

Electromagnetismo

Notas de clase

Diego Gallego Mahecha



Escuela de Física

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

19 de junio de 2021

Índice general

Prefacio	I
1. Introducción	1
1.1. <i>una invitación a interactuar</i>	1
1.2. Un poco de historia	3
1.3. Algunas generalidades sobre los campos	10
1.4. ¿Qué exploraremos en el curso?	14
2. Interacción entre cargas estáticas	19
2.1. Carga eléctrica	19
2.1.1. Propiedades de la carga eléctrica	20
2.2. Ley de Coulomb (Cavendish 1770's)	22
2.2.1. Sobre las unidades	25
2.2.2. Superposición lineal	29
2.2.3. ¿Tuvo suerte Cavendish (Coulomb)?	31
2.2.4. Fuerza de Coulomb y la masa del fotón	32
2.2.5. Aplicaciones	33
2.3. Energía de un sistema de cargas	33
2.3.1. Estabilidad de un sistema de cargas	39

Prefacio

Estas notas fueron hechas en el proceso de preparación de clase para el curso Electricidad y Magnetismo de la escuela. En principio tienen como único objetivo servirme como guía en el desarrollo de clase. Están basadas casi en su totalidad en la segunda edición del Purcell, del curso de Física de la Berkeley, extrayendo ejemplos y algunos tópicos de otros libros como el Sadiku y las lecturas de Feynmann. Lo mismo con los ejercicios, algunos fueron modificados o inventados por mí.

Otros libros sugeridos para lecturas complementarias:

- Elementos de electromagnetismo, M.N.O. Sadiku, ed. Oxford: los tres primeros capítulos muestran las herramientas matemáticas fundamentales que se necesitan. Trae también ejemplos un poco más prácticos que los desarrollados en la Berkeley.
- Introduction to Electrodynamics, D.J. Griffiths, Prentice Hall ed. : con introducción concisa a las herramientas matemáticas necesarias, es un texto de un nivel superior al del curso, pero con un lenguaje sencillo y profundidad conveniente si se quiere ir más allá.
- The Feynman's Lectures on Physics Vol.II, R. B. Leighton & M. Sands, Addison-Wesley ed.: basada en las clases de Richard Feynman en su cátedra del CALTECH, tratan en un lenguaje sencillo temas de gran profundidad, presentando los conceptos desde un punto de vista distinto.

Estas notas aun están en proceso de construcción y no pretenden de ninguna manera remplazar la lectura juiciosa de la Berkeley. En un futuro, ojalá no muy lejano, motivado por observaciones de los estudiantes sobre la Berkeley espero estas sirvan como tal, pero por el momento ¡NO LO SON!

En esta nueva versión del curso procuraré, además, complementar las notas con videos que espero sirvan para agilizar procesos de discusión.

Capítulo 1

Introducción

Luego de burlar a su enemigo se pusieron a probar la fuerza de las armas en un palo llamado *keretena*, de madera muy dura. Fizido, con el espejo en la mano, se paró frente a ese palo, en tanto que Jitoma empuñaba el mazo. Fizido manipuló el espejo haciéndolo relampaguear, y Jitoma golpeó con mucha fuerza el mazo contra la tierra. Así se produjo el rayo con el que volaron el palo en mil pedazos.

Relato cultura uitoto.

1

1.1. una invitación a interactuar

Estamos ante un curso crucial. Con la mecánica hemos comprendido cómo describir, incluso predecir la dinámica de los cuerpos una vez conocemos las fuerzas que actúan sobre este. Sin embargo, el origen propio de las fuerzas

¹Extraído como escrito en *El Rayo: mitos, leyendas, ciencia y tecnología*, de Horacio Torres-Sánchez. Editorial Universidad Nacional, 2002.

llamadas de contacto se ha dejado de lado suponiendo un acercamiento fenomenológico donde suponemos que simplemente son cantidades que podemos medir, en forma un poco tautológica, a través de la segunda ley de Newton. Un caso particular que también se estudia allí es la fuerza gravitacional, para la cual utilizamos la ley universal de la gravitación de Newton. En este caso estamos hablando de una interacción fundamental y este curso es un escenario exclusivo para estudiar otra de las interacciones fundamentales. Pero entonces repasemos brevemente qué es una interacción fundamental.

El tipo de interacción a la que estamos más familiarizados es las interacciones sociales, las cuales se median, usualmente, a través del lenguaje, escrito, hablado o de otro tipo de expresiones culturales como la música. En este ejemplo son claros los ingredientes que hacen que la interacción exista: dos individuos, que serían los entes fundamentales de nuestro sistema, y la mediación como tal. Si eliminamos alguno de estos la interacción cesa. Pero también es claro que incluso con más personas la interacción por lo general es entre dos personas. Por ejemplo en un discurso la interacción será entre el parlamentario y el que escucha, y estará mediada por la voz del que parlamenta. Aunque también podríamos pensar en interacciones simultáneas entre más de un par de individuos es usual que situaciones más complejas se pueda describir a partir de un elemento fundamental.

Una interacción que también puede presentarse entre dos personas, e incluso entre entes inanimados, es la de contacto. En este caso, aunque es evidente saber cuando dos cuerpos están interactuando o no, no es claro si existe o no una mediación y surge una pregunta natural ¿toda interacción está mediada por algo? En general con las interacciones entre objetos algo similar ocurre y la situación se complica tanto que cualquier explicación parece aplicarse sólo de manera fenomenológica y para a cada caso particular.

Para simplificar las cosas los Físicos hemos preferido estudiar las interacciones entre los elementos fundamentales de la materia, así como hicimos con las interacciones sociales y las personas, esperando describir todas las demás interacciones como efectos emergentes de estas. Los bloques fundamentales de la materia en la actualidad se dividen en dos tipos, *leptones* y *quarks*, que en general denominamos partículas fundamentales. De modo que las interacciones fundamentales son precisamente las interacciones que experimentan las partículas fundamentales. También a la fecha se conocen sólo cuatro tipos de interacciones fundamentales, a decir: gravitacional, electromagnetismo, nuclear débil y nuclear fuerte. Como mencionamos anteriormente, la gravedad ya se abordó, así sea someramente, en los cursos de mecánica y dedicaremos

este curso a estudiar las interacciones electromagnéticas.

Hoy sabemos que la mediación de las interacciones fundamentales está dada por campos² que harían las veces de las voces entre personas que interactúan incluso si no están en contacto.

El que le dediquemos un curso exclusivo a esta ya nos da una idea de la riqueza en este tema. Incluso encontraremos que comparte parte de su fenomenología a la de la gravitación,³ pero encontraremos elementos que van más allá y que marcaron el camino a las revoluciones que llevaron a la formulación de la relatividad de Einstein y la mecánica cuántica, los dos pilares de la Física contemporánea. En este punto cabe resaltar que precisamente estas dos últimas serán necesarias para comprender las interacciones nucleares.

Como toda ciencia fundamental el estudio en sí de esta interacción, como herramienta para la comprensión de cómo funciona el universo, ya es suficiente motivación. Sin embargo, también es correcto decir que los fenómenos electromagnéticos han sido los precursores de los avances tecnológicos en los dos últimos siglos y con vista a seguir la misma tendencia. La pila de Volta, los generadores y motores eléctricos, los transistores y microchips, e incluso la tomografía por rayos gamma, los átomos ultrafríos, la radiación cósmica de fondo y la computación cuántica, muestran apenas un pequeño ejemplo del gran abanico de sistemas donde el electromagnetismo tiene cabida. No menos importante, y de hecho relacionado, es hecho que es esta interacción la que está presente en todos los procesos biológicos y químicos.

Durante nuestro modesto curso nos internaremos a intentar comprender tanto las generalidades del electromagnetismo como algunas herramientas que nos permitan extraer predicciones cuantitativas precisas en algunos sistemas sencillos y estimar las situaciones generales.

1.2. Un poco de historia

Es cierto que la gravedad ha sido la interacción (fuerza) más presente en la historia de la humanidad, pero, por esto mismo, se torna tan evidente

²De manera más precisa por campos cuánticos, los cuales, de hecho, terminarán representando incluso a las partículas fundamentales. Pero este tema va mucho más allá de los objetivos del curso, entrando en el campo de la electrodinámica cuántica.

³Es cierto que la gravitación universal bien merece un curso exclusivo, por ejemplo estudiando en detalle la mecánica celeste, pero conceptualmente no es tan rica como sí lo es el electromagnetismo.

que al intentar describirla simplemente se acomodaba como parte de la naturaleza misma de las cosas, sin una explicación realmente convincente. Los fenómenos electromagnéticos como el rayo, en cambio, parecen misteriosos y mágicos, por lo que se les asociaba a los dioses y sus devenires. La dificultad de control de estos fenómenos explica también que una explicación satisfactoria demorará más que la de la gravedad. A continuación hacemos un recuento de algunos momentos estelares de la electricidad y magnetismo. Para un recuento más emocionante los invito a ver este [documental de la BBC](#) presentado por el profesor Jim Al-Khalili y un alista más detallada y con otros eventos en la página [Wiki correspondiente](#).

Antigüedad

- Antigua Grecia: al frotar ciertos materiales se evidencia una atracción o repulsión con otros objetos. Se observan entonces dos tipos de naturaleza, o como la conocemos ahora, carga, “vitrea” como la carga adquirida por el vidrio en este proceso hoy denominada positiva, y la “resinosa” la adquirida por el Ambar, que es negativa. Seguramente notan la relación con los rayos en la tormentas, al realizar el experimento en la oscuridad y ver los pequeños rayos producidos al acercar el objeto frotado a otro. El origen, sin embargo, se lo dejan a la furia de Zeus.
- Árabes 600 años A.C.: a la que hoy denominamos Magnetita la llaman “piedra guía”, guía \equiv Imán en Árabe.
- Antigua China: brújulas en los barcos.

Inicios de la experimentación El siglo XVIII vienen un conjunto de curiosos experimentalistas que descubren propiedades como la conducción y la utilizan para intentar comprender la naturaleza de las corrientes y la carga eléctrica.

