiento de los cuerpos y cómo simularlas numéricamente.

Vamos a dividir los conceptos necesarios en dos partes muy bien relacionadas. Primero, veremos algunas nociones de *cálculo diferencial,* el cual nos permitirá estudiar la variación en el tiempo de ciertas propiedades de los cuerpos, como su posición, velocidad, etc. Luego, trabajaremos con los conceptos de *cálculo integral* y analizaremos cómo se relaciona con la primera parte.

1.7.1. Cálculo diferencial

A la hora de programar un videojuego con comportamiento físico, es necesario estudiar cómo varían las propiedades físicas del objeto a medida que transcurre el tiempo. Por ejemplo, su velocidad y aceleración.

Recordemos, ahora, la ecuación de la velocidad para el movimiento rectilíneo uniforme:

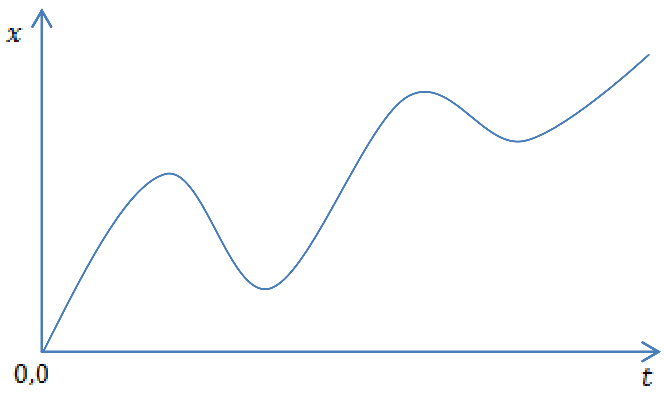
$$v = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Donde p_f y t_f son la posición y el tiempo al final del trayecto y p_i y t_f representan sendas cantidades al principio del movimiento, las diferencias se suelen representar con la letra griega *delta*: Δ. Es decir:

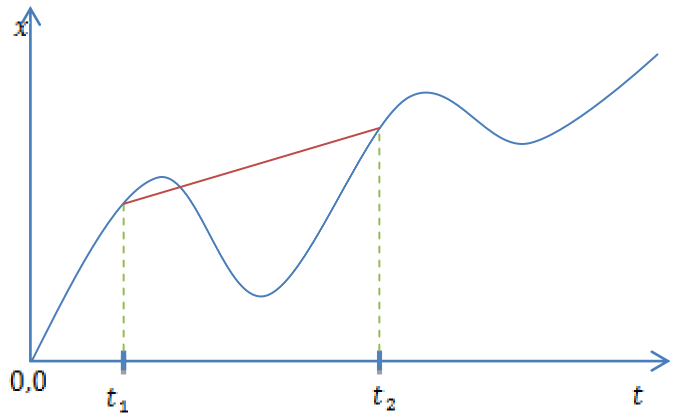
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Esta ecuación nos da la velocidad que tiene el móvil durante el intervalo (t_i, t_f). Recordemos que, gráficamente, esta cantidad es la pendiente de la curva de la posición respecto al tiempo, lo cual implica que la velocidad es constante durante dicho intervalo.

Ahora, imaginemos que nuestro móvil tiene la siguiente curva de velocidad:



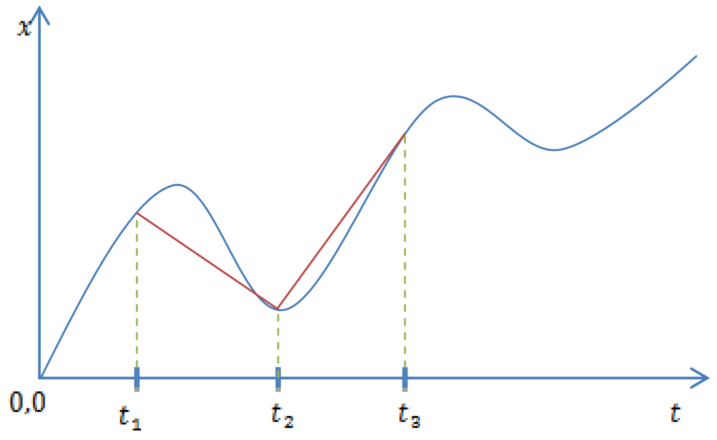
Entonces, si calculamos la velocidad en el intervalo (t_1, t_2):



