

Electromagnetismo

Notas de clase

Diego Gallego Mahecha



Escuela de Física
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
14 de julio de 2022

Índice general

Prefacio	I
1. Introducción	1
1.1. <i>una invitación a interactuar</i>	1
1.2. Un poco de historia	4
1.3. Algunas generalidades sobre los campos	10
1.4. ¿Qué exploraremos en el curso?	15
2. Interacción entre cargas estáticas	19
2.1. Carga eléctrica	19
2.1.1. Propiedades de la carga eléctrica	20
2.2. Ley de Coulomb (Cavendish 1770's)	22
2.2.1. Sobre las unidades	25
2.2.2. Superposición lineal	29
2.2.3. ¿Tuvo suerte Cavendish (Coulomb)?	31
2.2.4. Fuerza de Coulomb y la masa del fotón	32
2.2.5. Aplicaciones	33
2.3. Energía de un sistema de cargas	33
2.3.1. Estabilidad de un sistema de cargas	39
2.4. Ejercicios extra	40
3. Campo eléctrico	41
3.1. Definiendo el campo eléctrico	41
3.2. Evaluación de campos electrostáticos	48
3.2.1. Líneas de campo	50
3.2.2. Distribuciones discretas de carga	51
3.2.3. Distribuciones continuas de carga	57
3.3. Ejercicios extra	66

4. Ley de Gauss	67
4.1. Flujo	67
4.2. Ley de Gauss	71
4.2.1. Flujo debido a una carga puntual	71
4.2.2. La ley de Gauss para el campo eléctrico	77
4.3. Evaluación de campos	78
4.4. Flujo como cruce de líneas de campo	87
4.5. Fuerza sobre un cascarón esférico cargado	88
4.6. Generalidades de láminas cargadas	89
4.7. Energía asociada al campo eléctrico	93
4.8. La divergencia	96
4.9. Teorema de la divergencia	98
4.10. Forma diferencial de la ley de Gauss	99
4.11. Contenido físico de la ley de Gauss	100
4.12. Estabilidad de un sistema de cargas	101
4.13. Divergencia en coordenadas cartesianas	102
4.14. Ejercicios extra	107
5. Potencial eléctrico	109
5.1. Integral de línea de \vec{E}	109
5.2. Potencial electrostático	110
5.3. Distribuciones de carga	117
5.3.1. Superficies equipotenciales	122
5.4. El gradiente	123
5.4.1. El campo eléctrico como el gradiente del potencial	127
5.5. Sobre el método de cálculo de la Ley de Gauss	131
5.6. Laplaciana: la ecuación de Poisson y Laplace	132
5.7. Resumen	134
5.8. Potencial y energía de una distribución de carga	135
5.9. Circulación de campo electrostático	136
5.10. Rotacional	137
5.10.1. Teorema de Stokes	139
5.10.2. Forma diferencial de la segunda ecuación de Maxwell	142
5.11. Rotacional en coordenadas cartesianas	142
5.12. Significado geométrico y físico del rotacional	145
5.13. Ejercicios extra	151

6. Materiales conductores	153
6.1. Teorema de la unicidad	158
6.2. Algunos sistemas con conductores	159
6.3. Capacitancia y capacitores	169
6.3.1. Varios conductores	172
6.3.2. Energía almacenada en un capacitor (condensador) . .	175
6.3.3. Fuerza entre los elementos de un capacitor	179
6.4. Ejercicios extra	181
7. Materiales diléctricos	183
7.1. El dipolo puntual	183
7.2. Multipolos Eléctricos	187
7.3. Polarización de un material dieléctrico	191
7.4. Campo Debido a Medios Polarizados Neutros	192
7.5. Ley de Gauss	198
7.6. Materiales Lineales	199
7.6.1. Susceptibilidad Eléctrica	199
7.6.2. Permitividad Eléctrica	200
7.6.3. Condiciones de Interfaz	206
7.7. Energía Potencial	210
7.7.1. Placas Paralelas	211
7.7.2. Energía de Polarización	212
7.8. Ejercicios extra	213
8. Corrientes eléctricas	215
8.1. Corriente y densidad de corriente	215
8.2. Conservación de la carga	218
8.3. Ley de Ohm	221
8.4. La Física de la Ley de Ohm	225
8.5. Materiales conductores	229
8.5.1. Metáles	229
8.5.2. Semiconductores	230
8.5.3. Superconductores	231
8.6. Curiosidades	231
8.7. Ejercicios extra	232

9. Circuitos	233
9.1. Conservación de la carga y la energía, leyes circuitales de Kirchhoff	234
9.2. Energía disipada	238
9.3. Fuerza electromotriz	240
9.4. Circuitos RC	244
9.5. Ejercicios extra	247
10. Magnetostática	249
10.1. Medición e invarianza de la carga	250
10.2. Fuerza de Lorentz, definición de campo magnético	258
10.2.1. Unidades	259
10.3. Ejemplos	261
10.4. Propiedades del campo magnético	266
10.4.1. Circulación de \vec{B} , Ley de Ampère	266
10.4.2. Forma diferencial de la Ley de Ampère	274
10.4.3. Divergencia de \vec{B}	275
10.4.4. Trabajo realizado por \vec{B}	276
10.5. Ecuaciones estáticas de Maxwell	277
10.6. Potencial vectorial	278
10.7. Campo de un hilo arbitrario de corriente, Ley de Biot-Savart .	282
10.8. Discontinuidad del campo por una superficie con corriente .	290
11. Materiales Magnetizables	295
11.1. Momento magnético	295
11.1.1. Campo de un dipolo puntual	299
11.1.2. Interacción entre el campo y un dipolo magnético .	300
11.2. Magnetización	303
11.3. Corrientes de Magnetización	305
11.4. Ecuaciones de Campo	305
11.5. Medios magnéticos	307
11.5.1. Paramagnetismo	308
11.5.2. Ferromagnetismo	310
11.5.3. Materiales lineales	311
11.6. Condiciones de interfaz	312
11.7. Sobre las unidades	314

A. Guía práctica para abordar un problema	317
A.1. Equipo de trabajo	318
A.2. Lea bien y comprenda el problema	319
A.3. Plantee claramente el camino de solución	319
A.4. Presentación	320
A.5. Metacognición	320
B. Transformaciones de Lorentz	323
B.1. Transformaciones relativistas de coordenadas	324
B.1.1. Contracción de la longitud	326
B.1.2. Dilatación temporal	327
C. Transformación general de los campos	329

Prefacio

Estas notas fueron hechas en el proceso de preparación de clase para el curso Electricidad y Magnetismo de la escuela. En principio tienen como único objetivo servirme como guía en el desarrollo de clase. Están basadas casi en su totalidad en la segunda edición del Purcell, del curso de Física de la Berkeley, extrayendo ejemplos y algunos tópicos de otros libros como el Sadiku y las lecturas de Feynmann. Lo mismo con los ejercicios, algunos fueron modificados o inventados por mí.

Otros libros sugeridos para lecturas complementarias:

- Elementos de electromagnetismo, M.N.O. Sadiku, ed. Oxford: los tres primeros capítulos muestran las herramientas matemáticas fundamentales que se necesitan. Trae también ejemplos un poco más prácticos que los desarrollados en la Berkeley.
- Introduction to Electrodynamics, D.J. Griffiths, Prentice Hall ed. : con introducción concisa a la herramientas matemáticas necesarias, es un texto de un nivel superior al del curso, pero con un lenguaje sencillo y profundidad conveniente si se quiere ir más allá.
- The Feynman's Lectures on Physics Vol.II, R. B. Leighton & M. Sands, Addison-Wesley ed.: basada en las clases de Richard Feynman en su catedra del CALTECH, tratan en un lenguaje sencillo temas de gran profundidad, presentando los conceptos desde un punto de vista distinto.

Estás notas aun están en proceso de construcción y no pretenden de ninguna manera remplazar la lectura juiciosa del Berkeley. En un futuro, ojalá no muy lejano, motivado por observaciones de los estudiantes sobre el Berkeley espero estas sirvan como tal, pero por el momento ¡NO LO SON!

En esta nueva versión del curso procuraré, además, complementar las notas con videos que espero sirvan para agilizar procesos de discusión.

No dejen de dar una mirada a las [clases del profesor Walter Lewin](#)

Capítulo 1

Introducción

Luego de burlar a su enemigo se pusieron a probar la fuerza de las armas en un palo llamado *keretena*, de madera muy dura. Fizido, con el espejo en la mano, se paró frente a ese palo, en tanto que Jitoma empuñaba el mazo. Fizido manipuló el espejo haciéndolo relampaguear, y Jitoma golpeó con mucha fuerza el mazo contra la tierra. Así se produjo el rayo con el que volaron el palo en mil pedazos.

Relato cultura uitoto.
Extraído como escrito en *El Rayo: mitos, leyendas, ciencia y tecnología*, de Horacio Torres-Sánchez. Editorial Universidad Nacional, 2002.

1.1. una invitación a interactuar

Estamos ante un curso crucial. Con la mecánica hemos comprendido cómo describir, incluso predecir la dinámica de los cuerpos una vez conocemos

las fuerzas que actúan sobre este. Sin embargo, el origen propio de las fuerzas llamadas de contacto se ha dejado de lado suponiendo un acercamiento fenomenológico donde suponemos que simplemente son cantidades que podemos medir, en forma un poco tautológica, a través de la segunda ley de Newton. Un caso particular que también se estudia allí es la fuerza gravitacional, para la cual utilizamos la ley universal de la gravitación de Newton. En este caso estamos hablando de una interacción fundamental y este curso es un escenario exclusivo para estudiar otra de las interacciones fundamentales. Pero entonces repasemos brevemente qué es una interacción fundamental.

El tipo de interacción a la que estamos más familiarizados es las interacciones sociales, las cuales se median, usualmente, a través del lenguaje, escrito, hablado o de otro tipo de expresiones culturales como la música. En este ejemplo son claros los ingredientes que hacen que la interacción exista: dos individuos, que serían los entes fundamentales de nuestro sistema, y la mediación como tal. Si eliminamos alguno de estos la interacción cesa. Pero también es claro que incluso con más personas la interacción por lo general es entre dos personas. Por ejemplo en un discurso la interacción será entre el parlamentario y el que escucha, y estará mediada por la voz del que parla. Aunque también podríamos pensar en interacciones simultáneas entre más de un par de individuos es usual que situaciones más complejas se pueda describir a partir de un elemento fundamental.

Una interacción que también puede presentarse entre dos personas, e incluso entre entes inanimados, es la de contacto. En este caso, aunque es evidente saber cuando dos cuerpos están interactuando o no, no es claro si existe o no una mediación y surge una pregunta natural ¿toda interacción está mediada por algo? En general con las interacciones entre objetos algo similar ocurre y la situación se complica tanto que cualquier explicación parece aplicarse sólo de manera fenomenológica y para a cada caso particular.

Para simplificar las cosas los Físicos hemos preferido estudiar las interacciones entre los elementos fundamentales de la materia, así como hicimos con las interacciones sociales y las personas, esperando describir todas las demás interacciones como efectos emergentes de estas. Los bloques fundamentales de la materia en la actualidad se dividen en dos tipos, *leptones* y *quarks*, que en general denominamos partículas fundamentales. De modo que las interacciones fundamentales son precisamente las interacciones que experimentan las partículas fundamentales. También a la fecha se conocen sólo cuatro tipos de interacciones fundamentales, a decir: gravitacional, electromagnetismo, nuclear débil y nuclear fuerte. Como mencionamos anteriormente, la gravedad

ya se abordó, así sea someramente, en los cursos de mecánica y dedicaremos este curso a estudiar las interacciones electromagnéticas.

Hoy sabemos que la mediación de las interacciones fundamentales está dada por campos¹ que harían las veces de las voces entre personas que interactúan incluso si no están en contacto.

El que le dediquemos un curso exclusivo a esta ya nos da una idea de la riqueza en este tema. Incluso encontraremos que comparte parte de su fenomenología a la de la gravitación,² pero encontraremos elementos que van más allá y que marcaron el camino a las revoluciones que llevaron a la formulación de la relatividad de Einstein y la mecánica cuántica, los dos pilares de la Física contemporánea. En este punto cabe resaltar que precisamente estas dos últimas serán necesarias para comprender las interacciones nucleares.

Como toda ciencia fundamental el estudio en sí de esta interacción, como herramienta para la comprensión de cómo funciona el universo, ya es suficiente motivación. Sin embargo, también es correcto decir que los fenómenos electromagnéticos han sido los precursores de los avances tecnológicos en los dos últimos siglos y con vista a seguir la misma tendencia. La pila de Volta, los generadores y motores eléctricos, los transistores y microchips, e incluso la tomografía por rayos gamma, los átomos ultrafríos, la radiación cósmica de fondo y la computación cuántica, muestran apenas un pequeño ejemplo del gran abanico de sistemas donde el electromagnetismo tiene cabida. No menos importante, y de hecho relacionado, es hecho que es esta interacción la que está presente en todos los procesos biológicos y químicos.

Durante nuestro modesto curso nos internaremos a intentar comprender tanto las generalidades del electromagnetismo como algunas herramientas que nos permitan extraer predicciones cuantitativas precisas en algunos sistemas sencillos y estimar las situaciones generales.

¹De manera más precisa por campos cuánticos, los cuales, de hecho, terminarán representando incluso a las partículas fundamentales. Pero este tema va mucho más allá de los objetivos del curso, entrando en el campo de la electrodinámica cuántica.

²Es cierto que la gravitación universal bien merece un curso exclusivo, por ejemplo estudiando en detalle la mecánica celeste, pero conceptualmente no es tan rica como sí lo es el electromagnetismo.

1.2. Un poco de historia

Es cierto que la gravedad ha sido la interacción (fuerza) más presente en la historia de la humanidad, pero, por esto mismo, se torna tan evidente que al intentar describirla simplemente se acomodaba como parte de la naturaleza misma de las cosas, sin una explicación realmente convincente. Los fenómenos electromagnéticos como el rayo, en cambio, parecen misteriosos y mágicos, por lo que se les asociaba a los dioses y sus devenires. La dificultad de control de estos fenómenos explica también que una explicación satisfactoria demorará más que la de la gravedad. A continuación hacemos un recuento de algunos momentos estelares de la electricidad y magnetismo. Para un recuento más emocionante los invito a ver este [documental de la BBC](#) presentado por el profesor Jim Al-Khalili y un alista más detallada y con otros eventos en la página [Wiki correspondiente](#).

Antigüedad

- Antigua Grecia: al frotar ciertos materiales se evidencia una atracción o repulsión con otros objetos. Se observan entonces dos tipos de naturaleza, o como la conocemos ahora, carga, “vitrea” como la carga adquirida por el vidrio en este proceso hoy denominada positiva, y la “resinosa” la adquirida por el Ambar, que es negativa. Seguramente notan la relación con los rayos en la tormentas, al realizar el experimento en la oscuridad y ver los pequeños rayos producidos al acercar el objeto frotado a otro. El origen, sin embargo, se lo dejan a la furia de Zeus.
- Árabes 600 años A.C.: a la que hoy denominamos Magnetita la llaman “piedra guía”, guía ≡ Imán en Árabe.
- Antigua China: brújulas en los barcos.

Inicios de la experimentación El siglo XVIII vienen un conjunto de curiosos experimentalistas que descubren propiedades como la conducción y la utilizan para intentar comprender la naturaleza de las corrientes y la carga eléctrica.

- Mediados del siglo XVII Otto von Guericke, el mismo del famoso experimento de los hemisferios de Magdeburgo. Primeros instrumentos generadores de electricidad con potencialidad para investigación.

- Inicios del siglo XVIII Francis Hauksbee. Mejora los generadores y, utilizando una bomba de vacío desarrollada por él mismo, hace demostraciones en la Real Academia inglesa de destellos que se generan dentro de una bola de cristal que es frotada con la mano.
- 1729 Stephen Gray utiliza el generador Hauksbee y demuestra que es posible transportar electricidad a largas distancias utilizando materiales que denomina conductores. Al resto los llama aislantes. Su explicación se asimila a la contemporánea del calor, utilizando los denominados “fluidos” o “fuegos sutiles”. Gray no logra almacenar la carga.
- 1745 – 46 Independientemente Ewald Georg von Kleist y Pieter van Musschenbroek desarrollan lo que se conoce como la *Botella de Leiden* con la que logran almacenar la carga incluso por semanas. La botella como tal es un recipiente con agua en contacto con el generador del Hauksbee. Parece ratificar la idea de un fluido sutil, pero el hecho que deba mantenerse la parte externa del recipiente en contacto con un conductor es un acertijo que no concuerda con esta idea.
- 1740 – 1750 Benjamin Franklin: lo que se evidencia como dos tipos distintos de carga, en los objetos frotados, se pueden entender como una única donde el exceso de esta produce carga negativa, y el defecto el signo opuesto positivo. El transporte de estas cargas también explicaría la naturaleza observada en las corrientes, como el fenómeno de la carga de la botella de Leiden.
- 1752 mayo 23. Thomas-François Dalibard y Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, realizan un experimento con una barra metálica que se extendía cuatro metros saliendo hacia arriba de una botella. En una tormenta un rayo golpea este pararrayos y la energía se almacena en esta botella de Leiden. Los rayos sí son electricidad, como dijera Franklin.
- 1770 Luigi Galvani: surge la idea de la electricidad animal.
- 1770 – 1790 Alessandro Volta: en su búsqueda de poner a prueba las ideas de Galvani demuestra que el origen de esta electricidad no es animal a través de la invención de la [pila eléctrica](#).

La clásica: nacen las leyes

La descripción formal del electromagnetismo es más complicada que la de

la gravedad de Newton, por lo que, contrario al trabajo concluyente y casi independiente de Newton, el desarrollo del electromagnetismo es un proceso continuo de por más de un siglo e involucró varios científicos que colaboraron en su desarrollo.

Interesantemente la conclusión del desarrollo clásico, contenido en el trabajo de Maxwell, fue el la semilla al trabajo de Einstein en la teoría de la Relatividad General que corrige la teoría de Newton.

- 1785 Coulomb, cuantifica la fuerza entre las cargas. Este experimento fue realizado anteriormente por Cavendish en 1772, pero no hizo públicos sus resultados.
- 1807 Humphry Davy: construcción de una batería con 250 placas metálicas. La utiliza para pasar corrientes intensas a través de soluciones intentando su descomposición. Con su aparato logra identificar par 1808 el potasio, el sodio, el magnesio y el calcio. Estos trabajos, entre otro atraen la atención de un joven que más tarde cambiaría la historia de la humanidad, Faraday.
- 1819 Hans Oersted: observa que las corrientes producen desviación de brújulas próximas. Se sabe que el italiano Gian Domenico Romagnosi en 1802 ya lo había observado, pero fue ignorado.
- 1820 André-Marie Ampère, fuerza entre hilos rectos con corriente y primeras nociones de la regla de la mano derecha. Primeros galvanómetros
- 1821 Michael Faraday repite el experimento de Oersted y determina que la fuerza sobre un imán es circular al hilo con corriente. Primer motor eléctrico. Electricidad-magnetismo \implies Electromagnetismo.
- 1830 Jean-Baptiste Biot y Félix Savart, e independientemente André-Marie Ampere, cuantifican la fuerza entre alambres con corrientes. Describen los campos magnéticos asociados a corrientes eléctricas.
- 1831 Joseph Henry: Bases para el telégrafo. Electroimán capaz de elevar 300 kg de hierro. Se observa que al invertir la corriente el acero permanecía suspendido un corto tiempo.

- 1831 Michael Faraday: estudia este fenómeno llegando al sistema primario de un imán y una espira de corriente campos magnéticos variables en el tiempo generan campos eléctricos. Ley de Faraday, la ley que mueve el mundo moderno. Este mismo año, luego de una década al estudio de los fenómenos ondulatorios, como las figuras Chadlni, inicia a pensar en ondas magnéticas, lo que sería, al parecer a su idea de los campos de fuerzas.
- 1850 Faraday en una charla manifiesta su inclinación a pensar en una íntima relación entre la electricidad y el magnetismo. Esta idea luego sería retomada a principios del siglo XX por Theodor Kaluza y luego refinada por Oskar Klein unificando ambas teorías en la reciente descripción de la gravedad dada por Einstein. Es el inicio del sueño de la teoría unificada hasta el momento evasiva. Sin embargo, es cierto que la electrodinámica, a través de la relatividad, impulsaría al desarrollo de la relatividad y su descripción de la gravedad.
- 1865 James Clerk Maxwell: formalización matemática y unificación de las leyes de la Electrodinámica en las ecuaciones de Maxwell. Esta formalización establece la realidad física de los campos electromagnéticos y predice las ondas electromagnéticas, ondas que no necesitan medio alguno para propagarse y en el vacío lo hacen a la velocidad de la luz. Unificación los fenómenos electromagnéticos con los ópticos.
- 1884 Oliver Heaviside da la forma moderna, vectorial, de las ecuaciones Maxwell.
- 1885 – 89 Heinrich Hertz, detecta experimentalmente la ondas electromagnéticas. [Simultáneamente revela el efecto fotoeléctrico](#). Oliver Joseph Lodge lo hace independientemente y con un método distinto para ondas en [hilos con corriente](#).
- 13 de mayo de 1897. Transmisión de radio a través de mar abierto por parte de Guillermo Marconi.

La llamada a la relatividad y la mecánica

El descubrimiento del efecto fotoeléctrico y la radiación de cuerpo negro ponen en duda la teoría clásica de la radiación electromagnética. Nadie sospecharía que sería necesario reformular la física desde sus cimientos.

- 1879 Edwin Herbert Hall descubre el efecto que lleva su nombre. Este permite establecer que en los metales los portadores de carga en una corriente tienen carga negativa. Hoy tiene diversas aplicaciones tecnológicas y áreas de estudio científico.
- 1887 Albert Michelson y Edward Morley diseñan y llevan a cabo un experimento para probar el movimiento relativo de la Tierra respecto al *Eter*. Sus resultados son negativos.
- 1895 Wilhelm Conrad Roentgen descubre los rayos X.
- 1896 John Hall-Edwards realiza la primera radiografía con fines médicos.
- 1897 J. J. Thompson descubre el electrón, portador fundamental de carga.
- 1905 Relatividad especial de Einstein. “Sobre la dinámica de los cuerpos cargados”
- 1905 Albert (Mileva) Einstein postula la existencia del fotón, explica así el efecto fotoeléctrico. El campo electromagnético también tiene asociado una partícula.
- 1909 Robert A. Millikan determina la carga del electrón.
- 1911 Heike Kamerlingh Onnes descubre el fenómeno de la superconductividad.
- 1914 Marie Curie conforma la flota de carros radiológicos para la realización de radiografías rápidas en campo durante la primera guerra mundial.
- 1920's la naciente mecánica cuántica permite una comprensión exacta de los materiales conductores y aislantes. Algunas ideas sobre el funcionamiento de los de los semiconductores, descubiertos casi un siglo antes, pero la explicación de los superconductores queda aún abierta. La compresión tardaría unas décadas.
- 1927 – 37 Paul Dirac, Wolfgang Pauli, Eugene Wigner, Pascual Jordan, Werner Heisenberg, Enrico Fermi, primeras descripciones del campo electromagnético que incluían la mecánica cuántica.

- Robert Oppenheimer (1930), Felix Bloch (1937) y Arnold Nordsieck (1939) muestran inconsistencias en las teorías propuestas.
- 1940's Richard Feynman, Julian Schwinger y Shin'ichirō Tomonaga, independientemente, desarrollan de la electrodinámica cuántica (QED), entendida como la interacción entre las cargas y los fotones. Freeman Dyson demuestra que las tres versiones son equivalentes.
- 1947 John Bardeen y Walter Houser Brattain del Grupo de Física del Estado Sólido de Laboratorios Bell, dirigido por William Shockley, desarrollan el transistor.
- 1948 Julian Schwinger utiliza la (QED) para determinar el valor numérico del momento magnético del electrón. En la actualidad la teoría predice lo observado hasta la décima cifra significativa. Lo que la hace la predicción más precisa de la Física hasta la fecha, por tanto la QED se considera la teoría mejor probada en la historia.
- 1954 Chen Ning Yang y Robert Mills generalizan la QED en lo que hoy se conoce como teorías de Yang-Mills. Estas son la base para la descripción de las interacciones nucleares.
- 1957 John Bardeen, Leon Cooper y John Schrieffer utilizan la teoría cuántica de campos, desarrollada paralelamente con la QED, para explicar la superconductividad.
- 1959 Yakir Aharonov y David Bohm analizan el efecto predicho una década antes por Werner Ehrenberg y Raymond Siday, de lo que hoy se conoce como efecto Aharonov-Bohm o Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm, pues se sabe que Ehrenberg y Siday realizaron un trabajo anterior al de Aharonov y Bohm.
- 1960 Theodore Maiman desarrolla el primer láser funcional.
- 1964 se detecta la fuente de rayos X Cygnus-X1. En la siguiente década se refuerzan y soportan los datos de lo que hoy se acepta es de un sistema binario donde uno de sus miembros es un agujero negro.
- 1965 Arno Penzias y Robert Woodrow Wilson detectan por accidente la radiación cósmica de fondo.

