PROBLEMAS DE DINÁMICA

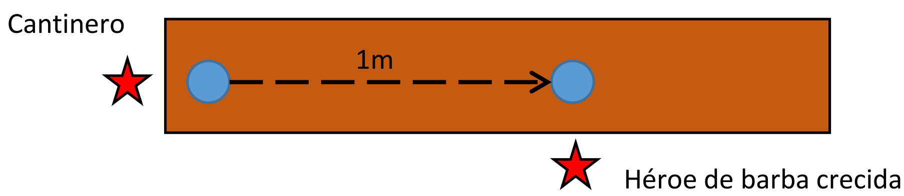
Modelos y Algoritmos para Videojuegos II

Problemas sencillos de dinámica con su soluciones

Aguamiel

Problema

Acabamos de volver de una aventura y nuestros amigos los enanos nos invitan a beber aguamiel en la taberna del pueblo. Al llegar nos sentamos en una barra larga y de superficie lisa. El cantinero se encuentra en el extremo izquierdo de la barra y nos lanza una jarra de aguamiel que pesa 0.45 kg hacia la derecha con una velocidad inicial de 2.8 $\frac{m}{s}$ pero se frena por la fuerza de fricción horizontal constante ejercida por el mostrador. La botella se desliza 1.0 m antes de detenerse. ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza de fricción? En la figura siguiente se muestra un esquema del problema:



Aclaración: sino contestan correctamente se quedan sin aguamiel!

Resolución

Tomemos un sistema de referencia con el origen en la posición inicial de la jarra y con x+ hacia la derecha. Usando

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

despejamos la aceleración

$$a = \frac{(v^2 - v_0^2\ )}{2(x - x_0)} = \frac{(0\ \ m/s)^2 - (2.8\, m/s)^2}{2(1.0m - 0m)} = -3.9\frac{m}{s^2}$$

El signo (-) indica que es hacia la izquierda, es decir que se va frenando. Ahora que conocemos la aceleración, vamos a calcular cuál es la fuerza necesaria para producirla. Usando la segunda ley de Newton, sabiendo que sólo tenemos una fuerza de fricción en acción y que la misma se aplica paralela al eje x:

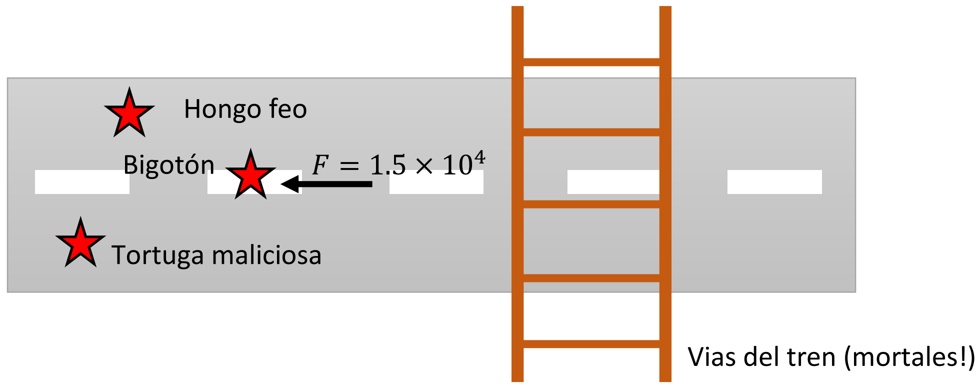
$\sum F_x = f_{rozamiento} = ma = 0.45kg\ (-3.9\ \ m/s^2) = -1.8\ N$

Y así el héroe de barba crecida pudo tomarse su aguamiel!.

Cosas de plomeros

Problema

Venís en el Karting a toda velocidad, mirando de reojo a esa fea tortuga que te está acechando. Por el otro costado viene esa cabeza de hongo que te está apuntando con todo lo que tiene. Pisás el acelerador a fondo para perderlos cuando de repente ves que te estás aproximando a cruce ferroviario. Pensás que vas a cruzar antes que llegue el tren. El tren se acerca y tu preocupación aumenta. Justo en el último momento te das cuenta que no vas a lograrlo y con todo tu peso pisás el freno. El Karting que pesa $1.96 \times 10^4\ N$ y que se movía en la dirección x+ se detiene abruptamente, experimentando una fuerza neta de $-1.5 \times 10^4\ N$. ¿Cuál es la aceleración que experimenta debido a esa fuerza? En el gráfico se muestra un diagrama del problema:



