UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

Tecnicatura en diseño y programación de videojuegos

UNL VIRTUAL

Modelos y algoritmos para videojuegos I

Unidad 6

Docentes
Sebastián Rojas Fredini
Patricia Schapschuk

CONTENIDOS

6. LENTO, PERO IGUALMENTE FURIOSO

6.1. La vida sin curvas

En esta unidad nos introduciremos de lleno en cinemática, que es la rama de la física que estudia el movimiento sin importar las causas que lo originan. Vamos a ver cómo se describe el movimiento de objetos que se mueven en líneas rectas a velocidad constante o acelerándose. Es el más básico de los movimientos que realizarán nuestros personajes en un videojuego y una base fundamental a partir de la cual se pueden construir trayectorias más complejas.

Para entender dicho movimiento, necesitamos introducir algunas cuestiones físicas. Luego, con los conocimientos adquiridos en unidades anteriores, implementaremos nuestros propios ejemplos de movimiento.

6.2. Magnitudes físicas

6.2.1. Desplazamiento, distancia y trayectoria

Es muy común usar estos términos como sinónimos para describir el movimiento de un cuerpo, pero cabe destacar que no tienen el mismo significado físico.

Desplazamiento es una magnitud vectorial, que se define como el cambio de posición entre una situación final y otra inicial, y se determina al vector desplazamiento de la siguiente manera:

$$\Delta x = X_f - X_i$$

Xi = Posición inicial del cuerpo.

Xf = Posición final del cuerpo.

La unidad en el SI del vector desplazamiento es el [m]. En este caso, el desplazamiento está definido sobre el eje *x*, pero se puede definir de la misma manera sobre el eje *y* o *z*.

El concepto *distancia* expresa la longitud, o sea, el camino recorrido por el cuerpo, que puede o no coincidir con el desplazamiento.

Por ejemplo: dado un circuito de carrera de 100 [m]. El atleta debe correr hasta el final del mismo y volver al punto de partida. El desplazamiento es *cero*, dado a que la posición final e inicial del atleta coinciden, pero la distancia recorrida por él es 200 [m], desde que salió del punto de partida hasta que volvió al mismo lugar.

Se denomina *trayectoria* a la curva formada por todas las posiciones tomadas sucesivamente por el cuerpo en movimiento. Para llegar hasta alguna posición deseada, un móvil recorre distintas trayectorias, las cuales pueden ser rectilíneas, parabólicas, circulares, etc.

6.2.2. Velocidad y rapidez

En el lenguaje coloquial es muy común utilizar estos términos como sinónimos, pero en el lenguaje de la física no tienen el mismo significado.

La *velocidad* es una magnitud vectorial, por lo que expresa la rapidez que desarrolla un cuerpo en movimiento, su dirección y el sentido del movimiento. La *rapidez* es el módulo del vector velocidad en un instante determinado, y es siempre un número positivo.

La velocidad puede ser *positiva* o *negativa*, según el sistema de referencia elegido.

Por ejemplo, dado el caso de dos nadadores que se tiran a la pileta, los dos nadan con velocidad de 12 [km/h], pero uno lo hace de este a oeste, mientras que el otro nada de oeste a este. Ambos poseen la misma rapidez, pero sus velocidades son distintas porque el sentido de cada uno no es el mismo. Se toma como velocidad positiva a aquella que desarrolla el nadador que se mueve según el eje de coordenada positiva (del sistema de referencia elegido), y de signo negativo, al que lo hace en sentido contrario.

Tanto la velocidad como la rapidez son magnitudes que se expresan como la unidad de longitud dividida por la unidad de tiempo: [cm/s], [m/s], [km/h], etc. La unidad usada por el SI es [m/s].

6.2.3. Aceleración

La *aceleración* es una magnitud vectorial y la responsable del cambio del vector velocidad en el tiempo.

La velocidad puede variar por tres motivos: porque varía la rapidez del móvil, porque varía su dirección o porque varían ambos. En los tres casos, la responsable de dicha variación es la aceleración y se dice que el móvil se aceleró.

La aceleración puede ser positiva o negativa, según el sistema de referencia adoptado, y se expresa en unidad de velocidad sobre unidad de tiempo, lo que resulta en unidad de distancia sobre unidad de tiempo elevada al cuadrado: [cm/ s^2], [m/ s^2], [km/ h^2], etc. En el SI, la unidad usada el [m/ s^2].

6.2.4. Movimiento

Un cuerpo se mueve con relación al sistema de referencia elegido si al menos una de sus coordenadas de posición varía continuamente a medida que transcurre el tiempo.

Por convención, el sistema de referencia se considera fijo. Por lo tanto, el movimiento es relativo.

Si consideramos el movimiento de traslación, estudiaremos tres tipos de movimientos: Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU), Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV) y Movimiento Circular (Uniforme y Variado).

Veamos unas definiciones que nos ayudarán a entender lo que viene a continuación:

Mecánica
Rama de la física que estudia los fenómenos relacionados con el movimiento de los cuerpos.

Cinemática
Parte de la mecánica que estudia los movimientos sin importar las causas que los producen y/o modifican.

Partícula, objeto o cuerpo puntual
Cuerpo con dimensiones muy pequeñas, en comparación con las otras dimensiones que participan en un fenómeno, lo cual permite que el estudio de su movimiento se simplifique. Los objetos de este tipo sólo pueden experimentar el movimiento de traslación.

6.3. Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

El MRU es el movimiento en el cual la trayectoria describe una línea recta. En este tipo de movimiento, el vector velocidad es constante en todo el trayecto. El móvil realiza *iguales desplazamientos en iguales intervalos de tiempo*.

Las ecuaciones correspondientes a este movimiento son:

$$\vec{v} = \Delta x / \Delta t$$

La velocidad es el cociente entre la variación del desplazamiento y la variación del tiempo.

$$\vec{v} = (x_f - x_i)/(t_f - t_i)$$

En general, el tiempo inicial al estudio del movimiento es cero; entonces, si $t_i = 0$, la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (x_f - x_i)/t_f$$

Si realizamos un pasaje de término y despejamos la posición final en la ecuación anterior, llegamos a la siguiente expresión, denominada *ecuación horaria del movimiento*:

$$x_f = x_i + v.t \qquad (*)$$

Si analizamos esta última expresión, vemos que corresponde a una ecuación lineal, donde podemos distinguir ordenada al origen (x_i) y la pendiente (v).

6.3.1. Análisis matemático del MRU

Una función de la forma:

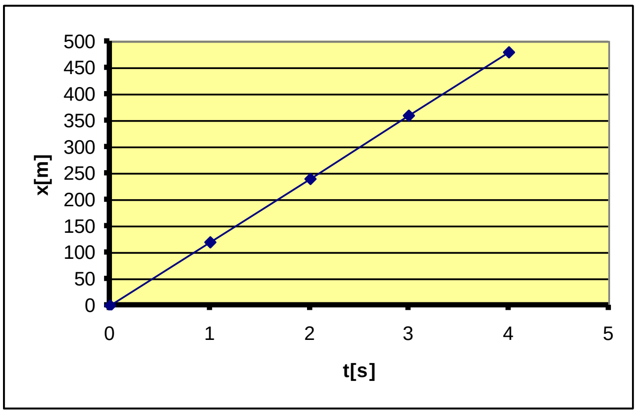
$$F_{(x)} = mx + b$$

es *lineal*, donde *m* y *b* son números reales cualquiera, *x* es la *variable independiente*, y la función $F_{(x)}$ será y, *variable dependiente*. También se la conoce como *ecuación de primer grado*, dado que la variable independiente está elevada a la unidad.

