МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра обчислювальної техніки

Методи оптимізації та планування експерименту

Розрахунково-графічна робота

Тема: "Виконання кусочно-лінійної апроксимації"

Варіант 125

Виконав:
Студент 2-го курсу ФІОТ
групи ІО-92
Грисюк Дмитро

Перевірив:
доц. Селіванов В.Л

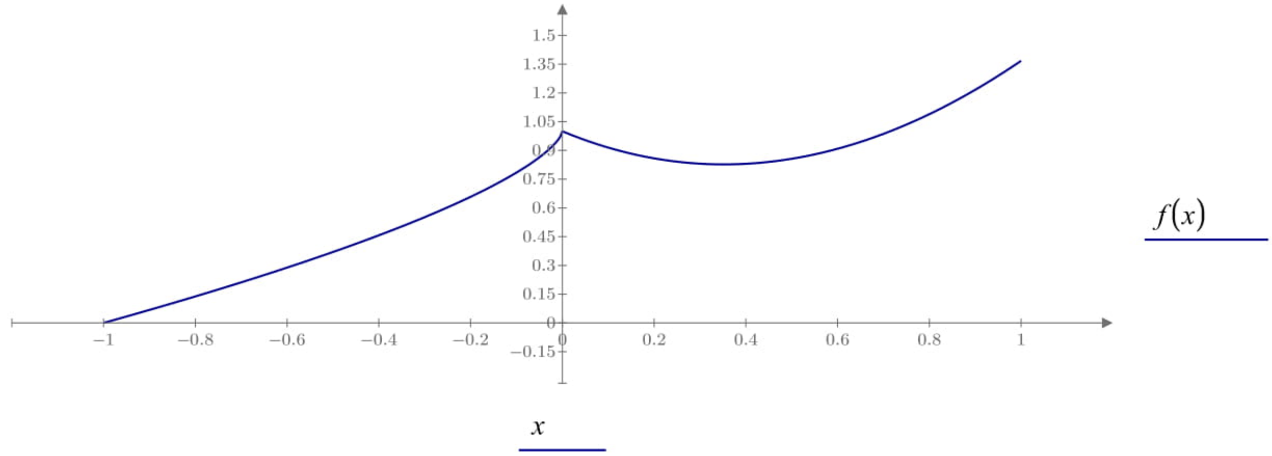
Київ – 2021

1. Побудувати графік функції y=f(x) для діапазону зміни аргументу $x_{min} \le x \le x_{max}$. Значення y=f(x), xmin та xmax узяти з таблиці варіантів.

$$f(x) := \begin{cases} \text{if } x \le 0 \\ \quad -\sqrt[3]{x^2} + 1 \\ \text{if } x \ge 0 \\ \quad x^2 + e^{-x} \end{cases}$$

$x_{min} := -1$

$x_{max} := 1$



2. Визначити другу похідну функції, побудувати графік для діапазону зміни аргументу $x_{min} \le x \le x_{max}$.

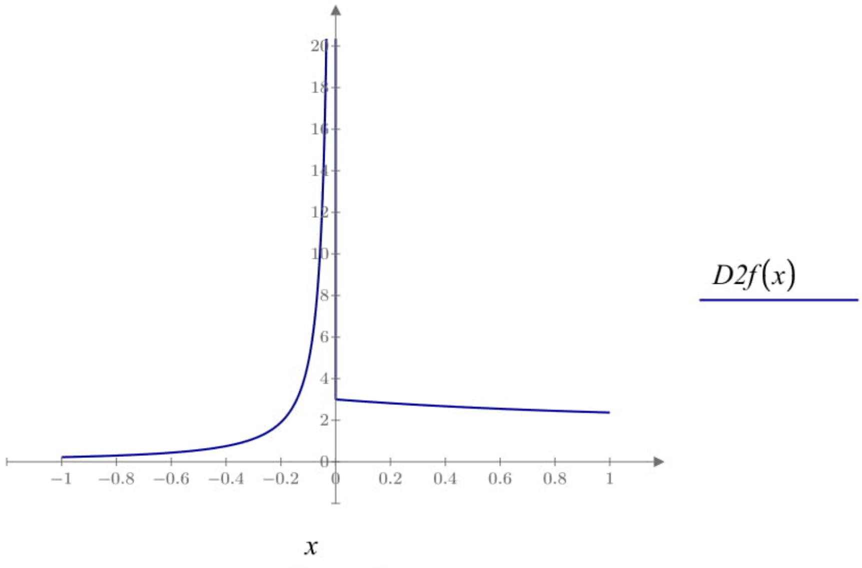
$$D2f(x) := \begin{cases} \text{if } x \le 0 \\ \quad \dfrac{d^2}{dx^2}\left(-\sqrt[3]{x^2} + 1\right) \\ \text{if } x \ge 0 \\ \quad \dfrac{d^2}{dx^2}\left(x^2 + e^{-x}\right) \end{cases}$$

$x_{min} := -1$

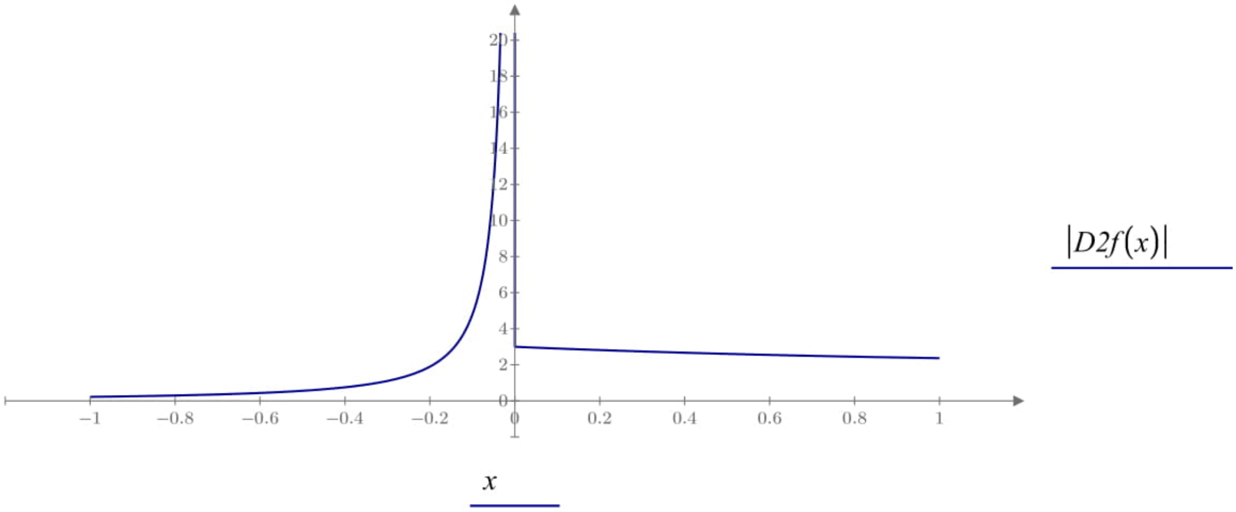
$x_{max} := 1$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(-\sqrt[3]{x^2} + 1\right) \to \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{9 \cdot x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 + e^{-x}\right) \to e^{-x} + 2$$



3. Побудувати графік модулю другої похідної для діапазону зміни аргументу $x_{min} \le x \le x_{max}$.