- 1967 Jocelyn Bell y Antony Hewish descubren, utilizando radio telescopios, los pulsares.
- 1977 Raymond Damadian realiza el primer escáner por resonancia magnética nuclear, en lo que hoy se denomina simplemente Imagen por Resonancia Magnética (IRM), utilizando el método que él mismo desarrolló.
- 1980 Klaus von Klitzing descubre el efecto Hall cuántico.
- 1982 Daniel Tsui y Horst Störmer descubren el efecto Hall cuántico fraccionado.
- 1983 Robert Betts Laughlin explica el efecto Hall fraccionado introduciendo cuasipartículas con cargas fraccionadas.
- 1987 Johannes Bednorz y Karl Müller descubren la superconductividad a alta temperatura crítica .
- 1999 El Chandra X-ray Observatory, es lanzado el 23 de julio. Un telescopio en órbita que explora el universo en el rango de los rayos X.
- 2004 Andre Geim y Konstantin Novoselov aislan y caracterizan el grafito.

Pregunta 1.1. ¿Qué aplicación de la electricidad, el magnetismo o la óptica le parece más interesante y por qué?

Pregunta 1.2. ¿Qué porcentaje de aparatos de su casa son eléctricos? ¿Qué porcentaje de aparatos de su casa son electrónicos?

1.3. Algunas generalidades sobre los campos

Toda esta revolución estará enmarcada con un concepto que será central a nuestro curso: los campos. Intentaré en esta sección mostrar que el concepto de campo no es algo exclusivo del electromagnetismo y que puede ser entendido de manera básica y general sin necesidad de entrar en formalismos matemáticos complejos.

La palabra “campo”, aunque común en muchos aspectos cotidianos, es usual

para referirse al ambiente donde ocurren situaciones o fenómenos. Utilicemos esta noción para iniciar a ilustrar cómo se entienden en general los campos. Pensemos en el campo como ese espacio, en la Tierra, que se distingue de la ciudad y donde ocurren prácticamente todos los eventos agrícolas humanos. Claramente no es el mismo de hace unos años y tenemos una opción: o decir que el campo ha desaparecido o que ha cambiado. En física optamos por la segunda, diciendo que tanto la *ciudad* como eso que llamamos *campo* son dos manifestaciones del mismo campo, sino que en ciertos puntos y momentos toma su forma como ciudad y en otras como lo que llamamos campo.

En este punto se torna un poco más complejo de entender así que tomemos un ejemplo simplificado: el campo de juego, ilustrado acá por una cancha de fútbol. A este le podremos asociar una identidad cuantitativa que nos indique algunas particularidades de a qué hace este referencia. Así, asignemos un número 1 al los puntos donde hay juego y un 0 a donde no. Entonces ahora podemos ver la cancha de fútbol como un campo numérico que toma dos valores, 0 y 1. Dentro de los límites de la cancha el campo toma el valore 1 mientras que fuera 0,³ como se observa en la figura 1.1. Decimos entonces,

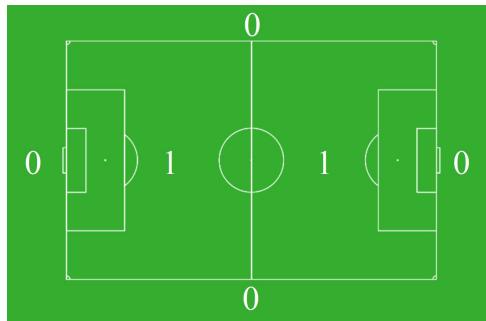


Figura 1.1: Campo de fútbol. Toma valores 1 en todos los puntos del espacio enmarcados por la cancha, y cero en todos los puntos fuera de esta.

que un campo es un ente que está definido en todo el espacio. A cada punto del espacio se le asocia una propiedad. Para el ejemplo apenas expuesto esta propiedad es un número, unos y ceros, pero para el anterior sería *campo* y *ciudad*. Con esto en mente podemos darnos cuenta que estamos rodeados de campos, algunos descritos por números, como es el caso del campo de

³Un ferviente aficionado diría que en las gradas también debería ser distinto a cero, de ahí términos como “ganamos” o “perdimos” aunque no hayan nunca jugado.

temperaturas, T definido por

$$T(\vec{r}) \equiv \text{temperatura en el punto } \vec{r},$$

donde es importante recordar que, como es usual en las cantidades físicas, que se le deben asociar unas unidades, que en este caso es el Kelvin. Una representación visual de este campo se muestra en la figura 1.2,

Este último ejemplo nos muestra que nos podemos poner románticos y

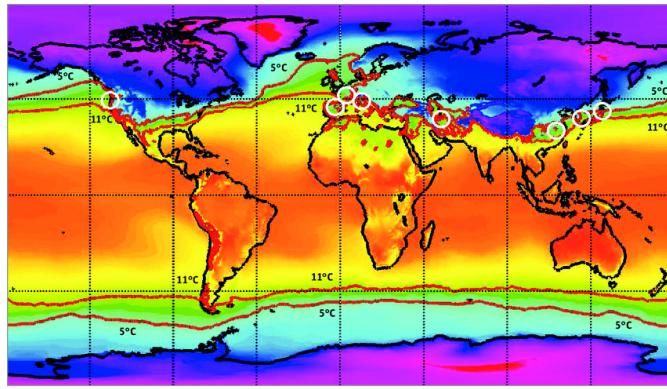


Figura 1.2: Campo de temperaturas terrestre. Se asigna colores pálidos para temperaturas bajas y cálidos para temperaturas altas. Tomado de [M. M. Sadji et al.](#)

pensar en un campo de flores como el de la imagen 1.3. Pero si recordamos que el código RGB (Red-Green-Blue)⁴ entendemos que para describir un campo de colores no nos basta con un número y necesitamos tres. Cantidad conformadas por tres escalares las conocemos bien, los vectores. Así que este campo de colores matemáticamente está asignando un vector en cada punto del espacio y estamos hablando de un campo vectorial.⁵ Un ejemplo de este

⁴Tomando a los colores rojo, azul y verde como primarios se construyen todos los otros por una combinación en distintas proporciones de esta. Así el **rojo** se expresaría como $(1, 0, 0)$, el **azul** por $(0, 1, 0)$, mientras el **verde** por $(0, 0, 1)$. Por ejemplo el color en el que está escrita esta **palabra**, está dado por las proporciones $(0,858, 0,188, 0,478)$.

⁵Aunque no lo hacemos acá, para no hacer más engoroso el análisis debe ser claro que así como se pueden generalizar los vectores a tensores, es posible definir campos tensoriales de manera general. Sucede que usualmente en electromagnetismo, y en general en electrodinámica, para simplificar el lenguaje el término campo se le añade sólo a los campos eléctrico y magnético, cuando también se tienen campos escalares, e.g., potencial eléctrico, y tensoriales, e.g. tensor de Maxwell.



Figura 1.3: Campo de flores. Vemos que podemos tomarlo como un campo de colores también. Imagen [Getty Images](#).

tipo de campos es el campo, \vec{V} de velocidades de las partículas en un fluido como el viento, el cual definimos como

$$\vec{V}(\vec{r}) \equiv \text{velocidad del viento en el punto } \vec{r}.$$

La visualización de un campo vectorial es un poco más compleja pero aun posible graficando los vectores no en un continuo sino en puntos cercanos, obteniendo diagramas como el mostrado en la figura 1.4. Pensando en el ejemplo de velocidades de partículas para el campo mostrado en la figura 1.4, podríamos identificar un punto, a la derecha, de donde las partículas parecen ser emitidas, una fuente, mientras a la izquierda se observa un punto donde estas son absorbidas, un sumidero. Esta terminología de hecho será extendida luego para referirnos a otro tipo de campos no necesariamente de velocidades. En el siguiente [enlace](#) se pueden generar y visualizar ejemplos de campos de velocidades para tener una mejor noción a lo discutido hasta este punto.

La imagen 1.4 nos invita a pensar en líneas que forman los vectores que conforman el campo. En efecto este acercamiento será de gran utilidad en nuestro curso.

Ya habíamos mencionado en el ejemplo de campo-ciudad que los campos pueden cambiar en el tiempo. Así, por ejemplo, el campo de fútbol, luego de haberse acabado los noventa minutos reglamentarios se apaga y toma el valor cero en todo el espacio, lo mismo en el descanso. De modo que debemos extender nuestra definición de manera que queda:

Definición. Un campo físico es una entidad física definida sobre todos los

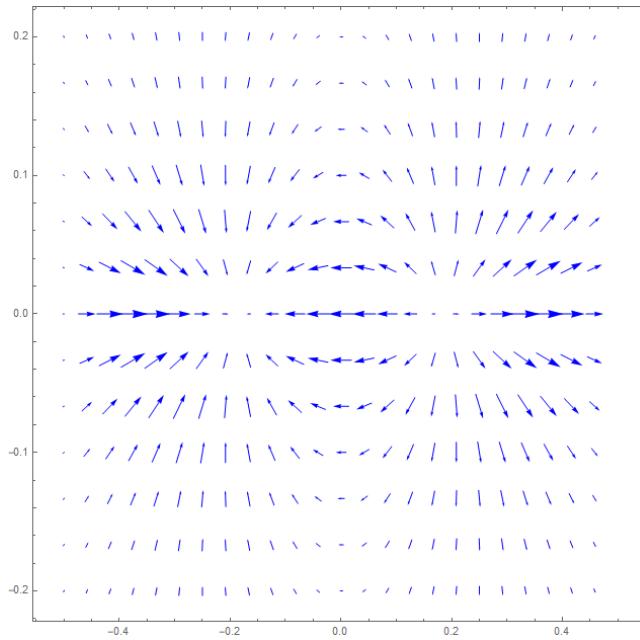


Figura 1.4: Campo vectorial en dos dimensiones. En puntos vecinos se asignan vectores con su respectivo módulo y dirección. Pensando en este como un campo de velocidades, en las coordenadas $(0,2,0)$ se observa una fuente de partículas, pues de allí las partículas necesariamente son emitidas, y en $(-0,2,0)$ un sumidero, pues de este punto toda partícula necesariamente es absorbida.

puntos del espacio y el tiempo.

Para los dos ejemplo antes expuestos

$$\begin{aligned} T(\vec{r}, t) &\equiv \text{temperatura en el punto } \vec{r} \text{ y tiempo } t, \\ \vec{V}(\vec{r}, t) &\equiv \text{velocidad del viento en el punto } \vec{r} \text{ y tiempo } t. \end{aligned}$$

De la dependencia de los campos en el tiempo resultará en una de las maravillas que descubriremos en el curso: las ondas.

Pregunta 1.3. ¿Podría identificar algún otro ejemplo de campo?

1.4. ¿Qué exploraremos en el curso?

Cualquier cosa que pueda decir durante el curso no podrá dar a entender la magnitud de las implicaciones del tema que abordaremos. Quisiera, sin embargo, dar desde un inicio un sabor de nuestros objetivos y el rango de alcance de lo que estudiaremos.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío en forma diferencial, en ciertas unidades, son las siguientes

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	Ley de Gauss para los campos eléctricos
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Ley de Gauss para los campos magnéticos
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	Ley de Faraday
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{J}$	Ley de Amperè-Maxwell

Por un lado al final del curso entenderemos qué dicen físicamente estas ecuaciones y cómo utilizarlas para determinar los campos electromagnéticos, arriba denotados por \vec{E} y \vec{B} , si conocemos las distribuciones de carga, ρ , y corrientes, \vec{J} , o viceversa. Para esto desarrollaremos algunas técnicas básicas que nos permitirán abordar de manera analítica sistemas sencillos, y tener elementos necesarios en caso que se deseen abordar sistemas más complejos, por ejemplo por métodos numéricos computacionales.

Por otro lado, tendremos nociones básicas de cómo estos campos interactúan con las cargas, de donde tendremos herramientas generales para predecir su dinámica. Esto, en particular, nos permite entender por qué las expresiones arriba presentadas sólo son válidas en el vacío y deben ser modificadas en el caso en que haya presencia de materiales que se vean afectados por los campos. También estudiaremos algunas implicaciones de estas ecuaciones modificadas.

La aplicación directa de la Física que se estudiará se encuentra en los circuitos eléctricos y electrónicos. Así que durante el curso se introducirán nociones básicas de circuitos, sus componentes y métodos de solución en casos sencillos.

Personalmente apenas logro dimensionar y tener plena conciencia del potencial que tienen las ecuaciones de Maxwell. Para mí es aún increíble saber todo lo que está contenido en las ecuaciones de Maxwell y las implicaciones de estas. En efecto, aunque estamos ante una teoría que se denomina, en términos generales, clásica esta no es alterada por la Relatividad Especial,

diciéndose que es un teoría relativista. Recordemos que los efectos relativistas son importantes en tanto las velocidades relativas sean comparables a la velocidad de la luz en el vacío. Pero ya que los campos electromagnéticos se propagan justamente a esta velocidad tenemos que es imposible descartar la relatividad de Einstein para estos. De hecho, como ya se mencionó, las ecuaciones de Maxwell fueron la semilla esta teoría.

Sin embargo, relatividad impone inmediatamente restricciones que debemos tener en cuenta. Por ejemplo la creación espontánea de electrones por polarización del vacío. Este límite dado por el mecanismo de Schwinger implica que para energía concentrada suficientemente altas (recordemos la famosa formula $E = mc^2$) es posible la creación de pares, electrón positrón. Como veremos en el curso, los campos electromagnéticos cuenta con energía, así, decimos que el proceso apenas mencionado ocurrirá para campos eléctricos con magnitudes del orden

$$E_S = \frac{m_e^2 c^3}{q_e \hbar} \approx 1,3 \times 10^{18} V/m, \quad (1.1)$$

con m_e y q_e respectivamente la masa y carga del electrón, \hbar la constante reducida de Planck y V la unidad de Voltios, i.e., as unidades de campo eléctrico son de Voltios por metro. Así, el campo E_S impone un límite en la magnitud del campo para el cual podemos confiar en las predicciones de las ecuaciones de Maxwell, pero para que se den una idea, el campo eléctrico entre las líneas de una torre de alta tensión está en el orden de $10^6 V/m$, muy por debajo del límite que estamos encontrando.

Lo anterior también nos lleva a una de las implicaciones más poderosas a nivel práctico de las leyes de Maxwell: linealidad. Las leyes de Maxwell forman un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, lo que implica formalmente que la suma de un par de soluciones es a su vez una solución de estas. Físicamente esto es debido a que el los campos electromagnéticos, o sus partículas asociadas, los fotones, no poseen carga eléctrica, por lo tanto no interactúan entre sí a nivel clásico. En la actualidad se tiene una cota muy restringida en la posibilidad que los [fotones tengan carga](#)

$$|q_\gamma| < 1 \times 10^{-35} |q_e|,$$

con q_γ la carga del fotón. A nivel cuántico pueden generarse procesos como el mecanismo de Schwinger⁶ o donde dos ondas electromagnéticas se dispersan

⁶De allí que la constante de Planck aparezca en la ecuación (1.1).

una con otra, aun siendo neutras. Estos efectos en general son despreciables, incluso para la evaluación de espectros atómicos. Sin embargo, para átomos pesados pueden llegar a ser significativos.

En general sucede que la respuesta de los materiales a los campos electromagnéticos es no lineal y fenómenos no lineales son esperados en esta circunstancias, de hecho es un área interesante de trabajo e investigación. Sin embargo, la aproximación lineal usualmente es suficiente para abordar gran cantidad de situaciones. Por lo demás, a parte de los ferromagnetos duros los fenómenos no lineales no serán abordada en el curso.

En el curso nos restringiremos a la descripción clásica, o sea, no cuántica, lo que implica trabajar con distancias grandes. Más precisamente para distancias mucho mayores a $10^{-12}m$, i.e. del orden del tamaño del núcleo atómico. Esto implica que aun para tamaños atómicos, $10^{-10}m$, los efectos cuánticos son pequeños, como se puede evidenciar de la eficacia del la descripción de Schrödinger para el espectro del átomo de hidrógeno utilizando el potencial de Coulomb.

Otra circunstancia donde la teoría que estudiaremos falla es en la situación no es posible despreciar la interacción entre las cargas y fotones individuales, como es el caso del efecto fotoeléctrico. Esto se puede traducir en circunstancias en las que la densidad de fotones es baja tal que no es posible tomar su comportamiento como onda electromagnética. Una forma más precisa de establecer este límite es por medio del cambio de momento en el proceso. Así, si el cambio en el momento lineal es del orden del momento inicial del fotón no es posible una descripción clásica. Por ejemplo, en el efecto fotoeléctrico los electrones expulsados adquieren un momento lineal igual al del fotón absorbido y la descripción por ondas electromagnéticas no predice correctamente el efecto. En los materiales sólidos el cambio de momento está asociado con el espaciamiento intermolecular a , $\Delta k \sim 1/a$, con k . Con esto podemos hacer una asociación con las longitudes de onda, $\lambda \sim 1/k$, donde se espera que la descripción clásica deje de ser efectiva, i.e., $\lambda \sim a$.

Otra circunstancia en la que nuestra teoría no puede ser aplicada es la de la gravitación en el marco de la relatividad general de Einstein. Para nosotros el espacio-tiempo será completamente rígido y además plano. Incluir espacio curvos en nuestro formalismo es relativamente sencillo mediante la modificación correspondiente de los operadores diferenciales que están involucrados. Por otro lado la inclusión de efectos gravitatorios implica solucionar otro conjunto de ecuaciones, ecuación de Einstein, que vendría acoplada a las ecuaciones de Maxwell. Lo real, sin embargo, para efectos prácticos los efectos

tos gravitatorios debido a la energía en los campos electromagnéticos puede ser despreciado.

Todo lo anterior no sólo nos sirve como advertencia de que, como con toda teoría física, se debe tener presente su rango de aplicación y validez, sino que nos justifica el porqué el electromagnetismo es, tal vez, la rama de la física con mayor aplicabilidad en el mundo moderno, cubriendo desde la electrónica hasta las telecomunicaciones, pasando por la medicina y hasta la exploración petrolífera.

Pregunta 1.4. *¿Cuales son los límites de aplicación de la mecánica newtoniana?*

Ejercicio 1.1. *Suponga un viaje interplanetario en el cual, para beneficio de los viajeros, se acelera continuamente a una aceleración g . ¿Qué rapidez tendrá la nave para cuando llegue a Marte? ¿Cuál será cuando esté saliendo del sistema solar? ¿Qué tan fiables son sus resultados?*

Capítulo 2

Interacción entre cargas estáticas

En este capítulo abordamos el estudio de la interacción entre cargas sin movimiento relativo. Haremos un análisis utilizando conceptos ya conocidos en mecánica y sin el de campo, el cual se introduce en el próximo capítulo. Para iniciar definiremos con cierta precisión el concepto de carga eléctrica y listaremos algunas de sus propiedades, luego nos detendremos a encontrar consecuencias detrás de la fuerza entre cargas puntuales.

2.1. Carga eléctrica

Esta se puede definir como la propiedad de la materia que caracteriza la magnitud de la interacción eléctrica para cargas en reposo.¹ Nótese que esta sólo afecta la magnitud de la interacción, de hecho, la carga es un escalar.

Pregunta 2.1. *¿Qué son los vectores?*

Pregunta 2.2. *¿Encuentra alguna similitud entre la definición de carga y la de masa gravitacional?*

¹En adelante y como es usual en todos los textos en Electromagnetismo nos referiremos como carga tanto a la propiedad física de las partículas portadoras de carga, como a las particular cargadas en sí, sin que esto cause confusión.

2.1.1. Propiedades de la carga eléctrica

El estudio fenomenológico de los procesos que involucran cargas se han observado ciertas propiedades que al día de hoy, en algunos casos, se han elevado al *status* de leyes.

Tipos de carga

Existen sólo dos tipos de carga, que distinguimos simplemente por distintos signos *positivo*, $+$, y *negativo*, $-$. Encontramos así una primera distinción de la gravedad, donde sólo se encuentra un signo para la masa. Como veremos un poco más adelante esto implica que las interacciones eléctricas pueden ser tanto atractivas como repulsivas.

Ley de la conservación de la carga

“En un sistema aislado la carga eléctrica total, i.e., la suma algébrica de las cargas, es una constante en el tiempo.”

Como ejemplo tenemos los colisionadores de partículas, como el Large Hadron Collider (LHC), donde la colisión de dos átomos produce infinidad de otras. Este proceso, sin embargo, debe respetar la conservación de la carga. En el caso del LHC las partículas que colisionan son protones, con carga positiva e , luego la carga total es $2e$. Así, la suma total de las cargas finales debe ser necesariamente $2e$.

Los desarrollos teóricos del siglo pasado han logrado entender que la conservación de la carga se puede comprender desde una descripción microscópica como debida a una simetría interna de la interacción eléctrica, algo que soporta el que esta observación sea considerada como una ley, pero esta explicación está fuera del objetivo del curso.²

Pregunta 2.3. ¿Conoce alguna otra ley de conservación?

²La idea groso modo de esta simetría es imaginar que las cargas eléctricas experimentan un espacio además del espacial, que llamamos interno, que es algo así como un plano (más precisamente el plano complejo) y, en este, se pueden hacer giros y la física no se percata de estos cambios. Los dos signos de la carga estarían asociados a las dos posibilidades de giro, las positivas giran en un sentido mientras que las negativas lo hacen en sentido opuesto.

Cuantización de la carga

De la neutralidad de los átomos de hidrógeno, y de otros más complejos, se tiene que el protón y el electrón tienen cargas idénticas e con signos contrarios con una diferencia del orden $10^{-16}e$. Los constituyentes del protón, llamados *quarks*, tienen cargas $\pm\frac{1}{3}e$ y $\pm\frac{2}{3}e$, pero no hay evidencia de partículas con cargas en fracciones más pequeñas. Se piensa que debe existir alguna explicación fundamental que prohíba las partículas de carga arbitraria, pero esto permanece aun como un misterio. Tal vez los experimentos que se llevan a cabo en el momento en el LHC puedan revelar alguna pista al respecto. Para nuestro estudio teórico formal la cuantización de la carga será irrelevante y supondremos, cuando sea el caso, que podemos quitar o adicionar cualquier cantidad arbitraria de carga que deseemos. Físicamente esto lo podemos entender como el suponer que las magnitudes de los objetos cargados a los que se les cambia la carga son mucho mayores a las del electrón, que es el portador de carga por excelencia. Además que los cambios de carga son mayores a la carga fundamental e , la magnitud de la carga del electrón.³

Invariante relativista

La relatividad especial planteada por Einstein a principio del siglo pasado trae consigo que, para que la física sea algo universal independiente del estado de movimiento del observador, existen cantidades físicas cuyo valor dependerá de este estado. Los ejemplo usuales son la longitud, que se dice se contrae en la dirección de movimiento, y el tiempo, que se dilata. Sin embargo, existen cantidades especiales cuyo valor numérico es independiente del estado de movimiento de quien lo mide. El ejemplo primario es la velocidad de la luz en el vacío. Otro es la carga eléctrica.

Este resultado se ve soportado en la neutralidad de los átomos de hidrógeno. Mientras el protón se puede considerar que se encuentra en reposo respecto al laboratorio, los electrones en sus órbitas se encuentran en movimiento con velocidades relativistas. Si la carga no fuera un invariante se observaría un desbalance.

³Formalmente debería ser $\frac{1}{3}e$ ya que es la mínima hasta ahora observada, en los *quarks*. Sin embargo, lo natural es considerar el electrón como el portador de la carga móvil ya que los *quarks* se mantienen siempre confinados en los nucleones y no se presentan libremente en la naturaleza.

Ejercicio 2.1. Considere una bomba de caucho sobre la cual se ha distribuido uniformemente sobre la superficie una carga de $3 C$. Suponga que se infla con agua a una rapidez de 10 gr/s . Calcule la rata con que cambia la densidad superficial de carga como una función del radio. **Nota:** como precisaremos más adelante el C denota la unidad de carga Coulomb.

Ejercicio 2.2. Suponga una esfera de radio 3 cm con una densidad volumétrica de carga uniforme de 1 C/m^3 . Calcule la carga total de la esfera.

Ejercicio 2.3. Vamos a considerar que el Sol está conformado por sólo átomos de hidrógeno, lo cual es buena aproximación para nuestro problema. Suponiendo que las observaciones astronómicas revelan una cota superior para la carga del Sol del orden de $10^{20} C$. Halle la cota superior que esta observación implica en para el parámetro $|1 - \frac{q_p}{e}|$, con q_p la carga del protón y $e = 1,602 \times 10^{-19} C$ el valor absoluto de la carga del electrón.