La relación que establecemos para nuestro análisis es que la distancia y el tiempo responden a una función lineal. Para un mejor estudio de la misma, le daremos valores numéricos, como el siguiente ejemplo: $F_{(x)} = 120\,x + 80$

Pensemos en la velocidad de un auto que va a 120 km/h. Ello significa que en una hora, o bien en una unidad de la variable independiente, recorre 120 km o 120 unidades de la variable dependiente. Esto constituye una característica del movimiento: la variación de la distancia recorrida o de la variable independiente, y la variación del tiempo empleado en hacerlo o de la variable dependiente, se mantienen constantes en todo momento.

Si realizamos una tabla de valores correspondiente a la variable independiente (tiempo) con respecto a la variable dependiente (distancia recorrida) y luego graficamos, obtenemos lo siguiente:



t [s]	Xf =Xi + v * t
0	0
1	120
2	240
3	360
4	480

Todos los puntos (*x, y*) que en este caso son tiempo y posición, que pertenecen a dicha recta, verifican la ecuación

$$x_f = x_i + v.t$$

Entonces, podemos decir que esta ecuación corresponde a la ecuación de la recta no vertical.

Si tomamos dos puntos que verifican dicha ecuación, los mismos serán:

$(y_1, x_1) \leftrightarrow \quad y_1 = m\, x_1 + b$

Siendo $x_1 \neq x_2$

$(y_2, x_2) \leftrightarrow \quad y_2 = m\, x_2 + b$

La variación de la variable dependiente *y* es:

$y2 – y1 = (m\, x2 + b) - (m\, x1 + b) = m\, x2 - m\, x1$

$y2 – y1 = m\, (x2 – x1)$

$$y_2 - y_1 / (x_2 - x_1) = m \qquad (1)$$

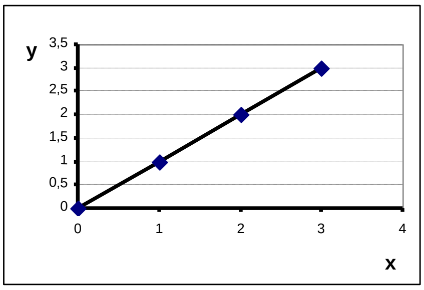
m es independiente de los puntos que tomamos y la llamamos *pendiente*.

La pendiente de una función lineal f(x) = mx + b es la variación de la variable dependiente en una unidad de la variable independiente.

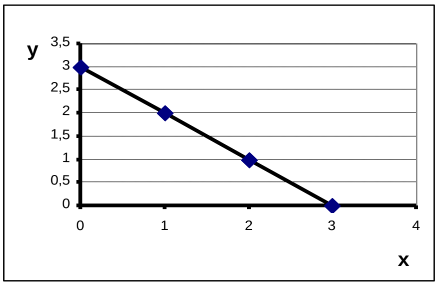
$$m = \frac{\text{Variación de y}}{\text{Variación de } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lo verdaderamente importante en este tipo de funciones es que dicha variación es siempre *constante*. Además, debemos tener en cuenta lo siguiente:

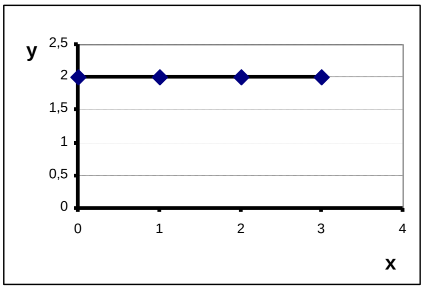
Si *m* > 0, es una función creciente.



Si m < 0, es una función decreciente.



Si m = 0, es una función constante.



Si retomamos el análisis físico del MRU, y especialmente de la ecuación:

$$\vec{v} = (x_f - x_i)/(t_f - t_i)$$

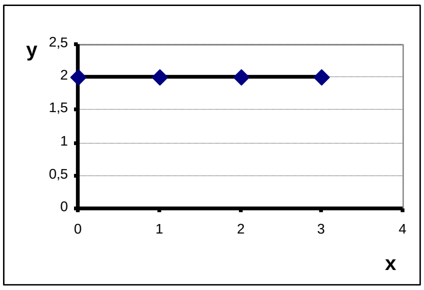
Podemos realizar una analogía con el estudio matemático, recientemente realizado: esta ecuación es muy parecida a la ecuación (1) para el cálculo de la pendiente. Pero más aún, si tomamos la ecuación horaria del movimiento:

$$x_f = x_i + v.t$$

Vemos que esta última ecuación es de una recta, o sea, la ecuación de una función lineal. Por lo tanto, tenemos la capacidad de decir que la velocidad es la pendiente de dicha ecuación, y recordemos que la pendiente, o la variación de la ordenada (eje y) con respecto a la abscisa (eje *x*), es siempre constante y será una recta paralela al eje x.

Teniendo la ecuación de desplazamiento - tiempo, podemos conocer la velocidad a través de la pendiente de dicha gráfica, *pero* de la gráfica velocidad - tiempo también podemos conocer el desplazamiento . ¿Cómo? Calculando el área bajo dicha recta.

Por ejemplo:



En la gráfica podemos observar que el móvil viaja a una velocidad constante de 2 [m/s], y que el tiempo total del movimiento es de tres segundos. Para conocer el desplazamiento, calcularemos el área bajo dicha recta.

Como la figura que se ha formado es un rectángulo, el área es B x H, o sea 3 [s] * 2 [m/s]. El resultado es 6 *m*, que corresponde al desplazamiento (Δx) que realizó el móvil.

6.3.2. Conclusiones importantes

Si un cuerpo se mueve con MRU:

a) realiza iguales desplazamientos en iguales intervalos de tiempo;

b) al graficar dichos desplazamientos con respecto al tiempo, la ecuación obtenida es una función lineal y la gráfica será una recta;

c) la pendiente de dicha gráfica (posición – tiempo) será la velocidad con la que se mueve el cuerpo;

d) dicha velocidad será siempre constante, para cualquier intervalo de tiempo empleado;

e) como la velocidad se mantiene constante en todo el movimiento, no hay aceleración, por lo que se considera nula.

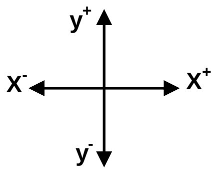
f) recordar que la velocidad es un vector, por lo que podrá ser positiva o negativa, según el sistema de referencia elegido, pero siempre será constante.

6.3.3. Ejemplo

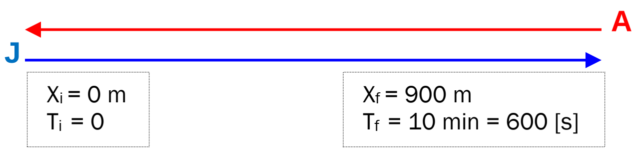
La casa de Juan se encuentra a 900 m de la casa de Ana. Caminando con velocidad constante, Juan tarda 10 minutos en recorrer esa distancia, mientras que Ana lo hace en 15 minutos. Cierto día salen ambos a las 15:00, cada uno desde su casa y dirigiéndose a la casa del otro. ¿A qué hora y a qué distancia se encuentran? Trazar los gráficos correspondientes.

Como primera medida es necesario realizar un esquema que sea representativo de la experiencia; se debe fijar un sistema de referencia (SR) y luego marcar en dicho esquema los datos que tenemos:

Sistema de Referencia (SR):



Esquema de datos:



En primer lugar, calcularemos a qué velocidad se mueve cada uno. Como en el enunciado del problema se aclara que la velocidad es constante, estamos frente a MRU, y por lo tanto usaremos las ecuaciones características para dicho movimiento.

Cálculo del módulo de la velocidad de Juan:	Cálculo del módulo de la velocidad de Ana:
$x_{f\,J} = x_{i\,J} + v_J.t$	$x_{f\,A} = x_{i\,A} - v_A.t$
$(x_{f\,J} - x_{i\,J})/t = v_J$	$(x_{f\,A} - x_{i\,A})/t = -v_A$
$(900m - 0m)/10\min = v_J$	$(0m - 900m)/15\min = -v_A$
$v_J = 90m/\min$	$v_A = 60m/\min$

Si observamos el esquema que antecede, veremos que hemos fijado un SR y que, de acuerdo al mismo, Juan parte de una posición inicial x_{fj} igual a cero.

