1. UE S1.2 "Nombres : comment représenter le réel"

Exercice 1.

James Bond, prisonnier du Docteur No, est soumis par ce dernier à un test de logique.

Le Docteur lui présente deux boîtes, et demande à James Bond d'ouvrir une des deux boîtes. Chaque boîte est soit vide, soit contient un lingot d'or. Si Bond trouve un lingot, il sera libéré. Le Docteur No peut très bien être magnanime et avoir placé deux lingots d'or, mais il peut aussi être impitoyable et avoir laissé les deux boîtes vides.

Devant chacun des boîtes est indiqué :

Porte 1 : Les deux boîtes sont vides.

Porte 2 : Les deux boîtes sont vides.

Entre deux rires machiavéliques, le Docteur No indique : "La boîte 1 dit la vérité si elle est vide, et ment sinon. Pour la boîte 2, c'est le contraire".

Que doit faire James Bond ?

Exercice 2.

(1) Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Bijectives ? Surjectives ?

a) $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$

c) $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)$

d) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$.

(2) Pour chaque fonction, si elle ne l'est pas déjà, modifier l'ensemble de départ et/ou l'ensemble d'arrivée pour que f devienne bijective.

Exercice 3. Donner quatre fonctions f telles que $f(x) = x^2$: la première doit être injective, la deuxième doit être surjective, la troisième doit être bijective, et la dernière ne doit être ni injective ni surjective.

Exercice 4.

Dans chacun des cas suivants, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, si c'est possible.

(1) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+1 \end{cases}$

(2) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$

(3) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$

Exercice 5.

(1) Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \cos(2x) - x$.

(2) Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \cos(2x) + 2x^2$.

On pourra utiliser le fait (démontré dans un exercice posé en classe) que pour tout $x > 0$ *on a* $\sin(2x) < 2x$

(3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) < 1 - 2x^2$

Exercice 6.

(1) On a vu dans un exercice que la fonction $g : x \mapsto \sin(2x) - 2x$ était strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que l'on a $\sin(2x) < 2x$ pour tout $x > 0$.

(2) Faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) + 2x^2$
(Penser à utiliser la question 1) pour étudier le sens de variation !)

(3) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) \geq 1 - 2x^2$.

Exercice 7.
Soit f une fonction. Faire la négation des phrases suivantes :

a) Si f est croissante alors f est injective.

b) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} \quad y^2 = x$

c) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq y$

d) $\forall a \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0 \quad f(a) < \varepsilon$ et $f(a) > 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad x > n \ \Rightarrow\ f(x) > 2n$

f) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \ell \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Exercice 8.
Comment écrivez-vous avec des quantificateurs les phrases suivantes :

a) f est surjective

b) f n'est pas croissante

Exercice 9.
Soit f une fonction à valeur réelle et D son ensemble de définition.
Pouvez-vous donner une fonction f qui vérifie chacune des phrases suivantes ? Et une qui ne la vérifie pas ?

a) $\forall x \in D\ \exists y \in D \quad x \neq y$ et $f(x) \neq f(y)$

b) $\forall x \in D\ \exists y \in D \quad f(x) = -f(y)$

Exercice 10.
Soit f une fonction. Faire la négation des phrases suivantes :

a) Si f est surjective alors elle a une limite en $+\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0$ ou $x < 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$

d) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > y$

e) $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \forall \varepsilon > 0 \quad x > 0 \Rightarrow f(x) < \varepsilon$

f) $\forall \varepsilon > 0\ \forall A \in \mathbb{R} \exists x > A \quad |f(x)| < \varepsilon$ et $f(x)$

g) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \ell \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Exercice 11.
Comment écrivez-vous avec des quantificateurs les phrases suivantes :

a) f n'est pas injective

b) f est décroissante

Exercice 12.
Soit f une fonction à valeur réelle et D son ensemble de définition.
Pouvez-vous donner une fonction f qui vérifie chacune des phrases suivantes ? Et une qui ne la vérifie pas ?

a) $\forall x \in D\ \exists y \in D \quad f(x) > f(y)$

b) $\exists x \in D\ \forall y \in D \quad f(x) = f(y)^2$

Exercice 13.

(1) Calculez la dérivée de la fonction définie par $f(x) = e^x \sin(\sqrt{x})$

(2) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos(2x) \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 14.

(1) Calculez les dérivées des fonctions définies par les formules suivantes :

a) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

b) $g(x) = 2e^x \ln(1 + 2x)$

(2) Calculez les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^2 2x^3 dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 3\cos(2x) dx$

Exercice 15.
Soit f une fonction.

(1) Faites la négation des phrases suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(y)$ ou $x < 0$

b) $\exists \varepsilon > 0\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x < \varepsilon \Rightarrow f(x) = y$

(2) Ecrire avec des quantificateurs la propriété : "f n'est pas bornée".

Exercice 16.

(1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 2y = 4$

b) $y' + y = x$

(2) Donner la solution de l'équation $y' + 2y = 0$ qui vérifie $y(0) = 3$.

Exercice 17.

Calculez les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$

b) $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx$

Exercice 18.

Voici une liste d'équation différentielle. Pour chacune d'entre elles, donner son ordre puis dire si elle est linéaire. Si c'est le cas, dire si elle est homogène et/ou à coefficients constants.

a) $y' + 2y = 2$

b) $y''' + 2xy'' + 3y = 0$

c) $y' = \cos(y)$

d) $y' + \sqrt{1+x^2}y = 3x + 2$

e) $2xy^{(4)} + 3x^2y'' + 4y' = 5xy$

f) $(1 + y')^2y = 0$

g) $2x^2y'' + 4y' + 2x = 0$

Exercice 19.

(1) Calculer (sans préciser le domaine de définition) la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$

b) $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$

c) $x \mapsto \ln(1 + 2x)(1 + x^2)$

(2) Calculez les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^2 (2x + 1)x^2dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+3}dx$

c) $\displaystyle\int_0^e \ln(2x + 1)dx$

Exercice 20.
Voici deux propriétés d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Pour chacune d'entre elles, donner un exemple de fonction la vérifiant, et un exemple de fonction ne la vérifiant pas.

a) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in I \quad f(x) > y$

b) $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in I\ \exists y \in I \quad f(x) \geq f(y) + \varepsilon$.

Exercice 21.

(1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 2y = e^{3x}$

b) $y' - (2x+1)y = 0$

(2) Donner la solution de l'équation $y' + 2y = 3$ qui vérifie $y(0) = 3$.

Exercice 22.
Calculez une primitive des fonctions qui à x associe

a) $(2x+1)e^{-x}$

b) $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

Exercice 23.
Complétez le tableau suivant :

Fonction	Dérivée
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$ constant)	
$\exp(x)$	
$\ln(x)$	
$\sin(x)$	
$\cos(x)$	
$\tan(x)$	
$\dfrac{1}{x^n}$	
$\sqrt{x}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	

Exercice 24.
Soient f et g deux fonctions dérivables.

(1) La dérivée de $f \circ g$ est...

$(f \circ g)'(x) = \dots$

(2) La dérivée de $\frac{f}{g}$ est...

$(\frac{f}{g})'(x) = \dots$

(3) La dérivée de $f \times g$ est...

$(f \times g)'(x) = \dots$

(4) La formule d'intégration par parties est

$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \dots$

Exercice 25.

Complétez le tableau suivant :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(x)$						
$\cos(x)$						

Exercice 26.

Complétez :

(1) $\cos(\pi + x) =$

(2) $\cos(\pi/2 + x) =$

(3) $\cos(\pi/2 - x) =$

(4) $\cos(-x) =$

(5) $\sin(\pi + x) =$

(6) $\sin(\pi/2 + x) =$

(7) $\sin(2\pi + x) =$

(8) $\sin(-x) =$

Exercice 27.
Complétez :

(1) $\cos(a + b) =$

(2) $\sin(a + b) =$

(3) $\cos(x)^2$ (en fonction de $\cos(2x)$) =

Exercice 28.
Simplifiez si vous le pouvez (écrivez "aucune simplification possible" si vous l'expression ne peut pas etre simplifiée) :

(1) $e^a e^b =$

(2) $e^a + e^b =$

(3) $\ln(a) + \ln(b) =$

(4) $\ln(a) * \ln(b) =$

(5) $a^b =$

Exercice 29. Si f est dérivable en a, quelle est l'équation de sa tangente en a ?

Exercice 30.
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2^n}$.

(1) Donner une formule exprimant u_n en fonction de n.

(2) Calculer la limite de (u_n).

Exercice 31.
Donner sans justification la limite des suites définies par les formules suivantes :

a) $u_n = n \ln(n)$

b) $u_n = \dfrac{1 + n}{1 - n}$

c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - n^2$

Exercice 32.
Les suites définies par les formules suivantes sont-elles croissantes, décroissantes, ou aucun des deux ? Justifier.

a) $u_n = n^2 + (-1)^{n+1}$

b) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$

Exercice 33.
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

(1) Calculer les premiers termes de la suite (u_n).

(2) Deviner une formule exprimant u_n en fonction de n. La démontrer.

Exercice 34.
Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

Donner une formule exprimant u_n en fonction de n, puis calculer $\lim u_n$.

Exercice 35.

(1) On rappelle que $e \approx 2,718$. Expliquer pourquoi, pour tout $n \geq 1$, on a $(1 + \dfrac{1}{n}) \times \dfrac{1}{e} \leq 1$. Il n'y a pas besoin de faire de récurrence.

(2) En déduire que la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{e^n}{n}$ est croissante.

Exercice 36.
Donner sans justification la limite des suites suivantes :

a) $u_n = e^n/n$

b) $u_n = n^{-n}$

c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1+2n)^2$

Exercice 37.
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0$ et

$$u_{n+1} = \ln(1 + e^{u_n})$$

(1) Calculer les premiers termes de la suite (u_n).

(2) Deviner une formule exprimant u_n en fonction de n. La démontrer.

Problème 38. *Un exemple d'oscillateur amorti*

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $f : t \mapsto e^{-2t}(\cos(2t) + \sin(2t))$.

Partie I.

Soit g la fonction qui à t associe $\cos(2t) + \sin(2t)$.

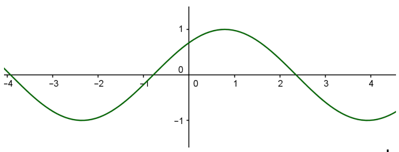
(1) Donner le domaine de définition de g. La fonction g est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

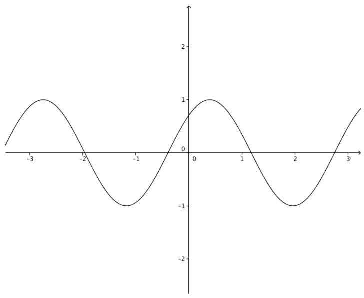
(2) Quelles sont les valeurs de $\cos(\pi/4)$ et $\sin(\pi/4)$? Calculer également $\cos(2t - \pi/4)$ et en déduire que $g(t) = \sqrt{2}\cos(2t - \pi/4)$.

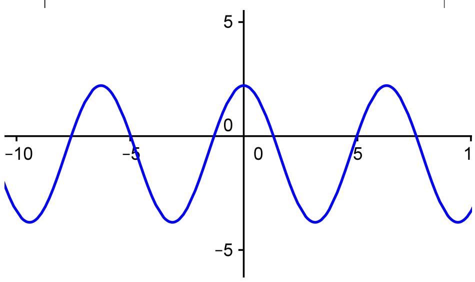
(3) Calculer la dérivée de g, et étudier son signe.

(4) Faire le tableau de variation de g sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

(5) Parmi les trois graphes suivants, lequel est celui de la fonction g ?







(6) Écrire avec des quantificateurs la propriété "g est injective", puis sa négation. La fonction g est-elle injective ?

(7) Donner un intervalle de départ et d'arrivée qui rend g bijective.

Partie II.

On rappelle que la fonction f est définie par $f(t) = e^{-2t}(\cos(2t)+\sin(2t))$. D'après la question I.2, on a également $f(t) = \sqrt{2}e^{-2t}(\cos(2t - \pi/4))$.

(1) Donner le domaine de définition de f. La fonction f est-elle périodique ?

(2) Donner la limite de f en $+\infty$.

(3) Pour quels t a-t-on $f(t) = \sqrt{2}e^{-2t}$? Et pour quels t a-t-on $f(t) = -\sqrt{2}e^{-2t}$?

(4) Démontrer que l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = -4e^{-2t}\sin(2t)$$

(5) Faire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$

(6) Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions f, ainsi que $t \mapsto -\sqrt{2}e^{-2t}$ et $t\sqrt{2} \mapsto e^{-2t}$.

(7) (Bonus) On considère un ressort horizontal attaché à l'une de ses extrémités. Lorsque l'on tire sur le ressort, celui-ci a tendance a revenir à sa position initiale (que l'on prend d'abscisse nulle) en oscillant (et parfois sans osciller).

Parmi les fonctions f et g, laquelle vous semble mieux décrire la position du ressort en fonction du temps ? Pourquoi ?

Si la position du ressort est décrit par la fonction que vous avez choisie, quelle est l'amplitude du mouvement et la fréquence des oscillations ?

Exercice 39. *10 min*

(1) Calculez :

a) $12357 + 87962$ b) 61×11 c) $912/3$

(2) Simplifiez les fractions suivantes :

a) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{4} - \frac{7}{6}$

Exercice 40. *5 min*

Trouvez tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(2x) = \frac{1}{2}$.