Ejercicio 2.4. Suponiendo que las cargas de protón y del electrón se diferencian en una parte por billón, i.e., $|1 - \frac{q_p}{e}| \approx 10^{-12}$. Estime cuál sería la carga de la Tierra y la de una persona.

2.2. Ley de Coulomb (Cavendish 1770's)

A pesar de los intentos de Franklin y contemporáneos no sería sino hasta la década de los 70's del siglo XVIII que se tendría un cambio cualitativo en la comprensión de los fenómenos eléctricos. En este experimento, Coulomb⁴ utilizó una balanza de torsión con dos esferas cargadas separadas a posición relativa \vec{r}_{12} como muestra la figura 2.1.

En este experimento encuentra que la fuerza entre dos cuerpos cargados PUNTUALES FIJOS (lentos) satisface las siguientes propiedades:

- a) La magnitud de la fuerza es proporcional a el producto de las cargas:

$$|\vec{F}| \sim |q_1 q_2|. \quad (2.1)$$

⁴Hoy se sabe que Cavendish, quien también realizara un experimento equivalente con masas para poner a prueba la ley universal de la gravitación, hizo antes que Coulomb este experimento. Sin embargo, horaño como era, nunca publicó sus resultados.

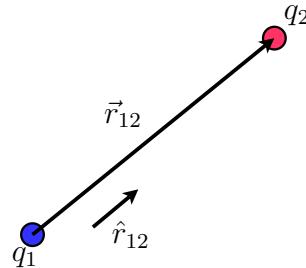


Figura 2.1: Cargas q_1 y q_2 separadas por un vector relativo \vec{r}_{12}

- b) La magnitud de la fuerza disminuye con la distancia como el inverso al cuadrado de la distancia entre las cargas, $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$:

$$|\vec{F}| \sim \frac{1}{r_{12}^2}. \quad (2.2)$$

- c) La dirección de la fuerza está determinada por la línea imaginaria que une las dos cargas:

$$\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \sim \hat{r}_{12}, \quad (2.3)$$

con $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/|\vec{r}_{12}|$ el vector unitario que define la línea uniendo las cargas. Usualmente a este tipo de fuerzas se les denomina radiales.

- d) Además tenemos información conocida con anticipación por los trabajos de Franklin. A decir, que existen dos tipos de carga que llamamos positiva (+) y negativa (-), las cuales se atraen si son de signos opuestos y se repelen si son de signos contrarios.
- e) Por último, una propiedad de suma importancia para nosotros, la linealidad. La fuerza experimentada por una carga debido a un conjunto de cargas es la suma vectorial de cada una de las fuerzas por aparte.

Las anteriores observaciones se conjugan en una sola expresión para la fuerza experimentada por la carga q_2 debido a la carga q_1

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (2.4)$$

donde hemos introducido una constante de proporcionalidad k que tiene la misión de coordinar las unidades para que a ambos lados de la expresión

coincidan. El signo de esta constante de proporcionalidad se fija pidiendo que el sentido de la fuerza sea el observado experimentalmente. Así tomamos $k > 0$ de tal forma que las cargas de signo opuesto se atraigan, la fuerza sobre q_2 va en sentido opuesto a \hat{r}_{12} , mientras cargas del mismo signo se repelan, la fuerza sobre q_2 va en el mismo sentido de \hat{r}_{12} . Es usual encontrar la ley de Coulomb enunciada simplemente como

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \quad (2.5)$$

lo cual no está mal en tanto recordemos la naturaleza vectorial de nuestra fuerza y que esta es radial. De otra forma puede llevar a equívocos, sobre todo cuando se desea utilizar la superposición lineal para determinar la fuerza sobre una carga debida un conjunto de cargas, donde es crucial el carácter vectorial de la fuerza.

La realidad es que la expresión (2.5) tampoco resulta muy conveniente para aplicar la superposición lineal. Para tener una expresión más precisa y cómoda asignaremos vectores posición a cada carga escogiendo un origen arbitrario. Así la carga q_1 se encuentra en \vec{r}_1 mientras q_2 en \vec{r}_2 y su posición relativa $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, como lo muestra la figura 2.2

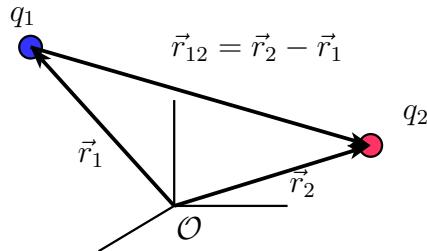


Figura 2.2: q_1 se encuentra en \vec{r}_1 mientras q_2 en \vec{r}_2 , relativas a un origen O y su posición relativa $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Con esto, recordando $\hat{r}_{12} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, se tiene la siguiente expresión que será con la que trabajaremos,

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (2.6)$$

donde hemos cambiado ligeramente la notación para estresar el hecho que esta expresión es para la fuerza experimentada sobre q_2 debida a la carga q_1 .

Intercambiado el rol jugado por q_1 y q_2 es posible verificar que se satisface la tercera ley de Newton, a decir

$$\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1} = -\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}. \quad (2.7)$$

Como ya advertimos una de las ventajas de la expresión (2.6) es que permitirá un manejo más sencillo en el caso de varias cargas, esto debido a que permite una rápida identificación de las componentes de la fuerza dadas las coordenadas de cada carga, así:

$$F_{x,q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (x_2 - x_1), \quad (2.8)$$

$$F_{y,q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (y_2 - y_1), \quad (2.9)$$

$$F_{z,q_1 \rightarrow q_2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (z_2 - z_1), \quad (2.10)$$

con

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \quad (2.11)$$

2.2.1. Sobre las unidades

Como se dijo anteriormente la constante de proporcionalidad, k , en la expresión para la Ley de Coulomb es tal que fija las unidades, pero como estamos ante una nueva cantidad física, la carga, podemos incluso escoger sus unidades a conveniencia y, por tanto, el valor numérico de la constante. A continuación mostramos las definiciones en dos de los sistemas más comunes, el *cgs* y el *SI*⁵.

- El sistema *cgs* utiliza el hecho que la carga caracteriza la magnitud de la fuerza, de tal forma que fijando el valor de $k = 1$ (¡sin dimensiones!) es posible definir la unidad carga a partir de la fuerza. Así, se define la unidad de carga tal que produce una $dina = grcm/s^2$ de fuerza al interactuar con una carga idéntica separada a una distancia de 1 cm . Osea que la unidad de carga en este sistema no es independiente las fundamentales de longitud, masa y tiempo, y está dada por $q = 1\text{ cm}^{3/2} gr^{1/2} s^{-1}$, pero que por comodidad se denomina Statcoulomb o *unidad electroestática* (esu del sus siglas en inglés *electrostatic unit*). De acá que usualmente en electromagnetismo este sistema de unidades se denominé *e.s.u.*

⁵Recordemos: en *cgs* se trabaja en *cm*, *g* y *s*; para *SI* en *m*, *Kg* y *s*.

- En el sistema *SI* o *MKS(A)* la unidad de carga se define como independiente,⁶ denominada Coulomb (C), así las unidades de k quedan definidas. Es usual expresar k en términos la *permitividad del vacío* $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} C^2/N m^2$ como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

De forma que dos cargas puntuales idénticas con $q = 1 C$ separadas a un metro de distancia experimentan una fuerza de magnitud $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} C^2/m^2$.

Resumiendo

	<i>esu</i>	<i>SI</i>
$[q]$	Statcoulomb <i>esu</i>	Coulomb <i>C</i>
k	1	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
ϵ_0	1	$8,85 \times 10^{-12} C^2/N m^2$
Carga del electrón $-e$	$-4,8 \times 10^{-10} esu$	$-1,6 \times 10^{-19} C$

Ejemplo 2.2.1. Fuerza de Coulomb I.

Para calentar motores calculemos la fuerza sobre una carga $Q = 1 esu$ en el origen, i.e. $\vec{r}_Q = 0$, debida a una carga $q = 32 esu$ en la posición $(2, 2) cm$. Utilizaremos directamente la expresión 2.5. Los distintos ingredientes que allí aparecen son:

Vector relativo $\vec{r}_{q \rightarrow Q} = -(2, 2) cm$. Por tanto $|\vec{r}_{q \rightarrow Q}|^2 = 4 cm^2 + 4 cm^2 = 8 cm^2$, mientras

$$\hat{r}_{q \rightarrow Q} = -\frac{1}{\sqrt{8}}(2, 2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1). \quad (2.12)$$

Producto entre las cargas $qQ = 32 esu^2$.

Así la fuerza es, entonces,

$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = -\frac{32}{8} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) din = -\frac{4}{\sqrt{2}}(1, 1) din. \quad (2.13)$$

Osea, una fuerza de magnitud $F = 4 din$ en la dirección $\hat{r}_{q \rightarrow Q}$, i.e, es repulsiva.

⁶Más adelante veremos que la unidad fundamental en realidad es la unidad de corriente eléctrica Amperio. De ahí la *A* extra en el nombre *MKS*.

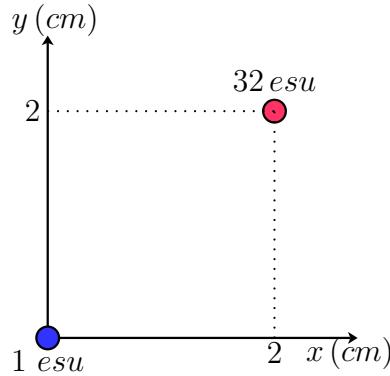


Figura 2.3: Arreglo ejemplo 2.2.1

Ejemplo 2.2.2. Electroscópio Supondremos un electroscopio de dos hojas de longitud 2ℓ . Y la idea será calcular el ángulo de elevación cuando estas se cargan. A primera vista tenemos un gran problema, pues no se tratan de cargas puntuales. Pero para esto estamos los físicos, para crear modelos cada vez más cercanos a la realidad iniciando con unos muy sencillos que nos den la respuesta principal. Entonces, supondremos que la distribución de carga es uniforme, lo mismo que de la masa, de modo que podemos pensar toda la masa como concentrada en el centro de masa, a una distancia ℓ del pivote. Lo mismo podemos decir para la carga, así que tomaremos un modelo donde toda la masa y la carga se encuentran concentradas en el centro de masa.

Desarrollo: Lo que tenemos es que debido a la fuerza repulsiva entre las dos cargas estas tienden a alejarse de la normal, mientras que la fuerza de tensión trata de atraerlas hacia esta, como se observa en el diagrama de cuerpo libre 2.5 De este diagrama tenemos las siguientes ecuaciones de fuerza en los ejes,

$$F_x : F_e - T \operatorname{Sen} \alpha = 0 ,$$

$$F_y : T \operatorname{Cosa} \alpha - mg = 0 .$$

Con la fuerza eléctrica $F_e = kq^2/r^2$ y del diagrama $r = 2\ell \operatorname{Sen} \alpha$. Del balance de fuerzas

$$\operatorname{Tan} \alpha = \frac{F_e}{mg} = \frac{kq^2}{mg4\ell^2 \operatorname{Sen}^2 \alpha} .$$

Determinando implícitamente el ángulo α

$$\operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Tan} \alpha = \frac{F_e}{mg} = \frac{kq^2}{mg4\ell^2} .$$

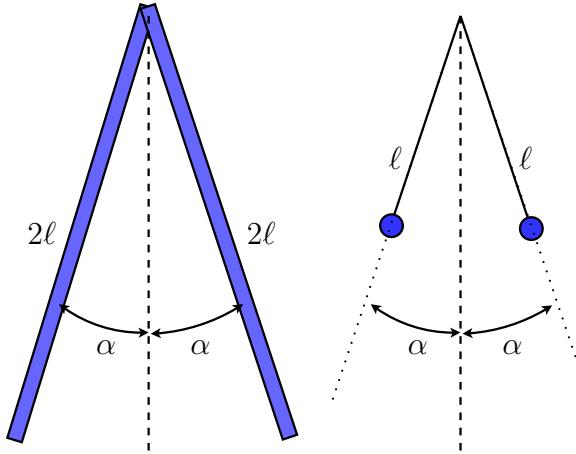


Figura 2.4: Diagrama de electroscópio cargado para el ejemplo 2.2.2 y su simplificación a cargas y masas puntuales.

En el caso que el peso de las cargas mg sea muy grande comparado con la fuerza eléctrica F_e (por ejemplo masas grandes, o cargas pequeñas) el ángulo es muy cercano a cero, $\alpha \approx 0$, donde se tiene

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha,$$

luego

$$\alpha = \left(\frac{kq^2}{4mg\ell^2} \right)^{1/3}.$$

Pregunta 2.4. ¿Qué posibles problemas puede tener nuestro modelo simplificado para el electroscópio?

Ejercicio 2.5. Calcule la razón entre la fuerza eléctrica y gravitatoria entre dos protones. Considere $m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, y $G = 6,8 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. Esta es una primera estimación del factor en que aumentaría el peso de una persona si la atracción terrestre fuera eléctrica.

Ejercicio 2.6. Utilizando los resultados del ejercicio 2.4, estime la fuerza con de atracción o repulsión que experimentaríamos de la Tierra y compárela con el peso promedio de una persona.

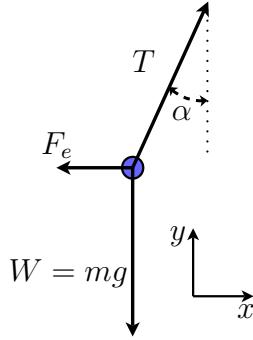


Figura 2.5: Diagrama de cuerpo libre para el modelo simplificado del electroscópico de dos hojas.

Ejercicio 2.7. Suponga dos partículas puntuales de cargas q y Q del mismo signo, unidas por un hilo de largo L y sin masa. Calcule la tensión del hilo.

2.2.2. Superposición lineal

Como se mencionó en la introducción, una propiedad importante en los fenómenos electromagnéticos clásicos es que cumplen el *principio de superposición*, el cual permite determinar el efecto total debido a un sistema de cargas como la superposición lineal de los efectos por separados. En el caso de una carga de prueba Q , la fuerza debida a un conjunto de cargas q_1, q_2, \dots , está dada por la suma vectorial de las fuerzas independientes, tal y como lo haríamos en mecánica con las fuerzas allí vistas⁷. De modo que su expresión queda de la forma

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\sum q_i \rightarrow Q} &= \sum_i \vec{F}_{q_i \rightarrow Q}, \\ &= \left(k \frac{Qq_1}{r_{1Q}^2} \hat{r}_{1Q} + k \frac{Qq_2}{r_{2Q}^2} \hat{r}_{2Q} \dots \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$= k Q \sum_i \frac{q_i}{r_{iQ}^2} \hat{r}_{iQ}, \quad (2.15)$$

⁷Aunque parece natural no siempre en la naturaleza los fenómenos satisfacen esta propiedad. El ejemplo más famoso es la gravitación de Einstein que no es lineal.

donde hemos definido

$$r_{iQ} = |\vec{r}_Q - \vec{r}_i|,$$

con \vec{r}_i la posición de la carga q_i y utilizando la expresión (2.5). Como mencionado anteriormente será más conveniente, en general, utilizar la expresión (2.6), en cuyo caso la fuerza total queda expresada como

$$\vec{F}_{\sum q_i \rightarrow Q} = kQ \sum_i q_i \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_i}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_i|^3}, \quad (2.16)$$

que nos permite tener más presente la naturaleza vectorial de cada una de las contribuciones para calcular el efecto total.

Ejemplo 2.2.3. Fuerza de Coulomb II

Calculemos la fuerza sobre Q del ejemplo 2.2.1 ademas de q en la posición dada se coloca una carga extra $\tilde{q} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ esu}$ en la posición $(1, 0)$.

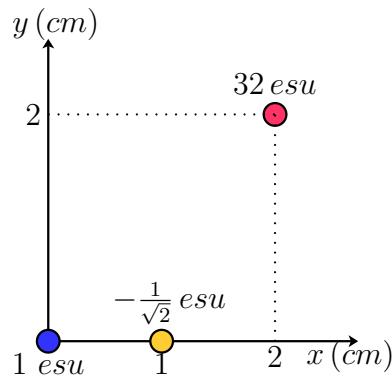


Figura 2.6: Arreglo ejemplo 2.2.3 y ejercicio 3.6.

Utilizando el principio de superposición calculemos la fuerza ejercida por \tilde{q} sola para luego sumarla a la calculada anteriormente.

Es claro que el vector unitario que une \tilde{q} con Q es $-(1, 0)$, luego la fuerza es

$$\vec{F}_{\tilde{q} \rightarrow Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0) \text{ din}.$$

De tal forma que la fuerza total es

$$\vec{F}_{\tilde{q} \rightarrow Q} + \vec{F}_{q \rightarrow Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0) \text{ din} - \frac{4}{\sqrt{2}}(1, 1) \text{ din} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-3, -4) \text{ din}$$

Gráficamente esto queda como en la figura 2.7.

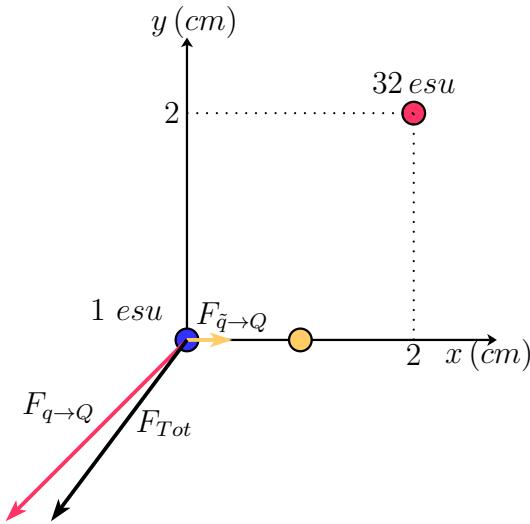


Figura 2.7: Solución gráfica al ejemplo 2.2.3

Ejercicio 2.8. Calcule la fuerza ejercida sobre Q si al sistema del ejemplo 2.2.1 se le añade una carga $\tilde{q} = -32 \text{ esu}$ en la posición $-(2, 2)$. ¿Qué pasa si el signo de la carga \tilde{q} es contrario?

Ejercicio 2.9. En cada esquina de un cuadrado hay una carga q . En el centro se encuentra una carga Q . Calcule Q t.q. la fuerza total sobre cada una de las cargas sea cero.

2.2.3. ¿Tuvo suerte Cavendish (Coulomb)?

Es interesante anotar que, a pesar que en el experimento llevado a cabo no se utilizaron cargas puntuales sus conclusiones son dadas bajo estos términos. En efecto sus resultado son extrapolados para el caso de cargas puntuales. Pero lo que debemos apreciar es el hecho que sólo es consistente para el caso en que la fuerza decrece como el inverso al cuadrado de la distancia. Como veremos más adelante esta dependencia implica que los mismo resultados se obtienen para distribuciones de carga esférica, considerando las posiciones \vec{r}_i como los centros de la distribución. Gracias a esto Coulomb puede determinar el comportamiento ideal de la fuerza entre cargas puntuales.

Si el experimento hubiera sido realizado utilizando otra geometría para las

cargas, i.e., cubos o pirámides, por ejemplo, uniformemente cargadas, el comportamiento de la fuerza sería completamente distinto. Asimismo, si el resultado con esferas hubiera sido distinto no sería posible la extrapolación a cargas puntuales.

Podemos entender, sin embargo, que independientemente de la forma de la distribución de la carga para distancias grandes comparadas con el tamaño de la distribución el comportamiento debe ser el mismo que para una carga puntual, ya que en primera aproximación la distribución se ve puntual. Por lo tanto, una forma correcta de abordar el problema de analizar los datos experimentales para extraer a caso puntual es comenzar analizando los resultados para distancias grandes, donde la aproximación de carga puntual es válida. Posteriormente, con los datos de distancias pequeñas, si estos continúan mostrando un comportamiento como $1/r^2$ para esferas podemos concluir que este es el comportamiento de la fuerza para las cargas puntuales, independientemente de la distancia. Aun así, el problema de lograr esferas uniformemente cargadas, al menos en su superficie no es un punto fácil de lograr.

2.2.4. Fuerza de Coulomb y la masa del fotón

La expresión de la Fuerza de Coulomb muestra lo que se conoce como una interacción de largo alcance. Aunque no lo mostraremos de forma precisa la dependencia encontrada en la distancia indica que la masa del fotón, que son los mediadores de la interacción electromagnética, es nula. Para entender esto tomamos el hecho que para una partícula de masa μ tenemos una incertidumbre mínima en la energía del orden $\Delta E \sim \mu c^2$, c la velocidad de la luz en el vacío. Por medio de la relación de incertidumbre energía-tiempo tenemos

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \sim \frac{\hbar}{\mu c^2}.$$

Por lo tanto en este intervalo de tiempo la partícula puede moverse un máximo de

$$R = c\Delta t \sim \frac{\hbar}{\mu c}.$$

Podemos así decir que el alcance de una interacción mediada por una partícula de masa finita es menor.

Con esto en mente, se han propuesto interacciones de corto alcance para describir por ejemplo las interacciones nucleares, que serían mediadas por partí-

culas con masa, en un potencial denominado de Yukawa, $V \sim \exp(-r/R)/r$.⁸ Lo anterior nos da una idea de cómo determinar experimentalmente la masa del fotón, i.e., buscando desviaciones a la ley de Coulomb. Actualmente se tiene una cota de $m_\gamma < 1 \times 10^{-18} eV/c^2 = 1,78 \times 10^{-54} Kg$.

2.2.5. Aplicaciones

Una aplicación interesante de las fuerzas Coulombianas se encuentra en las impresoras láser. En estas, un láser dispara la hoja en blanco donde se desea imprimir. Esto ioniza la porción de papel objetivo. El polvo de tinta entonces cargando de signo opuesto es atraído hacia estas partes del papel donde finalmente es impreso.

2.3. Energía de un sistema de cargas

La fuerza entre cargas hace que al colocar un sistema de cargas en una configuración particular implique realizar cierto trabajo sobre estas. Con la ley de Coulomb y el principio de superposición estamos en grado de calcular la fuerza sobre cualquier carga en un sistema de cargas puntuales y, a partir de esta, utilizando el teorema Trabajo-Energía obtener la energía almacenada en el sistema al estar en una disposición dada.

Para esto comenzaremos en considerando que todas las cargas del sistema se encuentran en el infinito, donde la interacción entre ellas es despreciable. Si tomamos una carga de estas, q_1 , y la traemos hasta un punto cercano, tenemos que al estar las demás demasiado lejos la fuerza sobre esta es despreciable y por tanto el trabajo realizado en traerla es cero.

Una vez tenemos esta carga fija, digamos en el origen, cualquier carga que empiece a acercarse al origen comenzara a sentir la fuerza eléctrica debida a la carga q_1 y el trabajo es distinto de cero. Para el cálculo consideraremos que acercamos las dos cargas de tal forma que su velocidad es “nula”, de tal forma que no hay contribución a la energía por energía cinética. Así la fuerza que aplicamos externamente a la carga es igual y opuesta a la fuerza debida a la carga en el origen que consideramos fija,

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_e .$$

⁸Como tal lo que se muestra es el potencial, del cuál se obtiene la fuerza a través de una derivada. Para la fuerza de Coulomb el potencial es simplemente $1/r$.

Algo que no hemos mencionado pero que se infiere de la forma de la ley de Coulomb análoga a la de la gravitación universal, es el hecho que la fuerza electrostática es una fuerza conservativa.

Pregunta 2.5. ¿Qué es una fuerza conservativa y qué ejemplos conoce que lo son?

Este hecho nos simplificará el cálculo del trabajo realizado por \vec{F}_{ext} pues podremos tomar cualquier camino a conveniencia. Ahora bien, dado que la fuerza eléctrica es de naturaleza central, $\vec{F}_e \propto \hat{r}$, para el cálculo del trabajo

$$W = \int_{\vec{r}_{2\text{ini}}}^{\vec{r}_{2\text{final}}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

es conveniente utilizar coordenadas esféricas y un camino radial, el cual satisface satisfacen $d\vec{r} = dr\hat{r}$,

$$\vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr$$

donde $r = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Luego la integral de linea se reduce a una integral sobre la coordenada radial

$$W = -k \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (2.17)$$

Es claro que el trabajo realizado sobre la carga por la fuerza externa es positivo si las cargas tienen signos iguales ya que debe contrarrestar la fuerza de repulsión que trata de alejarlas. Al contrario el trabajo es negativo en el caso que las cargas tengan signo opuesto.

Del teorema trabajo energía se tiene que el trabajo realizado se convierte en un cambio en la energía potencial del sistema. Esta energía se hace evidente a los ojos en fenómenos como los rayos en las tormentas eléctricas. Allí las moléculas de aire son ionizadas, y la energía que otrora ligaba las dos partes de esta, es despedida en forma de luz, sonido y mucho calor.