4. Проаналізувати графік нелініної залежності функції y=f(x), з'ясувавши характер опуклості та вгнутості функції по частинам, наявність точок перегину та наявність точок розриву першого роду другої похідної функції.

Друга похідна набуває додатніх значень на всьому інтервалі $x_{min} \le x \le x_{max}$. Значить, не має точок перегину ф-ї.

Опуклість та ввігнутість функції по частинам:

З графіка, на якому забражена друга похідна, видно, що друга похідна набуває додатніх значень в інтервалі $x_{min} \le x \le x_{max}$. Отже функція ввігнута на обох інтервалах $x_{min} \le x \le 0$ та $0 \le x \le x_{max}$

Точки розриву першого роду другої похідної функції:

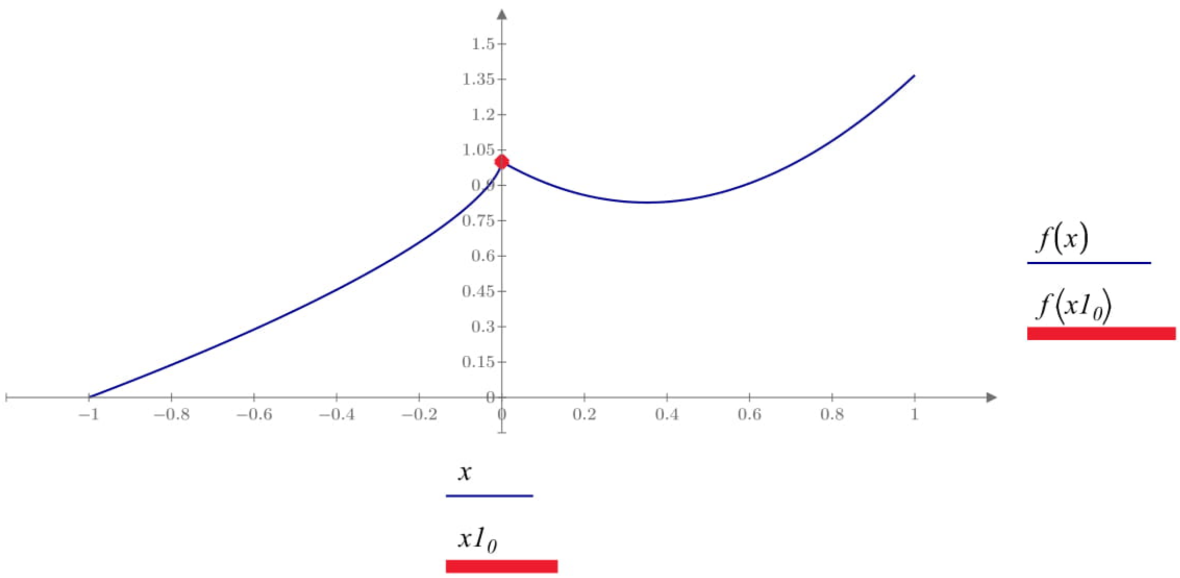
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 + e^{-x}\right) \to 3 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(-\sqrt[3]{x^2} + 1\right) \to \infty$$

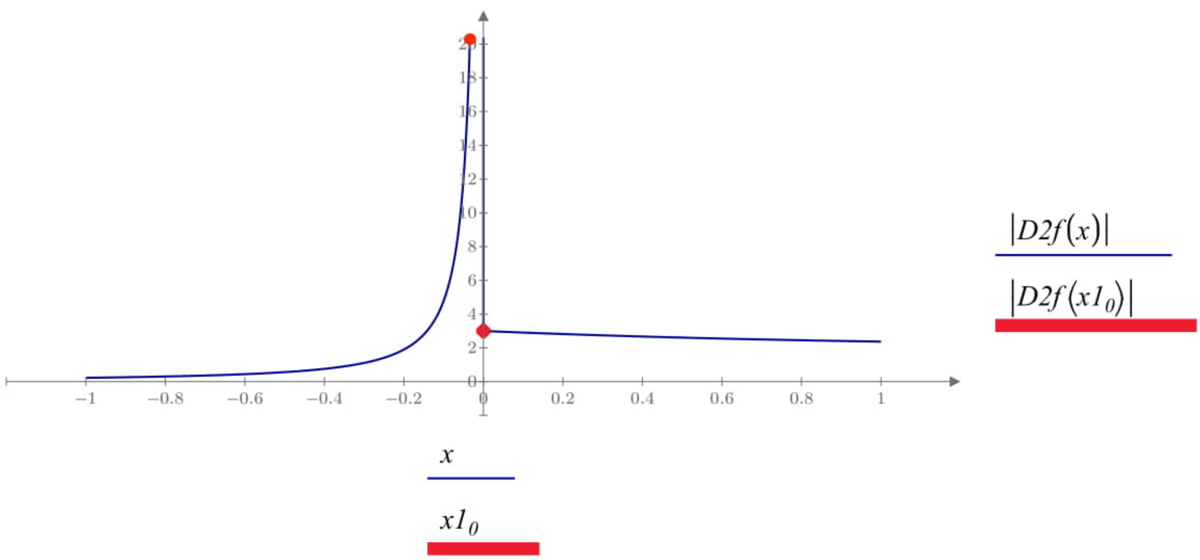
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 + e^{-x}\right) \to 3 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(-\sqrt[3]{x^2} + 1\right) \to \infty$$

Функція має точку розриву першого роду.