Exercice 41. *10 min*

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(1) $\dfrac{1-i}{1+i}$

(2) $e^{i\pi/4}$

(3) $2e^{2i\pi/3}$

(4) i^{2015}

Exercice 42. *20min*

(1) Calculez les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} 3\sin(2x)dx$

(2) Grâce à une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^e x^3\ln(x)dx$

Exercice 43. *30min*

(1)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'-2y=0$

b) $y'+\dfrac{1}{x}y=1$ (on cherchera une solution particulière de la forme $y(x)=Ax$)

(2) Trouver la solution de l'équation $y'-2y=\cos(x)$ vérifiant que $y(0)=2$.

Exercice 44.

(1) Donnez le domaine de définition et calculez la dérivée de $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

(2) En utilisant la question précédente, calculez l'intégrale

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2(x)}dx$$

(3) Donner les solutions, sur l'intervalle $]0,\pi[$, de l'équation différentielle $\sin^2(x)y'-xy=0$.

Exercice 45. *5min*
Soit f une fonction.

(1) Quelle propriété de f peut s'écrire avec la phrase suivante :

$$\forall A>0\ \exists\eta>0\forall x\ |x-2|<\eta\Rightarrow f(x)>A$$

(2) Faire la négation de la phrase ci-dessus.

Exercice 46. *40min*

On définit une fonction f par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

(1)

(a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|x| < \sqrt{1+x^2}$

(b) En déduire le domaine de définition de f.

(2)

(a) Démontrer que $x + \sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}}$.

(b) En déduire que f est impaire.

(3)

(a) Démontrer que a dérivée de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ est $\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

(b) Démontrer que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(4) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(5) Faire le tableau de variation de f.

(6) Tracer sommairement le graphe de f.

Exercice 47.

(1) Calculez :

a) $89135 + 53410$ b) 13×26 c) $406/7$

(2) Simplifiez les fractions suivantes :

a) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2/9}{3/4} \times \dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}$

Exercice 48.

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(1) $(1+2i)(5-3i)$

(2) $\dfrac{2-i}{3+4i}$

(3) $e^{i\pi/4}$

(4) $e^{5i\pi/6}$

(5) $e^{572i\pi/2}$

(6) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{1+\sqrt{3}i}$

Exercice 49.

Résoudre l'équation $\cos(2x) = \sin(x)$.

Exercice 50.
Calculez les intégrales suivantes (la dernière nécessite une intégration par parties) :

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos(2x)dx$

c) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin(x)dx$

(1)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 2y = e^x$

b) $y' + x^2y = 0$

(2) Trouver la solution de l'équation $y' - 3y = 0$ vérifiant que $y(0) = 2$.

Exercice 51.

(1) Démontrez que $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

(2) En déduire une primitive de $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

(3) Déterminez une primitive de $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

Exercice 52.

(1) Voici deux phrases écrites avec des quantificateurs se rapportant à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour chacune d'entre elles, écrire sa négation, et donner un exemple vérifiant la propriété et un ne la vérifiant pas.

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ \exists T \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = y \text{ et } f(x+T) = y$$

$$\exists A > 0 \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

(2) Ecrire en quantificateurs la définition de "la fonction f tend vers 0 en $+\infty$". Faire sa négation.

Exercice 53.
Soit f la fontion définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

(1) Donner le domaine de définition D_f de f. La fonction f est-elle paire, impaire, ou aucun des deux ?

(2)

(a) Expliquer pourquoi on a $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$ (et en particulier vérifier que cette expression est bien définie pour $x \in D_f$..

(b) En déduire que l'on a

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(3) Donnez les limites de f au bord du domaine de définition.

(4) Faites le tableau de variation de f et tracez son graphe.

(5) En utilisant les questions précédentes, résoudre sur $]-1,1[$ l'équation $(1-x^2)y' - y = 0$

(6) Bonus : quelles sont les solutions de l'équation $(1-x^2)y' - y = 0$ sur $]1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1[$?

(7) On pose $y_0(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

(a) Calculer la dérivée de y_0.

(b) Démontrer que y_0 est une solution de l'équation

$$y' - \frac{1}{1-x^2}y = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

(c) En déduire toutes les solutions sur $]-1,1[$ de l'équation

$$y' - \frac{1}{1-x^2}y = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Exercice 54. On veut transmettre un signal élémentaire (0 ou 1) par un circuit électrique. Pour cela, on mesure une tension électrique à l'aide d'un récepteur. Si la tension dépasse strictement un certain seuil, le récepteur renvoie le signal 1. Si la tension est en dessous du seuil, le récepteur renvoie 0.

On envoie vers ce récepteur une tension qui varie en fonction du temps.

(1) On commence par envoyer une tension de la forme

$$U = U_0 \cos(\omega t - \pi/6)$$

où $U_0 = 1V$ et $\omega = 3\text{rad.s}^{-1}$. On suppose que le seuil du récepteur est réglé à $0,5V$.

(a) Dans chacun des cas suivants, dire si le récepteur est activé :

— pour $t = \pi/3$ s
— pour $t = 0$ s
— pour $t = \pi/6$ s
— pour $t = \pi/2$ s
— pour $t = 2\pi/9$ s

(b) Résoudre l'équation $\cos(3t - \pi/6) = \frac{1}{2}$, puis l'inéquation $\cos(3t - \pi/6) > \frac{1}{2}$.

(c) Pour quels temps le récepteur est-il activé ?

(2) Dans cette question, on considère que le signal (en V) est donné par la fonction $f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

(a) Donner le domaine de définition D_f de f. La fonction f est-elle paire ou impaire ?

(b) Montrer que l'on a, pour tout $t \in D_f$,

$$f'(t) = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}$$

(c) Expliquer pourquoi l'on a, $\forall t \in D_f,\ f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(d) Faire le tableau de variation de f.

(e) Calculer $f(\ln(3))$, et simplifier le résultat autant que possible.

(f) On fixe cette fois le seuil du récepteur à $0,8$ V. Pour quels temps est-il activé ?

(3) Dans cette question, le seuil du récepteur est fixé à un nombre $\alpha \in [0, 1]$, et le signal que l'on envoie est donné par une fonction f arbitraire.

(a) Voici une propriété écrite avec des quantificateurs :

$$\exists T_0\ \forall t \in \mathbb{R} \quad t > T_0 \Rightarrow f(t) > \alpha$$

Si cette propriété est vraie, quelle est la conséquence pour le récepteur ?

(b) Pouvez-vous écrire la négation de la propriété ci-dessus ? Donnez un exemple de fonction vérifiant cette propriété, et un autre ne la vérifiant pas.

Exercice 55 (♡).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nier les propositions suivantes :

a) $0 \leq x \leq 1$

b) $x = 0$ ou ($x \geq 0$ et $x^2 = 1$)

c) $\forall y \in \mathbb{R}$, $xy \neq 0$ ou $x = 0$ ou $y = 0$.

Dans chaque cas, sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 56 (♡).

Trouver les couples de réels (x, y) tels que

$$\begin{cases} (x-2)(y-3) = 0 \\ (x-1)(y-2) = 0 \end{cases}$$

Exercice 57 (♡).

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

(1) Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$.
(2) Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$.
(3) Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$.
(4) Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \leq 1$.

Exercice 58 (♡).

(1) Soit p la phrase "n est multiple de 2" et q la phrase "n est multiple de 3". Quels sont les entiers n vérifiant "p et q" ? Et ceux vérifiant "p ou q ?

(2) Même question, où cette fois p est la phrase "n est un multiple de 6" et q est la phrase "n est un multiple de 4".

Exercice 59 (♡).

(1) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. Si (pour tout $\varepsilon > 0$, $|a| < \varepsilon$) alors $a = 0$.
2. (Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|a| \geq \varepsilon$) ou $a = 0$.
3. Si $a \neq 0$ alors (il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|a| \geq \varepsilon$).

(2) Démontrer la troisième proposition, et en déduire les autres.

Exercice 60 (♡).

(1) Nier les implications suivantes :

a) Si $x \geq 0$ alors $x^2 + 1 \geq 0$.
b) Si $a \neq 2x$ alors $a > 2x$.
c) $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$.
d) $sin(x) = 1/2 \Rightarrow x = \pi/3$
e) $f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$
f) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
g) $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$
h) $x > 2 \Rightarrow e^x > 2$
i) Si $x > y$ alors $f(x) > f(y)$
j) Si $f(x) = f(y)$ alors $x \neq y$
k) Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$.

(2) Dans chaque cas, écrire la réciproque.

(3) Ecrire la négation des réciproques que vous venez d'écrire.

Exercice 61 (♡).
Trouver les couples de réels (x, y) tels que

$$\begin{cases} (x-3)(y-4) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 62 (♡).
Vrai ou faux (x et y sont des réels, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ?

a) $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

b) $x > 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}$

c) $x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

d) $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Exercice 63 (♡).

(1) Soit la proposition "Tous les parapluies sont bleus" Quelle est la négation de cette proposition ?

(2) Soit la proposition "Il existe un parapluie bleu" Quelle est la négation de cette proposition ?

(3) Soit la proposition "Il existe une âme soeur pour chacun d'entre nous" Quelle est la négation de cette proposition ?

Exercice 64 (♡).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

(1) Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(i) f est croissante

(ii) f est impaire

(iii) f est constante

(iv) f est périodique de période 2π

(v) f n'est ni croissante ni décroissante

(vi) f est injective

(vii) f est surjective

(2) Écrire leur négation.

Exercice 65 (♣). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Voici plusieurs propriétés possibles de la fonction f. Quelles sont, en langage courant, leur signification ? Dans chaque cas, pouvez-vous trouver une fonction f qui vérifie cette propriété ? Et une autre qui ne la vérifie pas ?

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ f(x) < f(y)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists T \in \mathbb{R}\ \ f(x) = f(x+T)$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists T \in \mathbb{R}^*\ \ f(x) = f(x+T)$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ f(x) = y$

(v) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ f(x) = y$

Exercice 66 (♣).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans chaque cas, justifier.

(i) Si f est impaire alors elle est croissante.

(ii) Si f est paire alors elle n'est ni croissante ni décroissante.

(iii) Si f tend vers 0 en $+\infty$ alors elle est décroissante.

(iv) Si $f(1) = f(-1)$ alors f est paire.

(v) Si f est périodique alors f n'est ni paire ni impaire.

(vi) Si f est périodique alors f est soit paire soit impaire.

(vii) Si f est impaire alors $f(0) = 0$.

(viii) Si f est impaire alors f est injective.

(ix) Si f est paire alors f n'est pas injective.

(x) Supposons que f soit un polynôme de degré 3 [1] Si f est paire alors il n'y a pas de terme en x.

(xi) Supposons que f soit un polynôme. Si f est impaire alors il n'y a pas de terme en x^2.

Exercice 67 (♡).
On considère la phrase "Pour tout nombre réel x, il existe un entier naturel N tel que $N > x$.

(1) Traduire cette phrase à l'aide de quantificateurs.

(2) Écrire sa négation en français et avec des quantificateurs.

Exercice 68 (♡). Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, écrire leur négation, et la démontrer.

a) $\exists x \in \mathbb{N} \;\; x^2 > 7$

b) $\forall x \in \mathbb{N} \;\; x^2 > 7$

c) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \;\; y > x^2$

d) $\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N} \;\; y > x^2$.

Exercice 69 (♣♣). Soit f_n et f des fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On considère les propriétés :

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\; n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

et :

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\; n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

(1) Écrire la négation de chacune de ces propriétés.

(2) Quelle est la signification de ces propriétés ? Trouver un exemple de fonctions vérifiant la propriété (2) mais pas la (1).

On pourra prendre $f_n(x) = x^n$ *et* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

[1] C'est-à-dire que f peut s'écrire $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exercice 70 (♡).

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Que signifient les assertions suivantes ? Dans chaque cas, donner un exemple de fonction vérifiant la propriété, et un exemple ne la vérifiant pas.

(1) $\forall A > 0 \; \exists B > 0 \; \forall x > B \quad f(x) > A$
(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > 0 \; \forall x > A \quad |f(x)| < \varepsilon.$
(3) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > 0 \; \forall x > A \quad |f(x) - 1| < \varepsilon.$
(4) $\exists l \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists A > 0 \; \forall x > A \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$
(5) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < \eta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon.$
(6) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| < \eta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon.$
(7) *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}. \forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
(8) $\forall x_0 \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Exercice 71 (♣). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Démontrer rigoureusement que la fonction g définie par $g(x) = f(2x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.*

Exercice 72 (♣).

Démontrer rigoureusement que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 73 (♣). *Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. Démontrer, en utilisant* uniquement *la définition des limites, que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.*

Exercice 74 (♣). *Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$. Démontrer rigoureusement que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = 1$$

Exercice 75 (♣♣).

L'objectif de cet exercice est de démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt = 0$.

(1) *Etudier le sens de variation de $t \mapsto \sin(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon \in]0, \pi/2[$ tel que $0 < t < \alpha_\varepsilon \Rightarrow 0 < \sin(t) < 1 - \varepsilon$.*

(2) *Démontrer que $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_\varepsilon = \pi/2$*

(3) *Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sin^n(t)$, pour $t \in]0, \alpha_\varepsilon[$. Expliquer pourquoi $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\alpha_\varepsilon} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.*

(4) *Conclure.*

Exercice 76 (♡). *Datation au carbone 14*

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Cela signifie qu'un atome de carbone 14 a une certaine probabilité de se désintégrer à chaque *instant : il émet un rayonnement puis se transforme en noyau de carbone non radioactif.*

Considérons un objet contenant du carbone, et notons $y(t)$ *la proportion d'atomes de carbone 14 qu'il contient, en fonction du temps* t*. Á chaque instant, la probabilité qu'un atome donné se désintègre est la même. Cela signifie que le nombre d'atomes qui vont se désintégrer à un moment donné est proportionnel au nombre d'atome total, c'est-à-dire à* y*.*

Autrement dit, la variation de y *est proportionnelle à* y *: autrement dit, on a*

$$y'(t) = ky(t),$$

pour une constante k*.*

(Ceci est une approximation : il n'y a pas moyen de savoir exactement combien d'atomes se désintègrent, mais la loi ci-dessus sera vérifiée en moyenne)

(1) Pouvez-vous trouver une solution de cette équation différentielle ? Si non, voici une indication : essayez de diviser les deux membres par y*. Vous obtenez* $\frac{y'}{y} = k$*. Vous reconnaissez à gauche la formule d'une certaine dérivée...*

(2) Si vous ne l'avez pas deviné, les solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{kt}$*.* C *est une constante (sans dimension) qui intervient lors de l'intégration.*

La demi-vie du carbone 14 est d'environ 5700 ans. Cela signifie que la moitié des atomes de carbones seront désintégrés en 5700 ans. Que vaut k ?