- Mediados del siglo XVII Otto von Guericke, el mismo del famoso experimento de los hemisferios de Magdeburgo. Primeros instrumentos generadores de electricidad con potencialidad para investigación.
- Inicios del siglo XVIII Francis Hauksbee. Mejora los generadores y, utilizando una bomba de vacío desarrollada por él mismo, hace demostraciones en la Real Academia inglesa de destellos que se generan dentro de una bola de cristal que es frotada con la mano.

- 1729 Stephen Gray utiliza el generador Hauksbee y demuestra que es posible transportar electricidad a largas distancias utilizando materiales que denomina conductores. Al resto los llama aislantes. Su explicación se asimila a la contemporánea del calor, utilizando los denominados “fluidos” o “fuegos sutiles”. Gray no logra almacenar la carga.
- 1745 – 46 Independientemente Ewald Georg von Kleist y Pieter van Musschenbroek desarrollan lo que se conoce como la *Botella de Leiden* con la que logran almacenar la carga incluso por semanas. La botella como tal es un recipiente con agua en contacto con el generador del Hauskbee. Parece ratificar la idea de un fluido sutil, pero el hecho que deba mantenerse la parte externa del recipiente en contacto con un conductor es un acertijo que no concuerda con esta idea.
- 1740 – 1750 Benjamin Franklin: lo que se evidencia como dos tipos distintos de carga, en los objetos frotados, se pueden entender como una única donde el exceso de esta produce carga negativa, y el defecto el signo opuesto positivo. El transporte de estas cargas también explicaría la naturaleza observada en las corrientes, como el fenómeno de la carga de la botella de Leiden.
- 1752 mayo 23. Thomas-François Dalibard y Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, realizan un experimento con una barra metálica que se extendía cuatro metros saliendo hacia arriba de una botella. En una tormenta un rayo golpea este pararrayos y la energía se almacena en esta botella de Leiden. Los rayos sí son electricidad, como dijera Franklin.
- 1770 Luigi Galvani: surge la idea de la electricidad animal.
- 1770 – 1790 Alessandro Volta: en su búsqueda de poner a prueba las ideas de Galvani demuestra que el origen de esta electricidad no es animal a través de la invención de [la pila eléctrica](#).

La clásica: nacen las leyes

La descripción formal del electromagnetismo es más complicada que la de la gravedad de Newton, por lo que, contrario al trabajo concluyente y casi independiente de Newton, el desarrollo del electromagnetismo es un proceso continuo de por más de un siglo e involucró varios científicos que colaboraron en su desarrollo.

Interesantemente la conclusión del desarrollo clásico, contenido en el trabajo de Maxwell, fue el la semilla al trabajo de Einstein en la teoría de la Relatividad General que corrige la teoría de Newton.

- 1785 Coulomb, cuantifica la fuerza entre las cargas. Este experimento fue realizado anteriormente por Cavendish en 1772, pero no hizo públicos sus resultados.
- 1807 Humpry Davy: construcción de una batería con 250 placas metálicas. La utiliza para pasar corrientes intensas a través de soluciones intentando su descomposición. Con su aparato logra identificar por 1808 el potasio, el sodio, el magnesio y el calcio. Estos trabajos, entre otros atraen la atención de un joven que más tarde cambiaría la historia de la humanidad, Faraday.
- 1819 Hans Oersted: observa que las corrientes producen desviación de brújulas próximas. Se sabe que el italiano Gian Domenico Romagnosi en 1802 ya lo había observado, pero fue ignorado.
- 1820 André-Marie Ampère, fuerza entre hilos rectos con corriente y primeras nociones de la regla de la mano derecha. Primeros galvanómetros
- 1821 Michael Faraday repite el experimento de Oersted y determina que la fuerza sobre un imán es circular al hilo con corriente. Primer motor eléctrico. Electricidad-magnetismo \implies Electromagnetismo.
- 1830 Jean-Baptiste Biot y Félix Savart, e independientemente André-Marie Ampere, cuantifican la fuerza entre alambres con corrientes. Describen los campos magnéticos asociados a corrientes eléctricas.
- 1831 Joseph Henry: Bases para el telégrafo. Electroimán capaz de elevar 300 *kg* de hierro. Se observa que al invertir la corriente el acero permanecía suspendido un corto tiempo.
- 1831 Michael Faraday: estudia este fenómeno llegando al sistema primario de un imán y una espira de corriente campos magnéticos variables en el tiempo generan campos eléctricos. Ley de Faraday, la ley que mueve el mundo moderno. Este mismo año, luego de una década al estudio de los fenómenos ondulatorios, como las figuras Chadlani, inicia

a pensar en ondas magnéticas, lo que sería, al parecer a su idea de los campos de fuerzas.

- 1850 Faraday en una charla manifiesta su inclinación a pensar en una íntima relación entre la electricidad y el magnetismo. Esta idea luego sería retomada a principios del siglo XX por Theodor Kaluza y luego refinada por Oskar Klein unificando ambas teorías en la reciente descripción de la gravedad dada por Einstein. Es el inicio del sueño de la teoría unificada hasta el momento evasiva. Sin embargo, es cierto que la electrodinámica, a través de la relatividad, impulsaría al desarrollo de la relatividad y su descripción de la gravedad.
- 1865 James Clerk Maxwell: formalización matemática y unificación de las leyes de la Electrodinámica en las ecuaciones de Maxwell. Esta formalización establece la realidad física de los campos electromagnéticos y predice las ondas electromagnéticas, ondas que no necesitan medio alguno para propagarse y en el vacío lo hacen a la velocidad de la luz. Unificación los fenómenos electromagnéticos con los ópticos.
- 1884 Oliver Heaviside da la forma moderna, vectorial, de las ecuaciones Maxwell.
- 1885 – 89 Heinrich Hertz, detecta experimentalmente la ondas electromagnéticas. [Simultáneamente revela el efecto fotoeléctrico](#). Oliver Joseph Lodge lo hace independientemente y con un método distinto para ondas en [hilos con corriente](#).
- 13 de mayo de 1897. Transmisión de radio a través de mar abierto por parte de Guillermo Marconi.

La llamada a la relatividad y la mecánica

El descubrimiento del efecto fotoeléctrico y la radiación de cuerpo negro ponen en duda la teoría clásica de la radiación electromagnética. Nadie sospecharía que sería necesario reformular la física desde sus cimientos.

- 1879 Edwin Herbert Hall descubre el efecto que lleva su nombre. Este permite establecer que en los metales los portadores de carga en una corriente tienen carga negativa. Hoy tiene diversas aplicaciones tecnológicas y áreas de estudio científico.

- 1887 Albert Michelson y Edward Morley diseñan y llevan a cabo un experimento para probar el movimiento relativo de la Tierra respecto al *Eter*. Sus resultados son negativos.
- 1895 Wilhelm Conrad Roentgen descubre los rayos X.
- 1896 John Hall-Edwards realiza la primera radiografía con fines médicos.
- 1897 J. J. Thompson descubre el electrón, portador fundamental de carga.
- 1905 Relatividad especial de Einstein. “Sobre la dinámica de los cuerpos cargados”
- 1905 Albert (Mileva) Einstein postula la existencia del fotón, explica así el efecto fotoeléctico. El campo electromagnético también tiene asociado una partícula.
- 1909 Robert A. Millikan determina la carga del electrón.
- 1911 Heike Kamerlingh Onnes descubre el fenómeno de la superconductividad.
- 1914 Marie Curie conforma la flota de carros radiológicos para la realización de radiografías rápidas en campo durante la primera guerra mundial.
- 1920's la naciente mecánica cuántica permite una comprensión exacta de los materiales conductores y aislantes. Algunas ideas sobre el funcionamiento de los de los semiconductores, descubiertos casi un siglo antes, pero la explicación de los superconductores queda aun abierta. La comprensión tardaría unas décadas.
- 1927 – 37 Paul Dirac, Wolfgang Pauli, Eugene Wigner, Pascual Jordan, Werner Heisenberg, Enrico Fermi, primeras descripciones del campo electromagnético que incluían la mecánica cuántica.
- Robert Oppenheimer (1930), Felix Bloch (1937) y Arnold Nordsieck (1939) muestran inconsistencias en las teorías propuestas.

- 1940's Richard Feynman, Julian Schwinger y Shin'ichirō Tomonaga, independientemente, desarrollan de la electrodinámica cuántica (QED), entendida como la interacción entre las cargas y los fotones. Freeman Dyson demuestra que las tres versiones son equivalentes.
- 1947 John Bardeen y Walter Houser Brattain del Grupo de Física del Estado Sólido de Laboratorios Bell, dirigido por William Shockley, desarrollan el transistor.
- 1948 Julian Schwinger utiliza la (QED) para determinar el valor numérico del momento magnético del electrón. En la actualidad la teoría predice lo observado hasta la décima cifra significativa. Lo que la hace la predicción más precisa de la Física hasta la fecha, por tanto la QED se considera la teoría mejor probada en la historia.
- 1954 Chen Ning Yang y Robert Mills generalizan la QED en lo que hoy se conoce como teorías de Yang-Mills. Estas son la base para la descripción de las interacciones nucleares.
- 1957 John Bardeen, Leon Cooper y John Schrieffer utilizan la teoría cuántica de campos, desarrollada paralelamente con la QED, para explicar la superconductividad.
- 1959 Yakir Aharonov y David Bohm analizan el efecto predicho una década antes por Werner Ehrenberg y Raymond Siday, de lo que hoy se conoce como efecto Aharonov-Bohm o Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm, pues se sabe que Ehrenberg y Siday realizaron un trabajo anterior al de Aharonov y Bohm.
- 1960 Theodore Maiman desarrolla el primer láser funcional.
- 1964 se detecta la fuente de rayos X Cygnus-X1. En la siguiente década se refuerzan y soportan los datos de lo que hoy se acepta es de un sistema binario donde uno de sus miembros es un agujero negro.
- 1965 Arno Penzias y Robert Woodrow Wilson detectan por accidente la radiación cósmica de fondo.
- 1967 Jocelyn Bell y Antony Hewish descubren, utilizando radio telescopios, los pulsares.