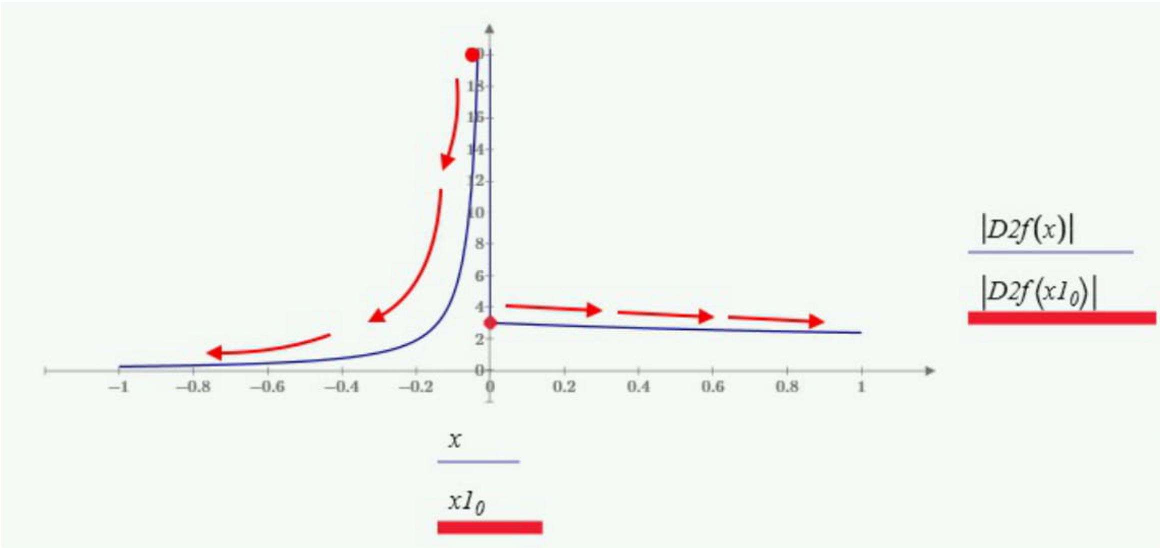
5. Обрати початкову точку(або початкові точки) апроксимації для подальших розрахунків, зазначивши її (або їх) на графіках y=f(x) та $\left|\frac{d^2}{dx^2}y\right|$, визначивши абсцису цієї початкової точки x_0^1

$x1_0 := 0$





6. По графіку $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$ обрати напрямок (або напрямки) розрахунків значень hi=xi-xi-1 (i=1,n) від початкової точки(або від початкових точок) та зазначити його(або їх) на цьому графіку у вигляді стрілок над графіком $\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|$. $x1_0 = 0$



7. Визначити методику розрахунку значень hi (i=1,n) та обрати формулу для розрахунку значень:

$$h_i = \sqrt{\frac{8\Delta f_{max}}{A_i}} \quad \text{або ,} \quad h_i = \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_i}}$$

де Ai- максимальне по модулю значення другої похідної на і-й частині ломаної лінії, що розраховується.

В даному випадку ми маємо точку розриву першого роду при x=0, тобто наше Aj(xj)=∞, отже для розрахунку hi будемо використовувати методику с додатку 1.

А для усіх інших значень hi формулу $h_i = \sqrt{\frac{16\Delta f_{max}}{A_i}}$

Додаток 1: Методика розрахунку перших значень h_j в разі, якщо $A_j(x_j) = \infty$.

1.1 Необхідно між точкою [x_m, $f(x_m)$] та точкою [x_m+h_m, $f(x_m+h_m)$] провести пряму лінію та записати рівняння для цієї лінії: **$y = F(x) = f(x_m) + b_m(x - x_m)$**, де **$b_m = \{f(x_m+h_m) - f(x_m)\} / h_m$.**

1.2 Абсолютна похибка інтерполяції розраховується по формулі **$\Delta f(x) = f(x) - F(x)$,** а для зазначеної частини ломаної лінії ця формула має наступний вигляд **$\Delta f(x) = f(x) - \{f(x_m) + b_m(x - x_m)\}$.** Слід зазначити, що на границях зазначеного інтервалу абсолютна похибка дорівнює нулю, тобто **$\Delta f(x_m) = \Delta f(x_m+h_m) = 0$,** а для якогось значення **x_k $\{x_m < x_k < x_m + h_m\}$** абсолютна похибка інтерполяції має екстремум**.**

1.3 Визначити першу похідну для **$\Delta f(x)$,** тобто **$d[\Delta f(x)] / dx$,** та знайти залежність **$x_k(h_m)$** з рівняння **$d[\Delta f(x)] / dx = 0$.** Враховуючи, що в нашому випадку **$\Delta f(x) = f(x) - \{f(x_m) + b_m(x - x_m)\}$,** отримуємо рівняння **$d[\Delta f(x)]/dx = df/dx - b_m = 0$** або **$df/dx = \{f(x_m+h_m) - f(x_m)\} / h_m$.** Таким чином, рівняння для визначення залежності **$x_k(h_m)$** має наступний вигляд:

$$df/dx\,(x_k) = \{f(x_m+h_m) - f(x_m)\} / h_m .$$

1.4 Знайти максимальне значення абсолютної похибки **$\Delta_{max}f = |\Delta f(x_k)| = |f(x_k) - F(x_k)|$** та отримати залежність **$\Delta_{max}f = \Psi(h_m)$, з** якої необхідно отримати обернену залежність **$h_m = \Psi^{-1}(\Delta_{max}f)$.**

*P.S.: Визначення оберненої залежності **$h_m = \Psi^{-1}(\Delta_{max}f)$** може бути достатньо складним, або навіть неможливим. Але, враховуючи те, що значення **$\Delta_{max}f$** при розрахунках підбирається, то при розрахунку першого інтервалу найпростіше вибрати значення **h_m**, потім знайти значення **x_k** та визначити значення **$\Delta_{max}f$**, яке в подальшому використовувати для розрахунків інших **h_i***

Моє рівняння (4) буде мати вигляд: y=F(x)=1+((f(0+hj)-1)/hj)(x-0)

$$f_2(x) := -\sqrt[3]{x^2} + 1$$

$$F(x) = 1 + \left(\frac{\left(f_2(h_j) - 1\right)}{h_j}\right)(x) \rightarrow F(x) = 1 - \frac{x \cdot \sqrt[3]{h_j^2}}{h_j}$$

Запишемо рівняння (7):

$$\frac{d^1}{dx_k^1}\left(-\sqrt[3]{x_k^2} + 1\right) = \frac{-\sqrt[3]{h_j^2} + 1 - 1}{h_j} \rightarrow -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_k^2}}{3 \cdot x_k} = -\frac{\sqrt[3]{h_j^2}}{h_j}$$

Виразивши x_k отримаємо: $x_k = \frac{8}{27} h_j$

$$\Delta f(x_k) = 1 - \sqrt[3]{x_k^2} - \left(1 - \frac{x_k \cdot \sqrt[3]{h_j^2}}{h_j}\right) \rightarrow \Delta f(x_k) = \frac{x_k \cdot \sqrt[3]{h_j^2}}{h_j} - \sqrt[3]{x_k^2}$$

$$\Delta f(x_k) = f_2(x_k) - F(x_k) \qquad \Delta f_{max}(x) = |\Delta f(x_k)|$$

$$\Delta f_{max} = \left|\frac{\frac{8}{27} h_j \cdot \sqrt[3]{h_j^2}}{h_j} - \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27} h_j\right)^2}\right|$$ Отримаємо: $h_j = \frac{81}{8}\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\Delta f_{max}^2}$

8. Підібрати таке значення похибки Δfmax, при якому в результаті розрахунків hi (i=1,n) отримаємо n=8 або n=9, тобто отримаємо апроксимуючу ломану лінію з 8 або з 9 частин. Виконати розрахунок усіх значень hi (i=1,n) та здійснити нумерацію вузлів (вершин ломаної лінії), починаючи з номера 0.