(3) Le principe de la datation au carbone 14 est le suivant. On considère que la proportion de carbone 14 dans l'atmosphère reste constante au cours du temps, égale à 10^{-12}*. Tant qu'il respire, un être vivant aura donc la même proportion de carbone 14 dans ses cellules. Mais ensuite, il n'a plus d'échange avec l'extérieur, et par conséquent la proportion d'atomes de carbone 14 qu'il contient va décroître avec le temps.*

On effectue une mesure sur un arbre mort ; on trouve une proportion de carbone 14 égale à 4.10^{-13}*.*

(a) On prend le temps de la mesure pour $t = 0$*. Que vaut alors la constante* C *?*

(b) Combien de temps s'est-il écoulé depuis la mort de l'arbre ?

Problème 77. *Modélisation de populations*

On veut étudier la façon dont une population varie au cours du temps (dynamique de population). Ces modèles peuvent s'appliquer dans beaucoup de cas concrets. Par exemple, on peut imaginer une culture de bactéries, et se demander comment la population évolue en fonction du temps. On peut aussi étudier une population d'animaux, ou le nombre d'humains sur Terre, etc.

Dans ce qui suit, on note le temps t*, et on note* $N(t)$ *la taille de notre population à l'instant* t*.*

Partie I. Un modèle minimal

Si N est le nombre d'habitants dans une nouvelle région (ou de cellules qui se divisent dans une culture), le modèle le plus simple pour décrire l'évolution de la population est donné par l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = \alpha N(t) \tag{3}$$

α représente le taux d'accroissement de la population. Cette équation traduit le fait que plus il y a de monde, plus il y a de naissances et de morts (s'il y a deux fois plus de monde, on s'attend à observer deux fois plus de naissances et deux fois plus de morts), donc la variation dans la population sera deux fois plus grande.

On rappelle/vous donne la solution de cette équation différentielle :

$$N(t) = C\exp(\alpha t),$$

où C est une constante définie par les conditions initiales.

Faites l'étude de $N(t)$. On distinguera les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

Remarque 1. Ce modèle de population est dû à T. Malthus (1766-1834), économiste anglais. Celui-ci prédisant une croissance exponentielle de la population, jusqu'à ce qu'elle manque de ressources, Malthus prônait des restrictions démographiques importantes.

Partie II. Le modèle de Verhulst

Le modèle simple marche bien quand les ressources semblent illimitées. Lorsque la population croît tellement qu'elle commence à épuiser ses ressources, on observe un ralentissement de la croissance de la population.

Pour modéliser ce comportement, on corrige l'équation précédente en la transformant en

$$\tilde{N}'(t) = \alpha(\beta - \tilde{N}(t))\tilde{N}(t), \tag{4}$$

où α et β sont des constantes positives.

(1) Pour quelle population est-on dans un régime stationnaire ? Autrement dit, quelle est la fonction N solution de l'équation 4 qui vérifie $\tilde{N}'(t) = 0$ pour tout t ?

Vous apprendrez bientôt à résoudre de telles équations différentielles. Pour le moment, voici la solution :

$$\tilde{N}(t) = \frac{\beta}{1 + C\exp(-\alpha\beta t)}, \tag{5}$$

où C est une constante fixée par les conditions initiales.

(2) Calculez la dérivée de $\tilde{N}$, en fonction de C, α et β.

(3) Vérifiez que $\tilde{N}$ est bien une solution de l'équation.

(4) On suppose $C > 0$.

(a) Faites l'étude de la fonction : domaine de définition, sens de variation, tableau de variation.

On calculera en particulier la limite en $+\infty$, en fonction de α et β.

(b) Faites un tracé rapide de la fonction $\tilde{N}$.

(c) Cela vous semble-t-il conforme à ce qu'on attend du modèle ?

(5) Et si C est négative, que se passe-t-il ? Est-ce réaliste ?

(6)

Remarque 2. Le modèle que nous venons d'étudier est dû à Pierre François Verhulst (1804-1849), mathématicien belge, qui le proposa pour corriger et améliorer le modèle de Malthus

Exercice 78 (♡♡). *Placer dans le plan les points dont les affixes sont :*

(1) $2i$

(2) -1

(3) $1+i$

(4) $2+3i$

(5) $3-5i$

(6) $\sqrt{3}/2+i/2$

(7) $\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$

(8) $i(i+1)$

Exercice 79 (♡). *Calculer les nombres complexes suivants :*

(1) $(1+i)(2-i)$

(2) $2+i+3-5i$

(3) $(2-i)(3-i)+4i$

(4) $(1+i)^2$

(5) $(\sqrt{3}/2+i/2)^3$

Exercice 80 (♡). *Dérivez dans chaque cas la fonction qui à x associe :*

(1) $x^n+\sin(x)$

(2) $2\cos(x)e^x$

(3) $\ln(x)^2+2$

(4) e^{3x+2}

(5) $\tan(x)\left(=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$

(6) $\sin^2(x)+\cos^2(x)$

(7) $(2x+3)^3$

(8) $3x^6+4x^3+2x+12$

(9) $\sin(2x+1)$

(10) $\ln(3x)$

(11) $\sqrt{x^2+x+1}$

(12) xe^{-x}

(13) $\dfrac{4x+2}{5x^2+1}$

(14) $\dfrac{\ln(x)}{x}$

(15) $x\ln(x)-x$

Exercice 81 (). *Dérivez les fonctions f suivantes (on rappelle que $3^x = e^{x\ln(3)}$) :*

(1) $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1/2,0\}$, $x\mapsto \dfrac{e^x\ln(x)}{x^2+2x^3}$, $f'(x)=\dfrac{e^x((2x^2-5x-2)\ln(x)+2x+1)}{x^3(2x+1)^2}$

(2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\mapsto 3^x\sin x$, $f'(x)=3^x(\cos(x)+\ln(3)\sin(x))$

(3) $\forall x\in[0,+\infty[\backslash\{1\}$, $x\mapsto\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$, $f'(x)=\dfrac{x^2-(x^2+1)\ln(x)-1}{x^2-1}^2$.

Exercice 82 (). *Calculez les dérivées des fonctions définies par :*

(a) $f(x) = \dfrac{4\cos^2(x) - 3}{2\cos(x)}$, $f'(x) = -2\sin(x) - \dfrac{3}{2}\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$

(b) $f(x) = (x^4 - x^2 + 5)^4$, $f'(x) = 8x(2x^2 - 1)(x^4 - x^2 + 5)^3$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2(x-3)^{3/2}}$

(d) $f(x) = (\ln(x))^3$, $f'(x) = 3\dfrac{\ln^2(x)}{x}$

(e) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$, $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 2)$

(f) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 4x - 1}{x^2 + 2x + 5}$, $f'(x) = -2\dfrac{5x^2 + 14x - 11)}{x^2 + 2x + 5}^2$

(g) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x+1}$, $f'(x) = \dfrac{-3x - 1}{2\sqrt{x+1}}$

(h) $f(x) = \ln(\dfrac{2x-1}{x-3})$, $f'(x) = -\dfrac{5}{2x^2 - 7x + 3}$

(i) $f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 + 1}$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x\sqrt{\ln^2(x) + 1}}$

(j) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$, $f'(x) = \dfrac{(2e^{2x}}{e^{2x} - 1}$

(k) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 83 (♡). *Calculez les dérivées des fonctions qui à x associent :*

(a) $\cos(\omega x)$

(b) $e^{k^2 x}$

(c) $\dfrac{yx^2}{2 + nxy}$

(d) $\dfrac{1 + 2t}{x + Ce^{tx}}$

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' + 2y = 0$

(2) $2y' - 4y = 1$

(3) $3y' + 2y = 4$

(4) $5y' + 2y = -4$

(5) $y' - 4y = \dfrac{1}{2}$

Exercice 84 (♡).

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' - 2y = e^x$

(2) $y' + 2y = e^{-2x}$

(3) $y' - 5y = 2x + 1$

(4) $y' - y = 2\cos(x) + \sin(2x)$

(5) $2y' - y = x^2$

(6) $y'' - 2y' = 1$

Exercice 85 (♡).
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' - xy = 0$
(2) $y' - x^2y = 0$
(3) $2y' - e^x y = 0$
(4) $y' + \cos(2x)y = 0$
(5) $y' - \ln(x)y = 0.$

Exercice 86 (♡♡). *Factorisez :*

(1) $3x + 3 - (x+1)^2$
(2) $(2x+1)^2 - (4x+3)^2$
(3) $x^5 - 5x^4 + 4x^3$
(4) *(♣)* $x^3 - 1$

Exercice 87 (♡♡). *Développez et simplifiez lorsque nécessaire :*

(1) $(4x^2 + 2x + 3)(3x + 2)$
(2) $(2x^3 + 4x^2 + 3x)(2x + 3) + 4x^3$
(3) $(2a + 4b + c)(a + b + c)$
(4) $(2x + 3y)(3x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x + 1) + 3y^2$

Exercice 88 (♡). *Réduisez au même dénominateur :*

(1) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2x+1}$
(2) $\dfrac{a}{2x^2+3} + \dfrac{b}{4a^2+x}$
(3) $\dfrac{x}{4x^2+2x+2} + \dfrac{1}{2x+3}$
(4) $\dfrac{2a+b}{4a^2+2a+3ab+1} + \dfrac{4b}{5a+2b}$

Exercice 89 (♣).
Dans chaque cas, trouvez des constantes a et b pour que les égalités suivantes soient valides.

(1) $\dfrac{1}{(2x+1)(x+1)} = \dfrac{a}{2x+1} + \dfrac{b}{x+1}$
(2) $\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

Exercice 90 (♡♡). *Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (lorsque cela a un sens) dans chacun des cas suivants :*

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$
(2) $f(x) = -4x^4 + 5x^3 + 2x + 1$
(3) $f(x) = 5x + 3 + 4x^7$
(4) $f(x) = \dfrac{5x^3 + 2x + 1}{1 + 2x + 3x^2}$
(5) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^4 + x + 1}$
(6) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+3}$
(7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2+2}$

Exercice 91 (♡). *Déterminer les limites suivantes :*

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{e^x}{x-1}$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} e^{\frac{1}{x-2}}$,

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$,

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$,

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 92 *(♡). Calculez les limites des fonctions suivantes en* 0 *et en* $+\infty$

(1) $x-\ln(x)$

(2) $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

(3) $x\sqrt{1+\ln(x)^2}$

(4) $\dfrac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1}$

Exercice 93 *(♡). Calculez les limites des fonctions suivantes en* $+\infty$ *et* $-\infty$ *:*

(1) $(2x+1)e^x$

(2) xe^{-x}

(3) $x^2e^{-x}-x$

(4) $\dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

Exercice 94 *(♡♡). Simplifier lorsque c'est possible les expressions suivantes :*

$$a_0 = e^{2\ln 2}, \qquad a_1 = e^{-\ln 3}, \qquad a_2 = \ln\left(\frac{1}{e^6}\right), \qquad a_3 = \sqrt{(e^x)^2}, \qquad a_4 = \sqrt{e^{(x^2)}}.$$

$$a_5 = e^{1+\ln 2};\ a_6 = \ln\left(e^3\sqrt{5}\right) - \frac{\ln 5}{2};\ a_7 = \frac{\sqrt[3]{3^2}\,\sqrt[4]{27^7}\,\sqrt[5]{81^8}}{\sqrt[5]{9^2}\,\sqrt[2]{243^5}\,\sqrt[60]{3}}.$$

Exercice 95 *(♡). Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

(1) $e^{\frac{5x+3}{x-4}} = \dfrac{1}{e}$,

(2) $\dfrac{e^x-2}{e^x-1} = 2$,

(3) $\dfrac{e^x+4}{2e^x+1} = 5$.

(4) $\sqrt{e^x+3} = 2$,

Exercice 96 *(♡). Déterminer la limite de* f *en* $-\infty$ *et en* $+\infty$ *dans chacun des cas suivants :*

(1) $f(x) = e^{2x}-e^x$,

(2) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}$,

(3) $f(x) = e^{x^2}-e^{x+1}$.

Exercice 97 *(♡). Déterminer les limites suivantes :*

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{e^x}{x-1}$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} e^{\frac{1}{x-2}}$,

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$,

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 98 (♡). *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

(1) $5^{x+3} = 25$,

(2) $2^{3-x} = 5 \times 2^{5-2x}$,

(3) $3^{2x+1} = 2^{x+2}$,

(4) $7^x + 7^{x-2} = 3^{x+1} + 3^{x-1}$.

(5) $x^{\frac{3}{2}} = 8$,

(6) $x^{\frac{2}{3}} = 25$,

(7) $3x^{\frac{1}{4}} = 2x^{\frac{1}{2}}$,

(8) $3x\sqrt{x} = 81$.