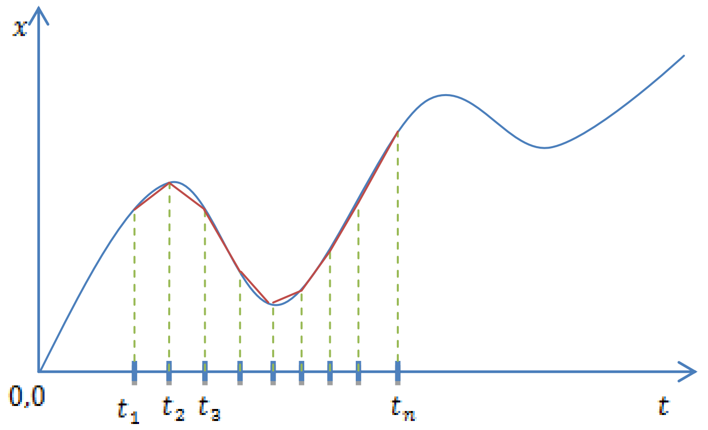
Vamos a obtener una pendiente constante, la cual produce una recta como la dibujada en rojo.

Esto quiere decir que si durante el intervalo la velocidad varió, todos esos cambios se perdieron. Lo que estamos obteniendo, en realidad, es el promedio de velocidad durante el intervalo. Si el movimiento fuese rectilíneo uniforme, no habría problemas, porque la curva original sería también una recta.

Para resolver esta cuestión, podríamos tomar intervalos de tiempo más cortos, como por ejemplo:



De esta forma, a pesar de que la velocidad calculada será constante a lo largo del intervalo, al tomar intervalos más cortos, la representación que tendremos de la curva original será más exacta. Si seguimos tomando intervalos cada vez más pequeños, el error que cometeremos en cada uno, al suponer constante la velocidad, será menor:



Como se puede observar ahora, estamos más cerca de la velocidad real en cada intervalo.

Si continuamos con este proceso, tomando intervalos cada vez más pequeños, obtenemos la velocidad en cada punto. Es decir, ya no conseguimos un promedio, sino la velocidad punto a punto. Esta operación se llama *diferenciación.* Es decir, cuando en:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Hacemos que los intervalos sean infinitamente pequeños, se denota:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Y se llama derivada de *x* respecto al tiempo.

Esta operación nos dice cómo varía la posición respecto al tiempo en cada instante. Y por definición, esto es la velocidad de un móvil.

Lo mismo sucede con la aceleración, la cual se definió anteriormente como:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Nuevamente, si tomamos intervalos cada vez más pequeños, en el límite obtenemos la derivada de v con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Durante el curso no veremos cómo se calculan las derivadas, sino que trabajaremos sobre las expresiones ya conocidas de las mismas.

El concepto de *derivada* es muy importante en física porque nos permite conocer cómo varían ciertas propiedades de un cuerpo en cada instante de tiempo, sin cometer los errores de suponer constante, por ejemplo, la velocidad durante un tramo determinado.

Pasando en limpio, las ecuaciones de movimiento de un móvil las denotaremos:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Estas expresiones nos permiten conocer la velocidad, dada la posición, y la aceleración, dada la velocidad. Sin embargo, si deseamos obtener la posición dada la velocidad, despejar la ecuación no es tan sencillo como en el caso de MRU. Veremos esto en el próximo parágrafo.

1.7.2. Cálculo integral

En el parágrafo anterior definimos la operación *diferenciación* y ahora veremos la denominada *integración,* que es la operación opuesta. Esto es, si tenemos una función y la derivamos, luego, al integrarla, obtendremos la expresión original.

Nuevamente aclaramos que no calcularemos integrales analíticamente durante esta materia, pero sí usaremos el concepto para hacerlo numéricamente.

La integral de una función $f(x)$ se denota como:

$$\int f(x)\,dx$$

En particular, dijimos que es una operación opuesta a derivar. Por lo tanto, si:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

podemos integrar dicha expresión y recuperar la posición:

$$x = \int v\,dt$$

Es decir, la posición es la integral de la velocidad. Del mismo modo:

