Solcuiones Guia N° 1 – Modelos y algoritmos para videojuegos II

Solución Ejercicio 1

a) Es **verdadero**: todo vector es una matriz de un único renglón o una única columna.

b) Es **falso**: por ejemplo, la matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ no es un vector ya que tiene más de una fila y más de una columna.

c) Es **verdadero**: las matrices de tamaño 1xn (cualquiera sea n) son vectores. También son vectores las matrices mx1, cualquiera sea m.

d) Es **verdadero**: la matriz tiene dos filas $\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \mathit{fila}\ 1 \\ \mathit{fila}\ 2 \end{array} \end{array}$

e) Es **verdadero**: el primer índice corresponde al renglón y el segundo, a la columna.

f) Es **falso**: el elemento (3,2) es el número 2

g) Es **falso**: el elemento (1,2) es el número 1 y el elemento (2,1) es el número 7

h) Es **verdadero**: el elemento a_{41} se denota al primer elemento de la fila cuatro de una matriz y una matriz 3x4 tiene sólo tres filas.

i) Es **falso**: tiene tres filas y tres columnas, por tanto, su tamaño es 3x3.

j) Es **falso**: la primera tiene tamaño 2x3, mientras que la segunda es una matriz 3x2

k) Es **falso**: son matrices de distinto tamaño

l) Es **verdadero**: la única matriz cero de tamaño 2x2 es $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

m) Es **falso**; por ejemplo, las matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son matrices cero y cuadradas. Son distintas ya que tienen distinto tamaño.

n) Es **verdadero**: por ejemplo, la matriz cero de 2x3: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ñ) Falso: la primera tiene 2 filas y 3 columnas; la segunda, 3 filas y 2 columnas

o) Verdadero: $a_{11} = 1$; $a_{22} = 1$; $a_{33} = 1$

Solución Ejercicio 2

a) No son iguales. Por ejemplo, tienen sus respectivos primeros elementos distintos.

b) Son iguales.

c) No son iguales. Son vectores de distinto tamaño.

d) No son iguales. Tienen distinto tamaño.

e) No son iguales. Por ejemplo, el elemento (1,2) de la primera matriz es 2, mientras que el elemento (1,2) de la segunda es 1.

f) Son iguales. Realizando las operaciones, se obtienen elementos homólogos iguales.

g) No son iguales. No tienen el mismo tamaño.
h) No son iguales. Por ejemplo, difieren en sus elementos 1,3.
i) No son iguales. Tienen distinto tamaño (la primera es 3x2 y la segunda es 2x3).
j) Son iguales. Tienen el mismo tamaño y sus elementos respectivamente iguales.

Solución Ejercicio 3

a) $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 7 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+3 & 2-2\\ 7+0 & -4+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 7 & -3\end{bmatrix}$

b) $C-D=\begin{bmatrix}0 & 8 & -5\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8 & -5\\ -1 & 6 & -4\end{bmatrix}$

c) $4A-2B=4.\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 7 & -4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 28 & -16\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & -4\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 12\\ 28 & -18\end{bmatrix}$

d) $\frac{1}{2}C-\frac{1}{3}D=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 8 & -5\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4 & -\frac{5}{2}\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}2 & 4 & -\frac{5}{2}\\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3}\end{bmatrix}$

e) $-u-3v=-\begin{bmatrix}2 & -1 & 7 & 15\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2 & 0 & -4 & 8\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -7 & -15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 0 & -12 & 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 1 & 5 & -39\end{bmatrix}$

Solución Ejercicio 4

a) Si $2E-G+X=O$, entonces $X=O-2E+G=-2E+G$; reemplazando se tiene:

$$X=-2\begin{bmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 6\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -8 & 0\\ 0 & 6 & -12\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & -8 & 1\\ -1 & 10 & -6\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

b) Despejando X en la ecuación matricial $\frac{1}{3}X-E=G-F$, se obtiene: $X=3(G-F+E)$.