Antes de continuar añadiendo cargas, tratemos de justificar el hecho que el trabajo es independiente del camino. Para esto basta notar que cualquier camino puede descomponerse en pequeños desplazamientos en los tres vectores ortogonales \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$, ahora, ya que la fuerza es radial sólo los desplazamientos en la dirección radial contribuirán al trabajo. Además, la fuerza sólo depende de la componente radial, es decir que su magnitud es independiente de las

coordenadas θ y φ , i.e. $|\vec{F}| = F(r)$, por tanto un desplazamiento en estas direcciones no cambian la magnitud y para efectos del cálculo del trabajo es igual a que no se halla desplazado en absoluto. Así cualquier trayectoria es análoga a una trayectoria recta en la dirección radial. Este resultado nos

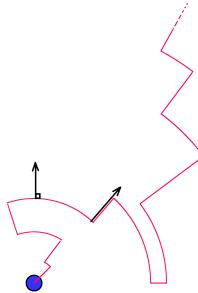


Figura 2.8: Un camino arbitrario desde hasta la carga se puede partir (aproximar) en segmentos radiales y tangenciales. Las partes tangenciales no contribuyen al trabajo pues son perpendiculares a la fuerza, que es radial. Así, que finalmente sólo las partes radiales aportan y estas resultan equivalentes a un camino neto radial, pues la fuerza en cualquier dirección es idéntica, i.e., no depende del ángulo.

indica simplemente que la fuerza eléctrica es conservativa, ya que gracias al principio de superposición la independencia en el camino se mantiene aun en el caso de una fuerza debida a varias cargas.

Se sigue, entonces, que el anterior cálculo es suficiente para encontrar la energía total, utilizando el principio de superposición, una vez se añada una tercera carga. Considerando que las cargas q_1 y q_2 como fijas tenemos que el trabajo realizado sobre la tercera carga es

$$W_3 = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = - \int \vec{F}_{q_1 \rightarrow q_3} \cdot d\vec{r} - \int \vec{F}_{q_2 \rightarrow q_3} \cdot d\vec{r} = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}},$$

donde para el cálculo de cada una de las partes se sigue el mismo análisis de antes. Así la energía total es ahora

$$W = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}. \quad (2.18)$$

En general tenemos entonces para un sistema de N cargas

$$W_{Tot} = \frac{1}{2}k \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (2.19)$$

Dado que la fuerza eléctrica es conservativa es posible asociarle una energía potencial, cuyo cambio será igual al trabajo apenas calculado. Recordemos que la definición de energía potencial siempre sufre de una arbitrariedad en una constante que puede ser sumada sin afectar los efectos físicos⁹, por lo que es posible tomar un punto de referencia donde se escoje su valor de manera conveniente. Como debe ser claro del anterior ejemplo para distribuciones de carga localizadas, i.e. que no abarcan cargas en el infinito hipotético, es conveniente tomar el valor de la energía potencial en el infinito como cero, fijando la constante arbitraria a cero, de tal forma que definimos

$$U = \frac{1}{2}k \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (2.20)$$

Ejemplo 2.3.1. Energía de una red cristalina

Un ejemplo característico de este tipo es la energía necesaria para formar redes cristalinas que están conformadas por iones colocados en distintos puntos de la red. Usualmente estas redes son una serie de copias exactas de una celda unitaria. Tomemos como ejemplo una celda unitaria un con cargas $-e$ en cada una de las esquinas de un cubo de lado b , y una carga $2e$ en el centro del cubo. Haremos el cálculo tomando pares y sumando cada una de estas contribuciones. Por ejemplo, podemos identificar la interacción de a pares de cargas: cargas en un mismo vértice,

$$W_1 = k \frac{e^2}{b}, \quad (2.21)$$

de los cuales identificamos doce pares, los doce vértices del cubo; También las cargas en esquinas opuestas del cubo, a una distancia de $r_{dia.cubo} = \sqrt{b^2 + b^2 + b^2} = \sqrt{3}b$:

$$W_2 = k \frac{e^2}{\sqrt{3}b}, \quad (2.22)$$

⁹Esto ya nos es cierto en relatividad general donde cualquier tipo de energía tiene efectos gravitatorios.

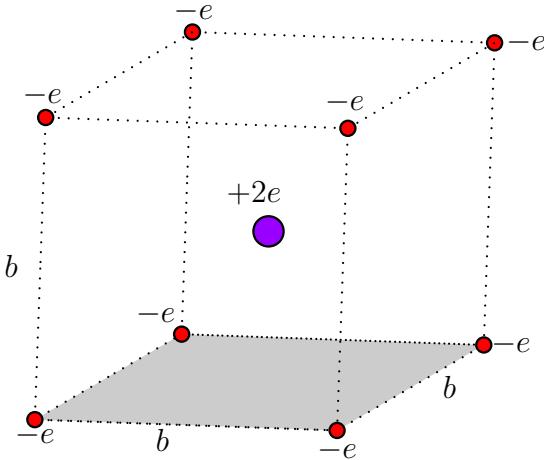


Figura 2.9: Celda unitaria para la red cristalina del ejemplo 2.3.1

con cuatro pares; Cargas en esquinas opuestas de una misma cara del cubo, cuya diagonal tiene longitud $r_{dia.cuad} = \sqrt{b^2 + b^2} = \sqrt{2}b$,

$$W_3 = k \frac{e^2}{\sqrt{2}b}, \quad (2.23)$$

con doce pares, dos por cada cara; Y la interacción entre la carga en el centro y las cargas exteriores, a una distancia $r = \sqrt{3}b/2$,

$$W_4 = -k \frac{4e^2}{\sqrt{3}b}, \quad (2.24)$$

con ocho pares, uno por cada esquina del cubo. Así en total la energía es

$$\begin{aligned} W_{Tot} &= 12W_1 + 2W_2 + 12W_3 + 8W_4, \\ &= \left(12 + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{32}{\sqrt{3}}\right) \frac{e^2}{b}, \\ &\approx \frac{4,32e^2}{b}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

El que sea positiva nos dice que fue necesario realizar un trabajo para lograr esta configuración de cargas. De hecho, si se dejan libres saldrán expelidas hacia afuera y la energía total cinética en el infinito será igual a la energía que hemos calculado.

Ejemplo 2.3.2. Red cristalina de sal de mesa

La inestabilidad mostrada por la celda analizada en el ejemplo 2.3.1 claramente no sucede en los cristales que vemos comúnmente, pues resultan estar conformados sin necesidad que un agente externo los esté forzando estar en este estado. Un ejemplo real es el cristal del cloruro de sodio que puede ser descrito con muy buena aproximación como una red de iones positivos (Na^+), uno en el centro de la celda unitaria cúbica otros doce en el centro de los vértices, y iones negativos (Cl^-) tomando posiciones en el centro de las seis caras del cubo y en las ocho esquinas como se muestra en la figura 2.3.2. Para el cálculo de la energía de la red total es útil notar que la configura-

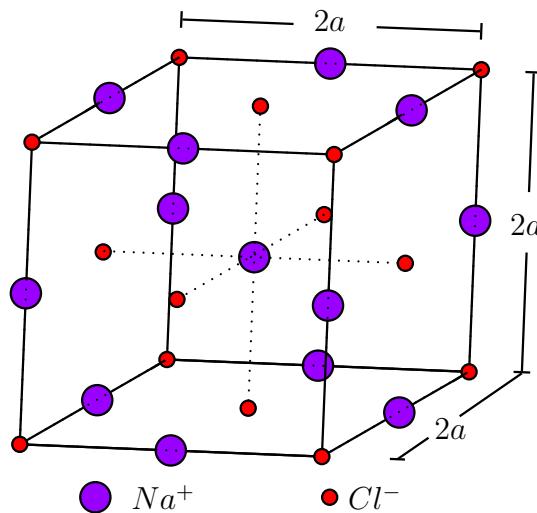


Figura 2.10: Celda unitaria de la red cristalina de sal de mesa (Na^+Cl^-) para el ejemplo 2.3.2. Si se centrara la celda en un átomo de cloro (en purpura) y no en uno de sodio (rojo), como se muestra, se obtendría exactamente la misma configuración pero con los átomos de ambos tipo intercambiados. También resulta que la misma configuración se obtiene centrando la celda sobre cualquiera de los átomos.

ción alrededor de cada ion es idéntica, es decir que nos podemos parar sobre cualquier ion y ver exactamente lo mismo, con los iones positivos o negativos intercambiados si se cambia de tipo de ion, una vez consideramos toda la red junta. Por lo tanto es posible calcular la energía considerando fijo uno de los iones en la expresión general (2.19) y luego multiplicar este resultado por el

número total de iones N en la red, así

$$W = \frac{N}{2} k \sum_k \frac{q q_k}{r_k}. \quad (2.26)$$

Para calcular la suma podemos partir de la contribución de las cargas más cercanas al centro y ir adicionando las más lejanas,

$$W = \frac{1}{2} N k \left(-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right), \quad (2.27)$$

Donde hemos considerado que los lados del cubo tienen longitud $2a$. Para lograr una estimación es posible truncar la suma despreciando las contribución de las cargas lejanas ya que a mayor distancia menor es esta,¹⁰ entregando

$$W = -\frac{0,8738 Ne^2}{a}. \quad (2.28)$$

Como vemos la energía es negativa, por lo que la red trata de estar unida. El hecho que esta no colapse tiene respuesta en la mecánica cuántica, sin embargo, el análisis clásico de la energía potencial que hemos llevado a cabo sigue siendo válido.

2.3.1. Estabilidad de un sistema de cargas

Un resultado importante que se puede demostrar es el hecho que un sistema de cargas discretas estáticas no puede encontrar el equilibrio interactuando sólo por interacción electromagnéticas (ver Feynman's Lectures **Vol2**, sec **5-3**). Así, por ejemplo, para la red estudiada en el ejemplo 2.3.1, debe existir una fuerza que la force a mantenerse unida, y en el ejemplo de la sal, ejemplo 2.3.2, recurrimos a la mecánica cuántica para explicar por qué no termina colapsando.

Ejercicio 2.10. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = xy(\hat{i} + \hat{j})N$ en un camino desde el origen hasta el punto $(2, 3)m$, por la trayectoria: $(0, 0) - (2, 0)m$ luego $(2, 0)m - (2, 3)m$. ¿Es una fuerza conservativa?

¹⁰Es importante, sin embargo, estresar que esta serie converge. De otra manera tendríamos un sistema con infinita energía lo que nos indicaría un falla en la teoría o nuestro análisis.

Ejercicio 2.11. *Calcule la energía potencial de un sistema de cargas Q_1 , Q_2 y Q_3 colocadas en las esquinas de un triangulo equilátero de lado l .*

Pregunta 2.6. *¿Cómo podría explicar el poder destructivo de la dinamita utilizando los conceptos apenas discutidos?*

2.4. Ejercicios extra

Berkeley 2nd ed 1985: 1.3, 1.4, 1.7, 1.8 y 1.34

Capítulo 3

Campo eléctrico

Uno de los pilares de la concepción Newtoniana del cosmos era la denominada acción a distancia, utilizada, por ejemplo, para explicar los efectos gravitatorios entre los cuerpos celestes. Los estudios de los fenómenos electromagnéticos por parte de Faraday lo llevaron a concebir la idea de las líneas de fuerza y posteriormente el concepto de los campos electromagnéticos. La idea era explicar la interacción entre cargas como el efecto de la interacción de la carga con una propiedad local producida por la otra carga y no directamente con esta. Notemos esta esta sería una semilla que sembraría para nutrir el nacimiento de la relatividad de Einstein, donde no es posible una interacción instantánea entre dos cuerpos que se encuentran alejados una distancia finita. En efecto, ahora la carga interactuará con el campo como definido justo en el lugar donde se encuentra la carga.

3.1. Definiendo el campo eléctrico

Es cierto, en todo caso, que el método que se utiliza para revelar el campo como tal es el de ver su interacción con cargas de prueba, de lo que se desprende unas líneas de fuerza. Sin embargo, estamos buscando algo que sea independiente de estas cargas de prueba y será este camino el que nos lleve a una definición que nos permita primero utilizar el campo como método de cálculo y posteriormente como una nueva interpretación de los fenómenos electromagnéticos.

La idea es pensar en la carga sobre la que actúa la fuerza como una carga de prueba, la cual hemos colocado sólo para evidenciar en los puntos donde

se coloca el efecto de la carga original. De la expresión (2.14) la carga de prueba es Q , si a esta expresión la dividimos por Q obtenemos una cantidad vectorial que depende sólo de las cargas, a las cuales queremos determinar sus efectos, y sus posiciones relativas al punto de prueba,

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (3.1)$$

Este campo vectorial se denomina simplemente campo eléctrico y por definición es la fuerza por unidad de carga debida a una distribución de cargas en general. Físicamente esta definición es más delicada pues estamos suponiendo que al introducir la carga de prueba el sistema, y el campo eléctrico en sí, no es afectado. Esto sólo es posible si la carga de prueba es extremadamente pequeña. Así formalmente la definición física de rigor para el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{1}{Q} \vec{F}_{\sum q \rightarrow Q}. \quad (3.2)$$

Conociendo toda la información del campo $\vec{E}(\vec{r})$ sabemos, entonces, los efectos sobre cualquier carga. Si la carga Q se sitúa en \vec{r}_Q , entonces la fuerza que experimenta está dada por

$$\vec{F}_Q = Q \vec{E}(\vec{r}_Q), \quad (3.3)$$

entendiendo así el poder de este, pues nos dice que para saber como será la dinámica de las cargas la información que necesitamos es el campo eléctrico, jaun desconociendo qué lo genera! Más aun, esta expresión será válida incluso para el caso en que las cargas se mueven y aun con velocidades relativistas. Sin embargo, en general hay que considerar contribuciones a la fuerza debidas al campo magnético, como veremos más adelante, en lo que se conoce como la fuerza de Lorentz.

Es importante distinguir entre las líneas de fuerza y las de campo eléctrico: aunque en general definimos el campo como la fuerza por unidad de carga, los campos son completamente distintos. Lo primero que nos indica esto es el hecho que las líneas de fuerza dependen de la carga de prueba, mientras que el campo sólo depende de la carga que lo genere. Así, por ejemplo, tenemos que la fuerza experimentada por cargas positivas van en la dirección del campo, mientras que las de las cargas negativas van en dirección opuesta. En efecto, es precisamente el hecho que el campo se una propiedad independiente de la carga de prueba lo que nos permite tener generalidad.

Podemos, entonces, decir que en nuestro objetivo para describir la dinámica de las cargas primero debemos resolver el problema de conocer el campo eléctrico, cambiando la pregunta de ¿cuál es la fuerza? por ¿cuál es el campo? Nuestra tarea en los próximos capítulos será, en efecto, desarrollar técnicas que nos permitan establecer el campo eléctrico de manera genérica en sistemas donde conocemos las distribuciones de carga que los generan.

En los siguientes ejemplos supondremos que conocemos el campo, para resolver problemas de dinámica.

Ejemplo 3.1.1. Separación de partículas por medio de un campo.

Mientras la velocidad de las partículas involucradas en los fenómenos sea muy inferior a la de la velocidad de luz en el vacío, la dinámica de las cargas sobre las que se ejerce la fuerza eléctrica es la newtoniana. Un ejemplo práctico de la utilización de campos eléctricos es la separación de distintos elementos de una mezcla dada como el mineral fosfato de Florita, que consiste en pequeñas partículas de cuarzo y roca fosfatada. Estas, por fricción, se cargan de forma opuesta, por tanto al aplicar una campo eléctrico experimentarán fuerzas opuestas.

Supongamos un campo eléctrico horizontal uniforme, i.e., constante, con magnitud $E = 500 \text{ kV/m}$ y una razón entre la carga y la masa de las partículas de $Q/m = 9 \mu\text{C/kg}$. Calculemos las distancia de separación de las partículas cuando hayan caído una distancia de $0,8 \text{ m}$ suponiendo que arrancan en un mismo punto y del reposo.

Desarrollo: Las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso y el campo eléctrico. El primero en la componente vertical mientras que la segunda horizontalmente. Centrémonos por el momento en la dinámica de un de estos, pues el análisis es análogo. Tomaremos el que es empujado hacia la derecha, de modo que sus ecuaciones de movimiento son

$$x : q_1 E = \frac{dp_x}{dt}, \quad (3.4)$$

$$y : -m_1 g = \frac{dp_y}{dt}. \quad (3.5)$$

Ya que suponemos que la masa no cambia durante el trayecto los lados derechos se reducen a $m_1 \vec{a}$ con \vec{a} la aceleración. Así, tenemos movimiento uniformemente acelerado en ambas direcciones, cuya solución es bien cono-

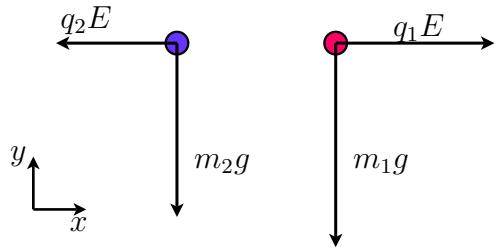


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre para los dos tipos de minerales del ejemplo 3.1.1. Notemos que en general las fuerzas sobre cada uno son distintas, más no lo será su cinemática, que depende sólo de la razón entre la carga y la masa, que suponemos idéntica.

cida:

$$x = \frac{1}{2} \frac{q_1}{m_1} E t^2, \quad (3.6)$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2, \quad (3.7)$$

donde hemos considerado el hecho que parten del reposo y tomado la posición inicial en el origen. Dividiendo la primera en la segunda tenemos x en función de y ,

$$x = -\frac{q_1}{m_1} \cdot \frac{E}{g} y. \quad (3.8)$$

Notamos que las características de los fragmentos sólo entran en la razón entre la carga y la masa, q_1/m_1 . Si suponemos, como parece indicarnos el enunciado, que para ambos tipos de fragmento esta razón es la misma, $|q_1|/m_1 = |q_2|/m_2 = Q/m$, tenemos que se desplazarán de manera idéntica pero opuesta. De modo que la separación será $d = 2x$. Para $y = -0,8 \text{ m}$, con los datos dados, la separación es de $d = 0,74 \text{ m}$.

Un comentario es importante: hemos mostrado que el campo es un efecto de las cargas, sin estas no habría campo, por lo que una buena queja a nuestra solución es el hecho que estamos considerando el campo que nos da el enunciado, que claramente no es el generado por los fragmentos, que al ser de carga opuesta se atraen y no se lograría la separación. Físicamente esto se justifica pensando que el campo generado por los fragmentos es despreciable y podemos considerar sólo el campo externo. Esta es una consideración

usual en este tipo de sistemas, aunque ciertamente un análisis más detallado requeriría incluir todas las contribuciones al campo.

Ejemplo 3.1.2. Experimento de Millikan

Este experimento, que demostró la cuantización de la carga y que le valió, en parte, conseguir el Nóbel en Física tiene un trasfondo simple que ya podemos entender.

La idea es tomar una gota de aceite, de las muchas generadas por un atomizador. Esta se cargada, por ejemplo por fricción con el aire, y se deja caer en un medio. En una primera fase del experimento la gota cae “libremente” y se observa su caída. En realidad la caída no es libre debido a la presencia de la fricción y el empuje. El empuje lo podemos considerar tomando un peso efectivo para la gota,

$$W = mg - m_{air}g = \frac{4}{3}\pi r^2(\rho_o - \rho_{air})g, \quad (3.9)$$

con r el radio de la gota que supondremos esférica y ρ las densidades volúmetricas del aceite y aire. La fuerza de fricción está descrita por la ley de Stokes,

$$F_d = 6\pi r\eta v, \quad (3.10)$$

denominada fuerza de arrastre, *dragging force*, que relaciona la fuerza con la velocidad de la partícula con la viscosidad, η , del medio y siempre se opone al movimiento, i.e es opuesta a la velocidad. Esto se muestra esquemáticamente en los diagramas de cuerpo libre 3.2. Considerando el trayecto de caída

$$F_d - W = ma, \quad (3.11)$$

considerando aceleraciones positivas apuntando hacia arriba. De esta obtenemos una velocidad terminal, para la cual $a = 0$,

$$v_1 = \frac{W}{6\pi r\eta}. \quad (3.12)$$

Esta se mide experimentalmente y sirve para determinar indirectamente el radio de la gota.

$$r_g = \frac{9}{2} \frac{\eta v_1}{(\rho_o - \rho_{air})g}. \quad (3.13)$$

Si ahora encendemos un campo eléctrico uniforme apuntando hacia arriba y suponemos que la gota está cargada positivamente, se tiene una fuerza

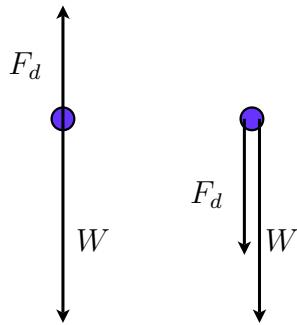


Figura 3.2: Diagrama de cuerpo libre para una gota en el experimento de Millikan, ejemplo 3.1.2, considerando un peso efectivo que incluye el empuje de aire. Al lado izquierdo se considera la gota cayendo, de modo que la fuerza de arrastre apunta hacia arriba, mientras que en el lado derecho se considera a la gota subiendo. Por el momento no se incluye el campo eléctrico.

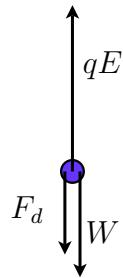


Figura 3.3: Diagrama de cuerpo libre para una gota en el experimento de Millikan, ejemplo 3.1.2, considerando un peso efectivo que incluye el empuje de aire y la gota moviéndose hacia arriba. Consideramos el campo apuntando hacia arriba y la carga positiva, el mismo efecto se obtendría si la carga es negativa y el campo apunta hacia abajo.

extra. La gota es acelerada hacia arriba y finalmente inicia a subir. Para esta situación, de la carga subiendo, se tiene el diagrama mostrado en la figura 3.3, y el balance de fuerzas,

$$F_E - F_d - W = ma, \quad (3.14)$$

con $F_E = qE$, q la carga de la gota, logrando una velocidad terminal

$$v_2 = \frac{qE}{6\pi r_g \eta} - \frac{W}{6\pi r_g \eta}. \quad (3.15)$$

Al igual que v_1 esta se mide experimentalmente. Utilizando el valor hallado para el radio de la gota se puede determinar el valor de la carga en términos de cantidades conocidas,

$$q = 27\pi\eta^2 \frac{(v_1 + v_2)v_1}{(\rho_o - \rho_{air})gE}. \quad (3.16)$$

El experimento de Millikan determina pues la carga de las gotas de aceite, y tiene por conclusión que las cargas no son arbitraria sino un número entero veces un valor único, que es el valor absoluto de la carga del electrón. O sea que la carga no puede ser transferida de forma continua sino discreta en pequeños paquetes de carga. Terminamos la presentación del campo eléctrico indicando sus unidades: de la definición como la fuerza por unidad de carga se sigue $[\vec{E}] = [\vec{F}/Q] = N/C$ o *dina/esu*. Más adelante veremos que otra forma, más común, de expresar sus unidades es: Voltios por metro V/m en *SI* o *Statvolt/cm* en *cgs*.

Ejercicio 3.1. *Considere un campo vertical uniforme pero que en el plano xy cambia de dirección, apuntando hacia abajo en puntos con $z > 0$ y hacia arriba en puntos con $z < 0$. Despreciando la gravedad, describa la dinámica de una partícula inicialmente a una altura $z > 0$ para los casos de carga positiva y negativa respectivamente.*

Ejercicio 3.2. *Considere una vara de largo L , con dos cargas de magnitud Q y $-Q$ en sus extremos, sumergida en un campo uniforme $\vec{E}(\vec{r}) = E_o \hat{i}$. ¿Cuál es la fuerza neta sobre la vara debida al campo? Si la vara se alinea con el eje y ¿cuál es el torque sobre la vara?*

Ejercicio 3.3. *Supongamos una vara de largo L con dos cargas puntuales de valor Q , cada una en sus extremos. Si situamos este sistema en donde se encuentra un campo uniforme $\vec{E}(\vec{r}) = E_o \hat{i}$ ¿cuál es la fuerza neta sobre la vara?. Suponiendo que la vara se encuentra alineada con el eje y ¿cuál es el torque total sobre la vara?*

Ejercicio 3.4. Sea una vara delgada de largo L que con carga Q uniformemente distribuida. Suponiendo que esta se encuentra alineada con el eje x y está en presencia de un campo uniforme dado por $\vec{E}(\vec{r}) = E_o \hat{j}$. ¿Cuál es la fuerza total sobre la vara? ¿cuál será el torque medido desde el centro de la vara?

Ejercicio 3.5. Sea una vara delgada de largo L que con carga Q uniformemente distribuida. Suponiendo que esta se encuentra alineada con el eje x , con un extremo en el origen y el otro en la posición $x = L$, y está en presencia de un campo dado por $\vec{E}(\vec{r}) = cx \hat{j}$ (¿qué unidades tendrá la constante c ?). ¿Cuál es la fuerza total sobre la vara? ¿cuál será el torque medido desde el centro de la vara?