Поділимо ліву частину на інтервали:

$\Delta f_{max} := 0.00325$

$X_3 := 0$

$h_1 := \frac{81}{8}\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\Delta f_{max}^{\ 2}} = 0.385$ $\quad X_2 := X_3 - h_1 = -0.385$ $\quad A_2 := |D2f(X_2)| = 0.794$

$h_2 := \sqrt{\frac{16\cdot\Delta f_{max}}{A_2}} = 0.256$ $\quad X_1 := X_2 - h_2 = -0.641$ $\quad A_3 := |D2f(X_1)| = 0.402$

$h_3 := \sqrt{\frac{16\cdot\Delta f_{max}}{A_3}} = 0.36$ $\quad X_0 := X_1 - h_3 = -1$ $\quad A_4 := |D2f(X_3)| = 3$

Поділимо праву частину на інтервали:

$h_4 := \sqrt{\frac{16\cdot\Delta f_{max}}{A_4}} = 0.132$ $\quad X_4 := X_3 + h_4 = 0.132$ $\quad A_5 := |D2f(X_4)| = 2.877$

$h_5 := \sqrt{\frac{16\cdot\Delta f_{max}}{A_5}} = 0.134$ $\quad X_5 := X_4 + h_5 = 0.266$ $\quad A_6 := |D2f(X_5)| = 2.766$

$h_6 := \sqrt{\frac{16\cdot\Delta f_{max}}{A_6}} = 0.137$ $\quad X_6 := X_5 + h_6 = 0.403$ $\quad A_7 := |D2f(X_6)| = 2.668$

$h_7 := \sqrt{\frac{16\cdot\Delta f_{max}}{A_7}} = 0.14$ $\quad X_7 := X_6 + h_7 = 0.543$ $\quad A_8 := |D2f(X_7)| = 2.581$

$h_8 := \sqrt{\frac{16\cdot\Delta f_{max}}{A_8}} = 0.142$ $\quad X_8 := X_7 + h_8 = 0.685$ $\quad A_9 := |D2f(X_8)| = 2.504$

$h_9 := \sqrt{\frac{16\cdot\Delta f_{max}}{A_9}} = 0.144$ $\quad X_9 := X_8 + h_9 = 0.829$

Скорегуємо значення h9 щоб потрапити в точку x=1

Нехай $h_9 := 0.315$, тоді $X_9 := X_8 + h_9 = 1$

9. Здійснити розрахунок абсцис x1(1,n), починаючи з X0, початкових ординат yip(0,n), вузлів апроксимації(вершин ломаної лінії), що належать функції y=f(x), та кінцевих ординат yik(0,n), вузлів апроксимації з урахуванням корекції, яку здійснюють для отримання знакозмінної похибки апроксимації.

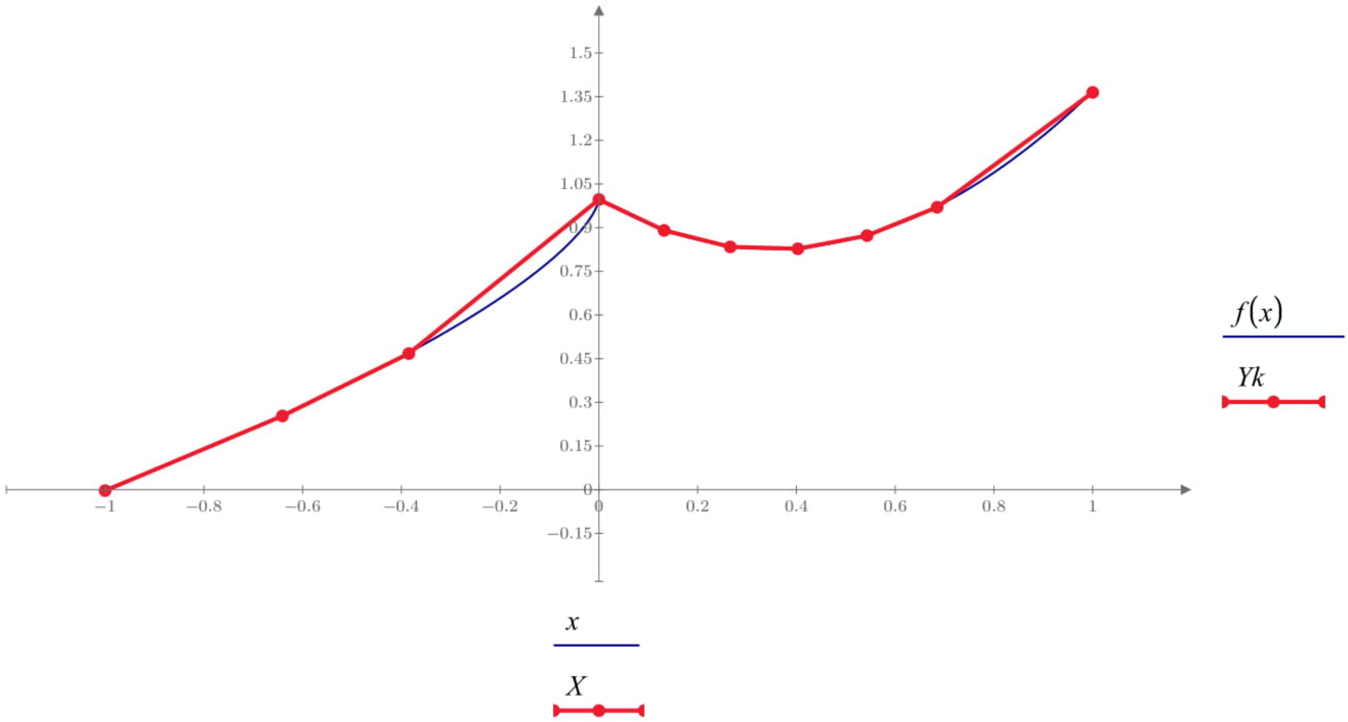
Виходячи з 8-го завдання, шукаємо ординати вершин ломаної лінії:

$$j := 0..9$$

$$X := \begin{bmatrix} -1 \\ -0.641 \\ -0.385 \\ 0 \\ 0.132 \\ 0.266 \\ 0.403 \\ 0.543 \\ 0.685 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Yp_j := f\left(X_j\right) \qquad Yk_j := Yp_j - \Delta f_{max}$$

$$Yp = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.257 \\ 0.471 \\ 1 \\ 0.894 \\ 0.837 \\ 0.831 \\ 0.876 \\ 0.973 \\ 1.368 \end{bmatrix} \qquad Yk = \begin{bmatrix} -0.003 \\ 0.253 \\ 0.468 \\ 0.997 \\ 0.891 \\ 0.834 \\ 0.827 \\ 0.873 \\ 0.97 \\ 1.365 \end{bmatrix}$$