Luego:

$$X = 3\,(G - F + E) = 3\,\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$3\begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -\frac{5}{2} & -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 30 \\ -\frac{15}{2} & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución Ejercicio 5

a) Dos matrices A y B son compatibles para el producto $A.B$, cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

b) Si A es una matriz de tamaño 5x3 y B es una matriz de tamaño 3x1, entonces A.B es una matriz de tamaño 5x1

c) Si C y D son dos matrices compatibles para el producto C.D, entonces el número de filas de C.D es igual al número de filas de C

d) Si C y D son dos matrices compatibles para el producto C.D, entonces el número de columnas de C.D es igual al número de columnas de D.

Solución Ejercicio 6

a) El elemento 3,1 de la matriz L.M se obtiene operando con la fila 3 de L y la columna 1 de M: $(-1).1 + 0.2 + 1.6 = 5$. Luego, el elemento 3,1 de L.M es 5.

b)

			-4	1
			0	8
			5	0
-1	$\frac{1}{4}$	-2	-6	1
0	0	3	15	0
1	4	-5	-29	33

$$M.N = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 15 & 0 \\ -29 & 33 \end{bmatrix}$$

c) La matriz $U.V$ es el producto de una matriz de tamaño 1x3 por otra de tamaño 3x1. Luego, $U.V$ es una matriz 1x1, es decir, consta de un único elemento.

Se calcula dicha matriz con el procedimiento usual.

			-1
			5
			3
1	-2	6	7

$$U.V = [7]$$

La matriz $V.U$ es el resultado del producto de una matriz de tamaño 3x1 y de otra de tamaño 1x3, debido a lo cual $V.U$ es una matriz 3x3.

	1	-2	6
-1	-1	2	-6
5	5	-10	30
3	3	-6	18

Solución Ejercicio 7

a) $U.V = \begin{bmatrix} \dot{1} \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

En este caso un vector es igual es múltiplo del otro (el mismo vector multiplicado por un escalar), el producto cruz entre dos vectores que tienen la misma dirección da $\overline{\mathbf{0}}$. El módulo del vector resultante del producto vectorial se puede calcular como:

$$|\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{v}}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{b}|\sin(\theta)$$

Siendo θ el ángulo que los separa. Esta es una forma sencilla de ver que dará $\overline{\mathbf{0}}$.

b) $U.V = \begin{bmatrix} \dot{0} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $U.V = \begin{bmatrix} \dot{1} \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

Solución Ejercicio 8

Sean

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Luego

$$(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{v}}) = \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \overline{\boldsymbol{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{bmatrix}$$

Ahora haciendo la última parte:

$$(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{v}}).\overline{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = u_1(u_2v_3 - v_2u_3) + u_2(u_3v_1 - v_3u_1) + u_3(u_1v_2 - v_1u_2)$$

$$= \underbrace{u_1u_2v_3}_{a} - \underbrace{u_1v_2u_3}_{b} + \underbrace{u_2u_3v_1}_{c} - \underbrace{u_2v_3u_1}_{d} + \underbrace{u_3u_1v_2}_{e} - \underbrace{u_3v_1u_2}_{f}$$

Pero como se puede observar:

$$a = d \Rightarrow a - d = 0$$
$$b = e \Rightarrow e - b = 0$$
$$c = f \Rightarrow c - f = 0$$

Por lo tanto $(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{v}}).\overline{\boldsymbol{u}} = 0$

Solución Ejercicio 9

Sean

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

En primer lugar hagamos:

$$(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{v}}) = \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \overline{\boldsymbol{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado hacemos la versión conmutada:

$$(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{u}}) = \begin{bmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \overline{\boldsymbol{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2u_3 - u_2v_3 \\ v_3u_1 - u_3v_1 \\ v_1u_2 - u_1v_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar obtenemos el vector opuesto.

Solución Ejercicio 10

a) Es verdadero. Una matriz y su inversa de una matriz tienen el mismo tamaño, por definición de inversa.

b) Verdadero: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) Falso. Su determinante es igual a 1. Fe de erratas: Una matriz es singular si su determinante es IGUAL a 0. Esto estaba mal en el enunciado de la guía.

d) Verdadero. De acuerdo con la propiedad 1 de la inversa, ésta es única, por lo que debe ser $A = B$

Solución Ejercicio 11

a) $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 7 & 2 & -9 \\ 5 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

