Лабораторная работа по дисциплине "Теория функций комплексной переменной"

Горюнов Семён Олегович P3230,

Захарченко Роман Владимирович P3231,

Милёхина Елизавета Алексеевна P3232

October 2024

1 Доказательство свойств множества Мандельброта

Свойство 1. Множество Мандельброта переходит само в себя при сопряжении.

Пусть с принадлежит множеству Мандельброта (c = x + iy).

Рассмотрим $\widetilde{z_{n+1}} = \widetilde{z_n} + \bar{c}$. Докажем, что $\widetilde{z_n}$ сопряжено с z_n по индукции.

База. n = 0. $\widetilde{z_0} = \bar{z_0}$

Переход от n к n+1. $\widetilde{z_n} = \bar{z_n}$

$\widetilde{z_{n+1}} = \widetilde{z_n}^2 + \bar{c} = \bar{z_n}^2 + \bar{c} = \bar{z_n^2} + \bar{c} = \overline{z_n^2 + c}$

Следовательно, $\bar{c}$ принадлежит множеству Мандельброта.

Свойство 2. Если |c| > 2, то c не принадлежит множеству Мандельброта.

Пусть |c| > 2. |c| = r = 1 + k, r, k - действительный числа ($1 + k > 2$, следовательно $k > 1$).

Докажем, что z_n не ограничено. Воспользуемся индукцией.

База: $|z_0| = 0$, $|z_1| = r$, $|z_2| = |z_1^2 + c| \geq |z_1^2| - |c| = r^2 - r = r(r-1) = rk = rk^{2^{n-2}}$

Переход от n к n+1. $|z_{n+1}| = |z_n + c| \geq |z_n^2| - |c|$

$|z_n^2| - |c| = (rk^{2^{n-2}})^2 - r = r(rk^{2^{n-1}} - 1) = r(k^{2^{n-1}} + k^{2^{n-1}+1} - 1) \geq rk^{2^{n-1}}$. Так как k > 1, $k^{2^{n-1}+1} - 1 > 0$.

$|z_{n+1}| \geq rk^{2^{n+1}-2}$. Следовательно, т.к. k > 1, то $rk^{2^{n-1}}$ возрастает. Получаем, что z_n не ограничено.

2 Код для визуализации множества Мандельброта, Жюлиа и бассейнов Ньютона

https://github.com/dfa-ra/FractalsTFCV/tree/master

3 Немного о бассейнах Ньютона

Еще один тип динамических фракталов составляют фракталы (так называемые бассейны) Ньютона. Формулы для их построения основаны на методе решения нелинейных уравнений, который был придуман великим математиком еще в XVII веке. Применяя общую формулу метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, n $= 0$, 1, 2, ... для решения уравнения $f(z) = 0$ к многочлену $z^k - a$, получим последовательность точек: $z_{n+1} = \frac{((k-1)z_n^k - a)}{kz_n^{k-1}}$, n $= 0$, 1, 2, ...

Выбирая в качестве начальных приближений различные комплексные числа z_0, будем получать последовательности, которые сходятся к корням этого многочлена. Поскольку корней у него ровно k, то вся плоскость разбивается на k частей — областей притяжения корней. Границы этих частей имеют фрактальную структуру.

Заметим в скобках, что если в последней формуле подставить k $= 2$, а в качестве начального приближения взять $z_0 = a$, то получится формула, которую реально используют для вычисления квадратного корня из a в компьютерах.

Наш фрактал получается из многочлена $f(z) = z^3 - 1$.

4 Изображения множеств

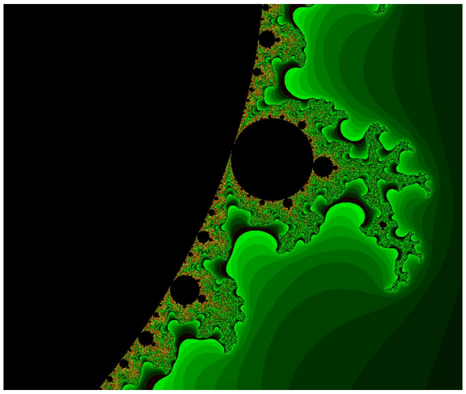

Figure 1: Изображение множества Мандельброта

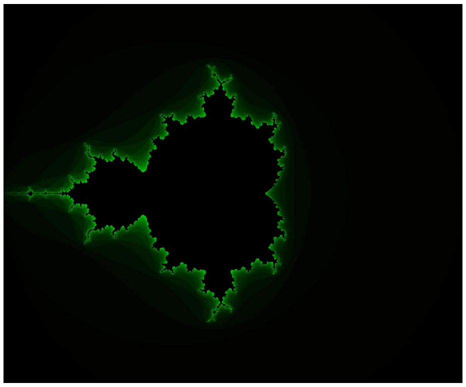

Figure 2: Изображение множества Мандельброта(количество итераций: 15

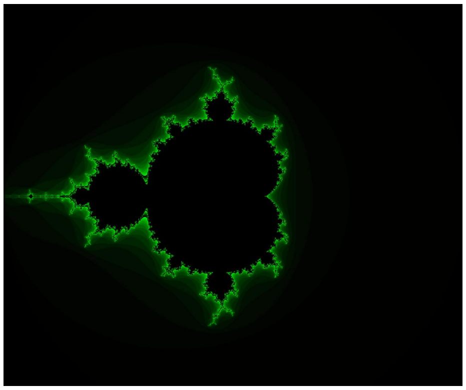

Figure 3: Изображение множества Мандельброта(количество итераций: 30)