Solución

Para conocer la aceleración utilizaremos la segunda ley de Newton. Sabemos que el karting experimenta una fuerza en el eje x+

$$F_x = ma_x$$

De esta ecuación conocemos F_x que es un dato del problema y podemos calcular la masa ya que el peso es un dato también del problema. Nos dice que el auto pesa 1.96×10^4 N (Ojo que esto es peso no masa), por lo tanto vamos a calcular la masa. Sabemos que el peso es una **fuerza**

$$P = ma_g = m(9.8)$$

De aquí despejamos

$$m = \frac{P}{a_g} = \frac{1.96 \times 10^4\ \mathrm{N}}{9.8\ m/s^2} = 2000\ kg$$

Ahora podemos despejar de la primera ecuación

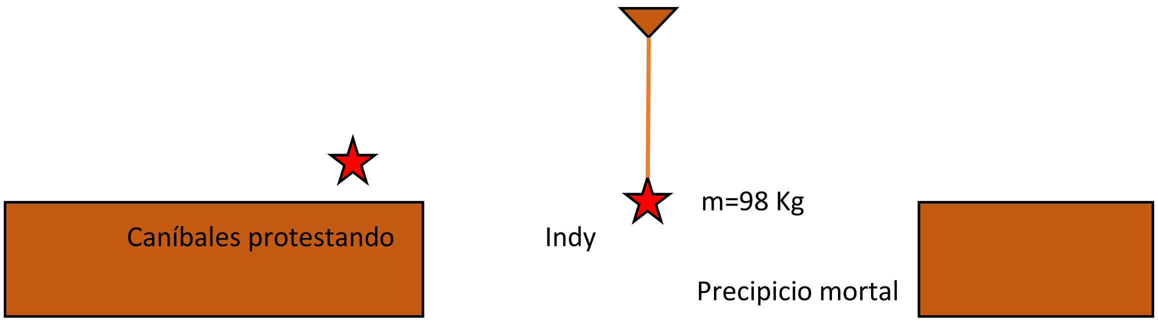
$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{-1.5 \times 10^4 N}{2000\ kg} = \frac{-1.5 \times 10^4\ kg \cdot m/s^2}{2000\ kg} C = -7.5\ m/s^2$$

Finalmente pudiste frenar, y tanto el hongo como la tortuga se fueron de viaje estampados contra el tren.

Indy

Problema

Los furiosos caníbales persiguen a Indy hasta el borde de un gran pozo. No parece haber un camino para cruzar al otro lado, pero en el último momento Indy divisa una saliente en el techo justo en el medio del precipicio y se decide a usar su látigo para balancearse al otro lado. Con una gran habilidad logra engancharlo en la saliente y se lanza al precipicio. Lamentablemente el envión inicial no fue suficiente y luego de balancearse un poco queda suspendido en equilibrio de la saliente sin posibilidad de moverse soportando el látigo sus 98 Kg. ¿Cuánto pesa Indy? ¿Qué fuerza ejerce el látigo sobre él? ¿Qué tensión hay en el látigo? En el siguiente gráfico se muestra un diagrama del problema:

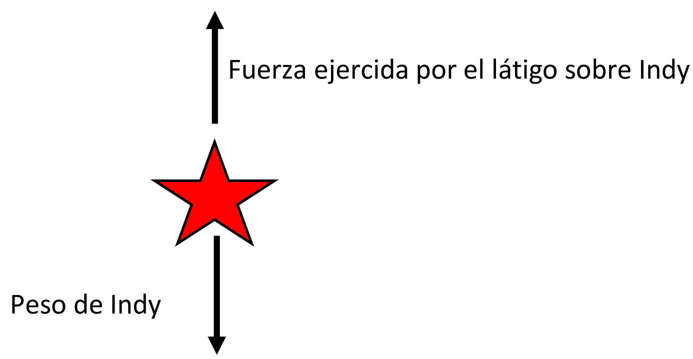


Solución

Contestar la primera pregunta es sencillo, sabemos que el peso es una fuerza y que conociendo la masa del cuerpo y la gravedad podemos determinarla:

$$F_p = ma = 98\ kg\ \left(9.8\frac{m}{s^2}\right) = 960.4$$

Para la segunda pregunta vamos a realizar un diagrama de cuerpo libre para Indy



Hay dos fuerzas actuantes sobre Indy, la primer es la fuerza peso que lo tira hacia abajo, la segunda fuerza es la que el látigo ejerce sobre Indy y evita que se caiga (porque dijimos que estaba en equilibrio), esta fuerza debe ser opuesta al peso y se llama **tensión** de una cuerda –o látigo en este caso-. Usando la tercer ley de Newton tenemos

$$F_{peso} + T = 0$$

Si ponemos un sistema coordenado sobre Indy con y+ hacia arriba:

$$-960.4 + T = 0$$
$$T = 960.4$$

Esta es la tensión en la cuerda. Por suerte los fabricantes de látigo los diseñan para resistir personas balanceándose.