Esto se debe a que el sistema de referencia comienza en dicho lugar, o sea, que el centro de coordenadas se ubica desde donde parte Juan (nosotros lo dibujamos afuera del esquema para ser más prolijos).

Siguiendo con el análisis y de acuerdo con el SR, la posición final x_{fj} de Juan será de 900 m y la velocidad, *positiva*, ya que se dirige en sentido del eje positivo de las x.

Pero con Ana no ocurre lo mismo. Como hemos fijado un SR, hay que respetarlo hasta el final, y de acuerdo a éste, Ana parte de una posición inicial x_{ia} igual a 900 m y llegará a cero como posición final x_{fa}. No obstante, la velocidad de Ana será *negativa*, ya que se mueve hacia el eje negativo de las *x* (por ello, se le asigna el *signo menos a la velocidad* en la ecuación de Ana).

Para calcular la posición del encuentro entre Juan y Ana, se deben igualar las ecuaciones de posición, ya que en el lugar de encuentro, la posición final de los dos es la misma. Entonces, cuando igualemos las ecuaciones, la única incógnita que tendremos será el tiempo, que obviamente será el que corresponde al encuentro de Juan y Ana.

$$x_{f_J} = x_{fA}$$

$$x_{f_J} = x_{i_J} + v_J.t \qquad x_{f_A} = x_{i_A} - v_A.t$$

$$x_{iJ} + v_J.t = x_{i_A} - v_A.t$$

La $x_{i_J} = 0m$ $\qquad x_{i_A} = 900m$

Entonces:

$$v_J.t = x_{i_A} - v_A.t$$

$$90[m/\min].t = 900[m] - 60[m/\min].t$$

$$90[m/\min].t + 60[m/\min].t = 900[m]$$

$$150[m/\min].t = 900[m]$$

$$t = 900[m]/150[m/\min]$$

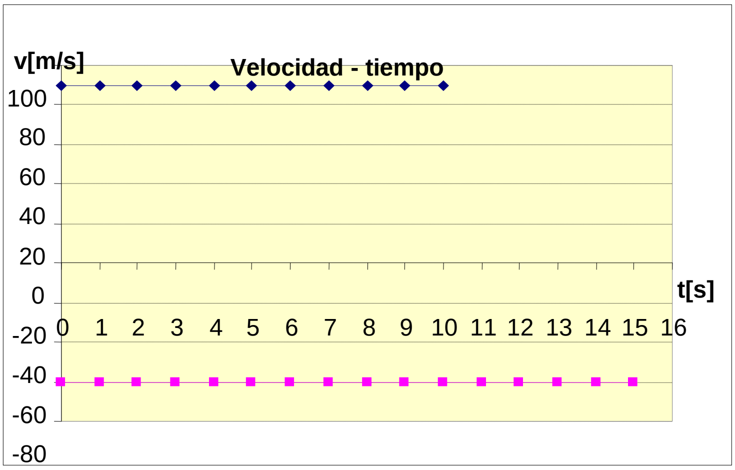
$$t = 6[\min]$$

Tiempo recorre cada uno para encontrarse

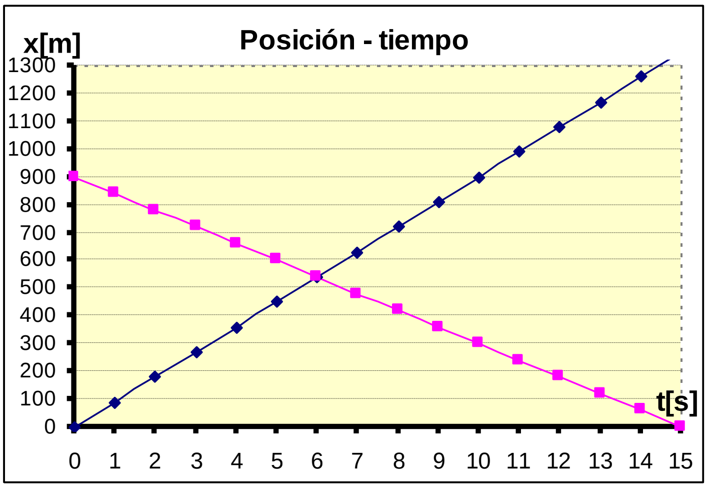
En ese tiempo de encuentro, calcularemos cuánto ha recorrido cada uno:

Cálculo del recorrido de Juan en ese tiempo de encuentro:	Cálculo del recorrido de Ana en ese tiempo de encuentro:
$x_{f_J} = x_{i_J} + v_J.t$ $x_{f_J} = 0[m] + 90[m/\min].6[\min]$ $x_{f_J} = 540m$	$x_{f_A} = x_{i_A} - v_A.t$ $x_{f_A} = 900[m] - 60[m/\min].6[\min]$ $x_{f_A} = 540m$

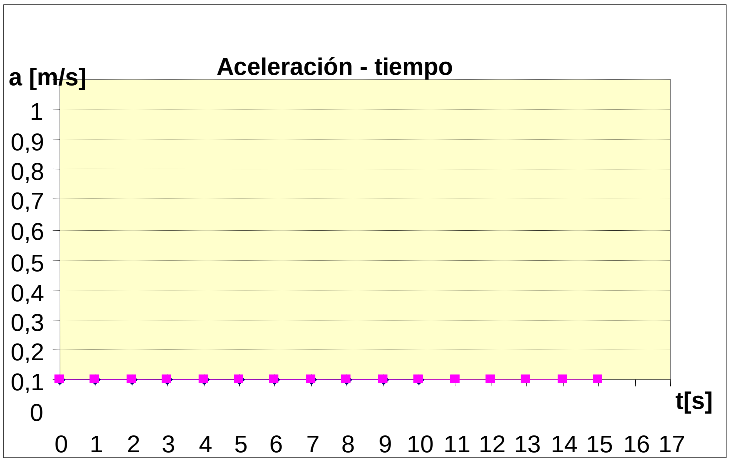
Como se observa, ambos se encuentran a los 540 m desde donde tomamos el inicio. Pero es importante tener en cuenta que Juan recorre 540 m, mientras que Ana sólo recorre 360 m (900 m – 540 m) desde su posición inicial y en sentido contrario al sistema de referencia.



La velocidad de Juan es siempre constante y se representa con la línea azul, en tanto la de Ana también es constante y se representa con la línea rosa.



La recta azul es la correspondiente a Juan, mientras que la recta rosa representa la posición de Ana. Para un tiempo de 6 [min] (eje x) y 540[m] de posición (eje y) se produce el encuentro de ambos.



Como la velocidad de los dos es constante, la aceleración de cada uno es igual a cero.

6.4. Movimiento Rectilíneo Uniforme Variado (MRUV)

Un móvil realiza un movimiento uniformemente variado.

Esta variación es producida por la aparición en el sistema de una magnitud vectorial llamada *aceleración*, pero la misma es *constante* en todo el movimiento y puede tomar dos valores:

1) Si la aceleración es positiva, será la responsable de un incremento de la velocidad. Por tal motivo, el movimiento es *uniformemente acelerado* (MRUA).

2) Si la aceleración es negativa, la velocidad disminuirá de tal manera de llegar a cero o no. En este caso, el movimiento es *uniformemente desacelerado o retardado* (MRUD).