Exercice 99 (). *Calculer une primitive des fonctions définies par les formules suivantes.*

(1) $2x^{27} + x^3 + 4x + 5$,

(2) $\sin(t + \pi/5)$,

(3) $1 - 2e^t$,

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}$,

(5) $\tan(x)(= \sin(x)/\cos(x))$

(6) $\dfrac{x^2+1}{(x^3/3+x+1)^3}$,

(7) $x^2\exp(x^3)$,

(8) $\dfrac{e^x}{e^x+4}$,

(9) $\cos(5x+3)$,

(10) $\dfrac{1}{x^n}$,

(11) $\dfrac{1}{\tan(x)}(= \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)})$

(12) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$

(13) $f(x) = e^{-x} + 3e^{2x} + e^{-3x}$

Exercice 100 (♡).
Calculez les intégrales suivantes.

(1) $\displaystyle\int_0^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(3x)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^3 (\frac{x^3}{5} + 4x^2 + 6)dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

Exercice 101 (♡). *En faisant une intégration par partie, calculez :*

(1) $\displaystyle\int x\sin(x)dx$ *(on posera* $u'(x) = \sin(x)$ *et* $v(x) = x$*)*

(2) $\displaystyle\int t\exp(t)dt$ *(on posera* $u'(t) = \exp(t)$ *et* $v(t) = t$

(3) $\displaystyle\int \ln(x)dx$ *(on posera* $u'(x) = 1$ *et* $v(x) = \ln(x)$*)*

Exercice 102 (). *Calculez (par une méthode directe) une primitive des fonctions qui à x associent :*

(1) $\dfrac{3x^2}{4x^3+1}$,

(2) $\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$,

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$,

(4) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$,

(5) $x\cos(3x^2)$,

(6) $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$,

(7) $f(x)=\dfrac{1}{(3x+5)^3}$

(8) $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-4)^2}$

(9) $f(x)=(x^2-4x+5)^4(x-2)$

(10) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

(11) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$

(12) $f(x)=\sin(5x)-2\cos(3x)+4\sin(2x)$

(13) $f(x)=\sin(x)\cos(x)^3$

(14) $f(x)=(2+\sin(x))^2\cos(x)$

(15) $f(x)=\cos(x)^2$

(16) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

(17) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(18) $f(x)=xe^{x^2-1}$

Exercice 103 (♣). *Calculez les intégrales suivantes (on pourra faire une intégration par parties bien choisie) :*

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\exp(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2dx$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \sin(t)\exp(t))dt.$

Exercice 104 (♣). *Calculez une primitive des fonctions qui à x associent :*

(1) $x\cos(x)$ *(dériver x et intégrer* $\cos$*)*

(2) $x^2\sin(x)$ *(se ramener à l'exemple précédent)*

(3) x^2e^x *(se ramener à xe^x),*

(4) $\dfrac{x}{e^x}$

(5) $(2x+1)e^x$,

(6) $x\ln(x)$

(7) $x^2\ln(x)$

Exercice 105 (♡). *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :*

a) $2x^2+3x+1=0$

b) $4x^2-3x+5=0$

c) $x^2-8x+2=0$

d) $3x^2-5x-1=0$

Exercice 106 ($\heartsuit$).

(1) Factoriser lorsque c'est possible les expressions suivantes :

a) $2x^2 + 4x + 1$

b) $x^2 - 2x - 2$

c) $-4x^2 + 5x - 2$

d) $-x^2 + 3x + 1$

(2) Etudier le signe de chacune des expressions.

Exercice 107 ($\heartsuit$). *Exprimer en fonction de* $\cos x$*,* $\sin x$ *et* $\tan x$ *et donner le domaine de validité :*

$$\begin{array}{lll} \cos(x-y)\,, & \sin(x-y)\,, & \tan(x-y)\,, \\ \cos(x+\pi)\,, & \sin(x+\pi)\,, & \tan(x+\pi)\,. \\ \cos(\frac{\pi}{2}-x)\,, & \sin(\frac{\pi}{2}-x)\,, & \tan(\frac{\pi}{2}-x)\,. \end{array}$$

Exprimer en fonction de $\cos(x \pm y)$ *et* $\sin(x \pm y)$ *et donner le domaine de validité :*

$$\cos x \cos y\,, \qquad \sin x \sin y\,, \qquad \cos x \sin y\,.$$

Exercice 108 ($\heartsuit\heartsuit$). *Simplifier les expressions suivantes :*

(1) $\sin(\pi/2 - x)$

(2) $\sin(x + 6\pi)$

(3) $\cos(x + \pi/2)$

(4) $\cos(\frac{-37\pi}{2})$

(5) $\sin(\frac{-17\pi}{4})$

Exercice 109 ($\heartsuit$). *Sachant que* $x \in]0, \pi/2[$ *et que* $\cos x = 0,3$*, déterminer* $\sin(x)$ *et* $\tan(x)$*.*

Exercice 110 ($\heartsuit$). *Résoudre les équations suivantes, pour* $x \in \mathbb{R}$ *:*

(1) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}/2,$

(2) $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \pi/6),$

(3) $\cos(3x) = \sin(2x)$

Exercice 111 ($\heartsuit$). *(1) Linéariser* $\cos^4(x)$ *(c'est-à-dire, exprimer comme une somme de termes en* $\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x)$*, etc.).*

(2) Développer $\cos(3x)$ *: exprimer* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$ *uniquement. Faire de même avec* $\cos(4x)$*.*

Exercice 112 ($\heartsuit\heartsuit$).

(1) Dans le plan, muni d'une base de votre choix, tracer les vecteurs $(1, 2)$*,* $(3, 5)$*,* $(2, -2)$*,* $(6, -7)$*.*

(2) Faire la somme des deux premiers vecteurs, puis des trois premiers, puis des quatre vecteurs, de deux manières (algébrique et géométrique).

Exercice 113 (♡).
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans les situations suivantes :

a) $\vec{u}$ fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe des abscisses, et a pour norme 2

b) $\vec{u}$ fait un angle de $\pi/3$ avec l'axe des abscisses, et a pour norme 1

c) $\vec{u}$ fait un angle de $\pi/3$ avec l'axe des ordonnées, et a pour norme $\sqrt{3}$

Exercice 114 (♡♡).
Calculer le produit scalaire $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a) $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (3, 4)$

b) $\vec{u} = (3, -1)$ et $\vec{v} = (-5, 0)$

c) $\vec{u} = (5, 2)$ et $\vec{v} = (-\pi, \sqrt{2})$

d) $\vec{u} = (0, 1)$ et $\vec{v}$ est un vecteur unitaire faisant un angle $\pi/3$ avec l'axe des abscisses

e) $\vec{u}$ est un vecteur unitaire et $\vec{v} = 3\vec{u}$.

Exercice 115 (♡).
Déterminer un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u} = (1, 0)$

b) $\vec{u} = (1, 1)$

c) $\vec{u} = (2, 3)$

d) $\vec{u} = (3, -1)$

e) $\vec{u} = (5, 2)$

Exercice 116 (♣). *Soit A, B, C trois points du plan.*

(1) Démontrer que
$$\langle \vec{BC}, \vec{BC} \rangle = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle - 2\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle + \langle \vec{AC}, \vec{AC} \rangle$$

(2) En déduire la formule d'Al-Kashi *: en notant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a*
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle BAC)$$

Exercice 117 (♡).

(1) Ecrivez (sans tricher !) les symboles de l'alphabet grec sur votre feuille : dans l'ordre,
alpha,bêta,gamma,delta,epsilon,zêta,êta,thêta, iota,kappa, lambda,mu,nu,xi,omicron,pi,rhô,sigma,tau,upsilon,phi,khi, psi, oméga

(2) Cachez l'énoncé, et lisez ce que vous avez écrit sur votre feuille.

Exercice 118 ($\heartsuit\heartsuit$).
Dans les expressions suivantes, remplacer la variable x par $2x$, puis par $\cos(x)$, *puis par* y^2.

a) $3x^2 + 3 + e^x$
b) $\cos(x) + \sin(x)$
c) $\dfrac{3x+2}{4x+3}$
d) $\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x+\ln(x)}{x^2}$

Exercice 119 ($\heartsuit$). *Simplifier lorsque c'est possible les expressions suivantes :*

a) $e^{2\ln 2}$
b) $e^{-\ln 3}$
c) $\ln\left(\dfrac{1}{e^6}\right)$
d) $\sqrt{(e^x)^2}$
e) $\sqrt{e^{(x^2)}}$
f) $e^{1+\ln 2}$
g) $\ln\left(e^3\sqrt{5}\right) - \dfrac{\ln 5}{2}$
h) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}\,\sqrt[4]{27^7}\,\sqrt[5]{81^8}}{\sqrt[5]{9^2}\,\sqrt[2]{243^5}\,\sqrt[60]{3}}$.

Exercice 120 ($\heartsuit$). *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

(1) $e^{\frac{5x+3}{x-4}} = \dfrac{1}{e}$,
(2) $\dfrac{e^x-2}{e^x-1} = 2$,
(3) $\dfrac{e^x+4}{2e^x+1} = 5$.
(4) $\sqrt{e^x+3} = 2$,

Exercice 121 ($\heartsuit$). *Dérivez dans chaque cas la fonction qui à x associe :*

(1) $x^n + \sin(x)$
(2) $2\cos(x)e^x$
(3) $\ln(x)^2 + 2$
(4) e^{3x+2}
(5) $\tan(x)\left(= \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$
(6) $\sin^2(x) + \cos^2(x)$
(7) $(2x+3)^3$
(8) $3x^6 + 4x^3 + 2x + 12$
(9) $\sin(2x+1)$
(10) $\ln(3x)$
(11) $\sqrt{x^2+x+1}$
(12) xe^{-x}
(13) $\dfrac{4x+2}{5x^2+1}$
(14) $\dfrac{\ln(x)}{x}$
(15) $x\ln(x) - x$

Exercice 122 ($\heartsuit$). *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

(1) $5^{x+3} = 25$,
(2) $2^{3-x} = 5 \times 2^{5-2x}$,
(3) $3^{2x+1} = 2^{x+2}$,
(4) $7^x + 7^{x-2} = 3^{x+1} + 3^{x-1}$.
(5) $x^{\frac{3}{2}} = 8$,
(6) $x^{\frac{2}{3}} = 25$,
(7) $3x^{\frac{1}{4}} = 2x^{\frac{1}{2}}$,
(8) $3x\sqrt{x} = 81$.

Exercice 123 ($\heartsuit\heartsuit$). *Factorisez :*

(1) $3x+3-(x+1)^2$

(2) $(2x+1)^2-(4x+3)^2$

(3) $x^5-5x^4+4x^3$

(4) *(♣)* x^3-1

Exercice 124 (♡♡). *Développez et simplifiez lorsque nécessaire :*

(1) $(4x^2+2x+3)(3x+2)$

(2) $(2x^3+4x^2+3x)(2x+3)+4x^3$

(3) $(2a+4b+c)(a+b+c)$

(4) $(2x+3y)(3x^2+2xy+4y^2+2x+1)+3y^2$

Exercice 125 (♡). *Réduisez au même dénominateur :*

(1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}$

(2) $\dfrac{a}{2x^2+3}+\dfrac{b}{4a^2+x}$

(3) $\dfrac{x}{4x^2+2x+2}+\dfrac{1}{2x+3}$

(4) $\dfrac{2a+b}{4a^2+2a+3ab+1}+\dfrac{4b}{5a+2b}$

Exercice 126 (♣).

Dans chaque cas, trouvez des constantes a et b pour que les égalités suivantes soient valides.

(1) $\dfrac{1}{(2x+1)(x+1)}=\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{x+1}$

(2) $\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$

2. Limites

Exercice 127 (♡). *Calculez les limites des fonctions suivantes en* 0 *et en* $+\infty$

(1) $x-\ln(x)$

(2) $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

(3) $x\sqrt{1+\ln(x)^2}$

(4) $\dfrac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1}$

Exercice 128 (♡). *Calculez les limites des fonctions suivantes en* $+\infty$ *et* $-\infty$ *:*

(1) $(2x+1)e^x$

(2) xe^{-x}

(3) $x^2e^{-x}-x$

(4) $\dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

Exercice 129 (♡). *Reprise*

Dérivez dans chaque cas la fonction qui à x associe :

(1) $x^n + \sin(x)$
(2) $2\cos(x)e^x$
(3) $\ln(x)^2 + 2$
(4) e^{3x+2}
(5) $\tan(x)\left(=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$
(6) $\sin^2(x) + \cos^2(x)$
(7) $(2x+3)^3$
(8) $3x^6 + 4x^3 + 2x + 12$
(9) $\sin(2x+1)$
(10) $\ln(3x)$
(11) $\sqrt{x^2+x+1}$
(12) xe^{-x}
(13) $\dfrac{4x+2}{5x^2+1}$
(14) $\dfrac{\ln(x)}{x}$
(15) $x\ln(x) - x$

Exercice 130 (♡♡). *Placer dans le plan les points dont les affixes sont :*

(1) $2i$
(2) -1
(3) $1+i$
(4) $2+3i$
(5) $3-5i$
(6) $\sqrt{3}/2 + i/2$
(7) $\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$
(8) $i(i+1)$

Exercice 131 (♡). *Calculer les nombres complexes suivants :*

(1) $(1+i)(2-i)$
(2) $2+i+3-5i$
(3) $(2-i)(3-i)+4i$
(4) $(1+i)^2$
(5) $(\sqrt{3}/2 + i/2)^3$

3. Integration

Exercice 132 (♡). *Donner une fonction dont la dérivée est*

(1) e^x
(2) $\ln(2x)$
(3) $\dfrac{1}{x}$
(4) $\cos(x)$
(5) x^4
(6) $\dfrac{1}{x^2}$
(7) $\dfrac{1}{x^5}$
(8) $2x^3 + 2x^2 + 3x^4 + x^5 + 3$

Exercice 133 (♡). *Calculer les intégrales suivantes :*

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$
(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)dx$
(3) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{2x}dx$
(4) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$
(5) $\displaystyle\int_0^2 (x+2)^3dx$
(6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$

4. Vecteurs

Exercice 134 (♡♡).