- 1977 Raymond Damadian realiza el primer escáner por resonancia magnética nuclear, en lo que hoy se denomina simplemente Imagen por Resonancia Magnética (IRM), utilizando el método que él mismo desarrolló.
- 1980 Klaus von Klitzing descubre el efecto Hall cuántico.
- 1982 Daniel Tsui y Horst Störmer descubren el efecto Hall cuántico fraccionado.
- 1983 Robert Betts Laughlin explica el efecto Hall fraccionado introduciendo cuasipartículas con cargas fraccionadas.
- 1987 Johannes Bednorz y Karl Müller descubren la superconductividad a alta temperatura crítica .
- 1999 El Chandra X-ray Observatory, es lanzado el 23 de julio. Un telescopio en órbita que explora el universo en el rango de los rayos X.
- 2004 Andre Geim y Konstantin Novoselov aislan y caracterizan el grafeno.

Pregunta 1.1. *¿Qué aplicación de la electricidad, el magnetismo o la óptica le parece más interesante y por qué?*

Pregunta 1.2. *¿Qué porcentaje de aparatos de su casa son eléctricos? ¿Qué porcentaje de aparatos de su casa son electrónicos?*

1.3. Algunas generalidades sobre los campos

Toda esta revolución estará enmarcada con un concepto que será central a nuestro curso: los campos. Intentaré en esta sección mostrar que el concepto de campo no es algo exclusivo del electromagnetismo y que puede ser entendido de manera básica y general sin necesidad de entrar en formalismos matemáticos complejos.

La palabra “campo”, aunque común en muchos aspectos cotidianos, es usual para referirse al ambiente donde ocurren situaciones o fenómenos. Utilicemos esta noción para iniciar a ilustrar cómo se entienden en general los campos. Pensemos en el campo como ese espacio, en la Tierra, que se distingue de la

ciudad y donde ocurren prácticamente todos los eventos agrícolas humanos. Claramente no es el mismo de hace unos años y tenemos una opción: o decir que el campo ha desaparecido o que ha cambiado. En física optamos por la segunda, diciendo que tanto la *ciudad* como eso que llamamos *campo* son dos manifestaciones del mismo campo, sino que en ciertos puntos y momentos toma su forma como ciudad y en otras como lo que llamamos campo.

En este punto se torna un poco más complejo de entender así que tomemos un ejemplo simplificado: el campo de juego, ilustrado acá por una cancha de fútbol. A este le podremos asociar una identidad cuantitativa que nos indique algunas particularidades de a qué hace este referencia. Así, asignemos un número 1 al los puntos donde hay juego y un 0 a donde no. Entonces ahora podemos ver la cancha de fútbol como un campo numérico que toma dos valores, 0 y 1. Dentro de los límites de la cancha el campo toma el valor 1 mientras que fuera 0,⁴ como se observa en la figura 1.1. Decimos entonces,

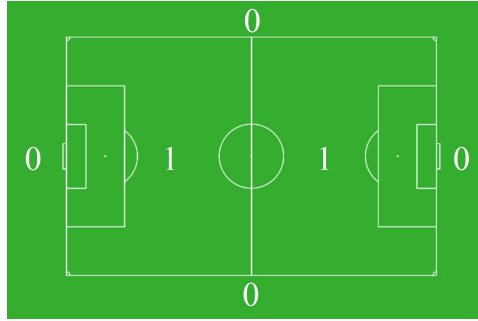


Figura 1.1: Campo de fútbol. Toma valores 1 en todos los puntos del espacio enmarcados por la cancha, y cero en todos los puntos fuera de esta.

que un campo es un ente que está definido en todo el espacio. A cada punto del espacio se le asocia una propiedad. Para el ejemplo apenas expuesto esta propiedad es un número, unos y ceros, pero para el anterior sería *campo* y *ciudad*. Con esto en mente podemos darnos cuenta que estamos rodeados de campos, algunos descritos por números, como es el caso del campo de temperaturas, T definido por

$$T(\vec{r}) \equiv \text{temperatura en el punto } \vec{r},$$

⁴Un ferviente aficionado diría que en las gradas también debería ser distinto a cero, de ahí términos como “ganamos” o “perdimos” aunque no hayan nunca jugado.

donde es importante recordar que, como es usual en las cantidades físicas, que se le deben asociar unas unidades, que en este caso es el Kelvin. Una representación visual des este campo se muestra en la figura 1.2,

Este último ejemplo nos muestra que nos podemos poner románticos y

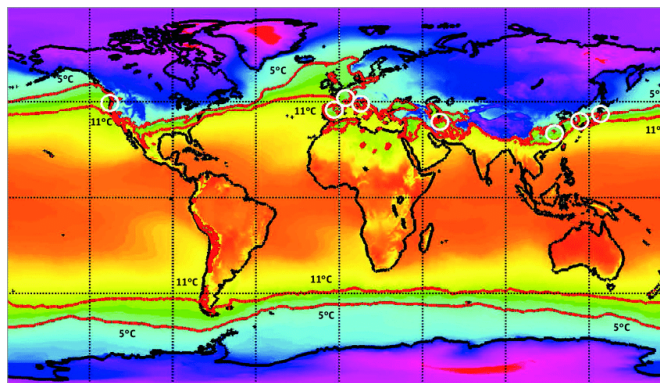


Figura 1.2: Campo de temperaturas terrestre. Se asigna colores pálidos para temperaturas bajas y cálidos para temperaturas altas. Tomado de [M. M. Sadji et al.](#)

pensar en un campo de flores como el de la imagen 1.3. Pero si recordamos que el código RGB (Red-Green-Blue)⁵ entendemos que para describir un campo de colores no nos basta con un número y necesitamos tres. Cantidades conformadas por tres escalares las conocemos bien, los vectores. Así que este campo de colores matemáticamente está asignando un vector en cada punto del espacio y estamos hablando de un campo vectorial.⁶ Un ejemplo de este tipo de campos es el campo, \vec{V} de velocidades de las partículas en un fluido

⁵Tomando a los colores rojo, azul y verde como primarios se construyen todos los otros por una combinación en distintas proporciones de esta. Así el **rojo** se expresaría como (1,0,0), el **azul** por (0,1,0), mientras el **verde** por (0,0,1). Por ejemplo el color en el que está escrito esta **palabra**, está dado por las proporciones (0,858,0,188,0,478).

⁶Aunque no lo hacemos acá, para no hacer más engorroso el análisis debe ser claro que así como se pueden generalizar los vectores a tensores, es posible definir campos tensoriales de manera general. Sucede que usualmente en electromagnetismo, y en general en electrodinámica, para simplificar el lenguaje el término campo se le añade sólo a los campos eléctrico y magnético, cuando también se tienen campos escalares, e.g., potencial eléctrico, y tensoriales, e.g. tensor de Maxwell.



Figura 1.3: Campo de flores. Vemos que podemos tomarlo como un campo de colores también. Imagen [Getty Images](#).

como el viento, el cual definimos como

$$\vec{V}(\vec{r}) \equiv \text{velocidad del viento en el punto } \vec{r}.$$

La visualización de un campo vectorial es un poco más compleja pero aun posible graficando los vectores no en un continuo sino en puntos cercanos, obteniendo diagramas como el mostrado en la figura 1.4. Pensando en el ejemplo de velocidades de partículas para el campo mostrado en la figura 1.4, podríamos identificar un punto, a la derecha, de donde las partículas parecen ser emitidas, una fuente, mientras a la izquierda se observa un punto donde estas son absorbidas, un sumidero. Esta terminología de hecho será extendida luego para referirnos a otro tipo de campos no necesariamente de velocidades.

La imagen 1.4 nos invita a pensar en líneas que forman los vectores que conforman el campo. En efecto este acercamiento será de gran utilidad en nuestro curso.

Ya habíamos mencionado en el ejemplo de campo-ciudad que los campos pueden cambiar en el tiempo. Así, por ejemplo, el campo de fútbol, luego de haberse acabado los noventa minutos reglamentarios se apaga y toma el valor cero en todo el espacio, lo mismo en el descanso. De modo que debemos extender nuestra definición de manera que queda:

Definición. Un campo físico es una entidad física definida sobre todos los puntos del espacio y el tiempo.

Para los dos ejemplo antes expuestos

$$T(\vec{r}, t) \equiv \text{temperatura en el punto } \vec{r} \text{ y tiempo } t,$$

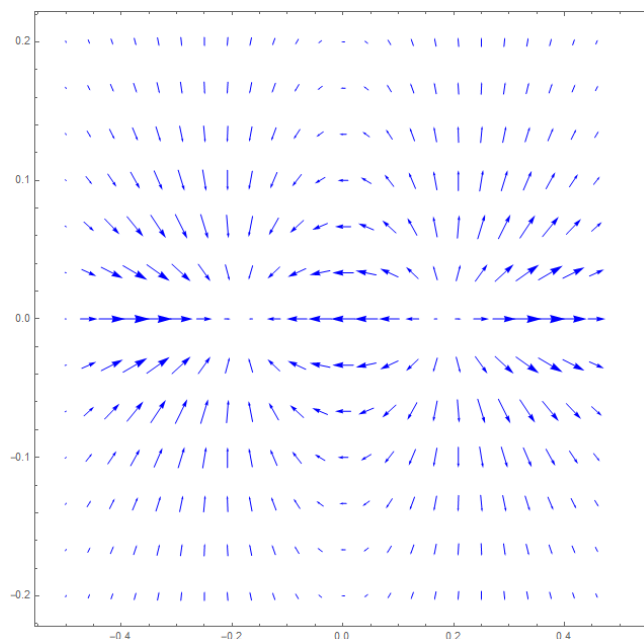


Figura 1.4: Campo vectorial en dos dimensiones. En puntos vecinos se asignan vectores con su respectivo módulo y dirección. Pensando en este como un campo de velocidades, en las coordenadas $(0,2,0)$ se observa una fuente de partículas, pues de allí las partículas necesariamente son emitidas, y en $(-0,2,0)$ un sumidero, pues de este punto toda partícula necesariamente es absorbida.

$$\vec{V}(\vec{r}, t) \equiv \text{velocidad del viento en el punto } \vec{r} \text{ y tiempo } t.$$

De la dependencia de los campos en el tiempo resultará en una de las maravillas que descubriremos en el curso: las ondas.