La ecuación que se utiliza para calcular la aceleración es la siguiente:

$$\vec{a} = \Delta v / \Delta t$$

$$\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f - t_i)$$

Unidades: [m/s²]

Por lo general se trabaja tomando el tiempo inicial como cero, de tal manera que la ecuación anterior queda así:

$$\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f)$$

Despejando la velocidad final

$$v_f = v_i + a.t$$

Para MRUA

$$v_f = v_i - a.t$$

Para MRUD

Grafico 1

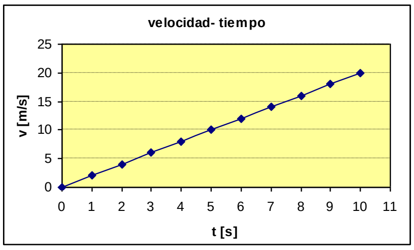
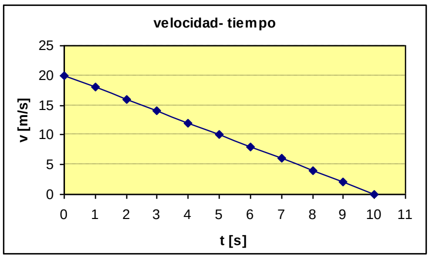


Gráfico 2



En el análisis del gráfico 1, podemos observar que el móvil parte de un tiempo inicial igual a cero, su *velocidad inicial* también es igual a cero y se va incrementado (positivamente) hasta llegar a una velocidad final igual a 20 [m/s] a los 10 [s]. El móvil desarrollará un MRUA y la aceleración será positiva:

$$\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f - t_i)$$

$$\vec{a} = (20m/s - 0)/(10 - 0)s = 2m/s^2$$

Analizando el gráfico 2, apreciamos que la velocidad inicial del móvil es 20 [m/s], la cual irá disminuyendo hasta llegar a la velocidad final igual a cero. Esto ocurre por la presencia de una aceleración negativa, que será la responsable de que el movimiento sea desacelerado (MRUD).

$$\vec{a} = (0m/s - 20m/s)/(10 - 0)s = -2m/s^2$$

Recapitulando, es posible concluir que la única responsable de que la velocidad aumente o disminuya es la presencia de una aceleración, la cual es una *magnitud vectorial* y por tal motivo posee *módulo, dirección y sentido*.

Si observamos los gráficos 1 y 2 de la velocidad en función del tiempo, veremos que existe una relación lineal entre estas dos magnitudes. Por consiguiente, cuando se habla de la ecuación de una recta, la pendiente de la misma tiene significado físico y, en este caso, la pendiente de la gráfica velocidad en función del tiempo da como resultado la aceleración, cuya unidad es [m / s^2].

6.4.1. Cálculo del desplazamiento para un MRUV

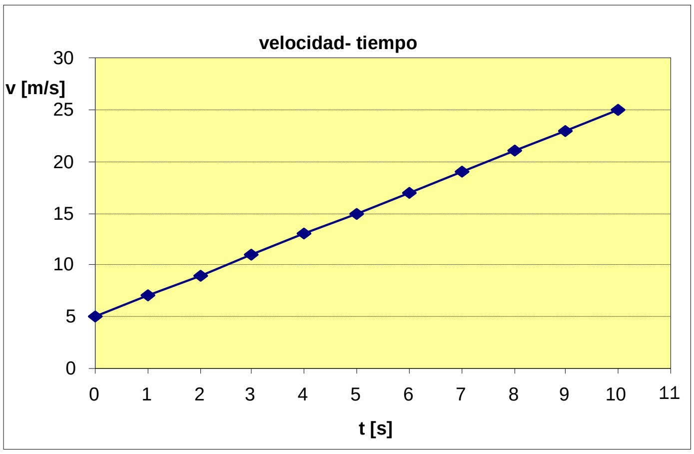
Dado el caso de un móvil que, para un tiempo t=0, parte con una velocidad inicial igual a 5 [m/s], y al cabo de 10 [s] su velocidad es 25 [m/s]. Dichos valores se obtienen no sólo de observar la gráfica, sino también de calcular la aceleración a partir de la pendiente de la recta, tomando dos puntos cualesquiera.

Por ejemplo:

Pendiente = Δy / Δx   Pendiente = (20 – 10) [m/s] / (10 – 5) [s] = 2 [m/s^2]

$$v_f = v_i + a.t \qquad v_f = 5m/s + 2m/s^2 * 10s = 25m/s$$

Gráfico 3



¿Cómo calculamos el desplazamiento del móvil?

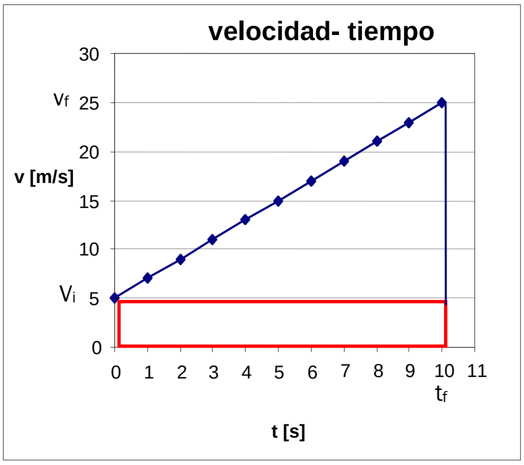
Como ya lo hemos estudiado para el caso de MRU, el desplazamiento se puede calcular como el área bajo la curva de la gráfica de velocidad en función del tiempo, que obviamente también se debe cumplir para cualquier gráfica de velocidad en función del tiempo.

Para el gráfico 3 de nuestro análisis, el área a calcular es de un trapecio, o bien la suma de un rectángulo de 10 [s] x 5[m/s], mas un triángulo rectángulo de 10[s] de base y de 20 [m/s] de altura. El área total es de 150 m.

Como se ve, el área obtenida posee unidades de desplazamiento, ya que se simplifican los [s].

Esta es la manera de calcular el desplazamiento *gráficamente*.

Para calcular el desplazamiento físicamente, debemos encontrar una ecuación genérica para resolver cualquier caso. Partimos de la base de que se forman dos figuras geométricas, un rectángulo y un triángulo. El desplazamiento es el *área bajo la curva*. Por ello sumaremos el área del rectángulo y el área del triángulo rectángulo (siempre de la gráfica velocidad versus tiempo).



Área del rectángulo = $V_i * t_f$

Área del triángulo = $(V_f - V_i) * t_f / 2$

Área Total = $V_i * t_f + (V_f - V_i) * t_f / 2$

Recordemos que: $\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f)$

Entonces: $\vec{a} * t_f = (v_f - v_i)$

Reemplazando en la ecuación obtenida del *Área Total,* quedará:

Area Total = $V_i * t_f + (V_f - V_i) * t_f / 2$

Area Total = $V_i * t_f + a * t_f * t_f / 2$

Area Total = $V_i * t_f + ½ * a * t_f^2$

$\Delta x = V_i * t_f + ½ * a * t_f^2$ $\Delta x = X_f - X_i$

Esta última ecuación corresponde al cálculo del desplazamiento para un MRUV. Si a es positiva, será MRUA. Y si *a* es negativa, corresponderá a un MRUD.

6.4.2. Análisis matemático del MRUV

Del análisis de la última ecuación obtenida para calcular el desplazamiento de un móvil que se mueve con MRUV, podemos observar que siempre la variable independiente es la que corresponde al tiempo. Por tal motivo, la hemos graficado en el eje de las abscisas.

Pero en nuestro análisis podemos apreciar que el desplazamiento (Δx) está en función del tiempo, pero este último está elevado en uno de sus términos al cuadrado, haciendo de ésta una *ecuación de segundo grado*, o también llamada *función cuadrática*.

Una función cuadrática es de la forma $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ con a ≠ 0 y siendo x la variable independiente que en uno de sus términos está elevada al cuadrado.