(1) Dans le plan, muni d'une base de votre choix, tracer les vecteurs $(1,2)$, $(3,5)$, $(2,-2)$, $(6,-7)$.

(2) Faire la somme des deux premiers vecteurs, puis des trois premiers, puis des quatre vecteurs, de deux manières (algébrique et géométrique).

Exercice 135 (♡).
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ *dans les situations suivantes :*

a) $\vec{u}$ *fait un angle de* $\pi/4$ *avec l'axe des abscisses, et a pour norme* 2

b) $\vec{u}$ *fait un angle de* $\pi/3$ *avec l'axe des abscisses, et a pour norme* 1

c) $\vec{u}$ *fait un angle de* $\pi/3$ *avec l'axe des ordonnées, et a pour norme* $\sqrt{3}$

Exercice 136 (♡♡). *Placer dans le plan les points dont les affixes sont :*

(1) $2i$
(2) -1
(3) $1+i$
(4) $2+3i$
(5) $3-5i$
(6) $\sqrt{3}/2+i/2$
(7) $\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$
(8) $i(i+1)$

Exercice 137 (♡). *Calculer les nombres complexes suivants :*

(1) $(1+i)(2-i)$
(2) $2+i+3-5i$
(3) $(2-i)(3-i)+4i$
(4) $(1+i)^2$
(5) $(\sqrt{3}/2+i/2)^3$

5. Integration

Exercice 138 (♡). *Donner une fonction dont la dérivée est*

(1) e^x
(2) $\ln(2x)$
(3) $\dfrac{1}{x}$
(4) $\cos(x)$
(5) x^4
(6) $\dfrac{1}{x^2}$
(7) $\dfrac{1}{x^5}$
(8) $2x^3+2x^2+3x^4+x^5+3$

Exercice 139 (♡). *Calculer les intégrales suivantes :*

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$
(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)dx$
(3) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{2x}dx$
(4) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$
(5) $\displaystyle\int_0^2 (x+2)^3dx$
(6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$

6. Vecteurs

Exercice 140 (♡♡).

(1) Dans le plan, muni d'une base de votre choix, tracer les vecteurs $(1,2)$, $(3,5)$, $(2,-2)$, $(6,-7)$.

(2) Faire la somme des deux premiers vecteurs, puis des trois premiers, puis des quatre vecteurs, de deux manières (algébrique et géométrique).

Exercice 141 (♡).
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ *dans les situations suivantes :*

a) $\vec{u}$ *fait un angle de* $\pi/4$ *avec l'axe des abscisses, et a pour norme* 2

b) $\vec{u}$ *fait un angle de* $\pi/3$ *avec l'axe des abscisses, et a pour norme* 1

c) $\vec{u}$ *fait un angle de* $\pi/3$ *avec l'axe des ordonnées, et a pour norme* $\sqrt{3}$

7. Produit scalaire

Exercice 142 (♡♡).
Calculer le produit scalaire $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$*, lorsque* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont les vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *suivants :*

a) $\vec{u} = (2,3)$ *et* $\vec{v} = (3,4)$

b) $\vec{u} = (3,-1)$ *et* $\vec{v} = (-5,0)$

c) $\vec{u} = (5,2)$ *et* $\vec{v} = (-\pi, \sqrt{2})$

d) $\vec{u} = (0,1)$ *et* $\vec{v}$ *est un vecteur unitaire faisant un angle* $\pi/3$ *avec l'axe des abscisses*

e) $\vec{u}$ *est un vecteur unitaire et* $\vec{v} = 3\vec{u}$.

Exercice 143 (♡).
Déterminer un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ *dans chacun des cas suivants :*

a) $\vec{u} = (1,0)$

b) $\vec{u} = (1,1)$

c) $\vec{u} = (2,3)$

d) $\vec{u} = (3,-1)$

e) $\vec{u} = (5,2)$

Exercice 144 (♣). *Soit* A, B, C *trois points du plan.*

(1) Démontrer que

$$\langle \vec{BC}, \vec{BC} \rangle = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle - 2\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle + \langle \vec{AC}, \vec{AC} \rangle$$

(2) En déduire la formule d'Al-Kashi *: en notant* $a = BC$, $b = AC$ *et* $c = AB$*, on a*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle BAC)$$

8. Limites

Exercice 145 (♡♡). *Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (lorsque cela a un sens) dans chacun des cas suivants :*

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

(2) $f(x) = -4x^4 + 5x^3 + 2x + 1$

(3) $f(x) = 5x + 3 + 4x^7$

(4) $f(x) = \dfrac{5x^3 + 2x + 1}{1 + 2x + 3x^2}$

(5) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^4 + x + 1}$

(6) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x + 3}$

(7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 2}$

Exercice 146 (♣). *Déterminer les limites suivantes :*

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{e^x}{x-1}$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} e^{\frac{1}{x-2}}$,

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$,

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$,

(6) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

9. Primitives et intégrales

Exercice 147 (♡).

Calculez les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{4x^3+1}dx$,

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(x)}dx$,

(3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(3x+5)^3}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-4x+5)^4(x-2)dx$

Exercice 148 ().

Calculez une primitive des fonctions qui à x associent :

(1) $\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$

(3) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$

(4) $x\cos(3x^2)$

(5) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Exercice 149 (♡♡).

Calculer dans chacun des cas suivants le terme général de la suite (u_n) :

a) $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = u_n + 3$

b) $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = 2u_n$

c) $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = u_n - 5$

d) $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = -u_n$

e) $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$

Exercice 150 (♡).

Calculer (en fonction de n le cas échéant) les sommes suivantes :

a) $1+2+3+4+\cdots+n$

b) $1+4+7+10+13+\cdots+37$

c) $3+5+7+9+11+\cdots+2015$

d) $1+2+4+8+\cdots+2^n$

e) $1+\frac{1}{2}+frac14+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$

f) $3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\cdots+3\frac{1}{(-3)^n}$

10. Primitives et Intégrales

Exercice 151 (♡).
Calculez les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin(x)dx$

b) $\int_0^1 xe^x dx$

c) $\int_1^e \ln(x)dx$

Exercice 152 (♣). *Calculez dans chaque cas une primitive des fonctions définies par les formules suivantes. Vous aurez parfois besoin d'une intégration par parties, parfois pas.*

a) $x\cos(x)$ *(dériver* x *et intégrer* $\cos$*)*

b) $x^2\sin(x)$ *(se ramener à l'exemple précédent)*

c) x^2e^x *(se ramener à* xe^x*)*

d) $\sin(5x)-2\cos(3x)+4\sin(2x)$

e) $\frac{x}{e^x}$

f) $\frac{x}{(x^2-4)^2}$

g) $(2x+1)e^x$,

h) $\sin(x)\cos(x)^3$

i) $x\ln(x)$

j) $x^2\ln(x)$

k) $\cos(x)^2$

11. Equations différentielles

Exercice 153 (♡♡).
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y'+2y=0$

(2) $2y'-4y=1$

(3) $3y'+2y=4$

(4) $5y'+2y=-4$

(5) $y'-4y=\frac{1}{2}$

Exercice 154 (♡).
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' - 2y = e^x$ *(4)* $y' - y = 2\cos(x) + \sin(2x)$
(2) $y' + 2y = e^{-2x}$ *(5)* $2y' - y = x^2$
(3) $y' - 5y = 2x + 1$ *(6)* $y'' - 2y' = 1$

Exercice 155 (♡).
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' - xy = 0$ *(4)* $y' + \cos(2x)y = 0$
(2) $y' - x^2y = 0$
(3) $2y' - e^x y = 0$ *(5)* $y' - \ln(x)y = 0.$

Exercice 156 (). *Calculez les dérivées des fonctions f définies par :*

(a) $f(x) = \dfrac{e^x \ln(x)}{x^2 + 2x^3}$,
(b) $f(x) = 3^x \sin x$,
(c) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$,
(d) $f(x) = \dfrac{4\cos^2(x) - 3}{2\cos(x)}$,
(e) $f(x) = (x^4 - x^2 + 5)^4$,
(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$,
(g) $f(x) = (\ln(x))^3$,
(h) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$,
(i) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 4x - 1}{x^2 + 2x + 5}$,
(j) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x + 1}$,
(k) $f(x) = \ln(\dfrac{2x - 1}{x - 3})$,
(l) $f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 + 1}$,
(m) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$,
(n) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
(o) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

12. Complexes

Exercice 157 ().
Calculez la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{1}{1-i}$ *c)* $\dfrac{2-i}{3+i}$ *e)* $\dfrac{2-2i}{4+5i}$

b) $\dfrac{1+i}{3-4i}$ *d)* $\dfrac{3-i}{2+4i}$ *f)* $\dfrac{5+2i}{1-3i}$

Exercice 158 ().
Mettre sous forme trigonométrique :

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

c) i

d) $1+i$

e) $1-\sqrt{3}i$

f) $\sqrt{3}+i$

g) $\dfrac{i}{1+\sqrt{3}i}$

Exercice 159 (♡). *Ecrire la définition de* $f = o_{x\to-\infty}(g)$.

Exercice 160 (♡♡). *Problème d'étagères*
Madame Michon veut concevoir des étagères pour ranger ses livres. Elle constate que
— *Un dictionnaire et deux BD occupent une largeur de 5 cm.*
— *Trois dictionnaires et une BD occupent une largeur de 10 cm.*

(1) Déterminer l'épaisseur d'un dictionnaire et celle d'une BD.

(2) Trouver la largeur de l'étagère que doit bricoler Madame Michon pour ranger cinq dictionnaires et dix BD.

Exercice 161 (♡). *Problème de bonbons*
Une usine de bonbons a dans ses ateliers deux colorants chimiques appelés C_1 *et* C_2.
— *Pour fabriquer un sachet de bonbons à la fraise l'usine utilise un tube de colorant* C_1 *et deux tubes de colorant* C_2.
— *Pour fabriquer un sachet de bonbons à la banane l'usine utilise deux tubes de colorant* C_1 *et un tube de colorant* C_2.

(1) De combien de tubes de colorants C_1 *et* C_2 *a-t-on besoin pour produire 100 sachets de bonbons à la fraise et 200 à la banane ?*

(2) L'usine dispose d'un stock de 31 tubes de colorant C_1 *et 20 tubes de colorant* C_2. *Calculer le nombre de sachets de bonbons à la fraise et le nombre de sachets de bonbons à la banane dont la fabrication provoquera l'épuisement total des stocks.*

Exercice 162 (♡). *Problème de valise*
Monsieur Dupont prépare ses bagages pour un voyage d'affaires. Il constate que
— *Une veste, deux pull et trois pantalons occupent un volume de 39 litres.*
— *Une veste, trois pull et deux pantalons occupent un volume de 34 litres.*
— *Trois vestes, deux pull et un pantalon occupent un volume de 29 litres.*

(1) Quel est le volume occupé par une veste, par un pull, et par un pantalon ?

(2) Monsieur Dupont possède une seule petite valise de 20 litres. Sachant que ses affaires de toilette occupent un volume de trois litres, quel est le nombre maximal de pantalons qu'il peut emporter ?

(3) Peut-il emporter plusieurs pulls ?

Exercice 163 (♡). *Systèmes à paramètres*

(1) Déterminer suivant les valeurs du paramètre m les solutions des systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x - 2y = 2 \\ -x + my = -m \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} mx + (1-m)y = m \\ mx + my = m \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} mx + (1-m)y = 1 \\ (1-m)x - my = m. \end{cases}$$

(2) Déterminer suivant les valeurs du paramètre m les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = 1 \\ x + (1-m)y = 2m \end{cases}$$

Exercice 164 (♣). *Système à paramètres*

(1) Soient m et n deux nombres réels. Résoudre le système

$$\begin{cases} mx + nz = mn \\ nz = m \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

dans les deux cas suivants :
— $m \neq 0$ *et* $n \neq 0$ *;*
— $m = 0$.

Exercice 165 (♡). *Systèmes à trois inconnues*
Résoudre les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 10 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + 3y - 3z = 7 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

Exercice 166 (♣). *Système à quatre inconnues*

Résoudre les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 2 \\ -x + y + 7z + 2t = 3 \\ 2x + y - 8z + t = 4 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - y + z + t = 3 \\ 5x + 2y - z - 3t = 5 \\ -3x - 4y + 3z + 2t = 1 \\ 6x + y - 2t = 8 \end{cases}$$

Exercice 167 (♡).