10. Побудувати графік апроксимуючої функції (ломаної лінії) y=φ(x), використовуючи отримані значення xi(1,n) та yik(0,n).



11. Здійснити розрахунок значень кутових коефіцієнтів (значень тангенсів кутів нахилу), ki(i=1,n) лінійних частин ломаної лінії.

Знаходимо кутові коефіцієнти шляхом ділення різниці ординат на різницю абсцис:

$i := 1..9$

$k := \tan(\alpha)$

$$k_i := \frac{Yk_{i-1} - Yk_i}{X_{i-1} - X_i} \qquad k_i = \begin{bmatrix} 0.715 \\ 0.837 \\ 1.375 \\ -0.805 \\ -0.422 \\ -0.047 \\ 0.322 \\ 0.686 \\ 1.253 \end{bmatrix}$$

12. Виконати розкладання апроксимуючої функції (ломаної лінії) y=φ(x) на окремі доданки (лінійні та елементарні нелінійні {лінійні з обмеженням на нульовому рівні)}, починаючи з точки, яка має абсцису x0a. Значення x0a узяти з таблиці варіантів.

$X_0a := x_{min} = -1$

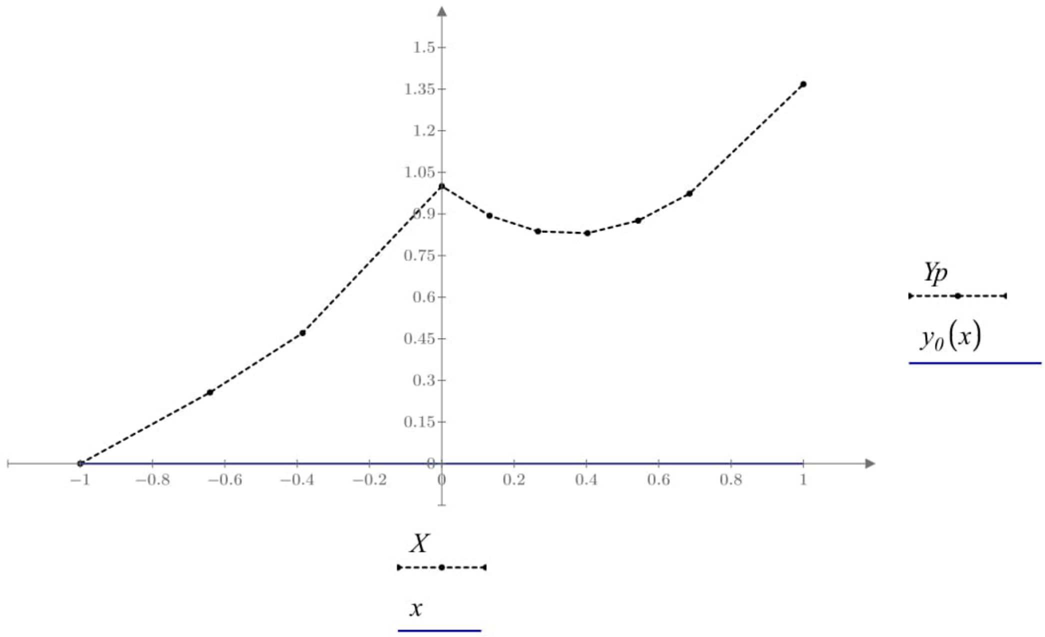
13. Над кожним елементарним нелінійним доданком зазначити його квадрант (I, II, III, IV) та режим {на відкривання чи на закривання }

$$y_0(x) := f\left(X_0 a\right) \qquad y(x) := y_0(x)$$

$i := 1..9$

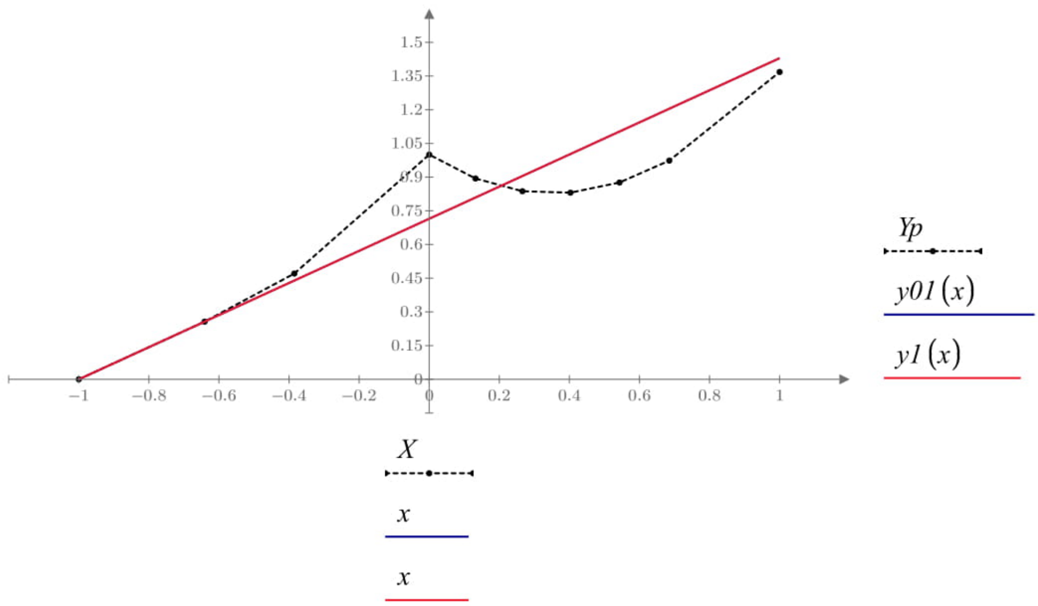
$b_i := k_i - k_{i-1}$

$$b_i = \begin{bmatrix} 0.715 \\ 0.122 \\ 0.538 \\ -2.179 \\ 0.383 \\ 0.375 \\ 0.37 \\ 0.364 \\ 0.566 \end{bmatrix}$$