Muestre que el resultado es equivalente para lo encontrado en el caso en que la carga no está uniformemente distribuida sino que se varía tal que $\lambda(x) = \frac{2Q}{L^2}x$ y el campo uniforme $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2}c L \hat{j}$.

3.2. Evaluación de campos electrostáticos

Como se motivó en la sección 1.3 un campo vectorial se entiende como una familia de vectores definidos cada uno en un punto del espacio, o sea cada vector (norma y dirección), se puede etiquetar con las coordenadas del espacio. Por ejemplo $\vec{E}(\vec{r}_o)$ da la información local del vector de campo en el punto \vec{r}_o . El ejemplo más sencillo y también el que ilumina cómo comprender casos más complejos es el campo de una sola carga puntual en el espacio infinito.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad (3.17)$$

donde hemos considerado la carga situada en el origen. Vemos que el campo es radial, o sea, que los vectores de campo apunta bien sea hacia afuera o adentro radialmente. Como se mencionó anteriormente visualizar los campos vectoriales puede ser un tarea un poco tediosa, sin embargo, conceptualmente no es un problema mayor, simplemente se evalúa el campo punto a punto escogiendo puntos vecinos. Hoy, con la ayuda del ordenador es posible realizar estas visualizaciones de manera sencilla utilizando programas como [Mathemática](#), [Matlab](#) o plataformas como [Geobra](#) o [Phet](#), incluso en tres dimensiones. Por ejemplo, podemos utilizarlos para visualizar el campo de la partícula puntual, positiva y negativa, como se muestra en la figura como

muestra la figura 3.4, donde se observa como efectivamente las cargas positivas se comportan como fuentes mientras que las negativas serían sumideros, según los términos introducidos en la sección 1.3.

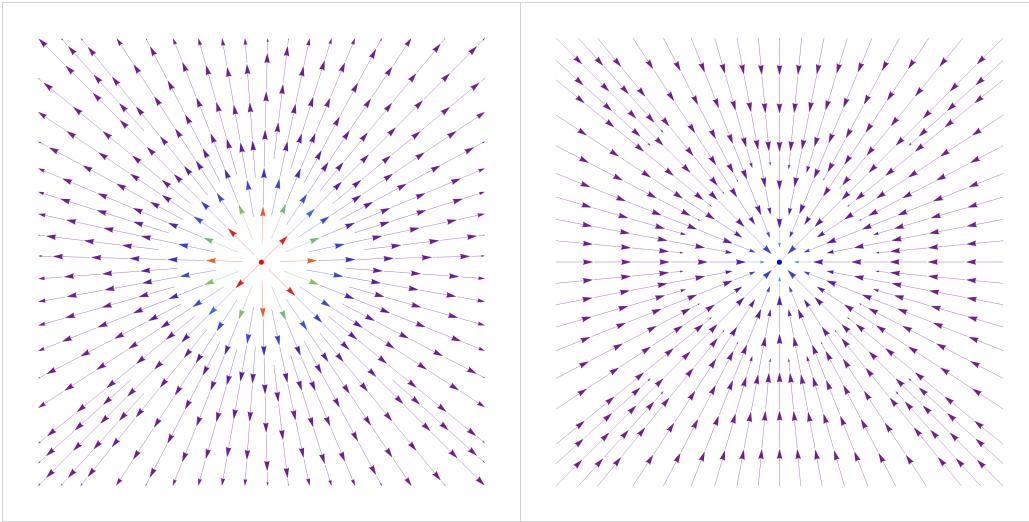


Figura 3.4: Visualización del campo para una carga puntual, positiva (izquierda) y negativa (izquierda), utilizando el comando StreamPlot en *Mathematica*. Los vectores graficados no están en escala correcta y la magnitud del campo se visualiza con los cambios de color siendo el rojo (azul) el más intenso. La simetría esférica se distorsiona debido a la forma como se han escogido los puntos para colocar los vectores.

Pregunta 3.1. ¿Dónde se identifican las posiciones de la carga positiva y la negativa en la figura 1.4?

Ejemplo 3.2.1. Campo de una carga puntual en coordenadas cartesianas. Para futuras referencias permitámonos hacer un pequeño ejercicio que, aunque puede verse como trivial a esta altura, sirve como recordatorio a casos más complejos. A decir, expresemos explícitamente las componentes cartesianas del campo eléctrico de una carga puntiforme en la posición \vec{r}_o . Tomando $\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ el vector diferencia entre un punto arbitrario en el espacio \vec{r} y la carga es,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_o = (x - x_o)\hat{i} + (y - y_o)\hat{j} + (z - z_o)\hat{k}, \quad (3.18)$$

y la distancia está dada por

$$R = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}. \quad (3.19)$$

El campo entonces, de la expresión general para el campo (3.21),

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= k \frac{q}{R^3} \vec{R} \\ &= k \frac{q}{[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2]^{3/2}} \\ &\quad \times [(x - x_o)\hat{i} + (y - y_o)\hat{j} + (z - z_o)\hat{k}]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Entonces las componentes están dadas por,

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= k \frac{q(x - x_o)}{[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2]^{3/2}}, \\ E_y(\vec{r}) &= k \frac{q(y - y_o)}{[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2]^{3/2}}, \\ E_z(\vec{r}) &= k \frac{q(z - z_o)}{[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Esta expresión resulta útil cuando las cargas no se encuentran en el origen, ya que en este caso la simetría esférica se pierde.

3.2.1. Líneas de campo

En los ejemplos gráficos anteriores debe ser claro el hecho que se evidencian líneas, las cuales se logran al unir la cabeza de cada vector con la cola del vecino, i.e., los vectores de campo resultan tangentes a las líneas de campo. Estas líneas las denominaremos líneas de campo y resultarán tan útiles como la visualización del campo por vectores. La idea es que aunque perdemos la información de hacia a donde apunta el campo en cada punto, lo cual podemos saber si conocemos las posiciones de las cargas positivas o negativas, aun podemos saber la dirección e incluso la intensidad del campo. Sigue que entre más intenso sea el campo la densidad de líneas de campo será mayor, aunque en las figuras mostradas anteriormente y a continuación esto no se aprecia bien debido a que *Mathematica* en los puntos donde se espacian inicia a graficar líneas que inicialmente no mostraba. En efecto, como se discutirá más adelante, las líneas de campo electrostático nacen y mueren en cargas

(son las fuentes y sumideros de los campos según los términos introducidos en la sección 1.3), mientras que en las gráficas se observan líneas que nacen o mueren sin haber llegado a estas. Para los sistemas mostrados en las figuras es en cierto modo trivial la observación de la intensidad, pues sabemos que el campo será más intenso cerca a las cargas, pero en situaciones más elaboradas conocer este hecho puede facilitar enormemente el análisis.

Pregunta 3.2. ¿Cómo quedan las líneas de campo para el campo del ejercicio 3.1?

3.2.2. Distribuciones discretas de carga

Para el campo debido a varias cargas se debe aprovechar nuevamente el principio de superposición, con el campo total simplemente la suma vectorial en cada punto (véase la figura 3.5) de cada uno de los campos por separado, i.e.,

$$\vec{E}_{Tot}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}), \quad (3.21)$$

$$= k \sum_i q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \quad (3.22)$$

donde he aprovechado para escribir el campo de manera conveniente para cálculos utilizando la expresión (2.6) y la definición misma de campo. Notemos que de la misma definición de campo y utilizando la expresión para la fuerza total, (2.16), se obtiene la misma expresión para el campo total. Gráficamente se reduce a

Notemos que esto implica la posibilidad que en algunos puntos del espacio el campo se anule a pesar que cada carga por separado contribuya con un valor distinto de cero.

Pregunta 3.3. En vista de esto último ¿cómo entiende el resultado de ejercicio 2.8?

Utilizando de nuevo Mathematica podemos, por ejemplo dibujar el campo de un par de cargas de igual magnitud pero de signo opuesto, separadas una cierta distancia (véase ejercicio 3.7), figura 3.6, y contrastarlas con los casos en que la carga negativa exactamente un medio y un quinto de la carga positiva, figura 3.7.

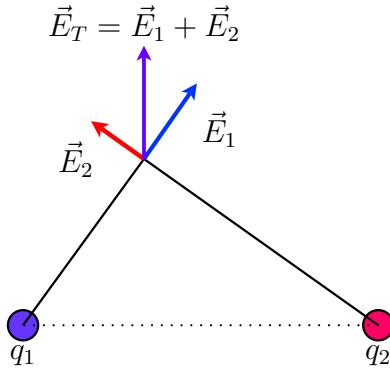


Figura 3.5: Suma gráfica de los campos producidos por dos cargas q_1 y q_2 en un punto dado para hallar el campo total.

Ejemplo 3.2.2. Consideremos el sistema de cargas del ejemplo 2.2.1. Evaluaremos el campo en el punto $(0, 2)cm$ y $(1, 1)cm$. Para esto utilizamos las expresiones para las componentes halladas en el ejemplo 3.2.1. Para la carga en el origen simplemente tenemos que

$$\begin{aligned} E_{1,x}(\vec{r}) &= \frac{x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \text{dina/esu}, \\ E_{1,y}(\vec{r}) &= \frac{y}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \text{dina/esu}, \\ E_{1,z}(\vec{r}) &= \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \text{dina/esu}. \end{aligned}$$

Para la carga con valor 32 esu en la posición $(2, 2)cm$, en cambio

$$\begin{aligned} E_{2,x}(\vec{r}) &= 32 \frac{(x - 2)}{[(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2]^{3/2}} \text{dina/esu}, \\ E_{2,y}(\vec{r}) &= 32 \frac{(y - 2)}{[(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2]^{3/2}} \text{dina/esu}, \\ E_{2,z}(\vec{r}) &= 32 \frac{z}{[(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2]^{3/2}} \text{dina/esu}. \end{aligned}$$

En ambos casos hemos considerado que las cargas se encuentran en el plano xy , i.e., $z_o = 0$, y aprovechamos para pensar de una vez en tres dimensiones. Antes de proceder debemos recordar que todas las distancias deben considerarse en centímetros.

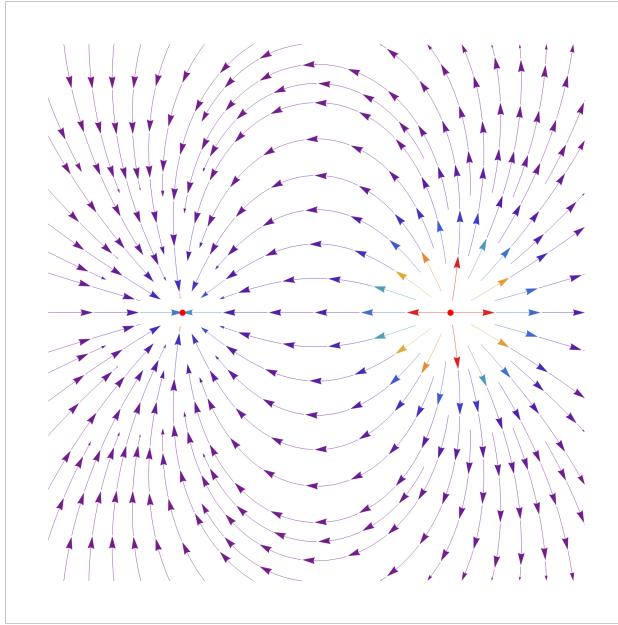


Figura 3.6: Visualización del campo para un par de cargas iguales de signo opuesto (dipolo) utilizando el comando StreamPlot en *Mathematica*. Los vectores graficados no están en escala correcta y la magnitud del campo se visualiza con los cambios de color siendo el morado el menos intenso. Claramente se observa como la carga positiva toma el rol de fuente y la negativa de sumidero. Una bonita visualización interactiva hecha por el MIT la encuentran en [este enlace](#).

Para el primer punto basta con remplazar las coordenadas de los puntos, nuevamente suponiendo que se nos pide sobre el plano ay , o sea $z = 0$. Entonces, en el punto $(0, 2, 0)cm$ se tiene, para la primera carga

$$\begin{aligned} E_{1,x}((0, 2, 0)cm) &= \frac{0}{[0^2 + 2^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = 0, \\ E_{1,y}((0, 2, 0)cm) &= \frac{2}{[0^2 + 2^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = \frac{1}{4} dina/esu, \\ E_{1,z}((0, 2, 0)cm) &= \frac{0}{[0^2 + 2^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = 0. \end{aligned}$$

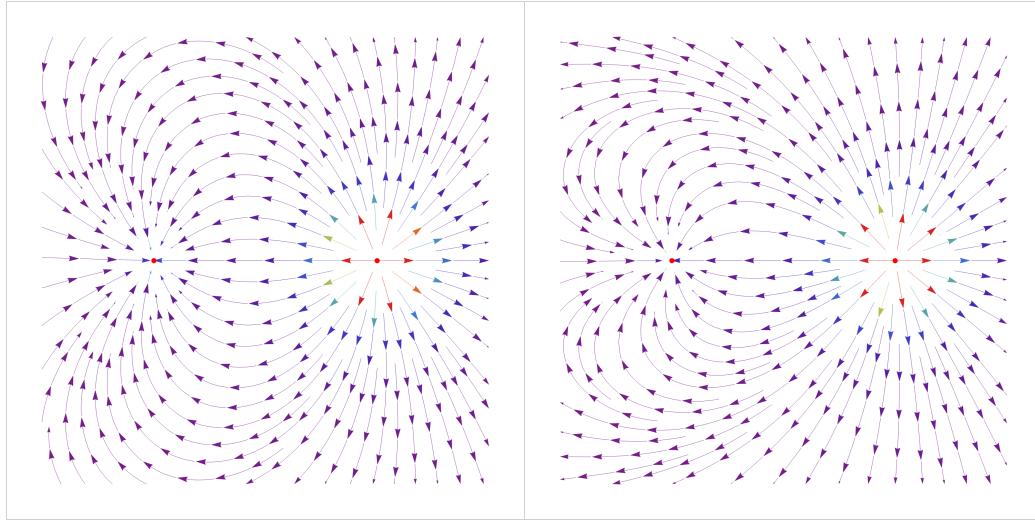


Figura 3.7: Visualización del campo para un par de cargas de signo opuesto (dipolo) con la carga negativa un medio, izquierda, y un quinto, derecha, de la positiva utilizando el comando StreamPlot en *Mathematica*. Los vectores graficados no están en escala correcta y la magnitud del campo se visualiza con los cambios de color siendo el morado el menos intenso. Vemos como el campo de la carga positiva cada vez domina más y se asemeja al de la carga positiva aislada.

Para la segunda carga

$$\begin{aligned}
 E_{2,x}((0, 2, 0)cm) &= 32 \frac{(0 - 2)}{[(0 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = -8dina/esu, \\
 E_{2,y}((0, 2, 0)cm) &= 32 \frac{(2 - 2)}{[(0 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = 0, \\
 E_{2,z}((0, 2, 0)cm) &= 32 \frac{0}{[(0 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = 0.
 \end{aligned}$$

De este modo obtenemos el campo total en este punto

$$\begin{aligned} E_{tot,x}((0, 2, 0)cm) &= E_{1,x}((0, 2, 0)cm) + E_{2,x}((0, 2, 0)cm) = -8dina/esu, \\ E_{tot,x}((0, 2, 0)cm) &= E_{1,x}((0, 2, 0)cm) + E_{2,x}((0, 2, 0)cm) = \frac{1}{4}dina/esu, \\ E_{tot,x}((0, 2, 0)cm) &= E_{1,x}((0, 2, 0)cm) + E_{2,x}((0, 2, 0)cm) = 0, \end{aligned}$$

o sea

$$\vec{E}_{Tot}((0, 2, 0)cm) = \left(-8\hat{i} + \frac{1}{4}\hat{j} \right) dina/esu. \quad (3.23)$$

La solución gráfica a este problema se observa en la figura 3.8.

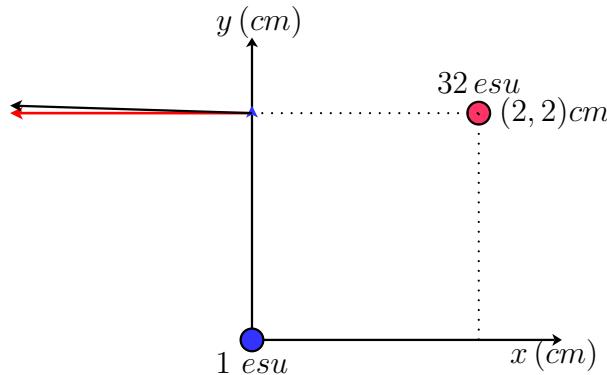


Figura 3.8: Solución gráfica del campo en el punto $(0, 2)cm$. Dada la magnitud del campo debido a la carga en el origen apenas se puede apreciar su contribución, la cual es vertical.

Para el punto $(1, 1, 0)cm$ procedemos de igual manera:

$$\begin{aligned} E_{1,x}((1, 1, 0)cm) &= \frac{1}{[1^2 + 1^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = \frac{1}{2\sqrt{2}} dina/esu, \\ E_{1,y}((1, 1, 0)cm) &= \frac{1}{[1^2 + 1^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = \frac{1}{2\sqrt{2}} dina/esu, \\ E_{1,z}((1, 1, 0)cm) &= \frac{0}{[1^2 + 1^2 + 0^2]^{3/2}} dina/esu = 0. \end{aligned}$$

Para la carga con valor 32 esu , en cambio

$$\begin{aligned} E_{2,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) &= 32 \frac{(1 - 2)}{[(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + 0^2]^{3/2}} \text{ dina/esu} = -\frac{16}{\sqrt{2}} \text{ dina/esu}, \\ E_{2,y}((1, 1, 0) \text{ cm}) &= 32 \frac{(1 - 2)}{[(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + 0^2]^{3/2}} \text{ dina/esu} = -\frac{16}{\sqrt{2}} \text{ dina/esu}, \\ E_{2,z}((1, 1, 0) \text{ cm}) &= 32 \frac{0}{[(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + 0^2]^{3/2}} \text{ dina/esu} = 0. \end{aligned}$$

Así el campo total será

$$\begin{aligned} E_{tot,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) &= E_{1,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) + E_{2,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) = -\frac{31}{2\sqrt{2}} \text{ dina/esu}, \\ E_{tot,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) &= E_{1,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) + E_{2,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) = -\frac{31}{2\sqrt{2}} \text{ dina/esu}, \\ E_{tot,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) &= E_{1,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) + E_{2,x}((1, 1, 0) \text{ cm}) = 0, \end{aligned}$$

o sea

$$\vec{E}_{Tot}((1, 1, 0) \text{ cm}) = -\frac{31}{2\sqrt{2}}(1, 1) \text{ dina/esu}, \quad (3.24)$$

y su magnitud es $|\vec{E}_{Tot}| = \frac{31}{2} \text{ dina/esu}$. Notemos que este caso lo pudimos haber resuelto pensando en un caso unidimensional, pues ambos campos están en la línea que une las cargas, dado por el vector unitario $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, con ambos campos en direcciones opuestas y con el de la carga superior 32 veces mayor que el de la carga inferior. No mostramos la solución gráfica superpuesta a las carga porque, como en el caso anterior el campo de la carga inferior es mucho menor que el de la superior.

Ejercicio 3.6. Considere el sistema del ejemplo 2.2.3. Evalúe el campo en el punto $(2, 0) \text{ cm}$ y $(0, 2) \text{ cm}$.

Ejercicio 3.7. Utilice el resultado del ejemplo 3.2.1 para hallar el campo debido a dos cargas opuestas con la misma magnitud, en las posiciones $\vec{r}_+ = \frac{d}{2}\hat{k}$ y $\vec{r}_- = -\frac{d}{2}\hat{k}$.

3.2.3. Distribuciones continuas de carga

En la mayoría de casos relevantes nos enfrentamos a distribuciones de carga que varían continuamente en el espacio y no de forma discreta como hasta ahora hemos trabajado. Estas están descritas por una función (campo) escalar dependiente del espacio que describe la densidad de carga en cada punto del espacio. Para nuestro estudio será conveniente distinguir entre densidades volumétricas, superficiales y lineales, las cuales dictaran en cada punto del espacio la carga encerrada en una unidad de volumen, superficie y longitud respectivamente. Formalmente estas se definen como

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV} \quad (\text{Densidad de carga volumétrica}) \quad (3.25)$$

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dQ}{dS} \quad (\text{Densidad de carga superficial}) \quad (3.26)$$

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{dQ}{d\ell} \quad (\text{Densidad de carga lineal}) \quad (3.27)$$

Donde dV , dS y $d\ell$ son diferenciales de volumen, superficie y longitud respectivamente.

El problema ante el cual estamos es que sólo conocemos campo debido a cargas puntuales por lo que pareciera una tarea de un análisis empírico experimental caso por caso. Sin embargo, podemos explotar al máximo el poder de la superposición lineal para utilizar, de nuevo, el campo de una carga puntual y evaluar campos arbitrarios incluso en estas circunstancias como se sigue.

La idea es considerar la distribución continua como un conglomerado de cargas que, en un límite, se pueden considerar como puntuales. Para ilustrar esto consideraremos una distribución volumétrica a la cual partimos en un reticulado de pedazos pequeños y consideramos cada elemento del reticulado como una carga puntual en primera aproximación. La figura 3.9 ilustra uno de estos pequeños elementos de los cuales se partiría para hacer la superposición lineal.

Como consideramos en primera aproximación que cada pequeño elemento es una carga puntual podemos utilizar la expresión general (3.1). Aun así, la aproximación sólo será válida en el límite en que el reticulado sea lo suficientemente fino como para que efectivamente cada elemento sea puntual. Esto es un proceso usual en el cálculo diferencial, donde cantidades finitas se parten en diferenciales y se utiliza la suma para recobrar el carácter finito del elemento. Para hacer esto tomaremos el resultado de aplicar (3.1)

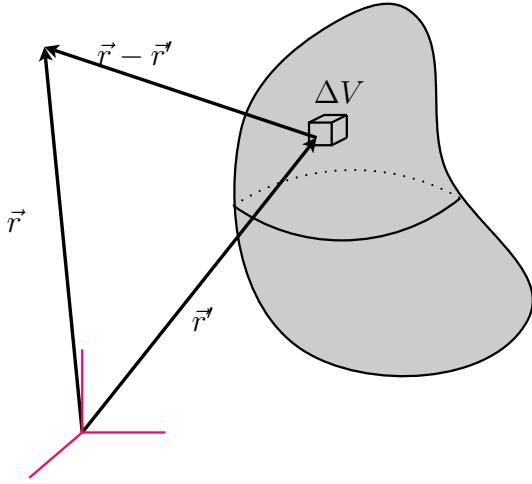


Figura 3.9: Una distribución de carga continua es dividida en contribuciones infinitesimales de carga, con posiciones dadas por el vector \vec{r}' . El campo total en la posición \vec{r} es la superposición lineal de todas las contribuciones.

y multiplicamos cada término por $\Delta V / \Delta V'$, los cuales denotamos por $\Delta V'$ para estresar el hecho que corresponden al elemento de volumen del pequeño pedazo en la posición \vec{r}' . Ahora, para garantizar el hecho que cada pedazo sea puntual tomamos la reticula muy fina, o sea $\Delta V' \rightarrow 0$, de la siguiente manera:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V' \rightarrow 0} k \sum_i \frac{q_i}{\Delta V'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta V'.$$

Ahora bien; con la notación $\lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \Delta V' \equiv dV'$, y la densidad volumétrica la carga encerrada en cada elemento dividida por su volumen, i.e., $\rho(\vec{r}') \equiv \lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \frac{q_i}{\Delta V'}$ y, tomando \vec{r}_i como un continuo \vec{r}' , tenemos que la sumatoria se reduce a una integral, $\lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \sum_i \Delta V' \equiv \int dV'$, así:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV', \quad (3.28)$$

donde V' es el volumen sobre el que se distribuye la carga. Sin embargo, dado que la densidad de carga es nula fuera de este, la anterior se puede extender al volumen infinito del espacio completo. Asimismo, ya que $dq = \rho dV$, podemos escribir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (3.29)$$

la cual es la generalización de (3.21) y nos permite particularizar para los casos de distribuciones superficiales de carga, $dq = \sigma(\vec{r}')dS'$, o lineales, $dq = \lambda(\vec{r}')d\ell'$, obteniendo

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{S'} \sigma(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS', \quad (3.30)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{L'} \lambda(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\ell'. \quad (3.31)$$

Las anteriores expresiones nos indican que teniendo la información sobre la distribución de carga, ¡en todo el espacio!, tenemos conocimiento del campo eléctrico. En una variada gama de situaciones que trabajaremos en el curso esto es lo que supondremos. Sin embargo, también es usual tener sólo información indirecta sobre las distribuciones de carga y otros métodos son necesarios. Algo de esto se abordará cuando discutamos más adelante los campos en materiales conductores, pero el tema detallado se aborda en el curso de Electrodinámica.