Pregunta 1.3. *¿Podría identificar algún otro ejemplo de campo?*

1.4. ¿Qué exploraremos en el curso?

Cualquier cosa que pueda decir durante el curso no podrá dar a entender la magnitud de las implicaciones del tema que abordaremos. Quisiera, sin embargo, dar desde un inicio un sabor de nuestros objetivos y el rango de

alcance de lo que estudiaremos.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío en forma diferencial, en ciertas unidades, son las siguientes

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	Ley de Gauss para los campos eléctricos
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Ley de Gauss para los campos magnéticos
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	Ley de Faraday
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{J}$	Ley de Amperè-Maxwell

Por un lado al final del curso entenderemos qué dicen físicamente estas ecuaciones y cómo utilizarlas para determinar los campos electromagnéticos, arriba denotados por \vec{E} y \vec{B} , si conocemos las distribuciones de carga, ρ , y corrientes, \vec{J} , o viceversa. Para esto desarrollaremos algunas técnicas básicas que nos permitirán abordar de manera analítica sistemas sencillos, y tener elementos necesarios en caso que se deseen abordar sistemas más complejos, por ejemplo por métodos numéricos computacionales.

Por otro lado, tendremos nociones básicas de cómo estos campos interactúan con las cargas, de donde tendremos herramientas generales para predecir su dinámica. Esto, en particular, nos permite entender por qué las expresiones arriba presentadas sólo son válidas en el vacío y deben ser modificadas en el caso en que haya presencia de materiales que se vean afectador por los campos. También estudiaremos algunas implicaciones de estas ecuaciones modificadas.

La aplicación directa de la Física que se estudiará se encuentra en los circuitos eléctricos y electrónicos. Así que durante el curso se introducirán nociones básicas de circuitos, sus componentes y métodos de solución en casos sencillos.

Personalmente apenas logro dimensionar y tener plena consciencia del potencial que tienen las ecuaciones de Maxwell. Para mí es aun increíble saber todo lo que está contenido en las ecuaciones de Maxwell y las implicaciones de estas. En efecto, aunque estamos antes una teoría que se denomina, en términos generales, clásica esta no es alterada por la Relatividad Especial, diciéndose que es un teoría relativista. Recordemos que los efectos relativistas son importantes en tanto las velocidades relativas sean comparables a la velocidad de la luz en el vacío. Pero ya que los campos electromagnéticos se propagan justamente a esta velocidad tenemos que es imposible descartar la relatividad de Einstein para estos. De hecho, como ya se mencionó, las

ecuaciones de Maxwell fueron la semilla esta teoría.

Sin embargo, relatividad impone inmediatamente restricciones que debemos tener en cuenta. Por ejemplo la creación espontánea de electrones por polarización del vacío. Este límite dado por el mecanismo de Schwinger implica que para energía concentrada suficientemente altas (recordemos la famosa fórmula $E = mc^2$) es posible la creación de pares, electrón positrón. Como veremos en el curso, los campos electromagnéticos cuentan con energía, así, decimos que el proceso apenas mencionado ocurrirá para campos eléctricos con magnitudes del orden

$$E_S = \frac{m_e^2 c^3}{q_e \hbar} \approx 1,3 \times 10^{18} \text{V/m}, \quad (1.1)$$

con m_e y q_e respectivamente la masa y carga del electrón, \hbar la constante reducida de Planck y V la unidad de Voltios, i.e., as unidades de campo eléctrico son de Voltios por metro. Así, el campo E_S impone un límite en la magnitud del campo para el cual podemos confiar en las predicciones de las ecuaciones de Maxwell, pero para que se den una idea, el campo eléctrico entre las líneas de una torre de alta tensión está en el orden de 10^6V/m , muy por debajo del límite que estamos encontrando.

Lo anterior también nos lleva a una de las implicaciones más poderosas a nivel práctico de las leyes de Maxwell: linealidad. Las leyes de Maxwell forman un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, lo que implica formalmente que la suma de un par de soluciones es a su vez una solución de estas. Físicamente esto es debido a que los campos electromagnéticos, o sus partículas asociadas, los fotones, no poseen carga eléctrica, por lo tanto no interactúan entre sí a nivel clásico. En la actualidad se tiene una cota muy restringida en la posibilidad que los [fotones tengan carga](#)

$$|q_\gamma| < 1 \times 10^{-35} |q_e|,$$

con q_γ la carga del fotón. A nivel cuántico pueden generarse procesos como el mecanismo de Schwinger⁷ o donde dos ondas electromagnéticas se dispersan una con otra, aun siendo neutras. Estos efectos en general son despreciables, incluso para la evaluación de espectros atómicos. Sin embargo, para átomos pesados pueden llegar a ser significativos.

En general sucede que la respuesta de los materiales a los campos electromagnéticos es no lineal y fenómenos no lineales son esperados en estas circunstancias, de hecho es un área interesante de trabajo e investigación. Sin

⁷De allí que la constante de Planck aparezca en la ecuación (1.1).

embargo, la aproximación lineal usualmente es suficiente para abordar gran cantidad de situaciones. Por lo demás, a parte de los ferromagnetos duros los fenómenos no lineales no serán abordada en el curso.

En el curso nos restringiremos a la descripción clásica, o sea, no cuántica, lo que implica trabajar con distancias grandes. Más precisamente para distancias mucho mayores a $10^{-12}m$, i.e. del orden del tamaño del núcleo atómico. Esto implica que aun para tamaños atómicos, $10^{-10}m$, los efectos cuánticos son pequeños, como se puede evidenciar de la eficacia de la descripción de Schrödinger para el espectro del átomo de hidrógeno utilizando el potencial de Coulomb.

Otra circunstancia donde la teoría que estudiaremos falla es en la situación no es posible despreciar la interacción entre las cargas y fotones individuales, como es el caso del efecto fotoeléctrico. Esto se puede traducir en circunstancias en las que la densidad de fotones es baja tal que no es posible tomar su comportamiento como onda electromagnética. Una forma más precisa de establecer este límite es por medio del cambio de momento en el proceso. Así, si el cambio en el momento lineal es del orden del momento inicial del fotón no es posible una descripción clásica. Por ejemplo, en el efecto fotoeléctrico los electrones expulsados adquieren un momento lineal igual al del fotón absorbido y la descripción por ondas electromagnéticas no predice correctamente el efecto. En los materiales sólidos el cambio de momento está asociado con el espaciamiento intermolecular a , $\Delta k \sim 1/a$, con k . Con esto podemos hacer una asociación con las longitudes de onda, $\lambda \sim 1/k$, donde se espera que la descripción clásica deje de ser efectiva, i.e., $\lambda \sim a$.

Otra circunstancia en la que nuestra teoría no puede ser aplicada es la de la gravitación en el marco de la relatividad general de Einstein. Para nosotros el espacio-tiempo será completamente rígido y además plano. Incluir espacio curvos en nuestro formalismo es relativamente sencillo mediante la modificación correspondiente de los operadores diferenciales que están involucrados. Por otro lado la inclusión de efectos gravitatorios implica solucionar otro conjunto de ecuaciones, ecuación de Einstein, que vendría acoplada a las ecuaciones de Maxwell. Lo real, sin embargo, para efectos prácticos los efectos gravitatorios debido a la energía en los campos electromagnéticos puede ser despreciado.

Todo lo anterior no sólo nos sirve como advertencia de que, como con toda teoría física, se debe tener presente su rango de aplicación y validez, sino que nos justifica el porqué el electromagnetismo es, tal vez, la rama de la física con mayor aplicabilidad en el mundo moderno, cubriendo desde la electrónica

hasta las telecomunicaciones, pasando por la medicina y hasta la exploración petrolífera.

Pregunta 1.4. *¿Cuales son los límites de aplicación de la mecánica newtoniana?*

Capítulo 2

Interacción entre cargas estáticas

En este capítulo abordamos el estudio de la interacción entre cargas sin movimiento relativo. Haremos un análisis utilizando conceptos ya conocidos en mecánica y sin el de campo, el cual se introduce en el próximo capítulo. Para iniciar definiremos con cierta precisión el concepto de carga eléctrica y listaremos algunas de sus propiedades, luego nos detendremos a encontrar consecuencias detrás de la fuerza entre cargas puntuales.

2.1. Carga eléctrica

Esta se puede definir como la propiedad de la materia que caracteriza la magnitud de la interacción eléctrica para cargas en reposo.¹ Notese que esta sólo afecta la magnitud de la interacción, de hecho, la carga es un escalar.

Pregunta 2.1. *¿Qué son los vectores?*

Pregunta 2.2. *¿Encuentra alguna similitud entre la definición de carga y la de masa gravitacional?*

¹En adelante y como es usual en todos los textos en Electromagnetismo nos referiremos como carga tanto a la propiedad física de las partículas portadoras de carga, como a las particular cargadas en sí, sin que esto cause confusión.

2.1.1. Propiedades de la carga eléctrica

El estudio fenomenológico de los procesos que involucran cargas se han observado ciertas propiedades que al día de hoy, en algunos casos, se han elevado al *status* de leyes.

Tipos de carga

Existen sólo dos tipos de carga, que distinguimos simplemente por distintos signos *positivo*, $+$, y *negativo*, $-$. Encontramos así una primera distinción de la gravitación, donde sólo se encuentra un signo para la masa. Como veremos un poco más adelante esto implica que las interacciones eléctricas pueden ser tanto atractivas como repulsivas.