2) $y01(x) := b_1 \cdot \left(x - X_0\right)$

$$y1(x) := y(x) + y01(x)$$

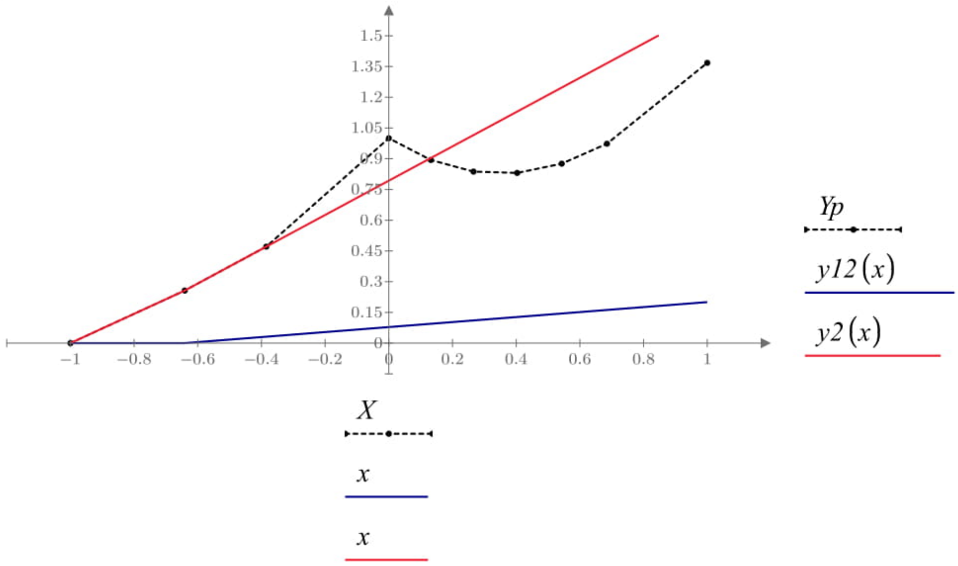


3) $y12(x) := b_2 \cdot (x - X_1)$

$$y12(x) := \begin{array}{l} \text{if } b_2 \cdot (x - X_1) \geq 0 \\ \quad \| \; b_2 \cdot (x - X_1) \\ \text{else} \\ \quad \| \; 0 \end{array}$$

$$y2(x) := y1(x) + y12(x)$$

I квадрант, на закриття

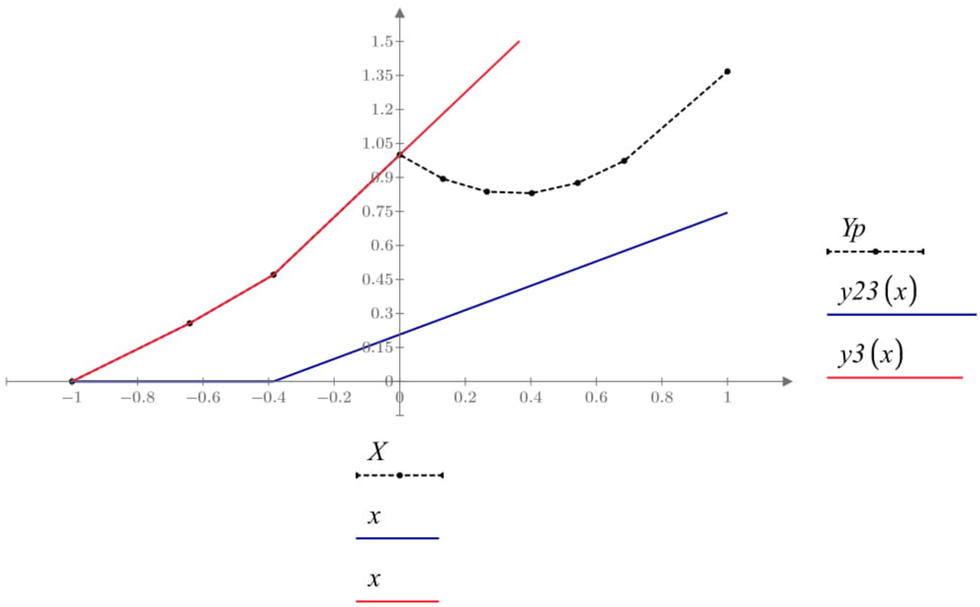


4) $y23(x) := b_3 \cdot (x - X_2)$

$$y23(x) := \begin{array}{l} \text{if } b_3 \cdot (x - X_2) \geq 0 \\ \quad \| \; b_3 \cdot (x - X_2) \\ \text{else} \\ \quad \| \; 0 \end{array}$$

$$y3(x) := y2(x) + y23(x)$$

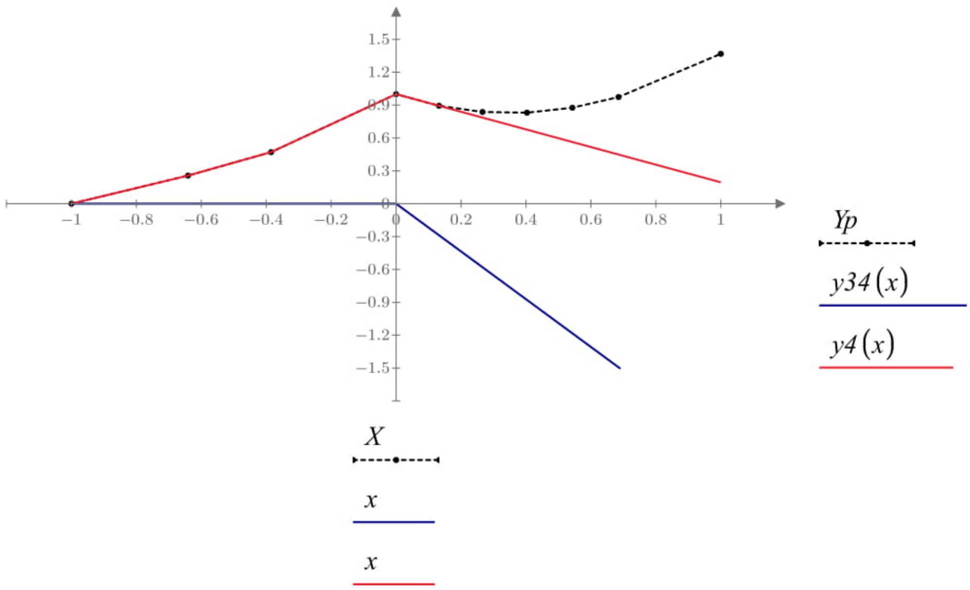
I квадрант, на закриття



5) $y34(x) := b_4 \cdot (x - X_3)$

$$y34(x) := \begin{array}{l} \text{if } b_4 \cdot (x - X_3) \le 0 \\ \quad \| \; b_4 \cdot (x - X_3) \\ \text{else} \\ \quad \| \; 0 \end{array}$$