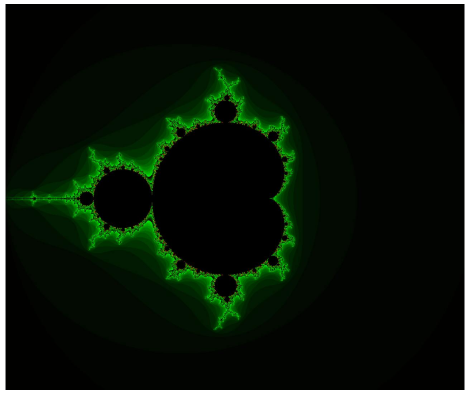

Figure 4: Изображение множества Мандельброта(количество итераций: 255)

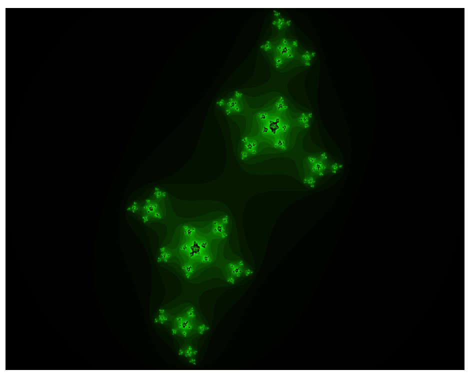

Figure 5: Изображение множества Жюлиа

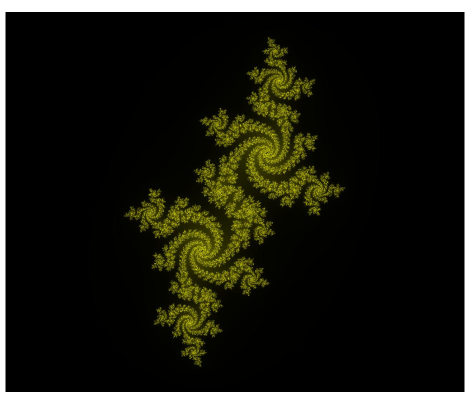

Figure 6: Изображение множества Жюлиа в точке ($c = 0.5251993 + i0.5251993$) (255 итераций)

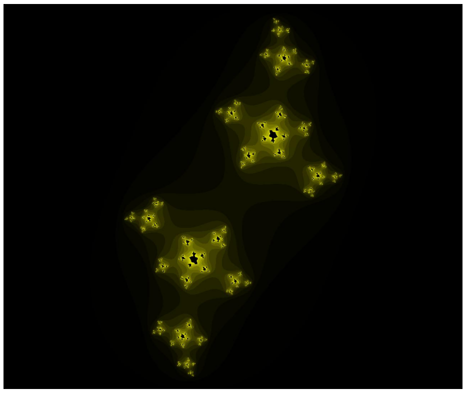

Figure 7: Изображение множества Жюлиа в точке (-0.5, 0.5) (16 итераций)

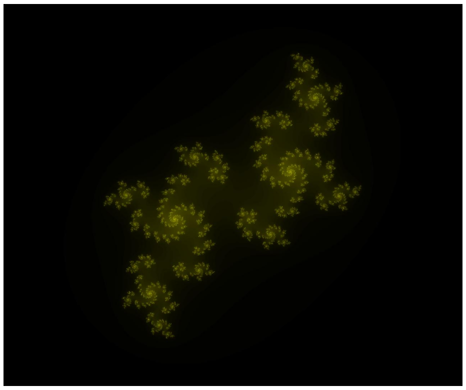

Figure 8: Изображение множества Жюлиа в точке (0, 0.7) (255 итераций)

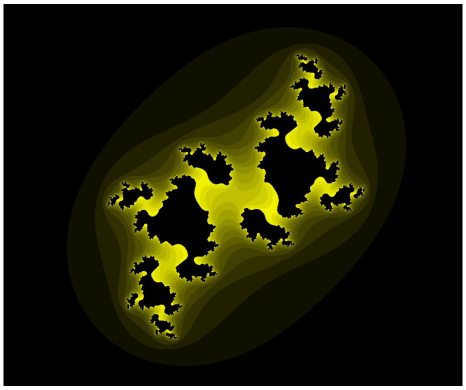

Figure 9: Изображение множества Жюлиа в точке (0, 0.7) (16 итераций)

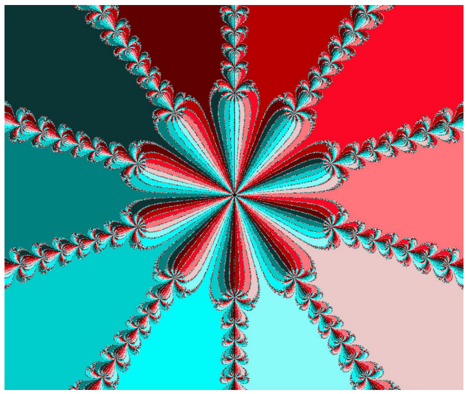

Figure 10: Изображение бассейнов Ньютона для многочлена $z^10 - 1$ (1000 итераций) с приближением 0.000000001

Figure 11: Изображение бассейнов Ньютона для многочлена $z^3 - 1$ (1000 итераций) с приближением 0.000000001

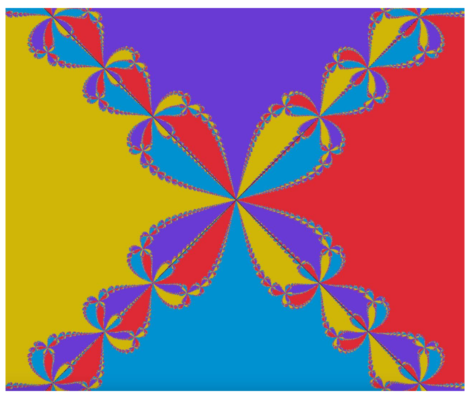

Figure 12: Изображение бассейнов Ньютона для многочлена $z^4 - 1$ (1000 итераций) с приближением 0.000000001