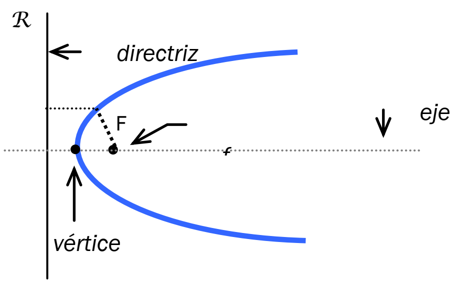
Por esta razón, podemos predecir que la gráfica de esta función no será una recta, sino que corresponde a una curva llamada *parábola*, cuyas características son:

a) Dados un punto F y una recta R, se llama parábola al conjunto de puntos del plano que equidistan de F y de R.

b) El punto F se llama *foco* de la parábola y la recta R se llama *directriz* de la misma.

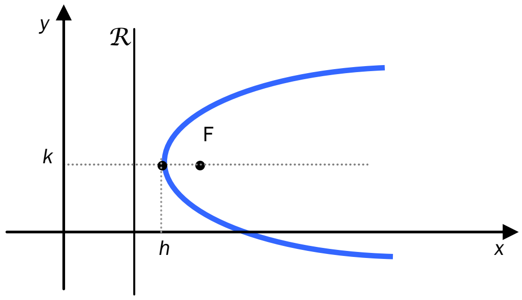
El *eje* es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. La parábola es simétrica con respecto a su eje.

El *vértice*, en cambio, es el punto de intersección de la parábola y su eje.



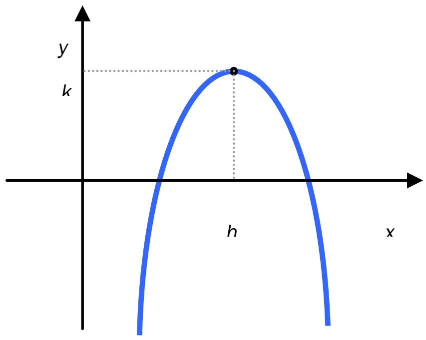
La parábola también puede representarse mediante la llamada *ecuación canónica* y depende de la posición relativa del eje de la misma con respecto a los ejes cartesianos.

En las figuras siguientes pueden verse las ecuaciones de las parábolas según su eje de simetría, sea paralelo al eje *x* o al eje *y*.



Eje de **simetría** paralelo al eje *x*

$(y - k)^2 = a(x - h)$



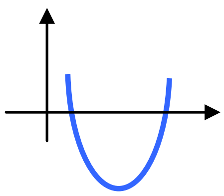
Eje de **simetría** paralelo al eje *y*

$(x - h)^2 = a(y - k)$

La orientación de la abertura de la parábola está indicada por el coeficiente a que aparece en su ecuación.

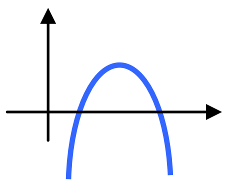
En el caso de una parábola con eje de simetría paralelo al eje y, se presentan las dos situaciones siguientes:

Apertura hacia arriba



a > 0

Apertura hacia abajo



a < 0

Por lo tanto:

Si a > 0, la parábola es abierta hacia arriba y el vértice será un mínimo, o sea, el par ordenado menor a todos los que conforman la parábola.

Si a < 0, la parábola es abierta hacia abajo y el vértice será un máximo, esto es, el máximo par ordenado que tendrá la parábola.

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Sean las ecuaciones de la forma:

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

Para resolver este tipo de ecuaciones, aplicamos un método ya estudiado en la escuela secundaria, llamado *método de la resolvente*, en el cual *x* (la variable independiente) se calcula de la siguiente manera:

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}) / 2.a$$

La solución de esta ecuación dará dos resultados, llamados *raíces de la ecuación*, y son los valores de la variable x que satisfacen dicha función.

Como la variable x es la que se grafica sobre el eje x, serán los dos valores que cortan dicho eje cartesiano. Por tal motivo, se puede decir que esa variable tomará como máximo dos valores posibles: X_1 y X_2 , puntos que la parábola corta al eje de las abscisas o eje x.

Por ejemplo:

Dada la siguiente ecuación: $0 = 5t^2 + 20t + 25$

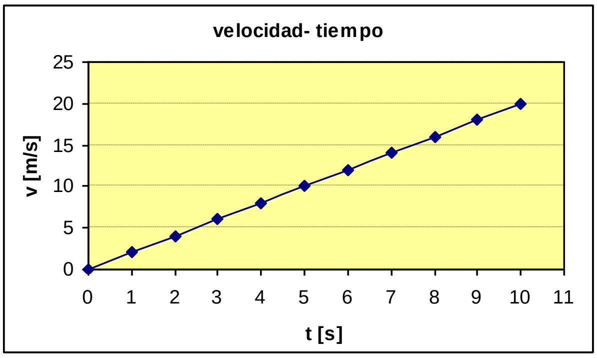
Donde a = 5 b = 20 c = 25

Volvamos, ahora, a nuestro análisis físico del movimiento.

Hemos visto anteriormente que el móvil parte de una velocidad inicial igual a cero, y al

$$t = (-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.5.25}) / 2.5 \begin{cases} \nearrow t_1 = -1 \\ \searrow t_2 = 5 \end{cases}$$

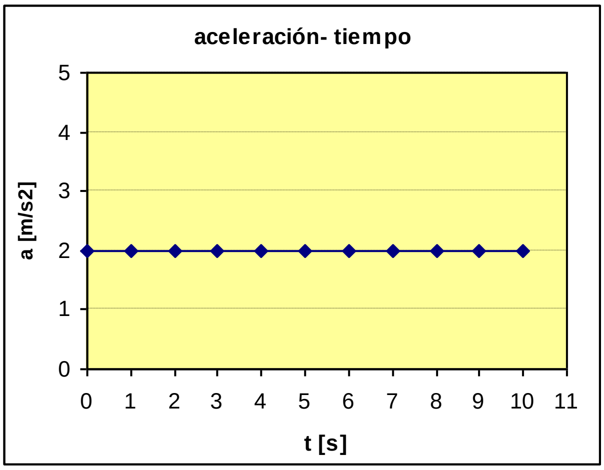
cabo de 10 minutos, su velocidad aumenta a 20 m/s.



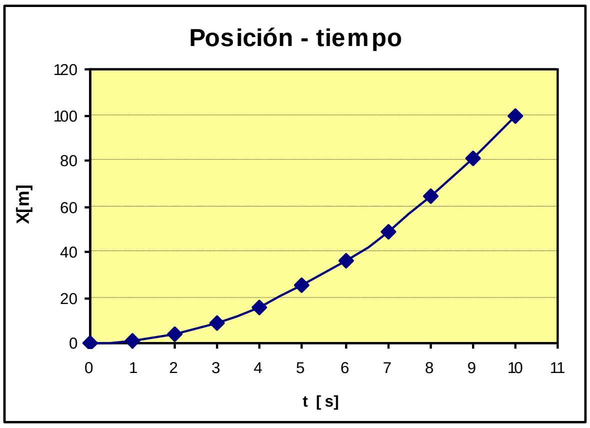
También habíamos calculado la aceleración, la cual obedece a lo siguiente:

$$\vec{a} = (20m/s - 0)/(10 - 0)s = 2m/s^2$$

El movimiento es *uniformemente* acelerado, es decir, hay alguna magnitud que se mantiene constante, que en este caso es la aceleración. Por tal motivo, cuando se grafica la aceleración en función del tiempo, su gráfica corresponderá a una función constante, la cual responde a una recta paralela al eje de las abscisas.



La aceleración es $2 m/s^2$ y constante para todo el movimiento



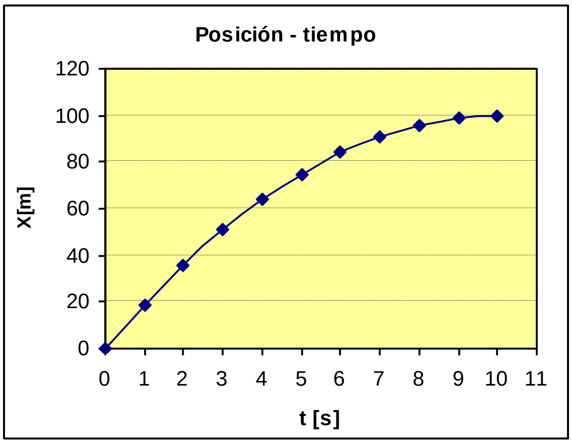
$\Delta x = Vi * tf + ½ * a * tf 2$

$\Delta x = 0 * 10[s] + ½ * 2m/s^2 * (10[s])^2$

$\Delta x = 100 [m]$

La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, ya que la aceleración es positiva.