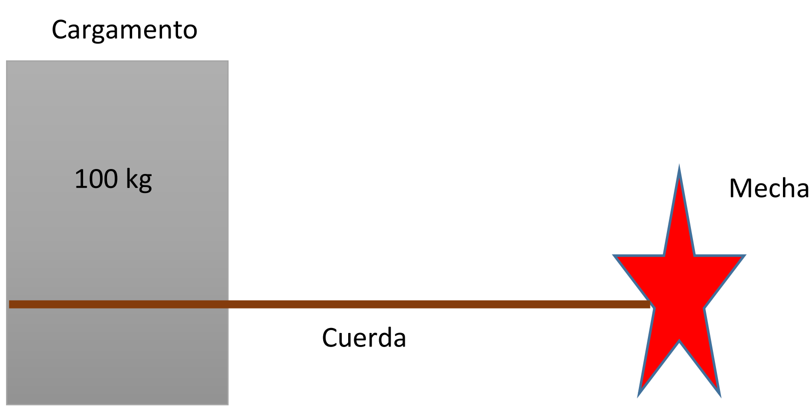
Por último hagamos un diagrama de cuerpo libre del látigo para completar nuestro análisis

Cómo podemos observar como la cuerda está en equilibrio, debe experimentar en ambos extremos fuerzas de igual magnitud y distinto sentido. Estas fuerzas son la tensión que está soportando la cuerda.

Mecha Delivery

Problema

Estás a bordo del último invento de la humanidad en ingeniería aeroespacial. Es una nave que tiene la capacidad de convertirse en robot. Tu primera misión es recoger un cargamento de provisiones para la base lunar en la que estás apostado, el mismo tiene una masa de 100 kg. Al llegar al lugar te transformás en robot y luego de atar el cargamento con una soga de una aleación altamente resistente intentás arrastrar la caja que contiene el cargamento como muestra en la figura:



Aplicando una fuerza de 100 N observás que la caja alcanza una velocidad de $2\ m/s$ luego de $4\ s$. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento de la superficie debajo de la caja?

Solución

Para resolver este problema, debemos encontrar el coeficiente de rozamiento de la superficie sobre la cual se encuentra el cargamento. Las fuerzas intervinientes serán

$$\sum F_x = \underbrace{F_m}_{Mecha} - \underbrace{F_r}_{Rozamiento} = F_m - \mu\, W$$

De esos datos conocemos la fuerza del robot y podemos calcular el peso, teniendo en cuenta que la gravedad a utilizar en este caso será la lunar ($1.622\, m/s^2$)

$$W = m\, g_l = 100\, kg\, 1.622\frac{m}{s^2} = 162.2\, N$$

Si ahora planteamos la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = F_m - \mu\, W = m\, a$$

F_m, W y m son datos conocidos. Para poder despejar μ sólo nos faltaría determinar la aceleración que experimenta el cuerpo y esto lo podemos calcular usando las ecuaciones de cinemática del movimiento acelerado:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\frac{2m}{s} - \frac{0m}{s}}{4s - 0s} = 0.5\frac{m}{s^2}$$

Con esta aceleración podemos volver a la ecuación de Newton y despejar μ

$$-\mu = \frac{m\, a - F_m}{W} = \frac{100\, kg\, 0.5\frac{m}{s^2} - 100\, N}{162.2\, N} = -0.308$$

Por lo tanto concluimos que el coeficiente de rozamiento es 0.308.

Mecha Delivery 2

Problema

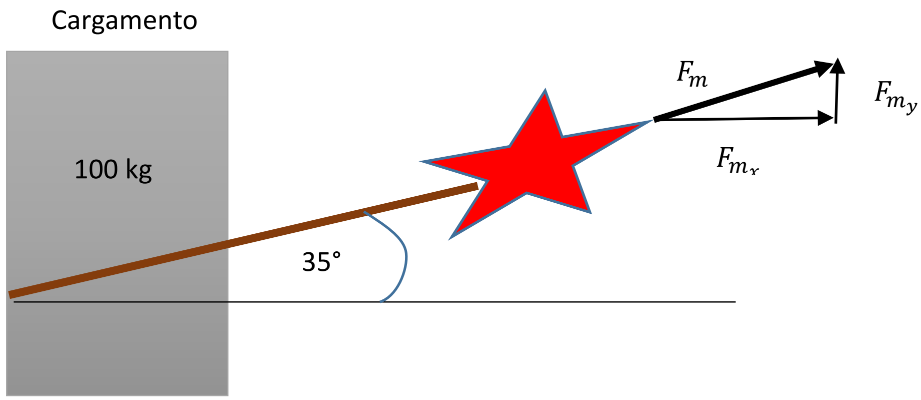
Al ver que te costaba tanto arrastrar la caja, decidís transformare en avión y usando la mayor potencia que dispone esta configuración arrastrarla a mayor velocidad. Para poder mantener el avión en vuelo no podés volar paralelo al plano horizontal, sino que tenés que llevar la nariz del avión levemente inclinada hacia arriba. Esto provoca que tires de la caja con un ángulo de 35° respecto del plano horizontal. Esta vez la fuerza que podés ejercer es de 200N (el doble!). ¿Te conviene usar esta configuración? Para responder esta pregunta analiza la velocidad que alcanzarías ahora al cabo de 4s.