Ley de la conservación de la carga

“En un sistema aislado la carga eléctrica total, i.e., la suma algebraica de las cargas, es una constante en el tiempo.”

Como ejemplo tenemos los colisionadores de partículas, como el Large Hadron Collider (LHC), donde la colisión de dos partículas produce infinitas de otras. Este proceso, sin embargo, debe respetar la conservación de la carga. En el caso del LHC las partículas que colisionan son protones, con carga positiva e , luego la carga total es $2e$. Así, la suma total de las cargas finales debe ser necesariamente $2e$.

Los desarrollos teóricos del siglo pasado han logrado entender que la conservación de la carga se puede comprender desde una descripción microscópica como debida a una simetría interna de la interacción eléctrica, algo que soporta el que esta observación sea considerada como una ley, pero esta explicación está fuera del objetivo del curso.²

²La idea groso modo de esta simetría es imaginar que las cargas eléctricas experimentan un espacio además del espacial, que llamamos interno, que es algo así como un plano (más precisamente el plano complejo) y, en este, se pueden hacer giros y la física no se percataría de estos cambios. Los dos signos de la carga estarían asociados a las dos posibilidades de giro, las positivas giran en un sentido mientras que las negativas lo hacen en sentido opuesto.

Cuantización de la carga

De la neutralidad de los átomos de hidrógeno y otros más complejos se tiene que el protón y el electrón tienen cargas idénticas e con signos contrarios con una diferencia del orden $10^{-16}e$. Los constituyentes del protón, llamados *quarks*, tienen cargas $\pm 1/3e$ y $\pm 2/3$, pero no hay evidencia de partículas con cargas en fracciones más pequeñas. Se piensa que debe existir alguna explicación fundamental que prohíba las partículas de carga arbitraria, pero esto permanece aun como un misterio. Tal vez los experimentos que se llevan a cabo en el momento en el LHC puedan revelar alguna pista al respecto.

Pregunta 2.3. *¿Conoce alguna otra ley de conservación?*

Para nuestro estudio teórico formal la cuantización de la carga será irrelevante y supondremos, cuando sea el caso, que podemos quitar o adicionar cualquier cantidad arbitraria de carga que deseemos. Físicamente esto lo podemos entender como el suponer que las magnitudes de los objetos cargados a los que se les cambia la carga son mucho mayores a las del electrón, que es el portador de carga por excelencia. Además que los cambios de carga son mayores a la carga fundamental e , la magnitud de la carga del electrón.³

Invariante relativista

La relatividad especial planteada por Einstein a principio del siglo pasado trae consigo que, para que la física sea algo universal independiente del estado de movimiento del observador, existen cantidades físicas cuyo valor dependerá de este estado. Los ejemplos usuales son la longitud, que se dice se contrae en la dirección de movimiento, y el tiempo, que se dilata. Sin embargo, existen cantidades especiales cuyo valor numérico es independiente del estado de movimiento de quien lo mide. El ejemplo primario es la velocidad de la luz en el vacío. Otro es la carga eléctrica.

Este resultado se ve soportado también en la neutralidad de los átomos de hidrógeno. Mientras el protón se puede considerar que se encuentra en reposo respecto al laboratorio, los electrones en sus órbitas se encuentran en movimiento con velocidades relativistas. Si la carga no fuera un invariante

³Formalmente debería ser $\frac{1}{3}e$ ya que es la mínima hasta ahora observada, en los *quarks*. Sin embargo, lo natural es considerar el electrón como el portador de la carga móvil ya que los *quarks* se mantiene siempre confinados en los nucleones y no se presentan libremente en la naturaleza.

se observaría un desbalance.

Ejercicio 2.1. Considere una bomba de caucho sobre la cual se ha distribuido uniformemente sobre la superficie una carga de $3C$. Suponga que se infla con agua a una rapidez de 10 gr/s . Calcule la rata con que cambia la densidad superficial de carga como una función del radio. **Nota:** como precisaremos más adelante el C denota la unidad de carga Coulomb.

Ejercicio 2.2. Suponga una esfera de radio 3 cm con una densidad volumétrica de carga uniforme de 1 C/m^3 . Calcule la carga total de la esfera.

Ejercicio 2.3. Vamos a considerar que el Sol está conformado por sólo átomos de hidrógeno, lo cual es buena aproximación para nuestro problema. Suponiendo que las observaciones astronómicas revelan una cota superior para la carga del Sol del orden de $10^{20}C$. Halle la cota superior que esta observación implica en para el parámetro $|1 - \frac{q_p}{e}|$, con q_p la carga del protón y $e = 1,602 \times 10^{-19}C$ el valor absoluto de la carga del electrón.

Ejercicio 2.4. Suponiendo que las cargas de protón y del electrón se diferencian en una parte por billón, i.e., $|1 - \frac{q_p}{e}| \approx 10^{-12}$. Estime cuál sería la carga de la Tierra y la de una persona.

2.2. Ley de Coulomb (Cavendish 1770's)

A pesar de los intentos de Franklin y contemporáneos no sería sino hasta la década de los 70's del siglo XVIII que se tendría un cambio cualitativo en que la comprensión de los fenómenos eléctricos. En este experimento, Coulomb⁴ utilizó una balanza de torsión con dos esferas cargadas separadas a posición relativa \vec{r}_{12} como muestra la figura 2.1.

En este experimento encuentra que la fuerza entre dos cuerpos cargados *PUNTUALES FIJOS* (lentos) satisface las siguientes propiedades:

- a) La magnitud de la fuerza es proporcional a el producto de las cargas:

$$|\vec{F}| \sim |q_1 q_2|. \quad (2.1)$$

⁴Hoy se sabe que Cavendish, quien también realizara un experimento equivalente con masas para poner a prueba la ley universal de la gravitación, hizo antes que Coulomb este experimento. Sin embargo, huraño como era, nunca publicó sus resultados.

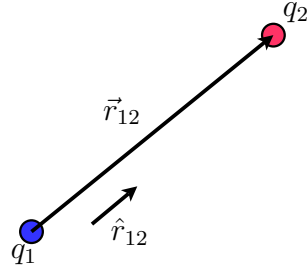


Figura 2.1: Cargas q_1 y q_2 separadas por un vector relativo \vec{r}_{12}

- b) La magnitud de la fuerza disminuye con la distancia como el inverso al cuadrado de la distancia entre las cargas, $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$:

$$|\vec{F}| \sim \frac{1}{r_{12}^2}. \quad (2.2)$$

- c) La dirección de la fuerza está determinada por la línea imaginaria que une las dos cargas:

$$\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \sim \hat{r}_{12}, \quad (2.3)$$

con $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/|\vec{r}_{12}|$ el vector unitario que define la línea uniendo las cargas. Usualmente a este tipo de fuerzas se les denomina radiales.

- d) Además tenemos información conocida con anticipación por los trabajos de Franklin. A decir, que existen dos tipos de carga que llamamos positiva (+) y negativa (-).
- e) Por último, una propiedad de suma importancia para nosotros, la linealidad. La fuerza experimentada por una carga debido a un conjunto de cargas es la suma vectorial de cada una de las fuerzas por aparte.

Las anteriores observaciones se conjugan en una sola expresión para la fuerza experimentada por la carga q_2 debido a la carga q_1

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (2.4)$$

donde hemos introducido una constante de proporcionalidad k que tiene la misión de coordinar las unidades para que a ambos lados de la expresión

coincidan. El signo de esta constante de proporcionalidad se fija pidiendo que el sentido de la fuerza sea el observado experimentalmente. Así tomamos $k > 0$ de tal forma que las cargas de signo opuesto se atraigan, la fuerza sobre q_2 va en sentido opuesto a \hat{r}_{12} , mientras cargas del mismo signo se repelan, la fuerza sobre q_2 va en el mismo sentido de \hat{r}_{12} . Es usual encontrar la ley de Coulomb enunciada simplemente como

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \quad (2.5)$$

lo cual no está mal en tanto recordemos la naturaleza vectorial de nuestra fuerza y que esta es radial. De otra forma puede llevar a equívocos, sobre todo cuando se desea utilizar la superposición lineal para determinar la fuerza sobre una carga debida un conjunto de cargas, donde es crucial el carácter vectorial de la fuerza.

La realidad es que la expresión (2.5) tampoco resulta muy conveniente para aplicar la superposición lineal. Para tener una expresión más precisa y cómoda asignaremos vectores posición a cada carga escogiendo un origen arbitrario. Así la carga q_1 se encuentra en \vec{r}_1 mientras q_2 en \vec{r}_2 y su posición relativa $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, como lo muestra la figura 2.2

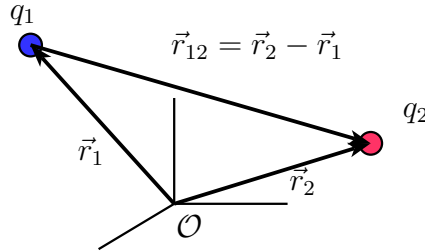


Figura 2.2: q_1 se encuentra en \vec{r}_1 mientras q_2 en \vec{r}_2 , relativas a un origen \mathcal{O} y su posición relativa $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Con esto, recordando $\hat{r}_{12} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, se tiene la siguiente expresión que será con la que trabajaremos,

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (2.6)$$

donde hemos cambiado ligeramente la notación para estresar el hecho que esta expresión es para la fuerza experimentada sobre q_1 debida a la carga q_2 .

Intercambiado el rol jugado por q_1 y q_2 es posible verificar que se satisface la tercera ley de Newton, a decir

$$\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1} = -\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} . \quad (2.7)$$

Como ya advertimos una de las ventajas de la expresión (2.6) es que permitirá un manejo más sencillo en el caso de varias cargas, esto debido a que permite una rápida identificación de las componentes de la fuerza dadas las coordenadas de cada carga, así:

$$F_{x,q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (x_2 - x_1) , \quad (2.8)$$

$$F_{y,q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (y_2 - y_1) , \quad (2.9)$$

$$F_{z,q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (z_2 - z_1) , \quad (2.10)$$

con

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} . \quad (2.11)$$

2.2.1. Sobre las unidades

Como se dijo anteriormente la constante de proporcionalidad, k , en la expresión para la Ley de Coulomb es tal que fija las unidades, pero como estamos ante una nueva cantidad física, la carga, podemos incluso escoger sus unidades a conveniencia y, por tanto, el valor numérico de la constante. A continuación mostramos las definiciones en dos de los sistemas más comunes, el *cgs* y el *SI*⁵.