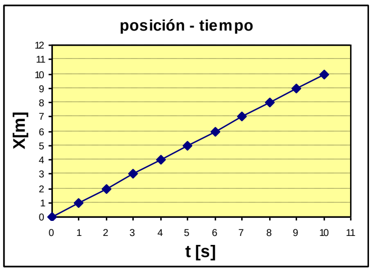
Si la aceleración es negativa, ejemplo $-2m/s^2$, la gráfica de posición versus tiempo también es una parábola, pero obedece a la siguiente forma:



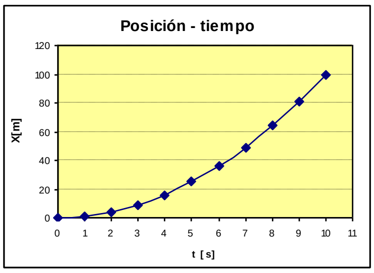
Siempre se trabaja con el eje positivo de las abscisas. Esto se debe a que en él graficamos el tiempo, el cual nunca será negativo.

Resumen de las gráficas de los dos movimientos

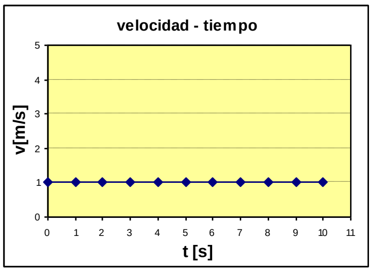
<table>
<tr><th>MRU</th><th>MRUV</th></tr>
<tr><td>



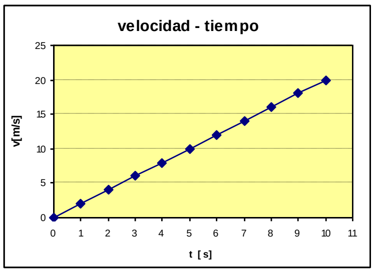
</td><td>



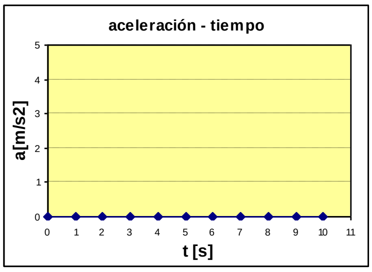
</td></tr>
<tr><td>



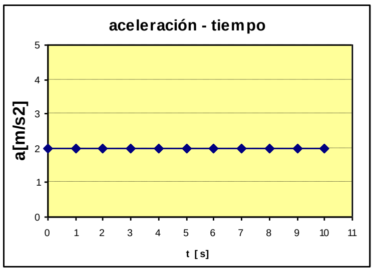
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>



</td><td>



</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resumen de las ecuaciones de los dos movimientos</td></tr>
<tr><th>MRU</th><th>MRUV</th></tr>
<tr><td>$\vec{v} = (x_f - x_i)/(t_f - t_i)$</td><td>$\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f - t_i)$ (1)</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Delta x = v_i * t + \frac{1}{2} * (\pm a) * t^2$ (2)</td></tr>
<tr><td></td><td>Relacionando estas dos ecuaciones, (1) y (2), obtenemos una tercera ecuación para MRUV.
$v_f^2 - v_i^2 = 2 * (\pm a) * \Delta x$</td></tr>
</table>

Ejemplo de aplicación de MRUV

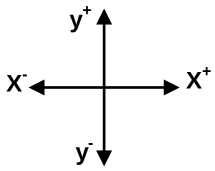
Un móvil acelera en forma uniforme desde el reposo hasta 60 km/h en 28 s. Hallar:

1) La aceleración del móvil.

2) El desplazamiento durante ese tiempo.

> Es importante realizar un esquema de la situación y colocar el sistema de referencia (SR), todos los datos y las incógnitas.

Sistema de Referencia (SR):



Esquema de datos:

X_i = 0 m V_i = 0 km/h T_i = 0 [s]	X_f =? m V_f = 60 km/h = 16,67 m/s T_f = 28 [s]

a) $$\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f - t_i)$$

$$\vec{a} = (16{,}67[m/s] - 0)/(28[s] - 0)$$

$$\vec{a} = 0{,}59[m/s^2]$$

b) $$\Delta x = v_i * t / \frac{1}{2} * (\pm a) * t^2$$

$$\Delta x = 0 * 28[s] / \frac{1}{2} * (0{,}59 m/s^2) * (28[s])^2$$

$$\Delta x \cong 232m$$

Ejemplo de aplicación con los dos movimientos

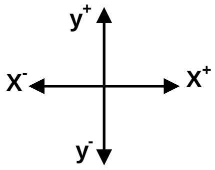
Un vehículo acelera desde el reposo a 2,0 [m/s^2] durante 6,0 segundos; luego se mueve a velocidad constante durante 20 segundos y finalmente desacelera para detenerse en 4 segundos. Calcular:

a) la velocidad en los primeros 6 segundos.;

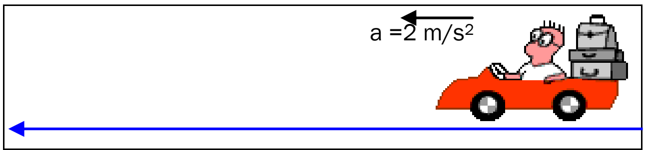
b) la aceleración en los últimos 4 segundos;

c) la distancia total recorrida.

Sistema de Referencia (SR):



Esquema de datos:



X_3 = m	X_2 =	X_1 =	X_i = 0
V_3 = 0 m/s	V_2 =	V_1 =	V_i = 0
t_3 = 30 [s]	t_2 = 26 [s]	t_1 = 6 [s]	t_i = 0
MRUD Tramo 3	MRU Tramo 2	MRUA Tramo 1	

Como se observa en el esquema, es posible dibujar desde la derecha a la izquierda, siempre que respetemos el sistema de referencia indicado.

Para nuestro esquema, el móvil se mueve de derecha a izquierda, pero siempre sobre el eje positivo de las abscisas.

Analicemos por tramos el movimiento del móvil.

Tramo 1: Parte del reposo y a los 6 segundos alcanza una cierta velocidad. Como hay un incremento en la misma, se puede ver que estamos frente a un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA).

Tramo 2: Los próximos 20 segundos se mueve con velocidad constante, o sea que realiza un Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU).

Tramo 3: Los últimos 4 segundos pasa de una cierta velocidad a detenerse (velocidad final cero). Dicha disminución denota un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Desacelerado (MRUD).

Desarrollo

Tramo 1

$\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f - t_i)$ donde $V_i = 0$ y $t_i = 0$

$$v_{f_1} = a * t_f$$

$$v_{f_1} = 2m/s^2 * 6s$$

$$v_{f_1} = 12m/s$$

$$\Delta x_1 = 0*6[s]/\frac{1}{2}*(2m/s^2)*(6[s])^2$$

$$\Delta x_1 = 36m$$

Tramo 2:

Como el móvil desarrolla un MRU, la velocidad es constante, entonces:

$$v_{f_1} = v_{f_2} = 12m/s$$

$$\vec{v}\,2 = (x_f - x_i)/(t_f - t_i)$$

$$\Delta x_2 = 12m/s * 20s$$

$$\Delta x_2 = 240m$$

Tramo 3:

$$\vec{a}_3 = (v_3 - v_2)/(t_f - t_i)$$

$$\vec{a} = (0 - 12m/s)/(30-26)s$$

$$\vec{a}_3 = -3m/s^2$$

$$\Delta x_3 = 12m/s * 4s / \frac{1}{2} * (-3m/s^2) * (4s)^2$$

$$\Delta x_3 = 24m$$

Distancia total recorrida:

$$\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

$$\Delta x_t = 300m$$

6.5. Casos particulares de Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

Los movimientos de *caída libre* y *tiro vertical* son casos particulares de este movimiento. Por tal motivo, es válido utilizar las ecuaciones antes estudiadas.