Solución

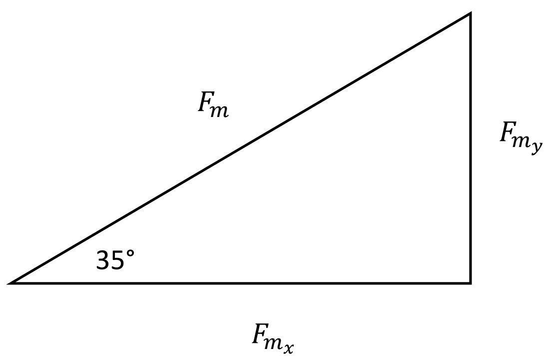
Analicemos las fuerzas que aparecen en el sistema. Para este problema elijamos un sistema coordenado donde x es paralelo al piso e y perpendicular. Esta vez como no volamos paralelo al suelo tendremos componentes de fuerza también en el eje y. Sobre el eje x tendremos:

$$\sum F_x = F_{m_x} - F_{rozamiento}$$

La fuerza del mecha en x no será de 200N, ya que estamos volando a 35° del suelo. En el siguiente diagrama se muestra tal situación:



F_m tendrá una componente en el eje x y una componente en el eje y. Calculemos primero la componente en el eje x. Usando trigonometría:



Sabemos que $\cos(35) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{F_{m_x}}{F_m}$

Por lo tanto

$$F_{m_x} = F_m \cos(35°) = 200 \cos(35°) = 163.83N$$

Y de esta forma hemos obtenido la componente en x de la fuerza ejercida por el mecha. Volviendo a la sumatoria de fuerzas

$$\sum F_x = F_{m_x} - F_{rozamiento} = F_{m_x} - \mu\, F_W$$

Ya hemos obtenido la primera. Para calcular la segunda debemos notar algo, la fuerza de rozamiento se obtiene como el producto de una constante de rozamiento por la fuerza que ejerce la caja sobre el plano. Antes la fuerza que ejercía la caja sobre el plano era directamente el peso, sin embargo ahora tenemos una fuerza que tira la caja hacia arriba. Esta fuerza que tira la caja hacia arriba hace que la misma este menos “apretada” contra el piso, disminuyendo la fuerza de rozamiento.

$$F_{rozamiento} = \mu \, F_w$$

La fuerza de la caja sobre el piso F_W será el peso de la caja menos la fuerza que hace el mecha hacia arriba, es decir F_{m_y}.

$$F_w = W - F_{m_y} = 162.2N - F_m \sin(35°) = 162.2N - 114.71N = 47.49N$$

Por lo tanto

$$F_{rozamiento} = 0.308 \;\; 47.49N = 14.62N$$

Como se puede observar es mucho menos ahora que la "levantamos un poco". Volviendo a la sumatoria de fuerzas:

$$\sum F_x = 163.83N - 14.62N = 149.21N$$

Esta cantidad es la fuerza resultante en el eje x sobre la caja.

Usando la ley de Newton

$$\begin{aligned} 149.21N &= m\,a \\ a &= \frac{149.21N}{100kg} = 1.4921\, m/s^2 \end{aligned}$$

Obtenemos la aceleración que experimenta la caja en el eje x. Ahora simplemente nos queda aplicar las ecuaciones de cinemática para saber qué velocidad tendrá al cabo de 4s:

$$v_f = v_i + at = 0 + 1.4921\, m/s^2 \; 4s = 5.9684 \frac{m}{s}$$

Es decir obtendremos una velocidad mucho más grande en esta configuración al cabo de 4 segundos.

Mecha Delivery 3

Problema

¿Existe alguna posibilidad que el mecha levante totalmente la caja del suelo?

Solución

La única fuerza que mantiene la caja en el suelo es el peso, por lo que para levantar la caja deberíamos contrarrestarla. Como el peso actúa en dirección vertical (supongamos que coincide con nuestro eje y) debemos ejercer otra fuerza en el eje y pero en sentido contrario. Por ello para aprovechar al máximo los motores del avión estudiemos que sucede si volamos directamente hacia arriba, formando 90° con la horizontal. Para poder levantar la caja deberíamos generar una fuerza igual o mayor que el peso. Como el peso de la caja es de 162.2 N y el avión nos va a entregar una fuerza de 200 N claramente va a poder levantar la caja sin inconvenientes del suelo.