(1) Pour chacun des systèmes suivants, écrire la matrice associée et trouver l'ensemble des solutions.

$$a)\begin{cases} x-y+3z=2\\ -x+4y+z=-1\\ 3x-2y-3z=4\end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x+y-z=3\\ x-y+z=2\\ x+y+2z=0\end{cases}$$

$$c)\begin{cases} -y+z=1\\ -5x+2y-z=-1\\ x-2z=4\end{cases} \qquad d)\begin{cases} y-2z=3\\ -2x-3y+z=2\\ 3x+y-2z=0.\end{cases}$$

Exercice 168 (♡). *Systèmes à 4 inconnues*

Pour chacun des systèmes suivants, écrire la matrice associée et trouver l'ensemble des solutions.

$$a)\begin{cases} x-y-z-t=3\\ 2x-z+3t=9\\ 3x+3y+2z=4\\ -x-2y+z-t=0\end{cases} \qquad b)\begin{cases} x-2y+z+t=-2\\ 2x-y-z-t=-1\\ x+y+z+t=-8.\end{cases}$$

Exercice 169 (♣). *Intersections*

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$*. Soient a et b deux paramètres réels. Trouver l'ensemble des points d'intersection des droites* D_1 *et* D_2*, où :*

- D_1 *est la droite passant par le point de coordonnées* $(1,0)$ *et de vecteur directeur* $-a\vec{i}+\vec{j}$ *;*
- D_2 *est la droite passant par le point de coordonnées* $(1,0)$ *et de vecteur directeur* $-b\vec{i}+2\vec{j}$*.*

Exercice 170 (♣). *Géométrie*

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$*. Déterminer l'ensemble des points d'intersection des plans* P_1*,* P_2 *et* P_3*, où*

- P_1 *est le plan passant par le point de coordonnées* $(0,0,1)$ *et de vecteur normal* $-\vec{j}+\vec{k}$ *;*
- P_2 *est le plan passant par le point de coordonnées* $(0,1,0)$ *et de vecteur normal* $3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ *;*
- P_1 *est le plan passant par le point de coordonnées* $(-1,0,0)$ *et de vecteur normal* $\vec{i}-2\vec{k}$*.*

Exercice 171 (). *Système 3x3*

(1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-2z=2\\ x-y+z=-1\\ 2x-y-z=0\end{cases}$$

Exercice 172 ().

Déterminer suivant les valeurs du paramètre m les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 173 (). $\begin{cases} -ix + iy = -1 - i \\ -ix - y = i - 1 \end{cases}$

1 / Déterminer suivant les valeurs du paramètre m les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 2 \end{cases}$$

2/ Résoudre le système suivant : $\begin{cases} -ix + iy = -1 - i \\ -ix - y = i - 1 \end{cases}$

1 / Déterminer suivant les valeurs du paramètre m les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = 1 \\ x + (1-m)y = 2m \end{cases}$$

2/ Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = -1 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

1 / Le système $S =$

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = 1 \\ x + (1-m)y = 2m \end{cases}$$

a pour solutions :

- *si* $m = 1$ *il n'y a pas de solution*
- *si* $m = -1$ *il n'y a pas de solution*
- *si* $m \neq 1$ *et* $m \neq -1$*, il existe une solution unique donnée par* $(x, y) = (\dfrac{2m+1}{m+1}, \dfrac{2m^2-1}{1-m^2})$

2/ Le système $\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = -1 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ *a pour solution (1/3,1,-1/3).*

Exercice 174 (♡♡).

Madame Michon veut concevoir des étagères pour ranger ses livres. Elle constate que

- *Un dictionnaire et deux BD occupent une largeur de 5 cm.*
- *Trois dictionnaires et une BD occupent une largeur de 10 cm.*

(1) Déterminer l'épaisseur d'un dictionnaire et celle d'une BD.

(2) Trouver la largeur de l'étagère que doit bricoler Madame Michon pour ranger cinq dictionnaires et dix BD.

Exercice 175 (♡).

Une usine de bonbons a dans ses ateliers deux colorants chimiques appelés C_1 *et* C_2.

- *Pour fabriquer un sachet de bonbons à la fraise l'usine utilise un tube de colorant* C_1 *et deux tubes de colorant* C_2.
- *Pour fabriquer un sachet de bonbons à la banane l'usine utilise deux tubes de colorant* C_1 *et un tube de colorant* C_2.

(1) De combien de tubes de colorants C_1 *et* C_2 *a-t-on besoin pour produire 100 sachets de bonbons à la fraise et 200 à la banane ?*

(2) L'usine dispose d'un stock de 31 tubes de colorant C_1 *et 20 tubes de colorant* C_2. *Calculer le nombre de sachets de bonbons à la fraise et le nombre de sachets de bonbons à la banane dont la fabrication provoquera l'épuisement total des stocks.*

Exercice 176 (♡).

Monsieur Dupont prépare ses bagages pour un voyage d'affaires. Il constate que

- *Une veste, deux pull et trois pantalons occupent un volume de 39 litres.*
- *Une veste, trois pull et deux pantalons occupent un volume de 34 litres.*
- *Trois vestes, deux pull et un pantalon occupent un volume de 29 litres.*

(1) Quel est le volume occupé par une veste, par un pull, et par un pantalon ?

(2) Monsieur Dupont possède une seule petite valise de 20 litres. Sachant que ses affaires de toilette occupent un volume de trois litres, quel est le nombre maximal de pantalons qu'il peut emporter ?

(3) Peut-il emporter plusieurs pulls ?

Exercice 177 ($\heartsuit$).

Déterminer suivant les valeurs du paramètre m les solutions des systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x-2y=2 \\ -x+my=-m \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+my=2 \\ mx+y=2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} mx+(1-m)y=m \\ mx+my=m \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} mx+(1-m)y=1 \\ (1-m)x-my=m. \end{cases}$$

Exercice 178 ($\heartsuit$).

Résoudre les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-4y+z=5 \\ 3x-5y+2z=8 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+y+z=10 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 4x+3y-3z=7 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$$

Exercice 179 ($\clubsuit$).

Résoudre les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x+2y-z+t=1 \\ x+3y+z-t=2 \\ -x+y+7z+2t=3 \\ 2x+y-8z+t=4 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x-y+z+t=3 \\ 5x+2y-z-3t=5 \\ -3x-4y+3z+2t=1 \\ 6x+y-2t=8 \end{cases}$$

Exercice 180 ($\clubsuit$).

Soient m et n deux nombres réels. Résoudre le système

$$\begin{cases} mx+nz=mn \\ nz=m \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

dans les deux cas suivants :
- $m \neq 0$ *et* $n \neq 0$ *;*
- $m = 0$.

Exercice 181 ($\heartsuit$).

Pour chacun des systèmes suivants, écrire la matrice associée et trouver l'ensemble des solutions.

$$a)\begin{cases} x-y+3z=2\\ -x+4y+z=-1\\ 3x-2y-3z=4\end{cases}\qquad b)\begin{cases} 2x+y-z=3\\ x-y+z=2\\ x+y+2z=0\end{cases}$$

$$c)\begin{cases} -y+z=1\\ -5x+2y-z=-1\\ x-2z=4\end{cases}\qquad d)\begin{cases} y-2z=3\\ -2x-3y+z=2\\ 3x+y-2z=0.\end{cases}$$

Exercice 182 (♡).

Résoudre les systèmes suivants à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$a)\begin{cases} x-iy=1\\ ix-y=1\end{cases}\qquad b)\begin{cases} -ix+iy=-1-i\\ -ix-y=i-1\end{cases}$$

$$c)\begin{cases} (i-2)x+y=i\\ ix-(1+i)y=1+3i\end{cases}\qquad d)\begin{cases} ix+y=i\\ -x+iy=-1.\end{cases}$$

Exercice 183 (♡).

Pour chacun des systèmes suivants, écrire la matrice associée et trouver l'ensemble des solutions.

$$a)\begin{cases} x-y-z-t=3\\ 2x-z+3t=9\\ 3x+3y+2z=4\\ -x-2y+z-t=0\end{cases}\qquad b)\begin{cases} x-2y+z+t=-2\\ 2x-y-z-t=-1\\ x+y+z+t=-8.\end{cases}$$

Exercice 184 (♣).

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient a et b deux paramètres réels. Trouver l'ensemble des points d'intersection des droites D_1 et D_2, où :

- *D_1 est la droite passant par le point de coordonnées $(1,0)$ et de vecteur directeur $-a\vec{i}+\vec{j}$;*
- *D_2 est la droite passant par le point de coordonnées $(1,0)$ et de vecteur directeur $-b\vec{i}+2\vec{j}$.*

Exercice 185 (♣).

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Déterminer l'ensemble des points d'intersection des plans P_1, P_2 et P_3, où

- *P_1 est le plan passant par le point de coordonnées $(0,0,1)$ et de vecteur normal $-\vec{j}+\vec{k}$;*
- *P_2 est le plan passant par le point de coordonnées $(0,1,0)$ et de vecteur normal $3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$;*

• *P_1 est le plan passant par le point de coordonnées $(-1,0,0)$ et de vecteur normal $\vec{i}-2\vec{k}$.*

Exercice 186 ($\heartsuit\heartsuit$).

a) en 0, $\exp(\sqrt{1+x}) \sim e$ *(c'est simplement la limite)*

b) en $+\infty$, $\dfrac{5x^3+3\ln(x)+2x}{4x^4+3x^2+1} \sim \dfrac{5}{4x}$ *(pour le voir, on factorise par les termes de plus haut degré)*

c) en 0, $\dfrac{5x^3+3\ln(x)+2x}{4x^4+3x^2+1} \sim 3\ln(x)$ *(le dénominateur tend vers 1, et le numérateur est équivalent à* $\ln(x)$.

d) en 1, $\ln(x) \sim x-1$ *(en effet,* $\ln(1+(x-1)) = (x-1)+o(x-1)$ *d'après les formules de DL.)*

e) en $+\infty$, $\ln(x+1)-\ln(x) = \ln(1+\dfrac{1}{x}) \sim \dfrac{1}{x}$ *d'après les formules de DL.*

Exercice 187 ($\heartsuit$).

Dans cet exercice, il s'agit de faire des développements limités jusqu'au premier ordre non nul.

a) en 0, $\ln(\cos(x)) = \ln(1-x^2/2+o(x^2)) \sim -x^2/2$

b) en 0, $\ln(1+x)-\sqrt{x+1}-1 = x-(1+x/2)-1+o(x) \sim 3x/2$

c) en 0, $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1 \sim x^2/8$

d) en 0, $\dfrac{\sin(x)-x}{e^{2x}+1-2e^{2x}} \sim -x/6$

Exercice 188 ($\heartsuit$).

On utilise les même techniques que précédemment. On

a) $u_n = \dfrac{n^2+2n\sin(n)+1}{2n^3-3n^2+1} \sim \dfrac{1}{2n}$

b) $u_n = 2^{\frac{1}{n}}-1 = \exp(\ln(2)/n)-1 = 1+\ln(2)/n-1+o(1/n) \sim \ln(2)/n$

c) $u_n = \dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n+1}$

d) $u_n = n\sin(\dfrac{1}{n^2})$.

Exercice 189 ($\clubsuit$).

(1) On sait que $f/g \to 1$, *ou que* $f = g+o(g)$. *On a donc* $\ln(f) = \ln(g+o(g)) = \ln(g)+\ln(1+o(1))$. *Par définition,* $\ln(1+o(1))$ *tend vers* 0. *Vu que* $\ln(g)$ *ne tend pas vers* 0, *on a donc* $\ln(1+o(1))/\ln(g) \to 0$, *c'est-à-dire* $\ln(1+o(1)) = o(\ln(g))$.
Donc $\ln(f) = \ln(g)+o(\ln(g))$, *c'est-à-dire* $\ln(f) \sim \ln(g)$.

(2) On a $g \sim 1$ *et* $f \sim 1$ *donc* $g \sim f$.
D'autre part, $\ln(g(x)) = x$ *et* $\ln(f(x)) = \ln(1+x^2) \sim x^2$. *Donc* $\ln(g)$ *n'est pas équivalent à* $\ln(f)$.

Exercice 190 ($\clubsuit$).

Soit (u_n) *la suite définie par récurrence par*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \end{cases}$$

(1) On montre par récurrence que $u_n \geq 0$*, et donc que la formule définissant* u_{n+1} *a bien un sens.*
Initialisation : OK
Hérédité : Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 0$*, donc* u_{n+1} *peut bien se calculer, et comme* u_{n+1} *est une racine, on en déduit que* $u_{n+1} \geq 0$.
On a donc $u_n \geq 0$ *pour tout* n*. En particulier, pour tout* $n \geq 1$*, on a* $u_n = \sqrt{u_{n-1} + n} \geq \sqrt{n}$.

(2) En élevant au carré, on voit que l'on veut démontrer que $n + 2 + \sqrt{n} \leq 2 + 2\sqrt{n+1} + n$*. En simplifiant, cette inégalité est équivalente à* $\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$*, qui est toujours vraie.*
On démontre maintenant par récurrence que $u_n \leq \sqrt{n} + 1$ *:*
Initialisation : On a bien $u_0 = 1 \leq 1$.
Hérédité : supposons que $u_n \leq \sqrt{n} + 1$*, avec* $n \geq 4$*. Alors on a* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \leq \sqrt{\sqrt{n} + n + 2}$ *par hypothèse de récurrence, donc* $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + 1$ *d'après l'inégalité démontrée ci-dessus.*
Donc on a bien pour tout n*,* $u_n \leq \sqrt{n}$.

(3) On a donc $1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$*. Donc* $u_n/\sqrt{n}$ *tend vers* 1*, c'est-à-dire que* $u_n \sim \sqrt{n}$.

Exercice 191 (♣♣).
Soit (u_n) *une suite telle que* $\lim(u_{n+1} - u_n) = a$*, avec* $a > 0$*. Démontrer que* $u_n \sim na$.

Exercice 192 (♡). *Exemples de fonction dominée par une autre en 0*

(1) Pouvez-vous donner des fonctions f *et* g *telles que* f *soit dominée par* g *en 0 ?*

Exercice 193 (♡). *Exemples de fonction dominée par une autre en* $+\infty$

(1) Pouvez-vous donner des fonctions f *et* g *telles que* f *soit dominée par* g *en* $+\infty$ *?*

Exercice 194 (♡). *Exemples de suite dominée par une autre*

(1) Pouvez-vous donner des suites (u_n) *et* (v_n) *telles que* (u_n) *soit dominée par* (v_n) *?*

Exercice 195 (♡). *Exemples de fonction négligeable devant une autre en 0*

(1) Pouvez-vous donner des fonctions f *et* g *telles que* f *soit négligeable devant* g *en 0 ?*

Exercice 196 (♡♡). *Exemples de fonction négligeable devant une autre en* $+\infty$

(1) Pouvez-vous donner des fonctions f et g telles que f soit négligeable devant g en $+\infty$?