Es necesario aclarar que en la Tierra, tanto en el movimiento vertical como en de caída libre, además de la fuerza gravitatoria, actúan otras fuerzas como la de rozamiento con el aire, la cual es responsable de retardar el movimiento.

Sin embargo, bajo condiciones particulares de aerodinámia, distancia reducida, ausencia de vientos, etc., sólo se tiene en cuenta la acción de la aceleración de la gravedad, cuyo valor es constante, conocido, y se la representa de la siguiente manera:

> Para el estudio y análisis de estos casos particulares, trabajaremos sobre el eje *y* (ordenadas) y no hay necesidad de calcular el valor de la aceleración, ya que es dato y vale 9,81 m/s^2.

6.5.1. Caída libre

Es un movimiento de caída perfectamente vertical que experimenta un cuerpo bajo la acción de la fuerza gravitatoria.

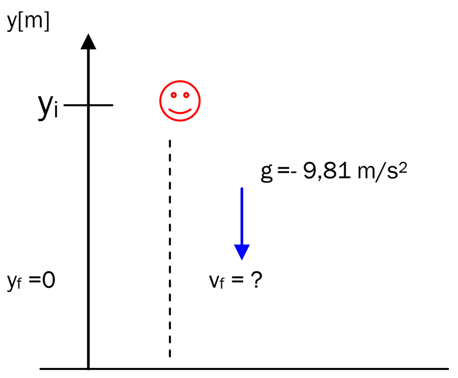
Cabe mencionar que nada tiene que ver la masa del cuerpo, pues tanto un cuerpo con una cierta masa y otro con una masa mayor, caen simultáneamente si se los suelta desde la misma altura (despreciando el rozamiento con el aire).

Ejemplo de aplicación

Se deja caer desde cierta altura un cuerpo. El mismo demora 3 segundos en llegar al piso. Calcular:

1) ¿Desde qué altura cae el cuerpo?

2) ¿Cuál es la velocidad final del cuerpo antes de tocar el piso?



> Se ubica el sistema de referencia en el suelo y el sentido positivo del eje y es hacia arriba. Por esta razón, la aceleración de la gravedad es negativa.

Como dijimos anteriormente, las ecuaciones antes estudiadas son las que seguimos utilizando:

1) $\Delta y = 0m/s * 3s / \frac{1}{2} * (-9{,}81m/s^2) * (3s)^2$

$$\boxed{\Delta y = 44{,}14m}$$

2) $v_f = -g * t_f$

$$v_f = -9{,}81m/s^2 * 3s$$

$$\boxed{v_f = 29{,}4m/s}$$

6.5.2. Tiro vertical

También es un movimiento perfectamente vertical, pero ascendente, que experimenta un cuerpo luego de ser expulsado hacia arriba con una velocidad inicial, aunque siempre bajo la acción de la fuerza gravitatoria.

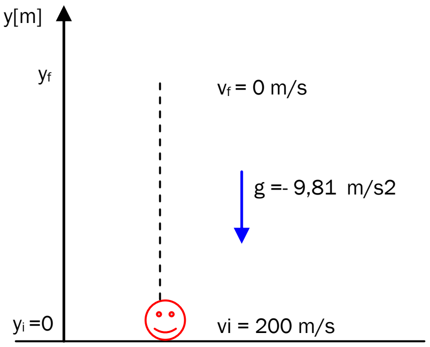
El cuerpo sube con una velocidad inicial, pero está sometido a la aceleración gravitatoria que va frenándolo hasta detenerlo, momento en el cual la velocidad final es cero y el cuerpo alcanza su altura máxima.

Ejemplo de aplicación

Se lanza un proyectil verticalmente con velocidad inicial de 200 m/s. Calcular:

1) La altura máxima alcanzada por el proyectil.

2) El tiempo empleado en volver al suelo.



Se ubica el sistema de referencia en el suelo, y el sentido positivo del eje y es hacia arriba. Por tal motivo, la aceleración de la gravedad es negativa.

1) Cálculo del tiempo en alcanzar la altura máxima

$$v_f = v_i + (-g) * t_f$$

$$(v_f - v_i)/(-g) = t_f$$

$$(0 - 200m/s)/(-9{,}81) = t_f$$

$$t_f = 20{,}4s$$

$$\Delta y = 200m/s * 20{,}4s / \frac{1}{2} * (-9{,}81m/s^2) * (20{,}4s)^2$$

$$\Delta y \cong 2040m$$

Otra manera de resolver el ítem 1.

$$v_f^{\,2} - v_i^{\,2} = 2 * (\pm a) * \Delta y$$

$$v_f^{\,2} - v_i^{\,2} / 2 * (\pm a) = \Delta y$$

$$0^2 - (200m/s)^2 / 2 * (-9{,}81m/s^2) = \Delta y$$

$$\Delta y \cong 2040m$$

b) Ya hemos calculado en el ítem 1 el tiempo que demora en alcanzar la altura máxima. Ahora bien, el tiempo que le llevará al cuerpo tocar el piso es el siguiente:

Tiempo $_{total}$ = Tiempo $_{ascenso}$ + Tiempo $_{descenso}$

El tiempo de ascenso es el mismo que el de descenso. Entonces:

Tiempo $_{total}$ = $2*20{,}4s = 40{,}8s$

6.5.3. Tiro oblicuo

La trayectoria de una pelota de fútbol, el salto en largo de un atleta, el tiro de un proyectil desde un cañón, realiza una trayectoria *parabólica*. Este tipo de movimiento en dirección no vertical y donde actúa la fuerza gravitatoria constante se denomina *tiro oblicuo*.

Para analizar un tiro oblicuo, es necesario proyectarlo en los dos ejes, el *x* y el eje *y*, y se lo analiza como si fuera una descomposición en dos movimientos, uno sobre cada eje.

Eje X: Sobre dicho eje se considera que la resistencia que ofrece el aire por rozamiento es muy pequeña, por lo tanto se desprecia. Además, no actúa ninguna fuerza sobre el cuerpo en la dirección horizontal, motivo por el cual el cuerpo no está acelerado en esa dirección. Esta es la razón fundamental por la cual la velocidad horizontal en constante. Se puede decir, entonces, que en el eje x el cuerpo desarrolla un MRU.