$$v = \int a\,dt$$

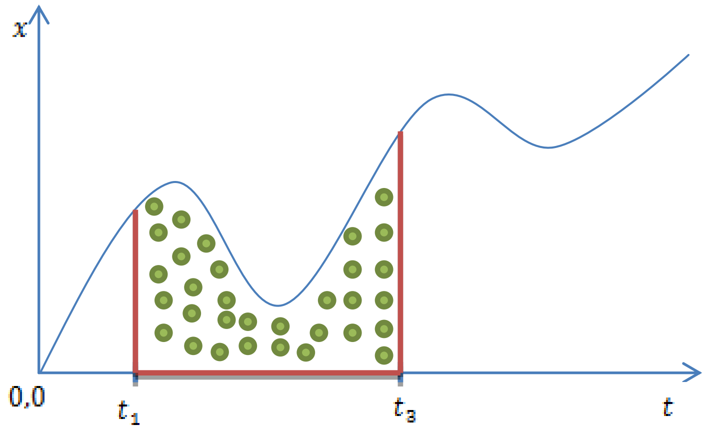
podemos recuperar la velocidad dada la aceleración de un cuerpo en un intervalo.

Ahora veamos con más detalle qué es una *integral.*

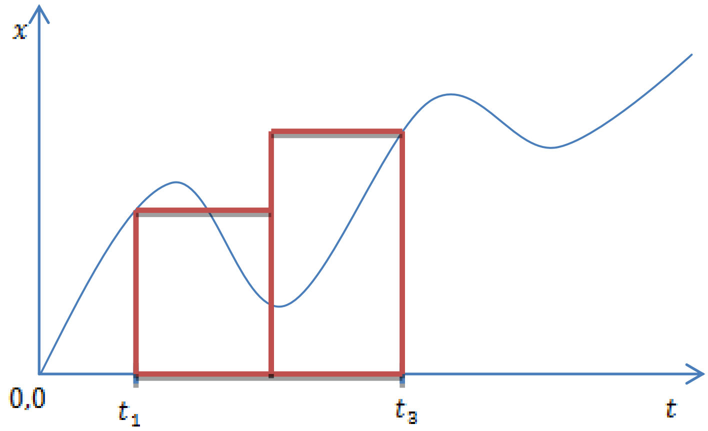
Estudiaremos, en particular, las integrales definidas y las indefinidas.

Una *integral indefinida* es la que constituye una operación opuesta a derivar, tal como lo mostramos anteriormente. El resultado es la misma función antes de derivarla.

Por otro lado, existen las *integrales definidas,* las cuales permiten calcular el área debajo de la curva de una función, por ejemplo, la integral de la función que veníamos usando:

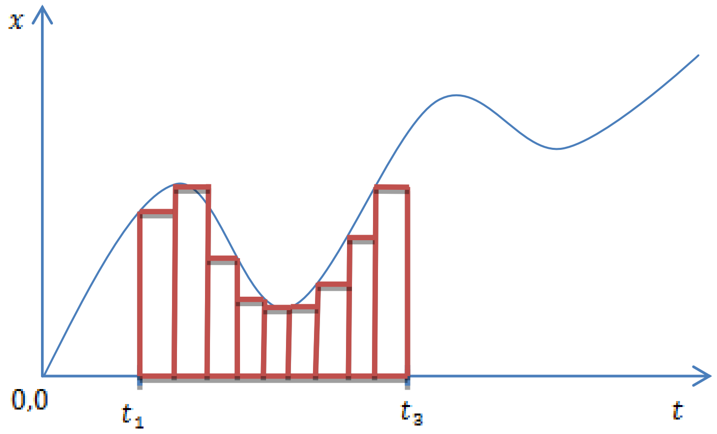


Como muestra la imagen, arroja el área marcada con círculos verdes. Como el cálculo de áreas de funciones es algo que aún no hemos aprendido, aproximaremos el área de la función como el área de dos rectángulos, según se observa a continuación:



El área de un rectángulo es sencilla de calcular y esto nos permite concluir que el área debajo de la curva es igual al área formada por los dos rectángulos.

Si bien la aproximación es grosera y tendremos un alto índice de error, este ejercicio es un comienzo del cálculo. Luego, en lugar de dividir a la función en dos rectángulos, la podremos aproximar con más:



Ahora, si sumamos las áreas de cada uno de los rectángulos, obtendremos una mejor aproximación al área de la función, y así a su integral definida. Si tomamos rectángulos cada vez más pequeños, al hacerlos infinitamente pequeños, obtendremos lo que denominamos la *integral definida:*

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

1.8. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

La operación más común que se realiza para simular un sistema físico es la *integración.* Normalmente, se conoce la aceleración de un cuerpo y, a partir de la misma, su velocidad; luego, conociendo la velocidad, se desea saber la posición de ese cuerpo.