- El sistema *cgs* utiliza el hecho que la carga caracteriza la magnitud de la fuerza, de tal forma que fijando el valor de $k = 1$ (¡sin dimensiones!) es posible definir la unidad carga a partir de la fuerza. Así, se define la unidad de carga tal que produce una *dina* = gcm/s^2 de fuerza al interactuar con una carga idéntica separada a una distancia de 1 *cm*. Osea que la unidad de carga en este sistema no es independiente las fundamentales de longitud, masa y tiempo, y está dada por $q = 1cm^{3/2}gr^{1/2}s^{-1}$, pero que por comodidad se denomina Statcoulomb o *unidad electrostática* (esu de *electrostatic unit*). De acá que usualmente en electromagnetismo este sistema de unidades se denomina *e.s.u.*

⁵Recordemos: en *cgs* se trabaja en *cm*, *g* y *s*; para *SI* en *m*, *Kg* y *s*.

- En el sistema SI o $MKS(A)$ la unidad de carga se define como independiente,⁶ denominada Coulomb (C), así las unidades de k quedan definidas. Es usual expresar k en terminos la *permitividad del vacío* $\varepsilon_o = 8,85 \times 10^{-12} C^2 / N m^2$ como

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.$$

De forma que dos cargas puntuales idénticas con $q = 1 C$ separadas a un metro de distancia experimentan una fuerza de magnitud $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} C^2 / m^2$.

Resumiendo

	<i>esu</i>	<i>SI</i>
$[q]$	Statcoulomb <i>esu</i>	Coulomb <i>C</i>
k	1	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$
ε_o	1	$8,85 \times 10^{-12} C^2 / N m^2$
Carga del electrón $-e$	$-4,8 \times 10^{-10} esu$	$-1,6 \times 10^{-19} C$

Ejemplo 2.2.1. Fuerza de Coulomb I.

Para calentar motores calculemos la fuerza sobre una carga $Q = 1 esu$ en el origen, i.e. $\vec{r}_Q = 0$, debida a una carga $q = 32 esu$ en la posición $(2, 2)cm$. Utilizaremos directamente la expresión 2.5. Los distintos ingredientes que allí aparecen son:

Vector relativo $\vec{r}_{q \rightarrow Q} = -(2, 2) cm$. Por tanto $|\vec{r}_q|^2 = 4 cm^2 + 4 cm^2 = 8 cm^2$, mientras

$$\hat{r}_q = -\frac{1}{\sqrt{8}}(2, 2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1). \quad (2.12)$$

Producto entre las cargas $qQ = 32 esu^2$.

Así la fuerza es, entonces,

$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = -\frac{32}{8} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) din = -\frac{4}{\sqrt{2}}(1, 1) din. \quad (2.13)$$

Osea, una fuerza de magnitud $F = 4 din$ en la dirección $\hat{r}_{q \rightarrow Q}$, i.e, es repulsiva.

⁶Más adelante veremos que la unidad fundamental en realidad es la unidad de corriente electrica Amperio. De ahí la *A* extra en el nombre *MKS*.

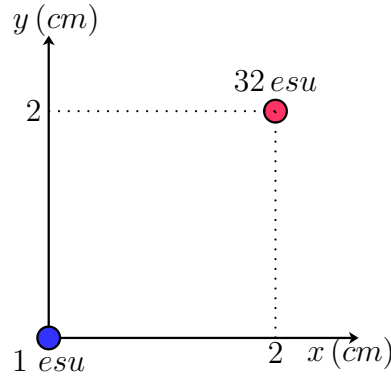


Figura 2.3: Arreglo ejemplo 2.2.1

Ejemplo 2.2.2. Electroscópio Supondremos un electroscopio de dos hojas de longitud 2ℓ . Y la idea será calcular el ángulo de elevación cuando estas se cargan. A primera vista tenemos un gran problema, pues no se tratan de cargas puntuales. Pero para esto estamos los físicos, para crear modelos cada vez más cercanos a la realidad iniciando con unos muy sencillos que nos den la respuesta principal. Entonces, supondremos que la distribución de carga es uniforme, lo mismo que de la masa, de modo que podemos pensar toda la masa como concentrada en el centro de masa, a una distancia ℓ del pivote. Lo mismo podemos decir para la carga, así que tomaremos un modelo donde toda la masa y la carga se encuentran concentradas en el centro de masa.

Desarrollo: Lo que tenemos es que debido a la fuerza repulsiva entre las dos cargas estas tienden a alejarse de la normal, mientras que la fuerza de tensión trata de atraerlas hacia esta, como se observa en el diagrama de cuerpo libre 2.5 De este diagrama tenemos las siguientes ecuaciones de fuerza en los ejes,

$$\begin{aligned} F_x : F_e - T \text{Sen} \alpha &= 0, \\ F_y : T \text{Cos} \alpha - mg &= 0. \end{aligned}$$

Con la fuerza eléctrica $F_e = kq^2/r^2$ y del diagrama $r = 2\ell \text{Sen} \alpha$. Del balance de fuerzas

$$\text{Tan} \alpha = \frac{F_e}{mg} = \frac{kq^2}{mg4\ell^2 \text{Sen}^2 \alpha}.$$

Determinando implícitamente el ángulo α

$$\text{Sen}^2 \alpha \text{Tan} \alpha = \frac{F_e}{mg} = \frac{kq^2}{mg4\ell^2}.$$

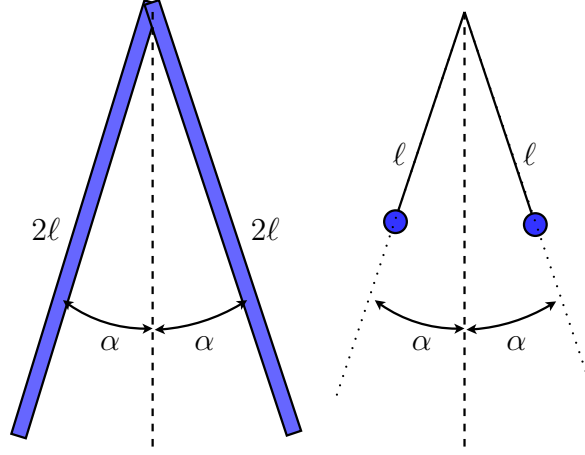


Figura 2.4: Diagrama de electroscopio cargado para el ejemplo 2.2.2 y su simplificación a cargas y masas puntuales.

En el caso que el peso de las cargas mg sea muy grande comparado con la fuerza eléctrica F_e (por ejemplo masas grandes, o cargas pequeñas) el ángulo es muy cercano a cero, $\alpha \approx 0$, donde se tiene

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha,$$

luego

$$\alpha = \left(\frac{kq^2}{4mg\ell^2} \right)^{1/3}.$$

Pregunta 2.4. ¿Qué posibles problemas puede tener nuestro modelo simplificado para el electroscopio? ¿

Ejercicio 2.5. Calcule la razón entre la fuerza eléctrica y gravitatoria entre dos protones. Considere $m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, y $G = 6,8 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. Esta es una primera estimación del factor en que aumentaría el peso de una persona si la atracción terrestre fuera eléctrica.

Ejercicio 2.6. Utilizando los resultados del ejercicio 2.4, estime la fuerza con de atracción o repulsión que experimentaríamos de la Tierra y compárela con el peso promedio de una persona.

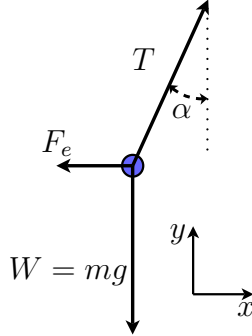


Figura 2.5: Diagrama de diagrama de cuerpo libre para el modelo simplificado del electroscopio de dos hojas.

Ejercicio 2.7. Suponga dos partículas puntuales de cargas q y Q del mismo signo, unidas por un hilo de largo L y sin masa. Calcule la tensión del hilo.

2.2.2. Superposición lineal

Como se mencionó en la introducción, una propiedad importante en los fenómenos electromagnéticos clásicos es que cumplen el *principio de superposición*, el cual permite determinar el efecto total debido a un sistema de cargas como la superposición lineal de los efectos por separados. En el caso de una carga de prueba Q , la fuerza debida a un conjunto de cargas q_1, q_2, \dots , está dada por la suma vectorial de las fuerzas independientes, tal y como lo haríamos en mecánica con las fuerzas allí vistas⁷. De modo que su expresión queda de la forma

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\sum q_i \rightarrow Q} &= \sum_i \vec{F}_{q_i \rightarrow Q}, \\ &= \left(k \frac{Qq_1}{r_{1Q}^2} \hat{r}_{1Q} + k \frac{Qq_2}{r_{2Q}^2} \hat{r}_{2Q} \cdots \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$= k Q \sum_i \frac{q_i}{r_{iQ}^2} \hat{r}_{iQ}, \quad (2.15)$$

⁷Aunque parece natural no siempre en la naturaleza los fenómenos satisfacen esta propiedad. El ejemplo más famoso es la gravitación de Einstein que no es lineal.

donde hemos definido

$$r_{iQ} = |\vec{r}_Q - \vec{r}_i|,$$

con \vec{r}_i la posición de la carga q_i y utilizando la expresión (2.5). Como mencionado anteriormente será más conveniente, en general, utilizar la expresión (2.6), en cuyo caso la fuerza total queda expresada como

$$\vec{F}_{\sum q_i \rightarrow Q} = k Q \sum_i q_i \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_i}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_i|^3}, \quad (2.16)$$

que nos permite tener más presente la naturaleza vectorial de cada una de las contribuciones para calcular el efecto total.