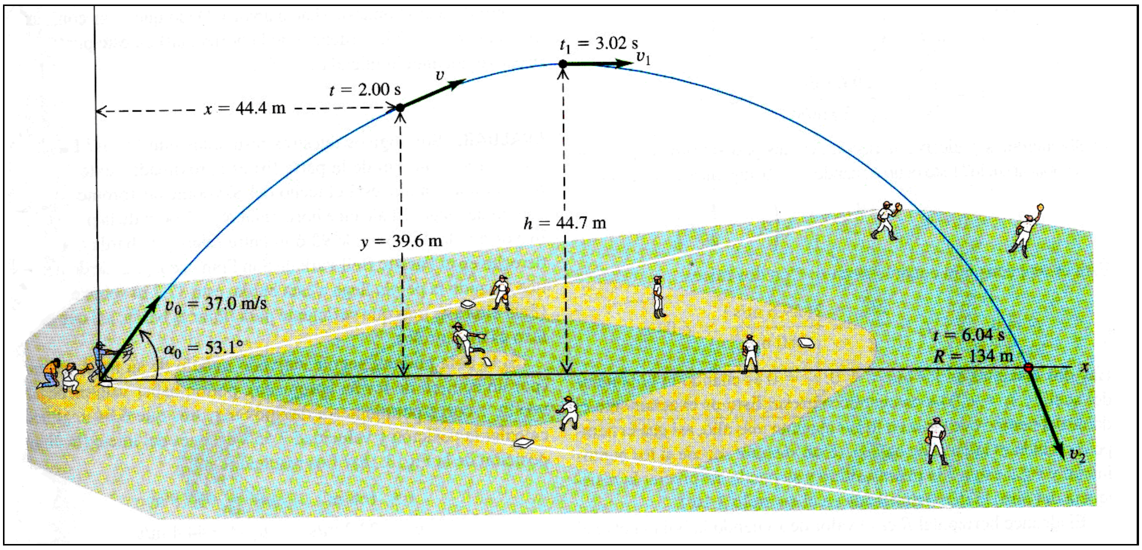
Eje Y: Sobre dicho eje sí actúa la fuerza gravitatoria (constante y hacia abajo), produciendo una variación en la velocidad, la cual pasa de un cierto valor a ser cero (v_f =0, en la altura máxima). Esto último indica que en el eje y el cuerpo desarrolla un MRUV.

¿Cómo modelar el tiro de un proyectil?

En general, cuando disparamos un proyectil, el objetivo es pegarle a un objeto. Por ello, un usuario especializado no debe disparar *probando* hasta que de en el blanco deseado. Para esto hay cálculos que se pueden hacer de antemano para conocer a qué distancia llegará el proyectil, qué altura alcanzará el mismo, cuánto tiempo le llevará impactar en el blanco deseado, etc. Es necesario conocer esta información para ahorrar tiempo y trabajar de forma correcta.

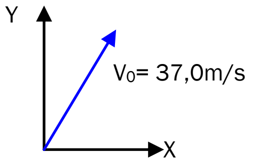
Supongamos que en un partido de fútbol, un jugador debe patear el balón desde un corner con una velocidad inicial (V_0), la cual también tiene un ángulo con respecto a la horizontal, tal como lo muestra la figura.

El ángulo es α = 53,1° y el valor del módulo de la velocidad inicial es de 37,0 m/s.



Estudio y análisis del movimiento del proyectil

a) La velocidad inicial es de 37,0 m/s y su ángulo, también llamado ángulo de lanzamiento, ángulo de disparo o ángulo de elevación, es α = 53,1°. Esto hace que la velocidad se descomponga en sus componentes vectoriales, en el eje x y en el eje y, de la siguiente manera:



El módulo del vector velocidad es 37,0 m/s, pero para conocer el valor de la misma en cada eje, recurrimos a las famosas funciones trigonométricas del ángulo α en donde ocurre lo siguiente:

$$V_{0x} = V_0 * \cos \alpha$$

$$V_{0x} = 37{,}0\ m/s * \cos 53{,}1 = \boxed{22{,}27\ m/s}$$

$$V_{0y} = V_0 * \text{sen}\ \alpha$$

$$V_{0y} = 37{,}0\ m/s * \text{sen}\ 53{,}1^{\circ} = \boxed{29{,}50\ m/s}$$

b) Para el cálculo de la altura máxima que alcanza el balón, trabajamos sobre el eje y, en el cual ocurre un MRUD. La velocidad inicial es de 37,0 m/s y cuando está en la altura máxima es cero. Las ecuaciones con las que trabajamos son:

$$v_f^{\,2} - v_i^{\,2} = 2 * (\pm a) * \Delta y \qquad \text{o}$$

$$\Delta y = v_i * t / \frac{1}{2} * (\pm a) * t^2$$

Estas dos ecuaciones nos llevan al cálculo de la altura máxima o Δy, pero conviene usar la de la izquierda, ya que no involucra al tiempo, algo que la ecuación de la derecha lo necesita para su cálculo. Pero como el mismo no es conocido, habrá que calcularlo:

$$v_f^{\,2} - v_i^{\,2} = 2 * (\pm a) * \Delta y$$

$$v_f^{\,2} - v_i^{\,2} / 2 * (\pm a) = \Delta y$$

$$0^2 - (29{,}50 m/s)^2 / 2 * (-9{,}81 m/s^2) = \Delta y$$

$$\boxed{\Delta y \cong 44{,}7 m}$$

Como se observa, estamos trabajando sobre el eje y. Por ello, la velocidad corresponde a la calculada para dicho eje. Además, la aceleración es la gravedad que constante y negativa.

c) Para el cálculo del tiempo que le lleva alcanzar la altura máxima, se pueden usar las dos ecuaciones siguientes, y el resultado será el mismo.

$$\Delta y = v_i * t / \frac{1}{2} * (\pm a) * t^2$$

$$\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f - t_i)$$

Lo calcularemos usando una de ellas:

$$\vec{a} = (v_f - v_i)/(t_f - t_i)$$

$$(v_f - v_i)/g = t_f$$

$$(0 - 22{,}50 m/s)/(-9{,}81 m/s^2) = t_f$$

$$t_f \cong 3{,}02 s$$

Este el tiempo que le lleva al balón alcanzar la altura máxima, donde la velocidad final en el eje y es cero, pero en el eje x sigue teniendo un valor (22,27m/s).

d) En cuanto al cálculo del tiempo total en que el balón está en el aire, hay que tener en cuenta que el tiempo que le lleva alcanzar la altura máxima es el mismo que le llevará para llegar al suelo nuevamente, ya que no se consideran fuerzas externas ni rozamiento con el aire.

$$t_T = t_{ascenso} + t_{descenso}$$
$$t_T = 3{,}02 s + 3{,}02 s$$

$$t_T = 6{,}04 s$$

Tiempo total en que el balón está en el aire.

e) Como el objetivo es calcular hasta donde llegará el balón (proyectil) a nivel del piso, debemos cambiar de eje. Por lo tanto, el análisis es ahora sobre el eje x y debemos trabajar con la velocidad calculada sobre dicho eje. La cual misma se trata de un MRU, es constante y no cambia a lo largo del movimiento en el eje x:

Alcance = $(x_f - x_i) = v * (t_f - t_i)$

Alcance = $(x_f - x_i) = 22{,}27 m/s * (6{,}04[s] - 0)$

Alcance $\cong 134 m$

Esto significa que el balón llegará a 134m, desde su posición inicial y en el movimiento horizontal.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, Marcelo; Finn, Edward. *Física: Vol. I: Mecánica*, Fondo Educativo Interamericano, 1970.

Altman, Silvia; Comparatone, Claudia; Kurzrok, Liliana. *Matemática/ Funciones*. Buenos Aires, Editorial Longseller, 2002.

Botto, Juan; González, Nélida; Muñoz, Juan C. *Fís Física*. Buenos Aires, Editorial tinta fresca, 2007.

Díaz Lozano, María Elina. *Elementos de Matemática*. Apuntes de matemática para las carreras de Tecnicaturas a distancia de UNL, Santa Fe, 2007.

Gettys, Edward; Séller, Frederick. J.; Skove, Malcolm. *Física Clásica y Moderna*. Madrid, McGraw-Hill Inc., 1991.

Lemarchand, Guillermo; Navas, Claudio; Negroti, Pablo; Rodriguez Usé, Ma. Gabriela; Vásquez, Stella M. *Física Activa*. Buenos Aires, Editorial Puerto de Palos, 2001.

Sears Francis; Zemansky, Mark; Young, Hugh; Freedman, Roger. *Física Universitaria*. Vol. 1, Addison Wesley Longman, 1998.

SFML Documentation, http://www.sfml-dev.org/documentation/

Stroustrup, Bjarne. The Design and Evolution of C++. Addison Wesley, Reading, MA. 1994.

Stroustrup, Bjarne. *TheC++ Programming Language*. Addison Wesley Longman, Reading, MA. 1997. 3°