$$y4(x) := y3(x) + y34(x)$$

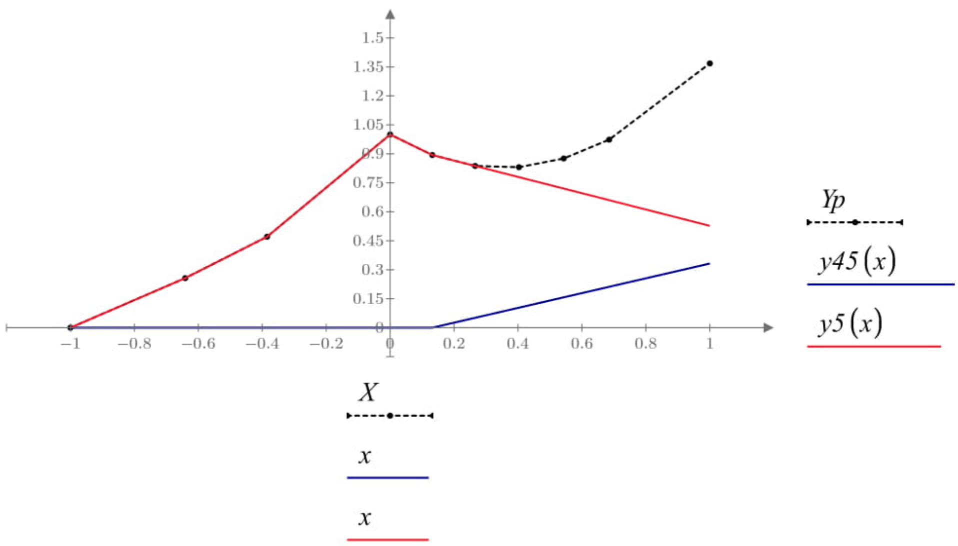


IV квадрант, на відкриття

6) $y45(x) := b_5 \cdot (x - X_4)$

$$y45(x) := \begin{array}{l} \text{if } b_5 \cdot (x - X_4) \ge 0 \\ \quad \| \; b_5 \cdot (x - X_4) \\ \text{else} \\ \quad \| \; 0 \end{array}$$

$$y5(x) := y4(x) + y45(x)$$



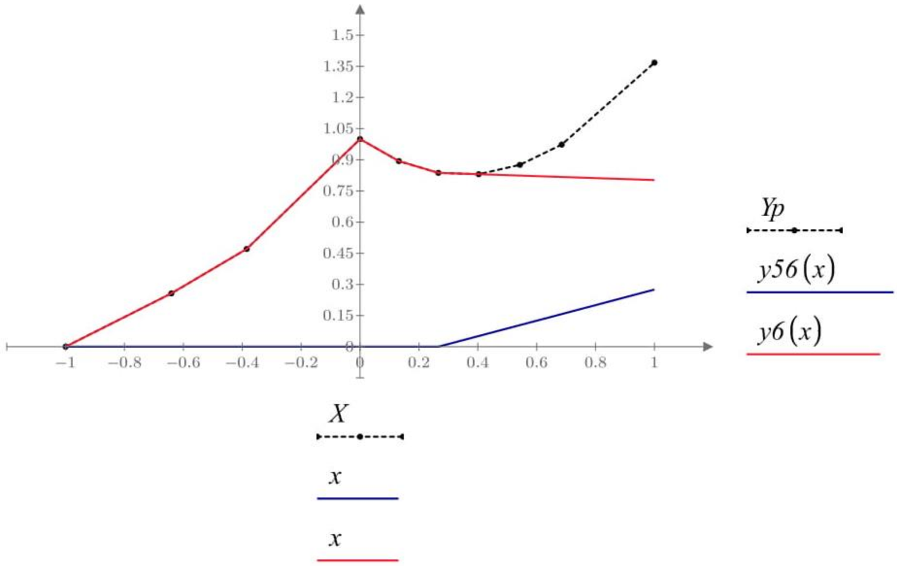
I квадрант, на відкриття

7) $y56(x) := b_6 \cdot (x - X_5)$

$$y56(x) := \begin{cases} b_6 \cdot (x - X_5) & \text{if } b_6 \cdot (x - X_5) \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y6(x) := y5(x) + y56(x)$$

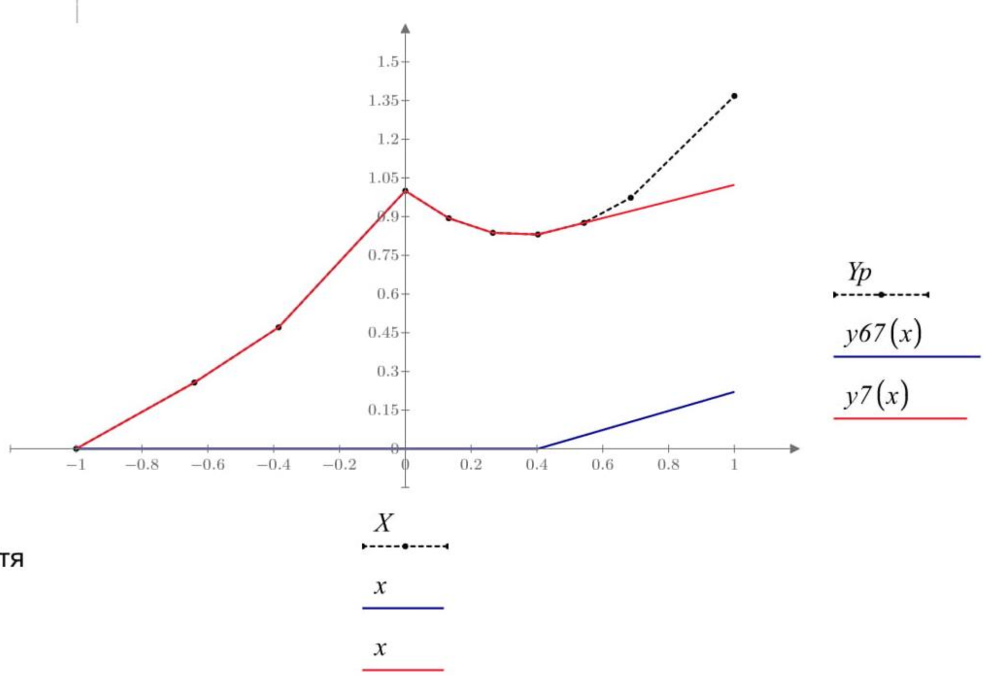
I квадрант, на відкриття



8) $y67(x) := b_7 \cdot (x - X_6)$

$$y67(x) := \begin{cases} b_7 \cdot (x - X_6) & \text{if } b_7 \cdot (x - X_6) \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y7(x) := y6(x) + y67(x)$$