Ejemplo 2.2.3. Fuerza de Coulomb II

Calculemos la fuerza sobre Q del ejemplo 2.2.2.1 además de q en la posición dada se coloca una carga extra $\tilde{q} = -\frac{1}{\sqrt{2}} esu$ en la posición $(1, 0)$.

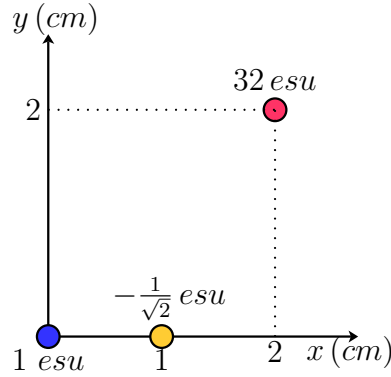


Figura 2.6: Arreglo ejercicio 2.2.3

Utilizando el principio de superposición calculemos la fuerza ejercida por \tilde{q} sola para luego sumarla a la calculada anteriormente.

Es claro que el vector unitario que una \tilde{q} con Q es $-(1, 0)$, luego la fuerza es

$$\vec{F}_{\tilde{q} \rightarrow Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0) \text{ din}.$$

De tal forma que la fuerza total es

$$\vec{F}_{\tilde{q} \rightarrow Q} + \vec{F}_{q \rightarrow Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0) \text{ din} - \frac{4}{\sqrt{2}}(1, 1) \text{ din} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-3, -4) \text{ din}$$

Gráficamente esto queda como en la figura 2.7.

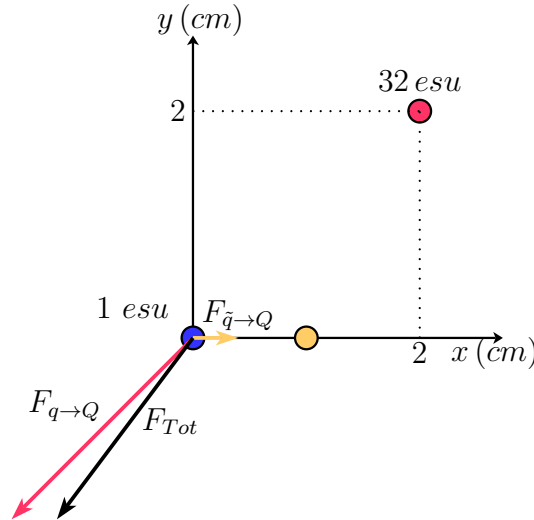


Figura 2.7: Solución gráfica al ejemplo 2.2.3

Ejercicio 2.8. Calcule la fuerza ejercida sobre Q si al sistema del ejemplo 2.2.1 se le añade una carga $\tilde{q} = -32 \text{ esu}$ en la posición $-(2,2)$. ¿Qué pasa si el signo de la carga \tilde{q} es contrario?

Ejercicio 2.9. En cada esquina de un cuadrado hay una carga q . En el centro se encuentra una carga Q . Calcule Q t.q. la fuerza total sobre cada una de las cargas sea cero.

2.2.3. ¿Tuvo suerte Cavendish (Coulomb)?

Es interesante anotar que, a pesar que en el experimento llevado a cabo no se utilizaron cargas puntuales sus conclusiones son dadas bajo estos términos. En efecto sus resultado son extrapolados para el caso de cargas puntuales. Pero lo que debemos apreciar es el hecho que sólo es consistente para el caso en que la fuerza decrece como el inverso al cuadrado de la distancia. Como veremos más adelante esta dependencia implica que los mismo resultados se obtienen para distribuciones de carga esférica, considerando las posiciones \vec{r}_i como los centros de la distribución. Gracias a esto Coulomb puede determinar el comportamiento ideal de la fuerza entre cargas puntuales.

Si el experimento hubiera sido realizado con una otra forma, cubos o pirámides, por ejemplo, uniformemente cargadas, el comportamiento de la fuerza

sería completamente distinto. Asimismo, si el resultado con esferas hubiera sido distinto no sería posible la extrapolación a cargas puntuales.

Podemos entender, sin embargo, que independientemente de la forma de la distribución de la carga para distancias grandes comparadas con el tamaño de la distribución el comportamiento debe ser el mismo que para una carga puntual, ya que en primera aproximación la distribución se ve puntual. Por lo tanto, una forma correcta de abordar el problema de analizar los datos experimentales para extrapolar a caso puntual es comenzar analizando los resultados para distancias grandes, donde la aproximación de carga puntual es válida. Posteriormente, con los datos de distancias pequeñas, si estos continúan mostrando un comportamiento como $1/r^2$ para esferas podemos concluir que este es el comportamiento de la fuerza para las cargas puntuales, independientemente de la distancia. Aun así, el problema de lograr esferas uniformemente cargadas, al menos en su superficie no es un punto fácil de lograr.

2.2.4. Fuerza de Coulomb y la masa del fotón

La expresión de la Fuerza de Coulomb muestra lo que se conoce como una interacción de largo alcance. Aunque no lo mostraremos de forma precisa la dependencia encontrada en la distancia indica que la masa del fotón, que son los mediadores de la interacción electromagnética, es nula. Para entender esto tomamos el hecho que para una partícula de masa μ tenemos una incertidumbre mínima en la energía del orden $\Delta E \sim \mu c^2$, c la velocidad de la luz en el vacío. Por medio de la relación de incertidumbre energía-tiempo tenemos

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \sim \frac{\hbar}{\mu c^2}.$$

Por lo tanto en este intervalo de tiempo la partícula puede moverse un máximo de

$$R = c\Delta t \sim \frac{\hbar}{\mu c}.$$

Podemos así decir que el alcance de una interacción mediada por una partícula de masa finita es menor.

Con esto en mente, se han propuesto interacciones de corto alcance para describir por ejemplo las interacciones nucleares, que serían mediadas por partículas con masa, en un potencial denominado de Yukawa, $V \sim \exp(-r/R)/r^2$. Lo anterior nos da una idea de cómo determinar experimentalmente la masa

del fotón, i.e., buscando desviaciones a la ley de Coulomb. Actualmente se tiene una cota de $m_\gamma < 1 \times 10^{-18} \text{eV}/c^2 = 1,78 \times 10^{-54} \text{Kg}$.

2.2.5. Aplicaciones

Una aplicación interesante de las fuerzas Coulombianas se encuentra en las impresoras láser. En estas, un láser dispara la hoja en blanco donde se desea imprimir. Esto ioniza la porción de papel objetivo. El polvo de tinta entonces cargando de signo opuesto es atraído hacia estas partes del papel donde finalmente es impreso.

2.3. Energía de un sistema de cargas

La fuerza entre cargas hace que al colocar un sistema de cargas en una configuración particular implique realizar cierto trabajo sobre estas. Con la ley de Coulomb y el principio de superposición estamos en grado de calcular la fuerza sobre cualquier carga en un sistema de cargas puntuales y, a partir de esta, utilizando el teorema Trabajo-Energía obtener la energía almacenada en el sistema al estar en una disposición dada.

Para esto comenzaremos en considerando que todas las cargas del sistema se encuentran en el infinito, donde la interacción entre ellas es despreciable. Si tomamos una carga de estas, q_1 , y la traemos hasta un punto cercano, tenemos que al estar las demás demasiado lejos la fuerza sobre esta es despreciable y por tanto el trabajo realizado en traerla es cero.

Una vez tenemos esta carga fija, digamos en el origen, cualquier carga que empiece a acercarse al origen comenzará a sentir la fuerza eléctrica debida a la carga q_1 y el trabajo es distinto de cero. Para el cálculo consideraremos que acercamos las dos cargas de tal forma que su velocidad es “nula”, de tal forma que no hay contribución a la energía por energía cinética. Así la fuerza que aplicamos externamente a la carga es igual y opuesta a la fuerza debida a la carga en el origen que consideramos fija,

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_e.$$

Algo que no hemos mencionado pero que se infiere de la forma de la ley de Coulomb análoga a la de la gravitación universal, es el hecho que la fuerza electrostática es una fuerza conservativa.

Pregunta 2.5. *¿Qué es una fuerza conservativa y qué ejemplos conoce que lo son?*

Este hecho nos simplificará el cálculo del trabajo realizado por \vec{F}_{ext} pues podremos tomar cualquier camino a conveniencia. Ahora bien, dado que la fuerza eléctrica es de naturaleza central, $\vec{F}_e \propto \hat{r}$, para el cálculo del trabajo

$$W = \int_{\vec{r}_{2\,ini}}^{\vec{r}_{2\,final}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

es conveniente utilizar coordenadas esféricas y un camino radial, el cual satisface satisfacen $d\vec{r} = dr\hat{r}$,

$$\vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr$$

donde $r = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Luego la integral de línea se reduce a una integral sobre la coordenada radial

$$W = -k \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (2.17)$$

Es claro que el trabajo realizado sobre las carga por la fuerza externa es positivo si las cargas tienen signos iguales ya que debe contrarrestar la fuerza de repulsión que trata de alejarlas. Al contrario el trabajo es negativo en el caso que las cargas tengan signo opuesto.

Del teorema trabajo energía se tiene que el trabajo realizado se convierte en un cambio en la energía potencial del sistema. Esta energía se hace evidente a los ojos en fenómenos como los rayos en las tormentas eléctricas. Allí las moléculas de aire son ionizadas, y la energía que otrora ligaba las dos partes de esta, es despedida en forma de luz, sonido y mucho calor.