Otra forma de escribir los anteriores resultados, que no sólo nos ayuda a comprender lo que ocurre conceptualmente sino que puede resultar de utilidad práctica es la siguiente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} \quad (3.32)$$

donde $d\vec{E}$ tomará la forma correspondiente dado el caso, generalizando así la expresión (3.21) del caso discreto. Vemos, entonces, explícitamente que el campo resultante es la suma de las pequeñas contribuciones de cada elemento infinitesimal al campo.

Antes de pasar a los ejemplos es interesante notar que, contrario a lo que ocurre con las distribuciones discretas, donde formalmente se tienen divergencias en el campo en puntos donde se localizan las cargas, para distribuciones de carga continua es posible incluso definir el campo en puntos del espacio internos al volumen que contiene la distribución. Esto en tanto la densidad permanezca finita. En efecto, esto es debido a que con cargas puntuales se está suponiendo

que toda la carga se encuentra localizada en un sólo punto, implicando una densidad de carga infinita.

Ejemplo 3.2.3. Campo en el eje de un anillo circular con carga uniforme

Consideremos un anillo delgado, osea de grosor despreciable,¹ de radio a , cargado uniformemente con densidad $\lambda = \lambda_0$.² El caso general de determinar el campo en cualquier punto del espacio es un problema matemático elaborado, fuera de los objetivos del curso, pero determinar el valor del campo en eje del anillo resulta relativamente sencillo. En efecto, suponiendo el anillo en el plano xy y su eje coincidiendo con el eje z , dado que el campo electrostático es radial y la simetría del sistema, tenemos que sobre el eje z sólo hay componente en vertical del campo, pues las componentes horizontales se cancelan, como se ilustra en la figura 3.10. Calculemos, entonces $\vec{E}(0, 0, z) = E_z(0, 0, z)\hat{k}$.

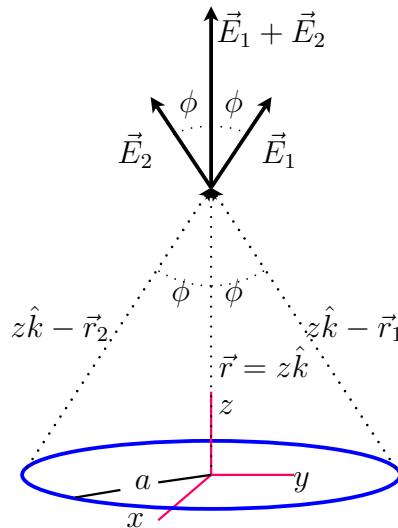


Figura 3.10: Anillo delgado de radio a en el plano xy y centrado en el origen. Se ilustra cómo las contribuciones al campo de dos secciones del anillo opuestas cancelan sus componentes horizontales.

¹Más precisamente esto sería pensar en que el grosor d del anillo es muy pequeño comparado con su radio, i.e., $d \ll a$.

²Ya que es uniforme podemos expresar la densidad como la carga dividida por la longitud del perímetro del anillo, así: $\lambda_0 = Q/(2\pi a)$.

Como nos paramos sobre el eje z el vector posición de evaluación es simplemente $\vec{r} = z\hat{k}$ y nuestro elemento diferencial de campo, según la ecuación (3.31), toma la forma

$$d\vec{E} = k\lambda_0 \frac{(z\hat{k} - \vec{r}')}{|z\hat{k} - \vec{r}'|^3} d\ell', \quad (3.33)$$

del cual tomamos sólo la componente vertical, z ,

$$\begin{aligned} dE_z &= k\lambda_0 \frac{(z\hat{k} - \vec{r}')_z}{|z\hat{k} - \vec{r}'|^3} d\ell', \\ &= k\lambda_0 \frac{(z - z')}{|z\hat{k} - \vec{r}'|^3} d\ell', \\ &= k\lambda_0 \frac{z}{|z\hat{k} - \vec{r}'|^3} d\ell', \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde hemos utilizado el hecho que el anillo se encuentra en el plano xy , i.e., $z' = 0$. Ahora, notemos que la distancia de cualquier punto sobre el anillo un punto sobre el eje a altura a es la misma, a decir

$$|z\hat{k} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}, \quad (3.35)$$

de donde

$$dE_z = k\lambda_0 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\ell'. \quad (3.36)$$

Nos falta aun determinar el diferencial $d\ell'$. Este simplemente está dado por el diferencial de arco sobre un círculo, i.e.,

$$d\ell = a d\theta, \quad (3.37)$$

sin embargo, su expresión como tal no la necesitamos. Esto debido a que el diferencial de campo que acabamos de hallar se puede escribir como

$$dE_z = \mathcal{E}_0(z) d\ell', \quad (3.38)$$

que nos indica que todos los elementos diferenciales del anillo contribuyen exactamente igual y lo único que nos faltaría es sumar a lo largo del anillo,

con perímetro $2\pi a$, así

$$E_z(z) = \int_{anillo} dE_z, \quad (3.39)$$

$$= \int_{anillo} k\lambda_0 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\ell', \quad (3.40)$$

$$= k\lambda_0 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_{anillo} d\ell', \quad (3.41)$$

$$= 2\pi a k \lambda_0 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.42)$$

donde en la tercera línea hemos utilizado precisamente el hecho que nada en el integrando, más allá del $d\ell'$, varía a lo largo de la integral y puede salir de esta.

Otra forma de atacar el problema es considerar directamente la magnitud del campo y proyectar en el eje z , así: dado un diferencial de carga dq en el anillo la magnitud de su campo está dado por $dE = kdq/r^2$, con $r = \sqrt{a^2 + z^2}$. Al estar interesados sólo en la componente z proyectamos, que por triángulos similares resulta con un factor de proyección, ver figura 3.10,

$$\cos \phi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (3.43)$$

Así, se sigue que

$$dE_z = dE \cos \phi = k dq \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.44)$$

con $dq = \lambda_0 d\ell'$ y recuperamos (3.33) obtenida por el otro método.

El campo total en el eje, entonces, está dado por

$$\vec{E}(\vec{r} = z\hat{k}) = k 2\pi a k \lambda_0 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}, \quad (3.45)$$

y en particular en el centro del anillo, $z = 0$, resulta nulo, lo cual es de esperarse dada la simetría del sistema.

Ejemplo 3.2.4. Placa delgada infinita uniformemente cargada

Tomando una placa infinita en el plano xy con densidad de carga superficial constante σ_0 , calculemos el campo generado utilizando la expresión (3.29).

Antes de iniciar deseo que apreciemos algo que será de extrema utilidad, no sólo en la evaluación explícita de campos sino para su comprensión previa a los cálculos. Me refiero a la simetría, concepto que utilizaremos como un cambio en el sistema que o bien implica que el sistema no refleja ningún cambio, i.e., ambas situaciones son idénticas, o que el cambio generado es automático, por ejemplo en el caso del dipolo, figura 3.6, donde una reflexión alrededor del plano justo en medio de las cargas simplemente intercambia la carga positiva y la negativa. Una ilustración de esto ya lo vimos en el ejemplo 3.2.3, donde el sistema es simétrico bajo giros de cualquier tipo alrededor del eje del anillo. Esto implica que el campo debe también presentar dicha simetría, lo cual restringe muchas formas de campos que podamos imaginar y, en particular, significa automáticamente que el campo sobre el eje sólo puede tener componentes perpendiculares al plano del anillo. Imaginemos que sea de otra forma y que tiene una componente, así sea leve, en dirección x . Si hacemos una rotación de $\pi/2$ ahora el campo ha cambiado y tendría una componente en dirección y , que sería fácil de evidenciar e implicaría que no respeta la simetría que obviamente presenta el sistema.

En el presente caso, dado que la placa es plana, infinita e uniforme, un observador que se traslade paralelamente a la placa, sin cambiar la distancia a esta no notará ningún cambio. Esto debido que siempre ve la misma densidad de carga en todo punto y no tiene puntos de referencia como los bordes; esto es lo que llamaremos una simetría de traslación. Lo mismo sucede si mira en cualquier dirección: una simetría de rotación, que en este caso sucede alrededor de cualquier eje perpendicular a la placa. Lo anterior nos conduce inmediatamente a que el campo debe ser vertical, pues cualquier punto sobre, o debajo, de la placa es equivalente al eje del anillo, pero además como no se distinguen puntos con distintas coordenadas (x, y) , el campo no puede depender de estas, así $\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{k}$.

La anterior discusión también nos está indicando que podemos hacer nuestro cálculo parandonos en cualquier punto sobre la placa y escoger que en dicho punto pase el eje z . Aunque podemos atacar el problema de distintas maneras, por ejemplo dividiendo la placa en diferenciales de área rectangulares utilizando coordenadas cartesianas, i.e., $dA = dx dy$, aprovecharemos el resultado del ejemplo 3.2.3 para acortar el camino. Lo que haremos es utilizar coordenadas cilíndricas para lo cual tenemos un diferencial de área dado por

$$dA = \rho d\rho d\theta, \quad (3.46)$$

mientras que el diferencial de arco es el dado en la ecuación (3.37) remplazando a el radio a por la coordenada ρ (que no debemos confundir con una densidad de carga).

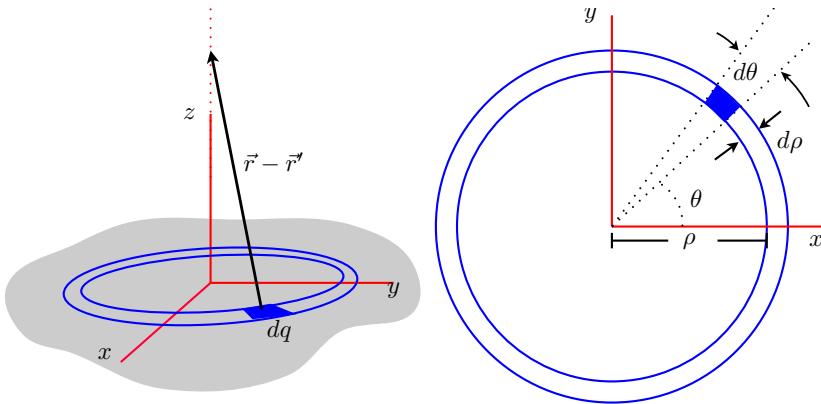


Figura 3.11: Diagrama cálculo del campo para una placa infinita uniformemente cargada.

Con esto tendríamos un diferencial de campo análogo al de la expresión (3.36), ver figura 3.11,

$$dE_z = k\sigma_0 \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \rho d\rho d\theta. \quad (3.47)$$

Vemos que si deseamos podemos de una vez integrar en la coordenada θ , pues nada depende de esta, como es de esperar por la simetría de rotaciones antes discutida. Al hacerlo lo que estamos logrando es obtener la contribución de un anillo de radio ρ y grosor $d\rho$ análogo al obtenido en el ejemplo 3.2.3, simplemente remplazando por una densidad de longitud efectiva $\lambda_0 = \sigma_0 d\rho$.³ Este anillo contribuye, entonces con

$$dE_{z,anillo} = 2\pi k \frac{\sigma z \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho. \quad (3.48)$$

Lo que resta es sumar las contribuciones de los anillos de distinto radio de

³Es como si hiciéramos un acercamiento y descubriéramos que el anillo en efecto tiene un grosos $d\rho$.

grosor $d\rho$, realizando la integral sobre ρ :⁴

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE_{z,anillo}, \\ &= \int_0^\infty 2\pi k \frac{\sigma_0 z \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}, \\ &= 2\pi k \frac{z}{|z|} \sigma_0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Hemos dejado explícito el valor absoluto $|z| = \sqrt{z^2}$, para entender cómo el campo sobre la placa, $z > 0$ tiene dirección opuesta al campo debajo de esta, $z < 0$. El sentido estará dictado por el signo de σ_0 . Entendemos, sin embargo, que se trata de un campo uniforme en al dirección \hat{k} .

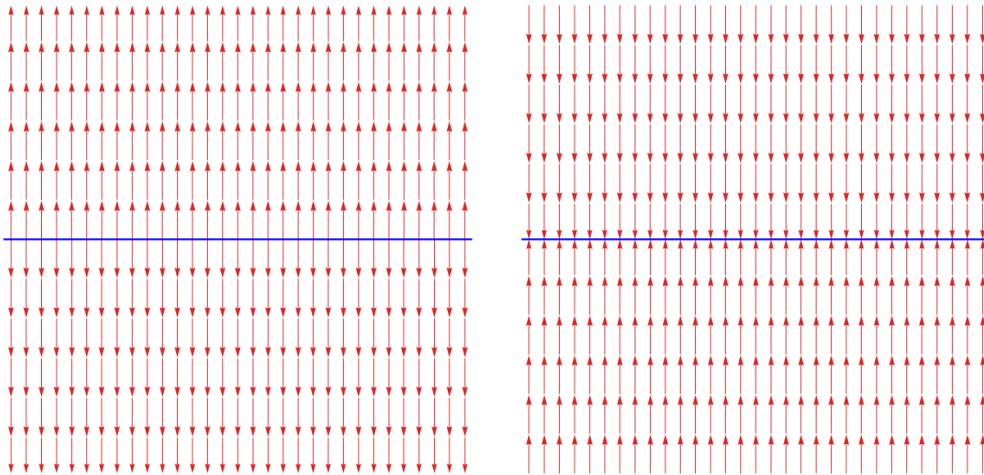


Figura 3.12: Vista transversal del sistema y su campo para el caso de una densidad positiva (izquierda) y negativa (derecha.).

Con este ejemplo encontramos por primera vez un campo en todo el espacio para una distribución continua, el cual nos muestra explícitamente que la dependencia del campo en la distancia depende fuertemente de la distribución de carga que se trate, recalculo el hecho que la ley de Coulomb es sólo válida para cargas puntuales, o como veremos también para esferas.

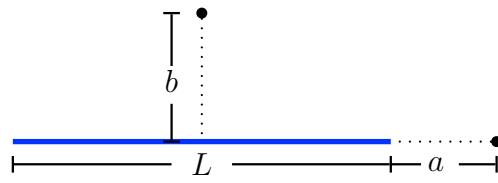
⁴Utilizamos la integral $\int dx x(c^2 + x^2)^{-3/2} = -(c^2 + x^2)^{-1/2}$.

Ejercicio 3.8. Calcule el campo eléctrico para la vara de grosor despreciable con densidad lineal de carga constante. Antes de comenzar el cálculo haga un análisis de las simetrías, como el hecho en el ejemplo 3.2.4, que le permita simplificarlo.

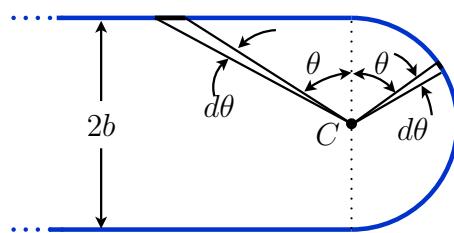
Ejercicio 3.9. Considere una varilla delgada de plástico en forma de anillo, con una distribución uniforme de carga λ . ¿Cuál es el campo en el centro del anillo? ¿Cuál sería la fuerza que sentiría una carga q en ese punto? ?' Y la fuerza sobre el anillo? (¿Hay algún cálculo por hacer?)

Ejercicio 3.10. Considere una varilla delgada de plástico en forma de semicírculo, con una distribución uniforme de carga λ . Calcule el campo eléctrico en el centro del semicírculo (centro del círculo que formaría).

Ejercicio 3.11. Considere una vara de grosor despreciable y largo L con una carga Q uniformemente distribuida. Encuentre el campo eléctrico a una distancia a de la vara sobre el eje de esta. Calcule el campo eléctrico a una distancia b del eje de la vara a la misma distancia entre las puntas.



Ejercicio 3.12. Considere un hilo infinito con densidad lineal de carga constante λ . El hilo de dobla t.q. queda en forma de herradura con un semicírculo de radio b . Muestre que el campo eléctrico en el punto C es nulo. Puede mostrar esto viendo cual es la contribución de los diferenciales de hilo a ángulos opuestos.



3.3. Ejercicios extra

Berkeley 2nd ed 1985: 1.9, 1.11, 1.13, 1.15, 1.16, 1.20 y 1.21.

Capítulo 4

Ley de Gauss

En este capítulo encontraremos la primera de las leyes expresadas en las ecuaciones de Maxwell, la cual no será sino una generalización de la ley de Coulomb. Para esto, primero necesitamos entender el concepto de flujo de un campo vectorial

4.1. Flujo

La noción de flujo es bien conocida en analogía con los fluidos. Este simplemente nos da la cantidad de fluido que pasa por unidad de tiempo a través de un área determinada. En ese caso el campo vectorial que se asocia es la velocidad del fluido, representando las velocidades de este en cada punto del espacio. Siguiendo esta analogía tenemos que el máximo de fluido atravesando la superficie se logra cuando este la atraviesa de forma normal, o sea completamente perpendicular a esta, y, asimismo, el flujo es nulo si la velocidad del fluido es tangencial a la superficie, ya que no la atraviesa.

Para formalizar matemáticamente este concepto consideremos primero una superficie plana. A esta le podemos asociar un vector normal unitario \hat{a} , que determina la dirección a la que se coloca la cara de la superficie. De hecho la superficie queda completamente determinada, exceptuando por su forma, por un vector \vec{A} definido por $\vec{A} = A\hat{a}$ donde A es el área de la superficie. Así, el si el campo vectorial \vec{F} es constante, sobre toda la superficie, el flujo sobre lo definimos por

$$\Phi = \vec{F} \cdot \vec{A}, \quad (4.1)$$

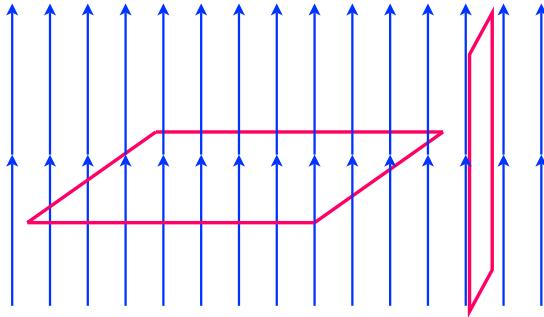


Figura 4.1: Dos superficies iguales una colocada perpendicular a la velocidad del fluido (izquierda) y otro de manera tangencial (derecha). Para el primero el fluido atraviesa la superficie, decimos que hay flujo, mientras que en la segunda no hay fluido atravesando y el flujo es nulo.

que efectivamente satisface que para que el flujo sea máximo la superficie debe colocarse perpendicular al flujo, i.e., su vector normal paralelo al campo vectorial; mientras que es nulo si es tangencial, i.e., su vector normal es perpendicular al campo. Además, podemos hablar de flujos negativos, los cuales suceden cuando el campo y el vector de área van en direcciones opuestas.

Para ver que esta definición efectivamente corresponde a fluido por unidad de tiempo que pasa por la superficie, consideremos que el campo vectorial es el campo de velocidades, i.e. $\vec{F} = \vec{V}$. Entonces, el producto expresado en (4.1) da el volumen barrido por el fluido que pasa por la superficie por unidad de tiempo (ver figura 4.2)

$$\Phi = |\vec{V}| A \cos \theta , \quad (4.2)$$

donde hemos considerado que $|\vec{A}| = A$ y θ el ángulo entre la velocidad y el vector normal.

La cantidad de fluido que pasa por unidad de tiempo es, entonces, este volumen multiplicado por la densidad del fluido.

En la anterior definición hemos hecho dos suposiciones: que es posible definir un vector normal a la superficie, y dos, que el campo vectorial sobre la superficie permanece constante, en dirección y magnitud. De otra forma no tendría sentido lo escrito en (4.1). Es claro que estas dos consideraciones son demasiado fuertes y en general no se cumplen, por ejemplo en superficies curvas y/o campo vectoriales no homogéneos.

Para generalizar (4.1) partimos de notar que cualquier superficie la podemos

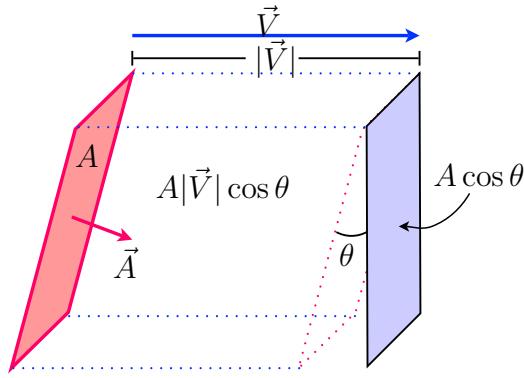


Figura 4.2: El volumen barrido por unidad de tiempo por un fluido con velocidad \vec{V} que atraviesa oblicuamente una superficie de área A . El vector de área y el vector de velocidad \vec{V} forman un ángulo θ entre ellos.

expresar como la unión de infinidad de segmentos pequeños (diferenciales) planos, como se ilustra en la figura 4.3, sobre los cuales es posible definir un vector normal, para cada uno claro está.

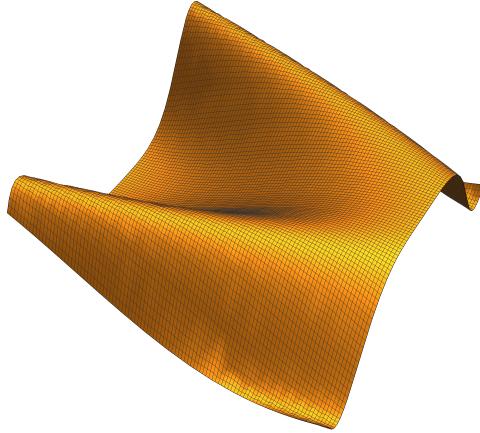


Figura 4.3: Ejemplo de superficie que ha sido partida en segmentos pequeños sobre los cuales, en el límite diferencial, es posible definir un vector normal.

Además, al tomar suficientemente pequeños estos segmentos es posible aproximar cualquier campo vectorial bien comportado, i.e. continuo y diferencia-

ble, como los que usualmente encontraremos a lo largo del curso, a un vector constante sobre toda la región abarcada por cada una de las secciones de área. Así la expresión (4.1) tiene sentido sobre cada pedazo de superficie. Es claro que para hallar el flujo total basta con sumar la contribución de cada porción de superficie.

$$\Phi_{Tot} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{A}_i, \quad (4.3)$$

donde hemos denotado por \vec{F}_i y \vec{A}_i los vectores de campo y de área para cada porción de superficie etiquetadas por i .

En este punto es importante imponer ciertas convenciones para la definición de \vec{A} . El problema reside en el hecho que el vector normal a una superficie puede ser en principio escogido arbitrariamente en direcciones opuestas, lo que cambia el signo de flujo. Al tomar la suma (4.3) es entonces necesario mantener una convención definida sobre toda la superficie a la que se le calcula el flujo. Más adelante veremos una definición geométrica precisa de esta dirección, pero por el momento estando interesados principalmente en superficies cerradas definiremos la dirección de los vectores normales tales que apunten hacia afuera del volumen encerrado por la superficie.

Para que el procedimiento apenas expuesto para determinar el flujo total sea completamente preciso debemos asegurar que las porciones sean planas, para definir sus vectores normales, y que el campo no varíe sobre estas porciones, tomamos porciones infinitesimales, de tal forma que la suma (4.3) se reduce a una integral sobre toda la superficie,¹

$$\Phi = \int_{\text{Superficie}} \vec{F} \cdot d\vec{A}. \quad (4.4)$$

Resumiendo: matemáticamente el flujo de un campo vectorial sobre una superficie es la integral de superficie, sobre toda la superficie, del producto punto del campo con el diferencial de área (vector normal diferencial de área).

Ejercicio 4.1. *Calcule el flujo a través de una superficie plana con forma cuadrada, de lados b , en el plano xy y centrada en el origen, para el campo vectorial $|\vec{F}| = xy$ con dirección constante tal que hace un ángulo α con el vector \hat{k} .*

¹Hemos cambiado la notación para el diferencial de superficie, la cual antes notábamos como dS , espero no sea mayor confusión.

Ejercicio 4.2. ¿Cuál es el flujo total debido a un campo vectorial uniforme sobre una superficie cerrada? Trate de buscar la respuesta en la analogía con el flujo de fluidos sin necesidad de hacer el cálculo explícito.

Ejercicio 4.3. Tomando el flujo como el caudal, cantidad de líquido que pasa por unidad de tiempo, considere una tubería por la que pasa un líquido incomprensible con un caudal Q . Suponiendo una región de la tubería, que llamaremos R_1 , con un área transversal A_1 , y otra región, que denotamos como R_2 , seguida de la anterior, que tiene un área transversal A_2 . Discutir, utilizando argumentos de flujo, la relación entre las velocidades del líquido, en ambas regiones.