Exercice 197 (♡). *Ecrire la définition de $f = o_{x\to-\infty}(g)$.*

Exercice 198 (♡). *Exemples de fonctions équivalentes en 0*

(1) Pouvez-vous donner des fonctions f et g équivalentes en 0 ?

Exercice 199 (♡). *Exemples de fonctions équivalentes en* $+\infty$

(1) Pouvez-vous donner des fonctions f et g équivalentes en $+\infty$?

Exercice 200 (♡). *Exemples de suites équivalentes en* $+\infty$

(1) Pouvez-vous donner des suites (u_n) et (v_n) équivalentes en $+\infty$?

Exercice 201 (♡♡).
Donner un équivalent simple au voisinage du point demandé :

(1) en $+\infty$, $x + 1 + \ln(x)$
(2) en 0, $x + 1 + \ln(x)$
(3) en 0, $\ln(\sin(x))$
(4) en 0, $\cos(\sin(x))$.

Exercice 202 (♡♡).
Expliquer pourquoi on a, pour tout $n \geq 0$:

(1) $\dfrac{1}{x^n} = o(1)$, *quand x tend vers $+\infty$*
(2) $\ln(x) = o(x^n)$, *quand x tend vers $+\infty$*
(3) $x^n = o(e^x)$, *quand x tend vers $+\infty$*
(4) $\dfrac{\cos(x)}{1+x} = O(\dfrac{1}{1+x})$, *en n'importe quel point*
(5) $\dfrac{5x^4 + 2x^2 + 4}{3x+2} = O(x^3)$, *quand x tend vers $+\infty$*

Exercice 203 (♡).
Déterminer un équivalent simple au voisinage du point précisé des fonctions suivantes :

(1) en 0, $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$
(2) en 0, $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$
(3) en $+\infty$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Exercice 204 (♡). *Démontrer que l'on a :*

(1) en $+\infty$, $\ln(x+1) = \ln(x) + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + o(\dfrac{1}{x})$,

(2) au voisinage de 0, $\dfrac{1}{x + \ln(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{(\ln(x))^2} + \dfrac{x^2}{(\ln(x))^3} + o(x^2)$,

(3) en $+\infty$*,* $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x) = -\ln(x)+1+o(1)$

Exercice 205 *(♡). Démontrer que, lorsque* $x \to +\infty$*, on a*

(1) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{1}{2}-\frac{1}{8\sqrt{x}}+\frac{1}{16x}+o(\frac{1}{x})$

(2) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o(\frac{1}{x^2})$

Exercice 206 *(♣).*

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} k!$*.*

(1) Montrer que, pour k *entre* 0 *et* $n-2$*, on a* $\frac{k!}{n!} \le \frac{1}{n(n-1)}$*.*

(2) En déduire que $S_n \sim n!$*.*

Exercice 207 *(♣♣).*

On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*.*

(1) Démontrer que, pour tout $x > -1$*, on a*

(*) $$\ln(1+x) \le x.$$

En prenant $x = \frac{t}{t+1}$*, en déduire que l'on a*

(**) $$\ln(1+t) \ge \frac{t}{t+1}.$$

(2) Déduire de (*) que $\ln(n+1) \le H_n$*.*

En écrivant $\frac{1}{k+1} = \frac{1/k}{1+1/k}$*, déduire de (**) que*

$$H_n \le \ln(n)+1,$$

puis donner un équivalent simple de H_n*.*

(3) Soit $u_n = H_n - \ln(n)$*. Démontrer que* (u_n) *est décroissante, puis qu'elle converge. La limite de* (u_n) *s'appelle la* constante d'Euler *et se note habituellement* γ*.*

13. Suites et fonctions implicites

Exercice 208 *(♣).*

Pour $x \in \mathbb{R}$*, on pose* $f(x) = xe^{x^2}$*.*

(1) Montrer que f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On note* g *sa bijection réciproque. On ne cherche pas à calculer explicitement* g*, ce qui est d'ailleurs impossible*

(2) Calculer $f(0)$ *et en déduire* $g(0)$*.*

(3) On admet que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose $g(x) = a + bx + o(x)$ le développement limité de g à l'ordre 1 en 0. Déterminer a. Calculer en fonction de b le DL de $f \circ g$ à l'ordre 1 en 0

(4) En déduire a et b.

(5) De la même manière, calculer le développement limité de g à l'ordre 2,3,4 puis à l'ordre 5 en 0.
On pourra remarquer et utiliser le fait que g est une fonction impaire.

Exercice 209 (♣).

(1) Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ a une solution unique dans l'intervalle $]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$. On note cette solution x_n.

(2) Montrer que $x_n \sim n\pi$.

(3) Démontrer que, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

(4) Vérifier que $x_n = \arctan(x_n) + n\pi$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} x_n - n\pi = \pi/2$.

(5) Démontrer que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Exercice 210 (♣).

(1) Montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une solution unique x_n sur $\mathbb{R}_*^+$.

(2) Montrer que x_n tend vers $+\infty$.

(3) Montrer que

$$x_n = n + \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})$$

Exercice 211 (♡♡).
Donner un équivalent simple au voisinage du point demandé :

a) en 0, $\exp(\sqrt{1+x})$

b) en $+\infty$, $\dfrac{5x^3 + 3\ln(x) + 2x}{4x^4 + 3x^2 + 1}$

c) en 0, $\dfrac{5x^3 + 3\ln(x) + 2x}{4x^4 + 3x^2 + 1}$

d) en 1, $\ln(x)$

e) en $+\infty$, $\ln(x+1) - \ln(x)$

Exercice 212 (♡).
Donner un équivalent simple au voisinage du point demandé :

a) en 0, $\ln(\cos(x))$

b) en 0, $\ln(1+x)-\sqrt{x+1}-1$

c) en 0, $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1$

d) en 0, $\dfrac{\sin(x)-x}{e^{2x}+1-2e^{2x}}$

Exercice 213 (♡).
Donner un équivalent simple des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{n^2+2n\sin(n)+1}{2n^3-3n^2+1}$

b) $u_n = \sqrt[n]{2}-1 = 2^{\frac{1}{n}}-1$

c) $u_n = \dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n+1}$

d) $u_n = n\sin(\dfrac{1}{n^2})$.

Exercice 214 (♣).

(1) Soient f et g deux fonctions strictement positives. On suppose que $f \sim g$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 1$. Démontrer que $\ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$ au voisinage de a.

(2) On prend $g(x)=e^x$ et $f(x)=1+x^2$. Montrer que, au voisinage de 0, on a $f\sim g$ mais que l'on n'a pas $\ln(f(x))\sim\ln(g(x))$.

Exercice 215 (♣).
Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+n+1} \end{cases}$$

(1) Calculer les trois premiers termes de la suite.

(2) Montrer par récurrence que u_n est bien défini et que $u_n \geq 0$. En déduire que pour tout n on a $u_n \geq \sqrt{n}$.

(3) Montrer que pour tout $n\geq 0$ on a $\sqrt{n+2+\sqrt{n}} \leq \sqrt{n+1}+1$ (penser à élever au carré). En déduire par récurrence que $u_n \leq \sqrt{n}+1$.

(4) En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 216 (♣♣).
Soit (u_n) une suite telle que $\lim(u_{n+1}-u_n)=a$, avec $a>0$. Démontrer que $u_n \sim na$.

Exercice 217 (♡). *Vrai ou faux*
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, les justifier. Si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

a) *Si (u_n) est une suite vérifiant que $u_n = O(\dfrac{1}{n^2})$, alors on a $u_n = o(\dfrac{1}{n})$.*

b) *Soit $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=0$, alors $f(x)\sim_{x\to a} g(x)$.*

c) Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *Si* $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$, *alors* $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = 0$.

d) Si $u_n \sim v_n$ *alors* $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

e) Si $u_n \sim v_n$, *et que* $u_n \geq 0$ *et* $v_n \geq 0$, *alors* $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Exercice 218 (♡). *Continuité des fonctions*

(1) *Pour trois fonctions définés de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$ *appartenant à* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(2) $f(x) = |x|$ *qui appartient à* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *mais pas à* $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(3) $f(x) = \displaystyle\int |x| = \{\frac{x^2}{2}$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $= -\frac{x^2}{2}$ *sur* $\mathbb{R}_-\}$, *appartient à* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *mais pas à* $\mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 219 (♡).

$\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a* $(e^x)^{(n)} = e^x$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a* $\cos^{(n)}(x) = \cos(x)$ *si* $n = 0[4]$; $-\sin(x)$ *si* $n = 1[4]$; $-\cos(x)$ *si* $n = 2[4]$; $\sin(x)$ *si* $n = 3[4]$;

$\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a* $\sin^{(n)}(x) = \sin(x)$ *si* $n = 0[4]$; $\cos(x)$ *si* $n = 1[4]$; $-\sin(x)$ *si* $n = 2[4]$; $-\cos(x)$ *si* $n = 3[4]$.

Exercice 220 (♣).

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (x^m)^{(n)} = (\prod_{k=0}^{n-1}(m-k)) \times x^{m-n}.$$

Exercice 221 (♡).

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. *On définit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *par* $f(x) = \sqrt{x}$ *si* $0 \leq x \leq 1$ *et* $f(x) = ax^2 + bx + 1$ *si* $x > 1$.

(1) *On sait déjà que* f *est continue sur* $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. $f(1) = 1$ *donc* f *est continue. Donc* $f(x) \underset{x \to 1+}{\to} 1$, *donc* $a \times 1^2 + b \times 1 + 1 = 1 \Leftrightarrow a + b = 0$.

(2) *Pour que* f *soit de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_*^+$, *il faut que* f' *soit continue. On sait que* $\forall 0 < x \leq 1, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; *et* $\forall x > 1, f'(x) = 2ax + b$. f' *continue* $\Leftrightarrow f$ *est dans* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, *on a alors :*$a + b = 0$ *et* $2a + b = \dfrac{1}{2}$, *donc* $a = \dfrac{1}{2}$ *et* $b = -\dfrac{1}{2}$.

$f(x) = \sqrt{x}$ *si* $0 \leq x \leq 1$ *et* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1$ *si* $x > 1$

Exercice 222 (♣).

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ *pour* $x \neq 0$, *et* $f(0) = 0$.

$|x^2 \sin(\dfrac{1}{x})| \leq x^2$ *donc* $x^2 \sin(\dfrac{1}{x}) \underset{x \to 0}{\mapsto} 0$, *donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $f'(x) = 2x \sin(\dfrac{1}{x}) - \cos(\dfrac{1}{x})$*sur* $\mathbb{R}^*$. *On regarde si* f *est dérivable en* 0. *Pour cela, on regarde la limite (si elle existe) de*

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *en* 0. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(\frac{1}{x})-0}{x-0}=0$*, donc* $f'(0)=0$*. Donc* f *est dérivable, mais* $2x\sin(\dfrac{1}{x})-\cos(\dfrac{1}{x})$ *n'admet pas de limite en* 0*, donc* f *n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *:* f' *n'est pas continue en* 0*.*

Exercice 223 (♣). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par* $f(x)=x^2+x^3\sin(\dfrac{1}{x^2})$ *pour* $x\neq 0$*, et* $f(0)=0$*.*

(1) $|x^3\sin(\dfrac{1}{x^2})|\leq |x^3|$ *donc* $x^3\sin(\dfrac{1}{x^2})\underset{x\to 0}{\mapsto}0$*, donc* f *et continue.* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $f'=2x+2x^2\sin(\dfrac{1}{x^2})-2\cos(\dfrac{1}{x^2})$ *sur* $\mathbb{R}^*$*.*

(2) Il faut regarder la limite (si elle existe) de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *en* 0*.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^3\sin(\frac{1}{x^2})-0}{x-0}=1$*, donc* f *est également dérivable en* 0 *et* $f'(0)=1$*. Par contre,* $2x+2x^2\sin(\dfrac{1}{x^2})-2\cos(\dfrac{1}{x^2})$ *n'admet pas de limite en* 0*, donc* f' *n'est pas continue en* 0*, autrement dit,* f *n'appartient pas à* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$*.*

(3) Si f' *admet un DL d'ordre* n *en* 0*, alors* f' *est continue en* 0*, ce qui n'est pas le cas.*

(4) En posant $\varepsilon(x)=x\sin(1/x^2)$*, on a bien* $\varepsilon(x)$ *qui tend vers* 0 *quand* x *tend vers* 0*, et* $f(x)=x^2+x^2\varepsilon(x)$*. Donc* f *admet un DL d'ordre 2 en* 0*.*

Exercice 224.

(1)

(a) f *est impaire donc* $f(-x)=-f(x)$ *pour tout* $x\in I$*. En particulier, en prenant* $x=0$*, on a* $f(0)=-f(0)$*, donc* $f(0)=0$*.*

(b) On a $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+\epsilon(x)x^n$*. Donc* $f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+...+(-1)^na_nx^n+(-1)^n\epsilon(x)x^n$*. Comme* $f(-x)=-f(x)$*, on a par identification (on a unicité d'un développement limité)* $a_0=-a_0$*,* $a_1=a_1$*,* $a_2=-a_2$*, etc., jusqu'à* $a_n=(-1)^{n+1}a_n$*.*

Par conséquent, on obtient que $a_0=0$*,* $a_2=0$*, et tous les termes pairs sont nuls. On n'a par contre aucun renseignement sur les termes impairs.*

(2) Si f *est paire, alors* $f(-x)=f(x)$*. Donc de la même façon on obtient* $a_0=a_0$*,* $a_1=-a_1$*,* $a_2=a_2$*, etc., jusqu'à* $a_n=(-1)^na_n$*. Donc les termes impairs sont nuls.*

Exercice 225 (♡). *Exemples de fonctions continues et non continues*

(1) Pouvez-vous donner des exemples de fonctions continues ?