Como vimos en el parágrafo anterior, para poder hacer esto, es necesario integrar las siguientes expresiones:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Pero realizar dichas integrales no suele ser sencillo y muchas veces resulta imposible, por lo que se utilizan integradores numéricos.

Estos integradores nos permiten calcular una integral de manera numérica mediante un algoritmo que posee cierto error, pero que es suficientemente pequeño para utilizarlo sin problemas. Generalmente, nos interesa integrar en el tiempo, ya que siempre queremos predecir cómo se comportará el sistema a lo largo del mismo.

El algoritmo para simular el estado de un cuerpo es bastante sencillo. Imaginemos que dividimos el tiempo en *instantes* denominados t_i. Luego, que en nuestro juego necesitamos conocer la posición de un cuerpo en cada t_i. Por ejemplo, sabemos la posición del objeto en el estado t_1 y la aceleración que recibe el mismo en ese tiempo.

Ahora bien, utilizando estos datos debemos ser capaces de calcular la velocidad y la posición del objeto en el tiempo t_2 y así sucesivamente. Para ello, se utilizan los *integradores temporales.*

Existen diferentes integradores temporales, cada uno con sus ventajas y desventajas. Probablemente, el más conocido sea el *forward Euler*. Es el más común y muy utilizado, pero no demasiado preciso.

Dada la derivada de una función $f(t)$, el integrador de Euler calcula la función en el tiempo n+1, conociendo la función en el tiempo *n* de la siguiente manera:

$$f_{n+1} = f_n + \Delta t \, \frac{df}{dt}$$

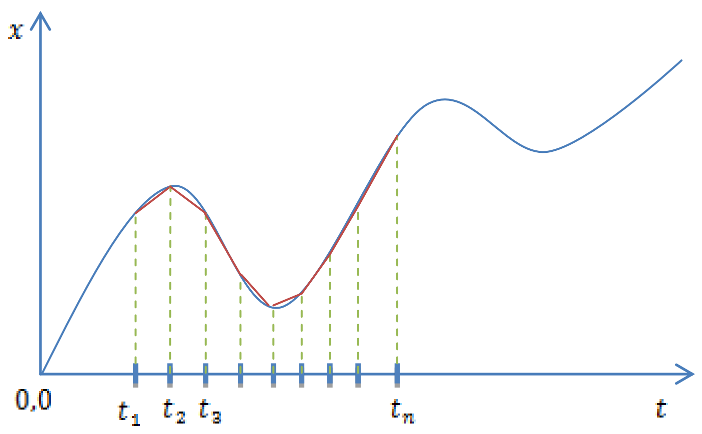
Es decir, el estado en el nuevo instante es igual al estado en el instante anterior, más el intervalo de tiempo a integrar por la derivada de la función.

Si aplicamos forward Euler a las ecuaciones del movimiento, tendremos:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{dv}{dt}\Delta t = v_n + a\,\Delta t$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dv}{dt}\,\Delta t = x_n + v\,\Delta t$$

Esto nos da la posición del objeto en cada instante de tiempo. Claramente, este método supone que, durante el Δt, la aceleración del objeto no cambia, y esto es lo que introduce errores en el método. Sin embargo, si el Δt es pequeño, los errores no son importantes. Esto es, si dibujamos la trayectoria del objeto en azul y la curva que reconstruye Euler en rojo, obtendremos lo siguiente:



Esto sucede si nuestro Δt es suficientemente pequeño, sino estaremos cometiendo un error más grande, dependiendo del integrador. En este caso es justamente lo que obteníamos si tratábamos a cada pequeño intervalo como un MRU. Es decir que, si hacemos dicha simplificación, obtenemos algo equivalente al resultado de aplicar el integrador de Euler.

Otros dos integradores bastante populares, y que se comportan mejor que Euler, son *Leapfrog* y *Velocity Verlet.*

Leapfrog calcula la posición y la velocidad en puntos intercalados:

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+\frac{1}{2}}\Delta t$$

$$v_{n+\frac{1}{2}} = v_{n-\frac{1}{2}} + a\,\Delta t$$

En este caso, primero calculamos la velocidad en el punto intermedio $n + \frac{1}{2}$ y luego calculamos la posición en el nuevo instante n.

Por otro lado, tenemos a Velocity Verlet: $x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2$
$v_{n+1} = v_n + \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \Delta t$