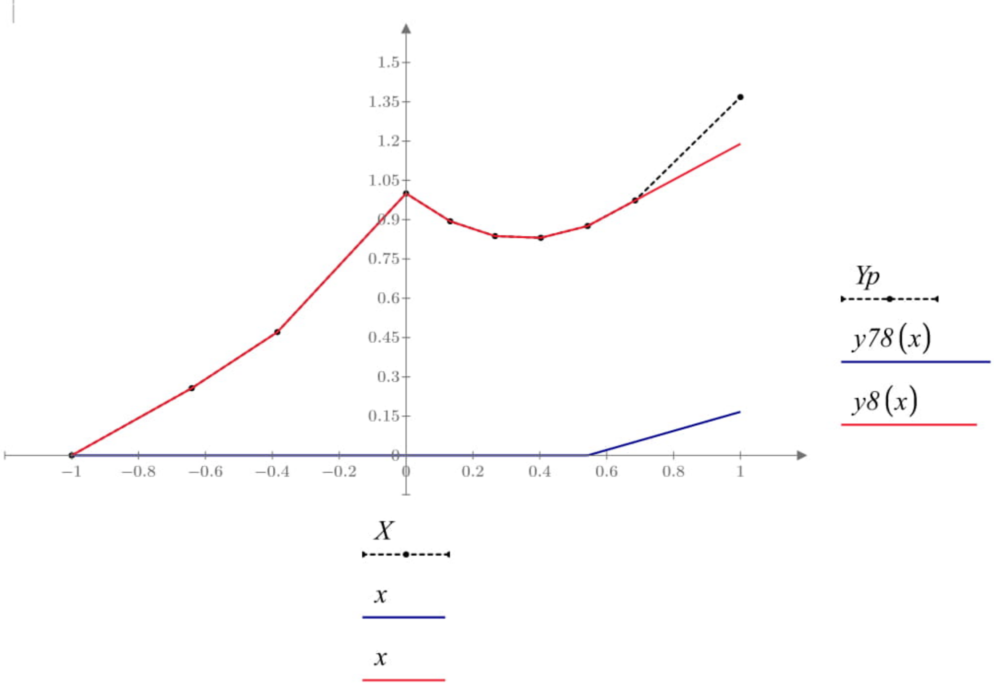
I квадрант, на відкриття

9) $y78(x) := b_8 \cdot (x - X_7)$

$$y78(x) := \begin{cases} b_8 \cdot (x - X_7) & \text{if } b_8 \cdot (x - X_7) \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y8(x) := y7(x) + y78(x)$$

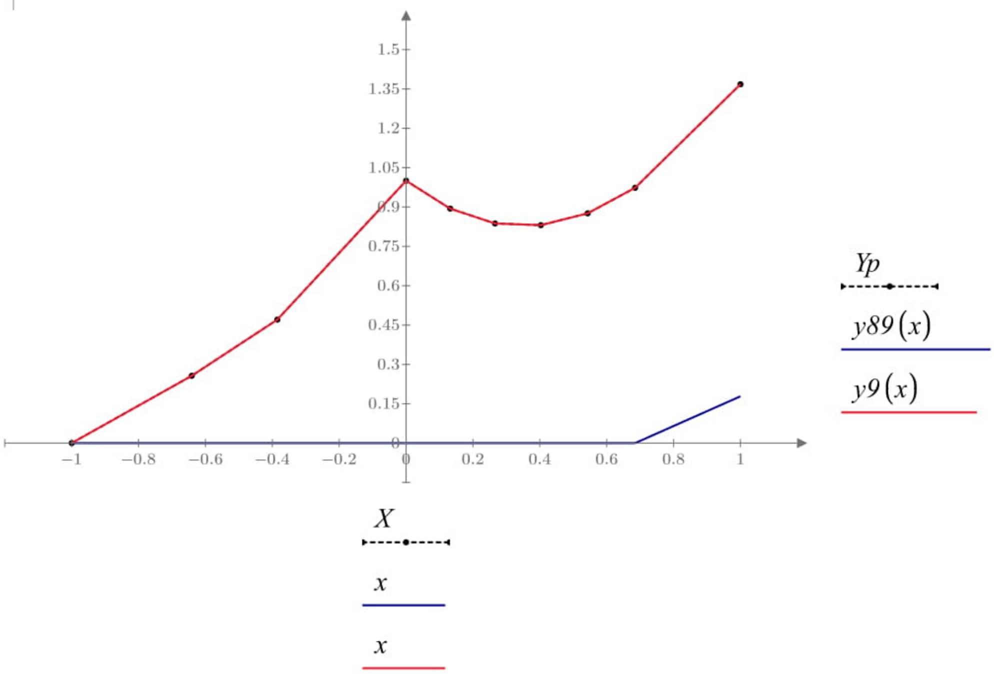
І квадрант, на відкриття



10) $y89(x) := b_9 \cdot (x - X_8)$

$$y89(x) := \begin{cases} b_9 \cdot (x - X_8) & \text{if } b_9 \cdot (x - X_8) \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y9(x) := y8(x) + y89(x)$$



І квадрант, на відкриття

14. Здійснити розрахунок наступних значень:
- значення φ(x0a) для першого лінійного доданку
- значення b0=k0 та x0 для другого лінійного доданку
- значення bi=ki-ki-1 та XREFi для кожного елементарного нелінійного доданку

1) значення φ(x0a) для першого лінійного доданку:

$\varphi\,(X_0 a) = 0$

2) значення b0=k0 та x0 для другого лінійного доданку:

$b_1 = 0.715 \qquad k_1 = 0.715 \qquad X_0 = -1$

3) значення $b_i := k_i - k_{i-1}$ та $Xref_i$ для кожного елементарного нелінійного доданку

$$b_i = \begin{bmatrix} 0.715 \\ 0.122 \\ 0.538 \\ -2.179 \\ 0.383 \\ 0.375 \\ 0.37 \\ 0.364 \\ 0.566 \end{bmatrix} \qquad Xref_j = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.641 \\ -0.385 \\ 0 \\ 0.132 \\ 0.266 \\ 0.403 \\ 0.543 \\ 0.685 \\ 1 \end{bmatrix}$$