Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО”

Отчёт по матеаматическому анализу
ИДЗ №3
Вариант № Мой

Выполнил: Захарченко Роман Владимирович
Группа: Р3131
Поток: 11.3
Проверил: *******

Санкт-Петербург 2024

Оглавление

Задание №1.....3
Задание №2.....4
Задание №3.....5
Практическая часть.....5
Аналитическая часть.....5

Задание №1

1. Исследовать данную функцию на равномерную непрерывность на данном множестве пользуясь определением.

$f(x) = x + \sqrt{2x} + \dfrac{1}{3x}$, а) $X = [2, +\infty)$; б) $X = (0,\ 1)$.

а) $|x_1 - x_2| < \delta \qquad x_1 \in X,\ x_2 \in X$

$$\left| x_1 + \sqrt{2x_1} + \frac{1}{3x_1} - x_2 - \sqrt{2x_2} - \frac{1}{3x_2} \right| =$$

$$= \left| x_1 - x_2 + \sqrt{2}\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right) \right| =$$

$$= \left| x_1 - x_2 + \sqrt{2}\,\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} + \frac{x_2 - x_1}{3 x_1 x_2} \right| =$$

$$= \left| x_1 - x_2 + \sqrt{2}\,\frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} - \frac{x_1 - x_2}{3 x_1 x_2} \right| =$$

$$= \left| (x_1 - x_2)\underbrace{\left(1 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right) - \frac{1}{3 x_1 x_2}\right)}_{>0} \right| =$$

$$= |x_1 - x_2| \left(1 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right) - \frac{1}{3 x_1 x_2}\right) \le$$

$$\le 2|x_1 - x_2| < 2\delta \le \varepsilon$$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

Значит $f(x)$ р. непрерывна на $X = [2; +\infty)$

б) $X = (0, 1)$

∡ 2 последовательности сходящиеся к 0

$x_n = \dfrac{1}{6n}$

$x_n' = \dfrac{1}{12n}$

то $x_n, x_n' \in (0,1)$ $\quad |x_n - x_n'| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

но $|f(x_n) - f(x_n')| =$

$$= \left| \frac{1}{6n} + \sqrt{\frac{1}{3n}} + 2n - \frac{1}{12n} - \sqrt{\frac{1}{6n}} - 4n \right| =$$

$$= \left| \underset{\to 0}{-\frac{1}{12n}} + \underset{\to 0}{\sqrt{\frac{1}{3n}}} - \underset{\to 0}{\sqrt{\frac{1}{6n}}} \underset{\to -\infty}{- 2n} \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \Rightarrow$$

при приближении к 0 разность значений не только не стабилизируется но и увеличивается

$\Rightarrow f(x)$ не р. непрерывна на $X = (0, 1)$

Задание №2

2. Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти предел.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{4-\frac{i^2}{n^2}}}$$

Сумма всегда будет находиться в промежутке $[0;1]$

Разобьем на n частей $x_i=\frac{i}{n}$ $i=\{0,1,\ldots,n\}$.

$\Delta x_i=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}$

$$=\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4-\frac{i^2}{n^2}}}}_{f(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

$f(x)$ - непрерывная и интегрируема на промежутке $[0;1]$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=$$

по определению

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\arcsin\frac{x}{2}\Bigg|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\frac{0}{2}=\frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Задание №3

Практическая часть

Мой гитхаб: ….. (а ну вы собственно на нём)

Аналитическая часть

3. В рамках данного задания необходимо выполнить аналитический и практический этапы работы с определенным интегралом. Подробное условие доступно по ссылке https://github.com/piikt-2-sem-calc/calc-sem-2.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad [a,b] = [1,e].$

а) разобьём отрезок $[1,e]$ на n частей

$x_i = 1 + (e-1)\cdot\frac{i}{n} \quad i \in \{0, \ldots, n\}.$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 1 + (e-1)\frac{i}{n} - \left(1 + (e-1)\frac{i-1}{n}\right) =$

$= \frac{e-1}{n}$

$m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x)) \qquad M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x))$

$s_\tau(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \frac{e-1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ ← нижняя сумма Дарбу

$S_\tau(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \frac{e-1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} M_i$ ← Верхняя сумма Дарбу.

б) $\int\limits_1^e f(x)\,dx = \int\limits_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 2 = 2(\sqrt{e} - 1)$

б) Так как посчитать $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e-1}{n}\sum\frac{1}{\sqrt{1+(e-1)\frac{i}{n}}}\right)$

с помощью известных нам функций не представляется возможным попробуем сделать не равномерное разбиение такое чтобы оно удовлетворяло условие на мелкость

$$\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^e x^{-\frac12}\,dx \quad] \; a=1,\ b=e$$

∢ геометр прогрессию где
$$\left|\begin{array}{l} x_0 = a \\ x_1 = x_0 q \\ x_2 = x_0 q^2 \\ \dots\dots \\ x_n = x_0\cdot q^n = b \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}}\cdot q^n = b \qquad a\cdot q^n = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \quad \text{получается} \quad x_i = a\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^i}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}} - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-1}{n}} = a\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}} - \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\right) =$$

$$= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-1}{n}}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$∢ \quad \max \Delta x_i = \Delta x_n = b\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = b\left(1-\underbrace{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ удовлетворяется условие на мелкость.

$$S = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^i}}}\cdot a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{a^{\frac12}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{2n}}}\cdot a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \qquad \frac{b}{a} = A$$

$$= \sum_{i=1}^n a^{-\frac12}A^{-\frac{i}{2n}}\cdot a\cdot A^{\frac{i}{n}}\left(1-\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a^{\frac12}A^{\frac{i}{2n}}\left(1-\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac1n}\right) = a^{\frac12}\left(1-\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac1n}\right)\sum_{i=1}^n A^{\frac{i}{2n}} =$$

$$= a^{\frac12}\left(1-\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac1n}\right)\frac{\left(A^{\frac{1}{2n}}\left(A^{\frac12}-1\right)\right)}{A^{\frac{1}{2n}}-1} =$$

$$= \left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac1n}\right)\left(\frac{e^{\frac{1}{2n}}\left(e^{\frac12}-1\right)}{e^{\frac{1}{2n}}-1}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha'}{\beta'} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-e^{\frac1n+\frac12}+e^{\frac1n}-e^{\frac12}+1}{2n^2e^{\frac{1}{2n}}}}{\frac{-e^{\frac{1}{2n}}}{2n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{-e^{\frac1n+\frac12}+e^{\frac1n}-\sqrt{e}+1}{e^{\frac1n}} = -\frac{-\sqrt{e}+1-\sqrt{e}+1}{1} =$$

$= 2\sqrt{e}-2$ аналогичный ответ мы получили в пункте в