(2) Pouvez-vous donner des exemples de fonctions qui ne sont pas continues ?

Exercice 226 (♡). *Exemples de fonctions dérivables et non dérivables*

(1) Pouvez-vous donner des exemples de fonctions dérivables ?

(2) Pouvez-vous donner des exemples de fonctions qui ne sont pas dérivables ?

Exercice 227 (♡♡). *Exemples*

(1) Citez 3 fonctions appartenant à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(2) Soit $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant* $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 3f'(x) + 2f(x)$. *Sans résoudre l'équation différentielle, montrer que* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 228 (♣). *Calculs de dérivée nième* *(1) Calculer la dérivée nième des fonctions* exp, cos, sin.

(2) Soit $m \in \mathbb{Z}$. *Calculer la dérivée nième de* x^m.

Exercice 229 (♡). *Circuit RC*

Soit un circuit RC classique avec générateur de tension E.

(1) Dessinez le circuit

(2) Montrer que la tension au borne de la résistance vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_c = E$$

(3) Donner la forme générale des solutions de ce type d'équation différentielle.

(4) Justifier la continuité de la tension aux bornes du condensateur. Utiliser cette condition pour trouver u_c.

(5) Calculer l'intensité i aux bornes du condensateur. Etudier sa régularité. Justifier physiquement.

Exercice 230 (♡). *Chute libre*

Soit une pomme tombant par terre. Modéliser sa chute en négligeant les frottements.

Sachant qu'elle a une vitesse initiale nulle et qu'elle tombe d'une hauteur de deux mètres, donner l'expression de sa trajectoire en fonction du temps.

Exercice 231 (♡). *Raccord*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. *On définit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *par* $f(x) = \sqrt{x}$ *si* $0 \leq x \leq 1$ *et* $f(x) = ax^2 + bx + 1$ *si* $x > 1$.

(1) Démontrer que f *est continue si et seulement si* $a + b = 0$.

(2) Déterminer a *et* b *pour que* f *soit de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^+_*$ *; expliciter alors* f'.

Exercice 232 (♣). *Etude de* $x \to x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ *pour* $x \neq 0$, *et* $f(0) = 0$.

(1) Démontrer que f *est dérivable mais n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$.

Exercice 233 (♣). *Etude de* $x + x^3 \sin(\frac{1}{x^2})$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x + x^3 \sin(\frac{1}{x^2})$ *pour* $x \neq 0$, *et* $f(0) = 0$.

(1) Démontrer que f *et continue puis dérivable sur* $\mathbb{R}^*$. *Calculer* f'.

(2) Vérifier que f *est également dérivable en* 0, *mais que* f' *n'est pas continue en* 0.

(3) En déduire que f' *n'admet pas de développement limité (à aucun ordre) en* 0.

(4) Vérifier par contre que f *admet un développement limité d'ordre 2 en* 0. *(On pourra poser* $\varepsilon(x) = x \sin(\frac{1}{x^2})$*).*

Exercice 234 (♣). *Etude de* $x^3 \sin(1/x)$

(1) Soit $n \geq 1$. *Calculer* $\lim_{x \to 0} x^n \sin(1/x)$ *et* $\lim_{x \to 0} x^n \cos(1/x)$.
On note f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2) Sur un graphique, tracer rapidement l'allure des fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto -x^3$, *et* f.

(3) La fonction f *est-elle continue ?*

(4) Calculer la dérivée de f *sur* $\mathbb{R}^*$. *La fonction* f *est-elle dérivable sur* $\mathbb{R}$ *? Est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

(5) Démontrer que f *n'est pas deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On admettra que la fonction* $x \mapsto \cos(1/x)$ *n'admet pas de limite lorsque* x *tend vers 0*

(6) Démontrer par contre que l'on peut écrire $f(x) = x^2 \varepsilon(x)$, *avec* $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. *On dit que* f *admet un développement limité d'ordre 2.*

Exercice 235 (♣). *Raccord entre exponentielle et la fonction nulle*

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(1) Démontrer que f *est continue. Donner la limite de* f *en* $+\infty$.

(2) Pour tout $n \geq 1$, calculer la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{e^{-1/x}}{x^n}$. *Plus généralement, si P est un polynôme, calculer la limite* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} P(x)\dfrac{e^{-1/x}}{x^n}$.

(3) En déduire que f est dérivable en tout point. Donner sa dérivée (en précisant en particulier $f'(0)$). Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(4) Démontrer que f est deux fois dérivables, et que sa dérivée seconde est donnée par

$$f''(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{-2x+1}{x^4} e^{-1/x} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

(5) Soit $n \geq 0$.

(a) Soit P un polynôme[2]. Calculer en fonction de P' la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{P(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$.

(b) Démontrer par récurrence que f est n fois dérivable, et que sa dérivée n-ième est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x} \text{ si } x > 0, \end{cases}$$

où P_n est un polynôme (dépendant de n).

(6) Donner le développement limité à l'ordre n de la fonction f au voisinage de 0.

Exercice 236 (♣). *Synthèse*

Ecrivez la méthode à suivre pour étudier la régularité d'une fonction.

Exercice 237 (♡♡). *Comparaison de termes petits et grands*

(1) Classer les termes suivants du plus grand au plus petit quand $x \to 0$: $1, x, x^2, x^3, x^5, x^{18}, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^3}, x^{-2}, x^{-18}$.

(2) Classer les termes suivants du plus grand au plus petit quand $x \to +\infty$: $1, x, x^2, x^3, x^5, x^{18}, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^3}, x^{-2}, x^{-18}$.

Exercice 238 (♡♡). *dls de polynomes*

Quel est le développement limité en 0 à l'ordre 3 des polynomes suivants ?

(1) $P(x) = 3x^5 + 4x^2 + 5x + 1$

(2) $P(x) = 14x^3 + 2x + 5$

(3) $P(x) = 12x^{13} + 7x^8 + 5x^5$

---

2. C'est-à-dire une fonction de la forme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$

Exercice 239 ($\heartsuit\heartsuit$). *Comparaison de termes négligeables*

Pouvez-vous simplifier les expressions suivantes ? Les fonctions du type $x \to \varepsilon(x)$ sont toutes des fonctions qui tendent vers 0 quand x tend vers 0.

(1) $f(x) = 3x^5\varepsilon(x)$

(2) $f(x) = x^2\varepsilon(x) + 3x^5\varepsilon(x)$

(3) $P(x) = x^2\varepsilon(x) + x^2\varepsilon(x)$

Exercice 240 ($\heartsuit$). *Approximation d'une racine*

Supposons que vous n'ayez pas de calculatrice et que vous ayez à calculer $\sqrt{1,002}$. Donnez une valeur approchée du résultat en utilisant un DL d'ordre 1. Comparez au résultat de votre calculatrice.

Exercice 241 ($\clubsuit$). *Parité*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en 0, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0.

Autrement dit, il existe $(a_0, a_1, a_2, .., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + \epsilon(x)x^n$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$

(1) *On suppose que f est impaire.*

(a) *Expliquer pourquoi $f(0) = 0$.*

(b) *Montrer que les coefficients pairs du développement limité de f en 0 sont nuls, ie que $a_0, a_2, a_4...$ sont nuls.*

(2) *On suppose maintenant que f est impaire. Montrer que les coefficients impairs du développement limité de f en 0 sont nuls, ie que $a_1, a_3, a_5...$ sont nuls.*

Exercice 242 ($\heartsuit$). *Produits de développements limités*

Donnez le développement limité à l'ordre 2 des fonctions définies par :

(1) $(x + x^3)(1 + x^2)$

(2) $xcos(x)$

(3) $sin(x)\ln(1 + x)$

Exercice 243 ($\heartsuit$). *Produits de développements limités*

Donnez le développement limité en 0 à l'ordre 2 des fonctions définies par :

(1) $\cos(2x)$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$

Exercice 244 ($\heartsuit\heartsuit$). *Les indispensables*

Redonner les développements limités en 0 des fonctins usuelles à l'ordre n.

a) $\exp x$

b) $\cos(x)$

c) $\sin(x)$

d) $\dfrac{1}{1+x}$

e) $\ln(1+x)$

f) e^x

g) $\sqrt{1+x}$

h) $(1+x)^\alpha$, *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$

i) $P(x) = 3x^3 + 2x + \pi x^2 - 1$

Exercice 245 (♡). *Déterminer les développements limités en* 0 *à l'ordre indiqué des fonctions suivantes.*

a) $\ln(\cos(x))$, *ordre* 2

b) $\cos(x)\exp(x)$, *ordre* 3

c) $\sqrt{1+6x}$, *ordre* 3

d) $(\ln(1+x))^2$, *ordre* 4

e) $\dfrac{\cos(x)-1}{x}$, *ordre 3*

f) $\dfrac{1+x}{e^x}$, *ordre* 3

g) $\dfrac{x}{1+x+x^2}$, *ordre* 3

h) $\dfrac{1}{\cos(x)}$, *ordre* 4

Exercice 246 (♡). *DIY Si vous ne vous sentez pas suffisamment à l'aise avec les calculs de développements limités de l'exercice précédent, faites votre exercice vous-même : prenez une formule avec des fonctions usuelles, et calculez le développement limité en* 0 *à l'ordre 3 par exemple. Vous pouvez vérifier le résultat par exemple sur* `http://www.wolframalpha.com/` *grâce à la commande* `taylor` *(ou sur votre calculatrice si elle est suffisamment perfectionnée).*

(1) $\cos(2x)$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$

Exercice 247 (♡). *Dls de Polynomes*

(1) Donner avec un minimum de calculs les développements limités en 0 *à l'ordre* 3 *de*

a) $x^4+2x^3+3x^2+x+1$ *b)* $(x^2+1)^2 + x^{17}$ *c)* $(x+1)^4$.

(2) Donner avec un minimum de calculs les développements limités en 1 *à l'ordre* 3 *de*

a) $x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ *b)* $2x + (x-1)^{42}$ *c)* x^4

Exercice 248 (♣). *Composition de dls*
Déterminer les développements limités en 0 *à l'ordre indiqué des fonctions suivantes.*

a) $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$, *ordre* 3

b) $(\cos(x))^{\sin(x)}$, *ordre 5*

c) $\sqrt{a+\sqrt{b+x}}$, *ordre 1* (a, b *des réels strictement positifs fixés)*

d) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, *ordre 4*

e) $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$, *ordre 100*

Exercice 249 (♡). *calculs de limites*
Calculer les limites en $+\infty$ *des expressions suivantes :*

a) $(1+\dfrac{1}{x})^x$

b) $(1-\dfrac{1}{x})^x$

Exercice 250 (♡). *Déterminer les développements limités suivants à l'ordre* 3 *:*

a) $\sqrt{x}$, *au voisinage de* 2

b) $\sin(x)$ *au voisinage de* $\pi/6$

c) e^x *au voisinage de* 1

d) $\ln(x)$ *au voisinage de* e.

Exercice 251 (♡). *Calculs de limites grace aux dls Déterminer les limites en* 0 *des fonctions suivantes :*

a) $\dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$

b) $\dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$

c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$

d) $\dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

Exercice 252 (♣). *Calculs de limites grace aux dls Calculer les limites suivantes :*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3/2} \frac{\cos(\pi x)}{4x^2-9}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \sin(x)^{\tan(x)}$

Exercice 253 (♣). *Dl de tangente Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^6}$. *Déterminer* $f^{(n)}(0)$.

Exercice 254 (♣). *DL de tan(x)*

(1) En utilisant $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$*, retrouver le développement de* $\tan$ *à l'ordre 3.*

(2) Redémontrer la formule $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$*.*

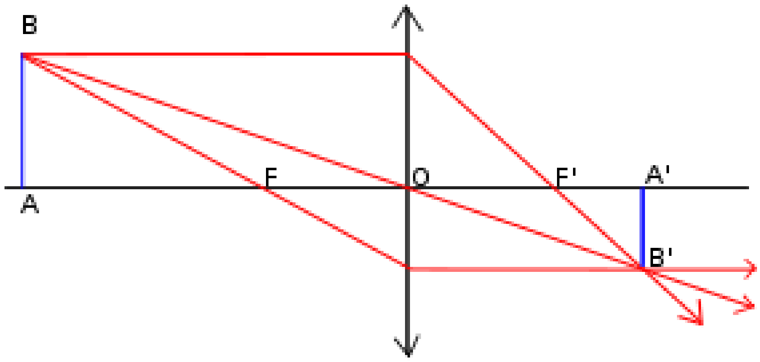
(3) Justifier pourquoi la fonction $\tan$ *et sa dérivée de* $\tan$ *admettent un DL à n'importe quel ordre en* 0*. Quel est le lien entre ces deux DL ?*

(4) Justifier que l'on peut écrire $\tan(x) = ax + x\varepsilon(x)$*. En utilisant la relation de la question (2), en déduire* a*.*

(5) Expliquer ensuite pourquoi l'on a $\tan(x) = ax + bx^3 + x^3\varepsilon(x)$ *pour un certain* b*. Calculer* b *avec la même méthode.*

(6) Faire de même pour obtenir le DL de $\tan$ *à l'ordre 5, puis à l'ordre 7 si vous avez du courage.*

Exercice 255 (♣♣). *Modélisation en optique*
On étudie l'image d'un objet à travers une lentille convergente.



Supposons que l'on bouge la lentille A *d'une longueur* $l \ll OA$*. Comment va varier la distance* OA' *entre la lentille et l'image ? Faire un dévelopement limité de l'expression à l'ordre 3.*