4.2. Ley de Gauss

4.2.1. Flujo debido a una carga puntual

Con lo definido anteriormente calculemos el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada. El caso más sencillo es el flujo del campo debido a una carga puntual q a través de una superficie esférica de radio r_o , centrada en la carga, como se ilustra en la figura 4.4.

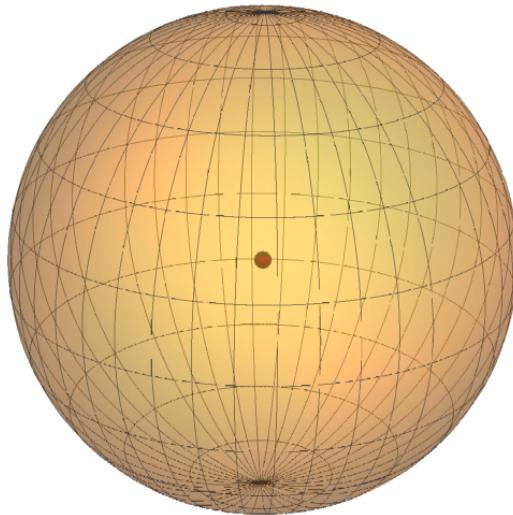


Figura 4.4: Carga puntual en el centro de una superficie esférica.

Para esta configuración especial el vector normal a la superficie tiene dirección radial y por lo tanto es paralelo al campo vectorial, i.e.,

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA. \quad (4.5)$$

Además, debido a que la magnitud del campo depende sólo en r esta es constante sobre toda la superficie esférica. Por tanto la integral para el flujo queda,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{S(r_o)} \vec{E} \cdot d\vec{A}, \\ &= \int_{S(r_o)} E(\vec{r}) dA, \\ &= E(r_o) \int_{S(r_o)} dA, \\ &= E(r_o) \times \text{área total del cascarón}, \\ &= k \frac{q}{r_o^2} 4\pi r_o^2 = 4\pi kq, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde en la segunda línea utilizamos el hecho que el campo es paralelo al vector diferencial de área, en la tercera que este, además, es constante sobre la superficie, y, finalmente, el área de la esfera y la expresión del campo para la carga puntual. Interesantemente ¡el flujo total es independiente del tamaño de la esfera! Claramente esto es debido a la dependencia r^{-2} en la magnitud del campo y que este sea radial. Sin embargo, veremos que es un resultado independiente de la superficie que rodee la carga.

Para esto supongamos una superficie distinta rodeando el cascarón esférico, y consideremos un cono con vértice en la carga, que corta el cascarón esférico con una sección encerrada a , y a la superficie externa por una sección A , ilustrado en la figura 4.5.

Considerando que el cono se abre sólo levemente podemos mostrar que el flujo a través de ambas secciones es el mismo. En cada caso

$$\text{Flujo interno} = E(r_o)a, \quad (4.7)$$

$$\text{Externo flux} = \vec{E}(R) \cdot \vec{A} = |\vec{E}(R)|A \cos \theta, \quad (4.8)$$

donde hemos supuesto que la sección de área A está a una distancia R de q y que su vector normal forma un ángulo θ con el vector de campo. Ahora,

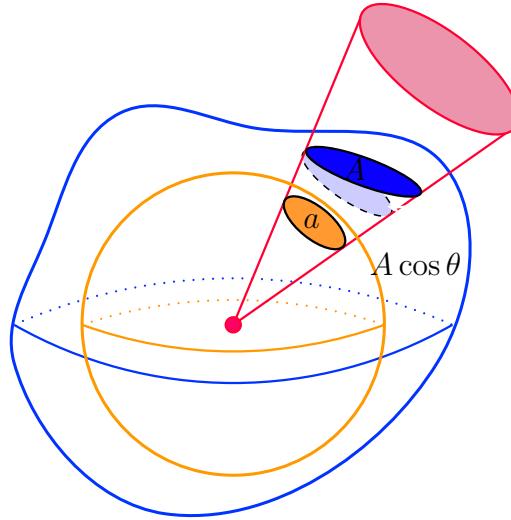


Figura 4.5: Carga centrada en una superficie esférica (anaranjada) y en el interior de otra superficie (azul). Un cono, con vértice en la carga, corta las superficies en secciones con áreas a y A , respectivamente. Sin embargo, la proyección con la dirección radial sigue aumentando como r^2 , tal y como lo hace el corte con una esfera.

dada la dependencia en r de la magnitud de \vec{E} se tiene $|\vec{E}(R)| = \frac{r_o^2}{R^2} |\vec{E}(r_o)|$. Dado que a y A están relacionadas por el cono cumplen una relación similar $a = \frac{r_o^2}{R^2} \cos \theta A$. Por tanto

$$\begin{aligned} |\vec{E}(R)| A \cos \theta &= \frac{r_o^2}{R^2} |\vec{E}(r_o)| \times \left(\frac{R^2}{r^2} \frac{1}{\cos \theta} a \right), \\ &= |\vec{E}(r_o)| a. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como este análisis se valió de una dirección arbitraria es válido una vez hagamos la suma total del fujo y se demuestra, así, que el flujo sobre ambas superficies es exactamente igual, y dado por la ecuación (4.6).

Para este análisis sencillo hemos supuesto una superficie particular tal que el cono la corta sólo una vez. Para extender el resultado a varios cortes primero mostremos que el flujo sobre una superficie cerrada que no encierre la carga es cero.

Iniciaremos con una superficie cerrada sencilla (sin recovecos) que no encierre

la carga. Podemos considerar su parte “exterior”, alejada de la carga, como parte de una superficie que encierra la carga y su parte “interior”, cercana a la carga, como parte de otra superficie que también encierra la carga y que en el resto de coincide con la primera superficie², como se ilustra en la figura 4.6.

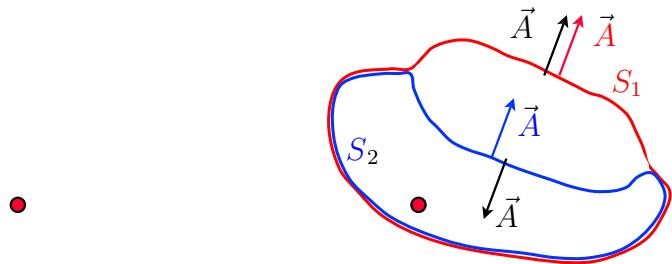


Figura 4.6: Representación dos dimensional de una superficie que no encierra la carga (negro). A la derecha se muestran dos superficies, S_1 (rojo) y S_2 (azul), que coinciden respectivamente en la región cercana y alejada de la carga y son idénticas en el resto. El flujo por S_1 y S_2 es idéntico.

El hecho que los flujos por las superficies S_1 y S_2 sean iguales, dados por $4\pi kq$, implica que el flujo por las secciones en las que coinciden con la superficie que no encierra la carga también es igual, pues en el resto del espacio son idénticas. Como en la parte cercana el vector de área \vec{A} es igual pero opuesto en dirección al correspondiente al de la superficie S_2 , A_2 , los flujo por estas porciones de superficie va a tener signos opuestos (recordemos el producto punto) y, por tanto, el flujo por esta superficie, que no encierra la carga es nulo.

Ahora, intentaremos justificar que incluso en el caso en que la superficie tenga hendiduras, en la dirección de las líneas de campo y un cono proyectado la corte en varias ocasiones (dos o más para superficies que no encierran la carga), estos resultados son válidos. La idea es notar lo siguiente: si \mathcal{V} es el volumen encerrado por una superficie S , siempre es posible dividirlo en volúmenes \mathcal{V}_i cuya unión forma el volumen grande, i.e., $\mathcal{V} = \cup_i \mathcal{V}_i$. Las superficies externas de estos pequeños volúmenes coinciden con la superficie del volumen grande, mientras que las internas son coincidentes entre ellos, i.e, comparten fronteras. De modo que el flujo que se evalúe sobre la superficie

²Esta última condición no es necesaria pues se puede igual deformar sin afectar los argumentos que siguen.

externa coincide con la suma de flujo en la parte externa de las pequeñas secciones. La suma de flujo internos resulta nula debido a que en las caras coincidentes, tienen la misma área pero con vectores de área opuestos, por tanto, con flujos iguales pero con signos opuestos. En la figura figura 4.7 se ilustra esto con dos volúmenes. Por tanto se tiene que

$$\Phi_S = \sum_i \Phi_i. \quad (4.10)$$

Ahora, esta división siempre se puede hacer escogiendo las porciones de

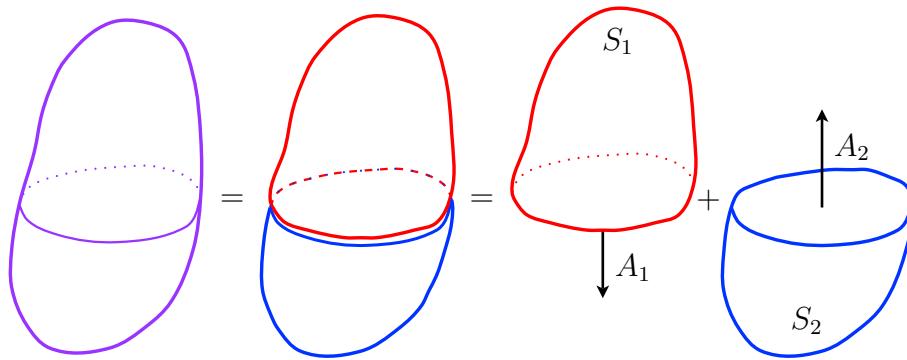


Figura 4.7: Un volumen es representado por dos complementarios. Las superficies externas de estos últimos coinciden con la superficie del volumen original y, por tanto, el flujo por la parte externa claramente coincide con el de la superficie original. En la parte interna el flujo a través de S_1 es igual pero de signo opuesto al de la misma sección de la superficie S_2 pues, aunque coinciden, sus vectores de área son opuestos.

volumen tales que sean del tipo antes estudiada y donde sólo una encierre la carga. Por tanto, para cualquier superficie se tiene que el flujo total de campo eléctrico debido a una carga puntual sobre una superficie cerrada S está dado por

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} 4\pi kq, & \text{si } q \text{ encerrada por } S. \\ 0, & \text{si } q \text{ fuera.} \end{cases} \quad (4.11)$$

En palabras, el flujo por una superficie cerrada es independiente de la forma de esta y proporcional a la carga encerrada .

Demostración formal matemática

Podemos, aun, dar argumentos formales robustos para el que no haya quedado convencido con la demostración con títeres anterior. Tomando una superficie arbitraria y una carga puntual, no necesariamente en el origen. El

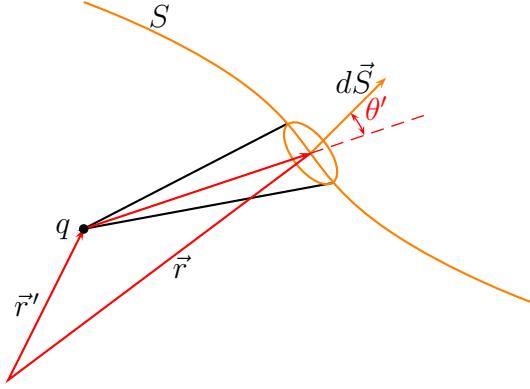


Figura 4.8: Diferencial de flujo a través de la superficie S por el segmento dS en la posición \vec{r} debido a una carga puntual en el punto \vec{r}'

diferencial de flujo por una diferencial de superficie en la posición \vec{r} debida a la carga en la posición \vec{r}' , está dado por

$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r}) = kq \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.12)$$

Notemos, sin embargo, que el producto punto indica que el área efectiva es sólo la proyección dS' con vector normal el vector radial $\vec{r} - \vec{r}'$, que finalmente no es nada más sino el área barrida por este vector cuando recorre un ángulo sólido $d\Omega$, barrido desde la carga, ver figura 4.9,

$$dS' = d\vec{S} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = |\vec{r} - \vec{r}'|^2 d\Omega. \quad (4.13)$$

Con este resultado tenemos entonces que,

$$d\Phi = kqd\Omega, \quad (4.14)$$

que es independiente de la distancia a la que se encuentra la superficie, de hecho sólo depende del ángulo sólido que esta barre. Esto es gracias a que las

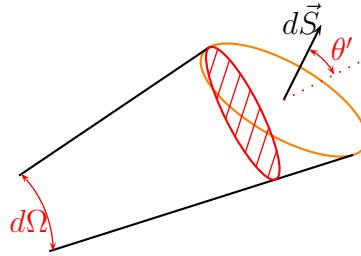


Figura 4.9: El producto punto con el vector radial hace que sólo la proyección en el ángulo sólido sea la que contribuya.

superficies crecen con la distancia como r^2 mientras que el campo eléctrico de una carga puntual en el espacio infinito decrece como $|\vec{E}|^2 \sim \frac{1}{r^2}$. Para una superficie cerrada S entonces tenemos:

$$\Phi = kq \oint d\Omega = kq \begin{cases} 0, & \text{si } q \text{ está fuera de } S, \\ 4\pi, & \text{si } q \text{ está dentro de } S, \end{cases} \quad (4.15)$$

independiente del origen. En efecto, si la superficie encierra la carga, para poder abarcarla toda debemos cubrir todo el ángulo sólido, 4π , mientras que si no la encierra, el ángulo que se haga hacia un lado se deshace para retornar el punto de inicio, dando en total cero. Esto es más fácil de entender en el caso 2-dimensional donde se tiene que el ángulo en el caso que la encierre es 2π .

4.2.2. La ley de Gauss para el campo eléctrico

Ya que hemos podido demostrar los resultados para cualquier superficie arbitraria podemos hacer la extensión a varias cargas, donde ya no hay simetría esférica y el cascarón esférico se torna inútil. Utilizando la superposición lineal tenemos que el flujo total es la suma de los flujos, así:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N) \cdot d\vec{A} \\ &= \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\pi k \sum_{i-\text{enc por } S} q_i \\
 &= 4\pi k Q_{\text{encerrada}} ,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

luego la generalización se puede expresar simplemente como que el flujo es proporcional a la carga neta encerrada $Q_{\text{encerrada}}$ por S , con la constante de proporcionalidad $4\pi k$.

Siguiendo los argumentos de la sección 3.2.3 se sigue que el anterior resultado es aun más general y válido para el caso de distribuciones de carga continua. Para hacer esto explícito expresamos la carga encerrada por la superficie como la integral de volumen, ver ecuación (3.25), de la densidad de carga sobre el volumen que esta encierra, así:

$$Q_{\text{encerrada}} = \int_{Vol(S)} dq = \int_{Vol(S)} \rho dV , \tag{4.17}$$

donde $Vol(s)$ es el volumen encerrado por S , que nos lleva a la siguiente expresión

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi k \int_{Vol(S)} \rho dV ,$

(4.18)

conocida como la forma integral de la ley de Gauss para el electromagnetismo. El análisis físico de dicha expresión lo aplazaremos por el momento, pero es importante apreciar lo maravillosa de esta expresión, que nos indica que independientemente de la superficie (tamaño o forma) sobre la que se evalúe el flujo de campo eléctrico es proporcional a la carga neta encerrada.

4.3. Evaluación de campos

Antes de ahondar en la interpretación física de la ley de Gauss compraremos la expresión (4.18) y la utilizaremos para plantear un nuevo método de evaluación de campos. Este aunque no será tan general y poderoso como el encontrado en la sección 3.2.3, mostrará una forma de análisis que en muchas circunstancias facilita la obtención de resultados sin las complicaciones que el otro método trae y viene consigo con resultados que aumentan nuestra compresión de los campos electrostáticos en distintos sistemas.

El problema principal del método es que requiere que se evidencie *a priori* la geometría misma de los campos. Parece una condición tonta dado que lo que

deseamos es precisamente evaluar los campos. Sin embargo, como vimos en el ejemplo de la placa infinita uniforme, ejemplo 3.2.4, no es algo completamente descabellado. De todas maneras, aunque en general será aplicable sólo a situaciones extremas o idealizadas, la facilidad del método amerita que sea estudiado, esto sin mencionar que bien utilizados sus resultados pueden ser extendidos a sistemas que en principio parecen no cumplir con los requisitos que impondremos.

En términos generales el método sigue los siguientes pasos:

1. Identificar el mayor número de simetrías para el sistema.
2. Verificar cómo estas simetrías restringen la geometría misma de los campos. En particular identificar posibles direcciones en las que el campo mantiene su magnitud constante, i.e., coordenadas en las que el campo es independiente, y que formen una superficie en la cual el campo sea perpendicular.
3. Identificar si es posible generar una superficie cerrada que incluya las anteriores superficies y, si es necesario, otras por las cuales el flujo será nulo, por ejemplo porque el campo es perpendicular.
4. Evaluar el flujo a través de la superficie antes construida y expresarlo en términos de la magnitud del campo. Para esto utilizamos el hecho que el campo es constante y normal a la superficie escogida, de modo que al realizar la integral de superficie puede salir como un escalar constante y el flujo simplemente será la magnitud del campo multiplicado por el área.
5. Determinar la región de la distribución de carga dentro de la superficie y evaluar la carga encerrada por esta.
6. Utilizar la ecuación (4.18) para despejar la magnitud del campo en términos de la carga encerrada, la cual, a su vez, quedará en términos de densidades de carga.
7. Reestablecer la naturaleza vectorial del campo utilizando el análisis inicial con las simetrías.

Como siempre, un nuevo método sólo queda claro con unos ejemplos y ejercicios, así que a por ellos.

Ejemplo 4.3.1. Distribución esférica de carga

En este caso lo que identificamos es que el sistema cuenta con simetría esférica, o sea pueden hacerse giros en cualquier ángulo y alrededor de cualquier eje, y el sistema no se percata de estos cambios. La única geometría para el campo que satisface dicha simetría es un campo radial, pues si suponemos una componente, digamos en x (que se puede escoger arbitrariamente) cambiaría bajo un giro alrededor del eje y . También podemos inferir que el campo sólo puede depender de la distancia radial al centro de la distribución de carga, y no de los ángulos, por ejemplo tomando coordenadas esféricas. Por tanto el campo será constante en magnitud sobre cualquier superficie esférica centrada en la distribución y paralelo a su vector diferencial de área. Podemos, entonces, evaluar fácilmente el lado izquierdo de la fórmula para la ley de Gauss, ecuación (4.18). Tomando una superficie esférica de radio r , que denotamos como $S(r)$, tenemos que el flujo sobre esta está dado por

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_{S(r_o)} \vec{E} \cdot d\vec{A}, \\ &= \oint_{S(r_o)} E(r) dA, \\ &= E(r_o) \oint_{S(r_o)} dA, \\ &= 4\pi r_o^2 E(r_o),\end{aligned}\tag{4.19}$$

donde en la segunda línea utilizamos el hecho que el campo y el diferencial de área son paralelos; en la tercera que el campo es constante sobre la superficie; y finalmente que el área de la superficies es $4\pi r^2$. Ahora, utilizando (4.18) este resultado debe ser igual a la $4\pi k$ veces la carga neta encerrada Q , que para cada caso particular estará dada por (4.17). Si suponemos que estamos simplemente fuera de la distribución de carga la carga encerrada es la carga total de la distribución, que denotaremos como Q_{Tot} , y se sigue

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi k Q_{Tot},\tag{4.20}$$

o sea

$$E(r) = k \frac{Q_{Tot}}{r^2},\tag{4.21}$$

y por el análisis del comienzo con dirección \hat{r} , i.e,

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{Q_{Tot}}{r^2} \hat{r}.\tag{4.22}$$

Encontramos así que el campo fuera de una distribución de carga esférica es idéntico al de una carga puntual con la misma carga ubicada justo en el centro de la distribución. O sea alguien afuera y detectándola sólo por sus interacciones electrostáticas no puede distinguir ambos sistemas. Demostramos así lo que se discutía en la sección 2.2.3 sobre esta equivalencia que le costó algún dolor de cabeza a Newton demostrar y nosotros, con lo que nos muestra Gauss, lo obtenemos en tres líneas. En efecto este cálculo sencillo nos muestra el poder de la ley de Gauss, ya que si tratamos de calcular el campo como una suma sobre todas las contribuciones, ecuación (3.28), el problema se torna más complicado.

Ejemplo 4.3.2. Densidad lineal constante

Considerando una línea infinita cargada, que podemos escoger coincidente con el eje z , con densidad lineal constante λ_0 .

Esto implica que debe existen tres tipos de simetría: primero, una simetría de traslación en la dirección z . Esto debido a que: la línea es recta, no tiene puntas (es infinita) y la densidad de carga está uniformemente distribuida, por lo que no hay forma de distinguir puntos a la misma distancia de la línea y a distintas alturas z ; la otra es una simetría de giro (traslación en la coordenada angular), pues al ser una línea delgada no le vemos ninguna forma transversal y simplemente es como un punto, o sea podemos girar en torno al eje z sin apreciar ningún cambio, lo que usualmente se llama una simetría azimutal; por último, y en cierta forma relacionada con la primera, notemos que podemos colocar un espejo transversal al eje z y el resultado, que es cambiar $z \rightarrow -z$, da exactamente lo mismo. Notemos que la primera simetría desaparece una vez la línea es finita y apreciamos alguna de sus puntas, o si la carga no es homogénea o si no es recta. Lo último también estropea la simetría specular y la giro, a menos que resulte como un sólido de revolución, en cuyo caso aun podríamos girar la distribución de carga sin notarlo. En general la simetría de giro sólo requiere que la densidad de carga sea independiente del ángulo alrededor del eje.

Del anterior análisis concluimos que: el campo sólo puede depender de la distancia a la línea, no de la coordenada z ni en el ángulo azimutal θ , tomando coordenadas cilíndricas; además, no pueden haber componentes verticales ni angulares del campo. Componentes verticales estarían indicando que hay algo que distingue a z de $-z$, lo cual no es cierto debido a la simetría specular. Concluyendo, el campo debe tener la siguiente forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\hat{\rho}. \quad (4.23)$$

Claramente al ser una distribución infinita no podemos encontrar una superficie que la encierre, pero las simetrías referidas anteriormente permite simular el efecto de toda la línea. Aun así, podemos identificar qué superficie satisface que su vector normal sea paralelo al campo, i.e., en la dirección radial \hat{r} , y que además satisfaga la simetría de revolución y que no cambia de tamaño a lo largo del eje z , i.e., un cilindro centrado en la línea. Sobre esta superficie el campo es constante y paralelo al vector diferencial de área, como necesitamos. Pero, como comentábamos, la superficie no es cerrada para poder aplicar la formula de la ley de Gauss. Para lograr una superficie cerrada colocamos tapas al cilindro (ver figura 4.10), lo cual parece estar contradiciendo el análisis general, pues hemos dejado gran parte de la línea cargada por fuera y, además, parece introducir superficies sobre las cuales no se satisfacen los requerimientos iniciales.

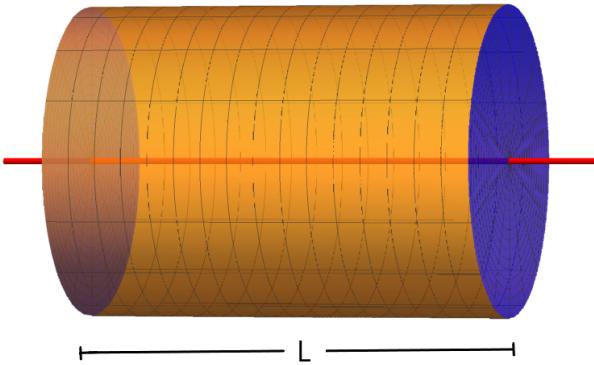


Figura 4.10: Una línea infinita uniforme de carga rodeada por un cilindro centrado en esta. Para aplicar la ley de Gauss cerramos la superficie con dos tapas que no contribuyen al flujo.

Lo primero que hay que notar es que las tapas que estamos introduciendo no van a afectar el flujo como tal, pues el campo es tangencial a estas, i.e., es perpendicular al vector de área en la dirección \hat{k} o $-\hat{k}$. Por tanto bien hubiéramos podido omitirlas, pero las mantenemos para utilizar la formula de Gass. Segundo, sucede que no es necesario encerrar toda la carga, en tanto sepamos evaluar lo que corresponde, pues todo el resto de la línea es idéntico. Así que nos centramos sólo en esta porción de línea.