Solución Ejercicio 12

a) $(A+B)^t = A^t + B^t = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

b) $(A.B)^t = B^t.A^t = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 15 \\ 2 & 14 & 30 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

c) $(B.A)^t = A^t B^t = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 1 & 6 & 6 \\ 7 & 27 & 12 \end{bmatrix}$

Solución Ejercicio 13

a) Es simétrica, pues $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Es triangular superior, pues el único elemento a_{ij} con $i > j$ que tiene la matriz (el elemento 2,1), es cero

Es triangular inferior, pues el único elemento a_{ij} con $i < j$ que tiene la matriz (el elemento 1,2), es cero

Es diagonal, pues sus dos elementos a_{ij} con $i \neq j$ son iguales a cero.

b) No es simétrica, pues $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

No es triangular superior, pues el único elemento a_{ij} con $i > j$ que tiene la matriz (el elemento 2,1), *no* es cero

Es triangular inferior, pues el único elemento a_{ij} con $i < j$ que tiene la matriz (el elemento 1,2), es cero

No es diagonal, ya que tiene un elemento a_{ij} con $i \neq j$ que es distinto de cero.

c) No es simétrica. Por ejemplo, $a_{12} \neq a_{21}$ ($a_{12} = 1$; $a_{21} = 0$).

Es triangular superior, pues $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$

No es triangular inferior pues tiene elementos distintos de cero en el triángulo superior, $a_{12} \neq 0$

No es diagonal pues no es triangular inferior.

Solución Ejercicio 14

a) $\gamma = 0$ b) $\alpha = \beta = 0$ c) $\alpha = 0$ y $\beta = \gamma$ d) $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Solución Ejercicio 15

a) La matriz de rotación tiene la siguiente forma:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{R}}} = \begin{bmatrix} \cos(90°) & \mathrm{sen}(90°) \\ -sen(90°) & \cos(90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\bar{\bar{\boldsymbol{R}}}\,\bar{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\bar{\bar{\boldsymbol{R}}} = \begin{bmatrix} \cos(30°) & -\mathrm{sen}(30°) \\ sen(30°) & \cos(30°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.5 \\ 0.5 & 0.87 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{R}}}\,\bar{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -1.63 \\ 4.83 \end{bmatrix}$$

Solución Ejercicio 16

a)

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{\to v} = \frac{\bar{\boldsymbol{u}}\,.\,\bar{\boldsymbol{v}}}{||\boldsymbol{v}||} = \frac{60}{10.2} = 5.88$$

b) Para proyectar u sobre el eje x utilizamos el versor $\bar{\boldsymbol{\imath}}$

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{\to i} = \bar{\boldsymbol{u}}.\bar{\boldsymbol{\imath}} = 5$$

En este caso no es necesario normalizar porque el versor $\bar{\imath}$ ya es unitario.
Ahora si hacemos lo mismo para el eje y, pero utilizando el versor $\bar{\jmath}$:

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{\rightarrow \boldsymbol{j}} = \bar{\boldsymbol{u}}.\bar{\boldsymbol{\jmath}} = 5$$

Como se puede observar proyectar sobre un eje nos da exactamente la componente correspondiente del vector sobre ese eje.
Si ahora repetimos para el vector v:

$$v = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_{\rightarrow \boldsymbol{i}} = \bar{\boldsymbol{v}}.\bar{\boldsymbol{\imath}} = 10$$

Y

$$v = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_{\rightarrow \boldsymbol{j}} = \bar{\boldsymbol{v}}.\bar{\boldsymbol{\jmath}} = 2$$

Solución Ejercicio 17

a) Verdadero. Si la transformación lineal la expresamos como:

$$F(x) = \bar{\bar{A}}\bar{x}$$

Luego podemos verificar las propiedades:

$$F(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = \bar{\bar{A}}(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = \bar{\bar{A}}\overline{x_1} + \bar{\bar{A}}\overline{x_2} = F(\overline{x_1}) + F(\overline{x_2})$$

$$F(\alpha\bar{x}) = \bar{\bar{A}}(\alpha\bar{x}) = \alpha\bar{\bar{A}}\bar{x} = \alpha F(\bar{x})$$

b)Falso. Sólo aquellas que no tienen desplazamientos.
c)Falso.
d)Falso. Con una transformación afín podemos desplazar y rotar un cuerpo.
e)Verdadero.