Antes de continuar añadiendo cargas, tratemos de justificar el hecho que el trabajo es independiente del camino. Para esto basta notar que cualquier camino puede descomponerse en pequeños desplazamientos en los tres vectores ortogonales \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$, ahora, ya que la fuerza es radial sólo los desplazamientos en la dirección radial contribuirán al trabajo. Además, la fuerza sólo depende de la componente radial, es decir que su magnitud es independiente de las coordenadas θ y φ , i.e. $|\vec{F}| = F(r)$, por tanto un desplazamiento en estas direcciones no cambian la magnitud y para efectos del cálculo del trabajo es igual a que no se halla desplazado en absoluto. Así cualquier trayectoria es análoga a una trayectoria recta en la dirección radial.

Este resultado nos indica simplemente que la fuerza eléctrica es conservativa, ya que gracias al principio de superposición la independencia en el camino se mantiene aun en el caso de una fuerza debida a varias cargas.

Se sigue, entonces, que el anterior cálculo es suficiente para encontrar la energía total, utilizando el principio de superposición, una vez se añada una tercera carga. Considerando que las cargas q_1 y q_2 como fijas tenemos que el trabajo realizado sobre la tercera carga es

$$W_3 = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = - \int \vec{F}_{q_1 \rightarrow q_3} \cdot d\vec{r} - \int \vec{F}_{q_2 \rightarrow q_3} \cdot d\vec{r} = k \frac{q_1 q_2}{r_{13}} + k \frac{q_1 q_2}{r_{23}},$$

donde para el cálculo de cada una de las partes se sigue el mismo análisis de antes. Así la energía total es ahora

$$W = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_2}{r_{13}} + k \frac{q_1 q_2}{r_{23}}. \quad (2.18)$$

En general tenemos entonces para un sistema de N cargas

$$W_{Tot} = \frac{1}{2} k \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (2.19)$$

Dado que la fuerza eléctrica es conservativa es posible asociarle una energía potencial, cuyo cambio será igual al trabajo apenas calculado. Recordemos que la definición de energía potencial siempre sufre de una arbitrariedad en una constante que puede ser sumada sin afectar los efectos físicos⁸, por lo que es posible tomar un punto de referencia donde se escoje su valor de manera conveniente. Como debe ser claro del anterior ejemplo para distribuciones de carga localizadas, i.e. que no abarcan cargas en el infinito hipotético, es conveniente tomar el valor de la energía potencial en el infinito como cero, fijando la constante arbitraria a cero, de tal forma que definimos

$$U = \frac{1}{2} k \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (2.20)$$

Ejemplo 2.3.1. Energía de una red cristalina

Un ejemplo característico de este tipo es la energía necesaria para formar

⁸Esto ya nos es cierto en relatividad general donde cualquier tipo de energía tiene efectos gravitatorios.

redes cristalinas que están conformadas por iones colocados en distintos puntos de la red. Usualmente estas redes son una serie de copias exactas de una celda unitaria. Tomemos como ejemplo una celda unitaria un con cargas $-e$ en cada una de las esquinas de un cubo de lado b , y una carga $2e$ en el centro del cubo. Haremos el cálculo tomando pares y sumando cada una de estas

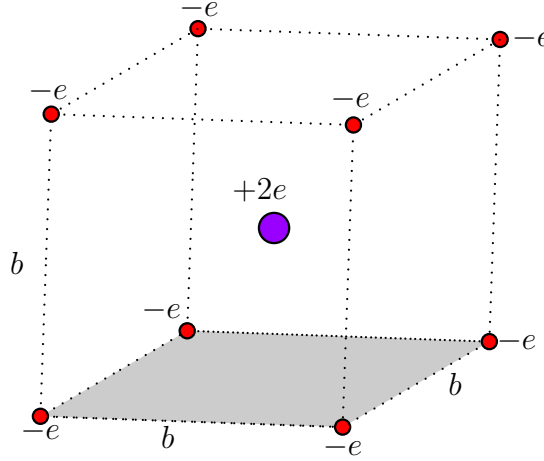


Figura 2.8: Celda unitaria para la red cristalina del ejemplo 2.3.1

contribuciones. Por ejemplo, podemos identificar la interacción de a pares de cargas: cargas en un mismo vértice,

$$W_1 = k \frac{e^2}{b}, \quad (2.21)$$

de los cuales identificamos doce pares, los doce vértices del cubo; También las cargas en esquinas opuestas del cubo, a una distancia de $r_{dia.cubo} = \sqrt{b^2 + b^2 + b^2} = \sqrt{3}b$:

$$W_2 = k \frac{e^2}{\sqrt{3}b}, \quad (2.22)$$

con cuatro pares; Cargas en esquinas opuestas de una misma cara del cubo, cuya diagonal tiene longitud $r_{dia.cuad} = \sqrt{b^2 + b^2} = \sqrt{2}b$,

$$W_3 = k \frac{e^2}{\sqrt{2}b}, \quad (2.23)$$

con doce pares, dos por cada cara; Y la interacción entre la carga en el centro y las cargas exteriores, a una distancia $r = \sqrt{3}b/2$,

$$W_4 = -k \frac{4e^2}{\sqrt{3}b}, \quad (2.24)$$

con ocho pares, uno por cada esquina del cubo. Así en total la energía es

$$\begin{aligned} W_{Tot} &= 12W_1 + 2W_2 + 12W_3 + 8W_4, \\ &= \left(12 + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{32}{\sqrt{3}} \right) \frac{e^2}{b}, \\ &\approx \frac{4,32e^2}{b}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

El que sea positiva nos dice que fue necesario realizar un trabajo para lograr esta configuración de cargas. De hecho, si se dejan libres saldrán expelidas hacia afuera y la energía total cinética en el infinito será igual a la energía que hemos calculado.

Ejemplo 2.3.2. Red cristalina de sal de mesa

La inestabilidad mostrada por la celda analizada en el ejemplo 2.3.1 claramente no sucede en los cristales que vemos comúnmente, pues resultan estar conformados sin necesidad que un agente externo los esté forzando estar en este estado. Un ejemplo real es el cristal del cloruro de sodio que puede ser descrito con muy buena aproximación como una red de iones positivos (Na^+), uno en el centro de la celda unitaria cúbica otros doce en el centro de los vértices, y iones negativos (Cl^-) tomando posiciones en el centro de las seis caras del cubo y en las ocho esquinas como se muestra en la figura 2.3.2. Para el cálculo de la energía de la red total es útil notar que la configuración alrededor de cada ion es idéntica, es decir que nos podemos parar sobre cualquier ion y ver exactamente lo mismo, con los iones positivos o negativos intercambiados si se cambia de tipo de ion, una vez consideramos toda la red junta. Por lo tanto es posible calcular la energía considerando fijo uno de los iones en la expresión general (2.19) y luego multiplicar este resultado por el número total de iones N en la red, así

$$W = \frac{N}{2} k \sum_k \frac{qq_k}{r_k}. \quad (2.26)$$

Para calcular la suma podemos partir de la contribución de las cargas más

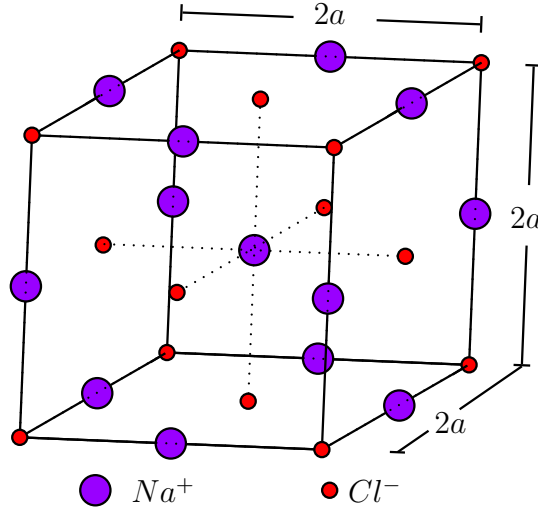


Figura 2.9: Celda unitaria de la red cristalina de sal de mesa (Na^+Cl^-) para el ejemplo 2.3.2. Si se centrara la celda en un átomo de cloro (en púrpura) y no en uno de sodio (rojo), como se muestra, se obtendría exactamente la misma configuración pero con los átomos de ambos tipo intercambiados. También resulta que la misma configuración se obtiene centrando la celda sobre cualquiera de los átomos.

cercanas al centro y ir adicionando las más lejanas,

$$W = \frac{1}{2}Nk \left(-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right), \quad (2.27)$$

Donde hemos considerado que los lados del cubo tienen longitud $2a$. Para lograr una estimación es posible truncar la suma despreciando las contribución de las cargas lejanas ya que a mayor distancia menor es esta,⁹ entregando

$$W = -\frac{0,8738Ne^2}{a}. \quad (2.28)$$

Como vemos la energía es negativa, por lo que la red trata de estar unida. El hecho que esta no colapse tiene respuesta en la mecánica cuántica, sin

⁹Es importante, sin embargo, estresar que esta serie converge. De otra manera tendríamos un sistema con infinita energía lo que nos indicaría un falla en la teoría o nuestro análisis.

embargo, el análisis clásico de la energía potencial que hemos llevado a cabo sigue siendo válido.

2.3.1. Estabilidad de un sistema de cargas

Un resultado importante que se puede demostrar es el hecho que un sistema de cargas discretas estáticas no puede encontrar el equilibrio interactuando sólo por interacción electromagnéticas (ver Feynman's Lectures **Vol2**, sec **5-3**). Así, por ejemplo, para la red estudiada en el ejemplo 2.3.1, debe existir una fuerza que la fuerce a mantenerse unida, y en el ejemplo de la sal, ejemplo 2.3.2, recurrimos a la mecánica cuántica para explicar por qué no termina colapsando.

Ejercicio 2.10. *Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = xy(\hat{i} + \hat{j})N$ en un camino desde el origen hasta el punto $(2,3)m$, por la trayectoria: $(0,0) - (2,0)m$ luego $(2,0)m - (2,3)m$. ¿Es una fuerza conservativa?*

Ejercicio 2.11. *Calcule la energía potencial de un sistema de cargas Q_1 , Q_2 y Q_3 colocadas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado l .*

Pregunta 2.6. *¿Cómo podría explicar el poder destructivo de la dinamita utilizando los conceptos apenas discutidos?*