Calculando el flujo, pensando que el cilindro tiene altura L y radio ρ_0 se

sigue,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}, \\
 &= \int_{\rho=\rho_0} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{z=0} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{z=L} \vec{E} \cdot d\vec{A}, \\
 &= \int_{\rho=\rho_0} \vec{E}(\rho) dA, \\
 &= \vec{E}(\rho_0) \int_{\rho=\rho_0} dA, \\
 &= 2\pi\rho_0 L \vec{E}(\rho_0),
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

donde hemos utilizado que en las tapas el flujo es nulo, que el campo sobre la superficie es normal a esta y constante y que el área de cilindro es $2\pi\rho_0 L$. Para la carga encerrada, tenemos

$$Q = \int_0^L \lambda d\ell = \lambda_0 L, \tag{4.25}$$

pues la densidad es uniforme, i.e., constante, y la región contenida tiene largo L , la altura del cilindro. De la formula de Gauss, cambiando ρ_0 por una coordenada arbitraria ρ despejando la norma del campo se tiene

$$E(\rho) = 2\pi k \frac{\lambda_0}{\rho}, \tag{4.26}$$

y su dirección como antes dicho es $\hat{\rho}_+$, o sea

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi k \frac{\lambda_0}{\rho} \hat{\rho}_+. \tag{4.27}$$

El hecho que disminuya más lentamente nos indica que la densidad de líneas de campo disminuye más lentamente, esto debido a que solo tienen componentes transversales a la línea, no se les permite dirigirse y “esparcirse” en la dirección longitudinal. Es interesante este resultado pues nos da una idea de cómo debería disminuir el campo en el caso en que existieran más dimensiones y las líneas de campo pudieran dirigirse en más direcciones.

Ejemplo 4.3.3. Placa infinita con carga uniforme σ_0

Retomemos el caso del ejemplo 3.2.4. Allí se discutieron ya las simetrías del sistema, donde concluimos que el campo sólo puede tener la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{k}, \tag{4.28}$$

pensando a la placa en el plano $z = 0$. Las superficies que satisfacen que el campo sea normal a su vector de área y constante sobre estas serán planos a cierta altura z_o . Tomaremos dos superficies equidistantes a cada lado de la caja, una a z_o y otra a $-z_o$. Para cerrar la superficie tomamos un cilindro conectando ambos planos. Como en el caso de la línea infinita uniforme esta parte no contribuirá al flujo pero nos permite utilizar la fórmula de Gauss. Esto se ilustra en la figura 4.11. Contrario a lo que sucede con la línea unifor-

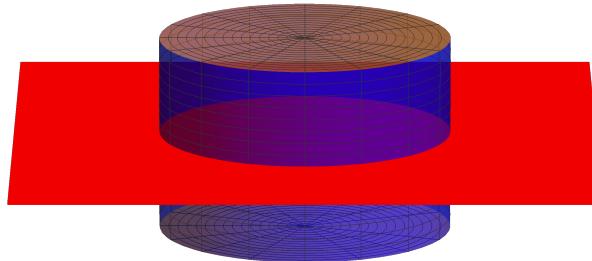


Figura 4.11: Placa infinita uniforme. Se encierra una porción con una superficie gaussiana cilíndrica. Sólo las tapas del cilindro contribuyen al flujo.

me infinita, el flujo sobre la pared del cilindro es nula pues su vector normal es perpendicular al campo y sólo contribuyen las tapas. Como el campo allí es constante se sigue

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}, \\
 &= \int_{z=z_o} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{z=-z_o} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\rho=\rho_o} \vec{E} \cdot d\vec{A}, \\
 &= \int_{z=z_o} E(z_o) \cdot d\vec{A} - \int_{z=-z_o} E(-z_o) d\vec{A}, \\
 &= (E(z_o) - E(-z_o)) \int_{z=z_o} dA,
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

donde en la tercera línea utilizamos que en la tapa en $z = z_o$ el vector de área va en la dirección \hat{k} , mientras que para la tapa en $z = -z_o$, el vector va en la dirección $-\hat{k}$, cumpliendo con nuestra convención en que los vectores de área salen del volumen encerrado por la superficie cerrada. En la última

línea usamos que la tapas tienen la misma área. En este punto entra una simetría que no se discutió en el ejemplo ???. A decir, si realizamos una reflexión alrededor de $z = 0$, no notaremos cambio alguno, y por tanto se sigue $E(z) = -E(-z)$, o sea, el campo debe cambiar su dirección. Por tanto

$$\Phi = 2E(z_0)A, \quad (4.30)$$

con A el área de las tapas por separado. Por la formula de Gauss este es igual a $4\pi kQ_{encerrada} = 4\pi k\sigma_0 A$. De acá leemos que E no puede depender de z , i.e. debe ser constante, así la distancia de la superficie a la placa es irrelevante, y obtenemos

$$E = 2\pi k\sigma \hat{k}. \quad (4.31)$$

Para recuperar el carácter vectorial tenemos dos formas, o simplemente escribirlo por casos, así

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi k\sigma \begin{cases} \hat{k}, & \text{si } z > 0, \\ -\hat{k}, & \text{si } z < 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

o escribirlo de manera compacta como

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi k \frac{z}{|z|} \sigma_0 \hat{k}, \quad (4.33)$$

tal como se hiciera en el ejemplo 3.2.4 con el resultado (3.49).

Vemos entonces el poder de esta técnica a la hora de calcular campo eléctrico en situaciones con simetrías. Hay que tener cuidado, sin embargo, con las conclusiones que se extraen de esta. Esto se entiende rápidamente pensando en el caso de dos cargas puntuales con cargas opuestas iguales. Si se toma una superficie que encierre ambas cargas el flujo neto a través de la superficie es nulo, lo cual no indica que el campo sea nulo, como ya sabemos. Asimismo, si la superficie escogida sólo encierra una de las cargas el flujo pareciera indicar que el campo es debido al de una partícula sola, ya que la carga externa, por ley de Gauss no contribuye al flujo. Esto nuevamente es falso. Estos ejemplos nos advierten sobre las consideraciones necesarias al utilizar este método, donde primero se debe tener certeza en las simetrías involucradas y segundo las superficies deben encerrar toda la distribución de carga, esto a menos que la simetría permita hacer consideraciones como las hechas en los casos de la vara infinita y el plano infinito.

Un ejemplo particular en este sentido tratar de mostrar que el campo eléctrico dentro de un cascarón esférico uniformemente cargado. La simetría nos indicaría que una buena superficie cerrada por escoger es una esférica dentro del cascarón centrada en su centro. Por ley de Gauss el flujo es cero pues no hay cargas encerradas, pero de este resultado no se puede concluir que el campo sea cero, ya que hay cargas en el exterior de la superficie. ¡Para demostrar realmente que el campo es cero se debe proceder de otro modo! Del resultado del ejercicio ?? sabemos que el campo en el medio de dos cargas igualmente cargadas es nulo. De esto concluimos que el campo en el centro del cascarón es cero. Supongamos que el campo deja de ser nulo una vez nos desplazamos levemente del centro. Sin embargo, por la simetría esférica, la única posibilidad para la dirección del campo es la radial, bien sea entrando o saliendo, y con su magnitud dependiendo sólo del radio. Si esto es verdadero, al colocar una superficie cerrada, digamos esférica, alrededor del centro encontramos un flujo no nulo, lo cual va en contra de la ley de Gauss que vimos anteriormente. Por tanto, el campo debe ser cero en todo el interior de la esfera. Una demostración formal haciendo la suma de la contribución total del cascarón es posible y puede ser vista en varios libros de texto, demostrada para la gravitación de Newton, que como debe ser claro a este punto es equivalente.

Este resultado nos indica que dentro de una distribución de carga esférica el campo es debido solamente a la carga encerrada por una superficie esférica imaginaria de radio la posición donde se mide el campo.

Ejercicio 4.4. *Calcule el campo eléctrico dentro y fuera de un cilindro circular de radio a y largo infinito, relleno con una densidad de carga constante ρ_0 .*

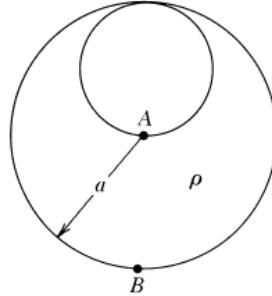
Ejercicio 4.5. *Considere una distribución de carga esférica con densidad de carga constante ρ_0 para $0 \leq r \leq a$ y cero para $a < r$. Encuentre el campo eléctrico para todo r .*

Ejercicio 4.6. *El paso de una nube de tormenta, cargada, genera un campo eléctrico vertical de magnitud E_o en Statvolt/cm.*

1. ¿Cuál es la carga por unidad de área en la nube en esu/cm²?
2. Suponga que el agua contenida en la nube es suficiente para generar L centímetros de lluvia. Si cada gota de lluvia tiene un radio r_o , ¿cuantas

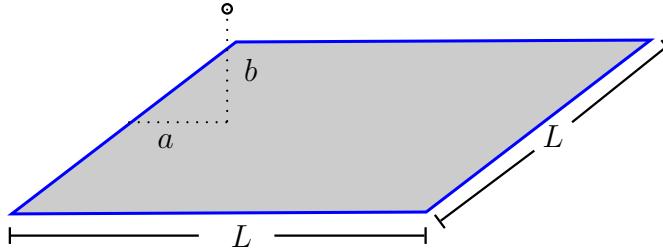
gotas por cm^2 cayeron? ¿Cuál es el campo eléctrico en la superficie de cada gota? suponga que todas están igualmente cargadas.

Ejercicio 4.7. Una esfera de radio a tiene una densidad volumétrica de carga constante ρ_0 . Suponga que se le extrae una porción esférica de radio $a/2$ justo entre el centro y la superficie. Calcule el campo eléctrico en los puntos A y B .



Ejercicio 4.8. Considere un tubo de carga uniforme. Pruebe que el campo interior es nulo y que para afuera de este el campo es como el de una línea de carga uniforme.

Ejercicio 4.9. Considere una placa finita cuadrada de lados L uniformemente cargada. Si consideramos que vamos a evaluar el campo sobre la placa, a una altura b de esta, y, cuando proyectado sobre la placa a una distancia mínima de los bordes a , como se muestra en la figura.



Utilice argumentos dimensionales y del campo de la placa infinita para estimar cómo el campo evaluado en este punto difiere del de la placa infinita.

4.4. Flujo como cruce de líneas de campo

Una interpretación del flujo que permitirá entender los resultados encontrados en las últimas secciones y, además, el análisis físico de estas, es el que utiliza la líneas de campo.

Como se había anunciado en la sección 3.2.1 la densidad de líneas de campo

dan información de la magnitud del campo, así que dado que el flujo depende de esta magnitud y su dirección podemos argumentar que el flujo se puede entender como el número de líneas de campo que cruzan la superficie. En efecto si son tangenciales a la superficie no cruzarán y, en general, el número de estas que cruza sólo depende de la sección eficaz que está dada por la proyección, tal y como dicta el producto punto.

Con esto en mente debe ser claro que el número de líneas de campo que cruzan una superficie cerrada que encierra una carga no puede depender de su tamaño ni forma, pues todas deben salir, y, como se argumentó antes y se demostrará en breve, no pueden aparecer ni desaparecer en cualquier punto. Por otro lado si la superficie no encierra la carga las mismas líneas de campo que entran deben salir.

Con esta interpretación decimos que el flujo es positivo si hay más líneas que entran que las que salen. Y si es negativo hay más líneas que salen que las que entran.

De manera general hay que tener cuidado al utilizar esta interpretación, como quedará claro más adelante, pues pueden definirse campos vectoriales para los cuales no es cierto lo que se acabó de definir. Sin embargo, y por fortuna, para los campos con los que trabajaremos esto es válido y podemos confiar en esta interpretación pictórica.

Pregunta 4.1. Si suponemos que el universo es finito y no hay nada fuera de este. Según la ley de Gauss ¿cuál es la carga neta del universo?

4.5. Fuerza sobre un cascarón esférico cargado

Consideremos un cascarón cargado con densidad uniforme y veamos cuál es la fuerza sobre este. La existencia de esta fuerza es evidente ya que, si no hubieran fuerzas que mantengan unido, la repulsión entre las cargas del cascarón lo harán expandir hasta el infinito donde ya no hay fuerzas.

Una forma sencilla de hacer el cálculo es sabiendo que el campo externo, aparte sobre la superficie del cascarón tiene magnitud

$$E(r_o) = k \frac{Q}{r_o^2}, \quad (4.34)$$

en la dirección radial, con Q la carga encerrada, i.e., $Q = 4\pi r_o^2 \sigma$, luego

$$E(r_o) = 4\pi k\sigma. \quad (4.35)$$

Ahora, muy cerca a la esfera, más propiamente infinitamente pegada a esta, su superficie puede tomarse como plana homogénea e infinita, así la contribución de un pedazo pequeño de área dA es, del ejemplo 3.2.4 o 4.3.3,

$$E_{dA} = 2\pi k\sigma. \quad (4.36)$$

Este es perpendicular a la superficie, o sea, radial al verlo como parte de la esfera. Así, por superposición lineal (ver figura 4.12), al quitar la contribución de dicho pedazo diferencia el campo en este punto es

$$E(r_o)_{\setminus dA} = E(r_o) - E_{dA} = 2\pi k\sigma, \quad (4.37)$$

donde consideramos que ambos tienen la misma dirección, i.e. radial. Este campo es el que interactúa con el pedazo de cascarón que hemos quitado, y el cual tiene carga $dq = \sigma dA$. Por la definición de campo eléctrico tenemos que el pedazo, entonces, experimenta una fuerza

$$dF = E(r_o)_{\setminus dA} dq = 2\pi k\sigma^2 dA, \quad (4.38)$$

entendiendo porque hemos quitado el campo debido a dA , pues esta no puede auto interactuar, i.e., interactuar consigo misma. Aunque que aparentemente la fuerza por unidad de área $\frac{dF}{dA}$ es independiente del tamaño del cascarón, si consideramos que la carga es constante, al aumentar el área la densidad de carga debe disminuir $\sigma = Q/A = Q/(4\pi r_o^2)$, encontrando

$$\frac{dF}{dA} = \frac{k}{8\pi r_o^4} Q^2, \quad (4.39)$$

mostrando que en efecto la fuerza decrece en tanto las cargas se alejan, como es de esperarse.

4.6. Generalidades de láminas cargadas

En la anterior sección se ilustró como se calcula la fuerza sobre una superficie esférica cargada. En esta esbozaremos argumentos que muestran generalidades de los resultados allí expuesto.

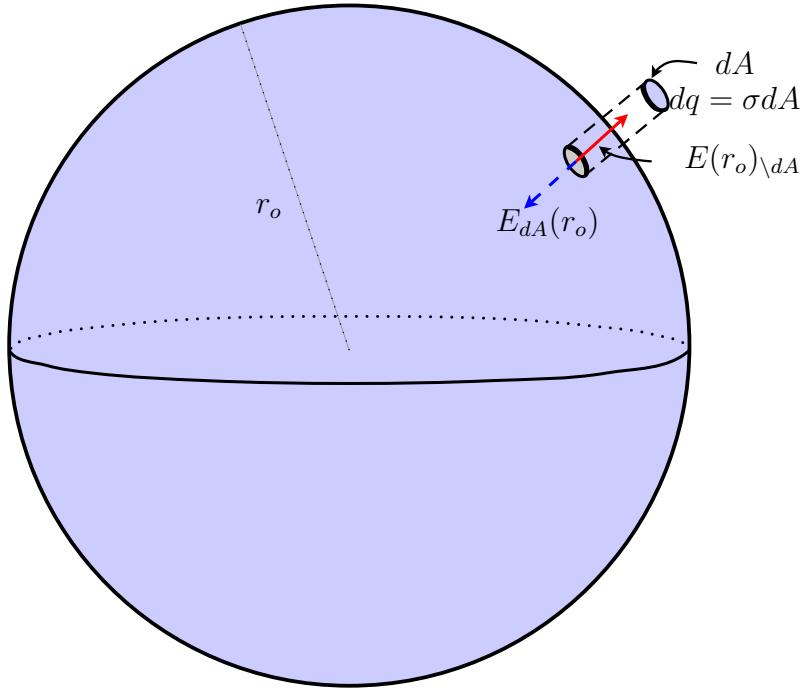


Figura 4.12: Cascarón esférico de radio r_o al que se le extrae un elemento dA . Se muestra en rojo el campo $E_{\setminus dA}(r_o)$ debido al resto del cascarón en el punto donde se encontraba el dA . En azul se muestra el campo interno debido a dA apuntando hacia el interior de la esfera y de igual magnitud, pues el campo en el interior es nulo. Un campo idéntico, pero opuesto, exterior irá a reforzar el $E_{\setminus dA}(r_o)$. La fuerza experimentada por dA es debida a $E_{\setminus dA}(r_o)$.

Lo primero es el salto del campo al cruzar una superficie. Nuestro punto de partida es nuevamente entender que muy cercano a la superficie esta se ve plana y por tanto pueden utilizarse los resultados que de una placa infinita se obtengan. Supongamos que en cada lado de la superficie el campo toma valores \vec{E}_1 y \vec{E}_2 , que por ahora tomaremos perpendiculares a la placa, lo cual simplifica el estudio, entendiendo que el resultado es sólo valido para las componentes perpendiculares a la lámina. Miraremos la superficie desde muy cerca y realizaremos un análisis análogo al hecho en el ejemplo 4.3.3, tomando un cilindro cuyas tapas estarán prácticamente pegadas a la superficie por cada lado. Esto nos garantiza que conocemos los campo en las tapas del cilindro. Además, tomaremos el área de las tapas tiendiendo a cero, lo que

nos garantiza que el campo, aunque en general inhomogéneo, es aproximadamente constante y el flujo por las placas es simplemente la magnitud del campo veces el área, que, como resultó en el caso ideal de la placa infinita, resulta, de todas maneras, al final a ambos lados de la fórmula de Gauss. Con un resultado análogo al de la ecuación (4.29), tenemos, entonces

$$E_2 - E_1 = 4\pi k\sigma , \quad (4.40)$$

donde hemos supuesto que \vec{E}_1 está dirigido hacia la placa y \vec{E}_2 hacia afuera, explicando los signos opuestos. Lo que vemos es una discontinuidad en el campo dada por la densidad superficial de carga, la cual no necesariamente es constante, i.e., la discontinuidad del campo depende del punto sobre la superficie que se evalúe.

Ahora veamos que podemos extender esto al caso en que la lámina tiene un grosor y debemos utilizar una densidad de carga volumétrica. Simplemente entenderemos el caso con gruesos ahora como una conjunto de láminas delgadas paralelas de grosor dx , cada una con una densidad de carga efectiva $\sigma = \rho dx$. En la figura 4.14 se ilustra un caso hipotético en que la densidad de carga en los bordes va a cero. Así, cada vez que se atraviesa un dx se tiene un salto en el campo

$$dE = 4\pi k\sigma = 4\pi k\rho dx . \quad (4.41)$$

El salto total, considerando un grosor D y un a denentonces está dado por

$$E_2 - E_1 = \Delta E = \int_0^D dE = 4\pi k \int_0^D \rho dx . \quad (4.42)$$

donde prodríamos definir una densidad superficial de carga efectiva $\sigma_{eff} = \int_0^D \rho dx$ que en el caso de una densidad volumétrica constante resulta en

$$\Delta E = 4\pi k\rho D . \quad (4.43)$$

Ahora veamos que la extensión automática al resultado (4.38), como la interacción del elemento de área con el promedio de los campos, justo a ambos lados, eliminando así el campo propio de la lámina, y obtener

$$dF = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)\sigma dA , \quad (4.44)$$

es en efecto también correcta, pudiéndose aun generalizar $E_{ext} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ por $\vec{E}_{ext} = \frac{1}{2}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$ donde es menester recordar que todos esto campos

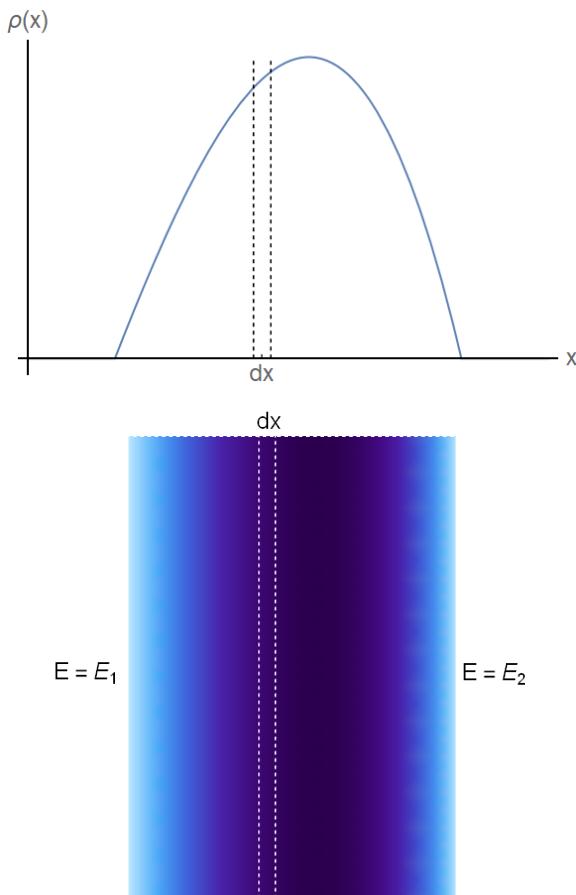


Figura 4.13: Posible densidad de carga en una placa con grosor. En ambos casos se grafica como una función de la coordenada x transversal a la placa, pero arriba se muestra en la manera estándar y abajo como una gráfica de densidad con los colores oscuros mostrando una mayor densidad. La hemos supuesto tal que en los bordes la densidad sea nula, pero podríamos suponer casos en que la carga sea mayor justo allí.

se suponen evaluados justo donde se encuentra la placa, que por el momento suponemos delgada, pero que, como veremos podemos generalizar.

Nuevamente entendiendo nuestra superficies gruesa como un conjunto de láminas delgadas de grosos dx tenemos que la fuerza por unidad de área sobre cada una de estas está dada por

$$\frac{dF_{dx}}{dA} = E\rho dx dA, \quad (4.45)$$

y por tanto la fuerza total por unidad de área, integrando en todo el ancho D , queda expresada como

$$\frac{dF}{dA} = \int_0^D E\rho dx. \quad (4.46)$$

Ahora, utilizando (4.41) podemos escribir esta como una integral del campo, así

$$\frac{dF}{dA} = \frac{1}{4\pi k} \int_{E_1}^{E_2} EdE = \frac{1}{8\pi k} (E_2^2 - E_1^2), \quad (4.47)$$

la cual utilizando (4.40) entrega el resultado que esperábamos de la ecuación (4.44) y que reproduce lo hallado para el cascarón esférico, y como advertiamos no depende del grosor, aunque el análisis asume que este no es mucho mayor a las dimensiones transversales de la lámina.

Para nosotros, además, será interesante notar que la fuerza puede escribirse como un gradiente, i.e., un cambio en el espacio, del campo al cuadrado a ambos lados de la lámina, así

$$dF = \frac{1}{8\pi k} \frac{(E_2^2 - E_1^2)}{D} dV, \quad (4.48)$$

con $dV = DdA$. Del hecho que la fuerza electrostática sea conservativa tenemos que se puede entender como el gradiente de una energía potencial, así que tenemos una primera pista de la relación de esta con el campo. Veamos otros indicio de esto.

4.7. Energía asociada al campo eléctrico

Debido a la fuerza por unidad de área calculada para el cascarón cargado, es necesario entregar cierta cantidad de energía para formar el cascarón. Esta

energía es precisamente el trabajo realizado por la fuerza que se opone a la repulsión eléctrica, y se calcula de la misma forma que la misma forma que en la sección 2.3.

De la fuerza por unidad de área, ecuación (4.39), tenemos que el trabajo para trasladar un diferencial de área radialmente hacia adentro una cantidad dr está dado por

$$\frac{dW_{dA}}{dA} = 2\pi k\sigma^2 dr. \quad (4.49)$$

Si pensamos en este trabajo como debido a una compresión de la esfera, tenemos que el trabajo en comprimir la esfera está dado por

$$dW = 8\pi^2 k\sigma^2 r_o^2 dr, \quad (4.50)$$

donde suponemos que el radio del cascarón es r_o . Expresando este resultado en términos del campo, $E = 4\pi k\sigma$, tenemos

$$dW = \frac{E^2}{8\pi k} 4\pi r_o^2 dr. \quad (4.51)$$

Si ahora asociamos a este trabajo un incremento en la energía electrostática del sistema que puede pensarse como almacenada en el campo, que en este caso ha aparecido al comprimir el cascarón. En efecto el campo más allá del radio inicial queda invariante y sólo en el volumen que ha sido comprimido, cambia de cero a $E = 4\pi k\sigma$. Ahora, identificando en el último factor numérico de la ecuación (4.51) precisamente el volumen que ha barrido el cascarón al ser comprimido, $dV = Adr = 4\pi r_o^2 dr$, podemos escribir una densidad de energía eléctrica

$$\mathcal{U} = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{8\pi k} E^2, \quad (4.52)$$

que resulta ser completamente general si se remplaza $E^2 = |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$. Así la energía total de un sistema puede evaluarse a través de la integral volumétrica

$$U = \frac{1}{8\pi k} \int_{Vol} |\vec{E}|^2 dV. \quad (4.53)$$

Al ser conservativa esta energía puede ser nuevamente recuperada al dejar expandir el cascarón. Esta expresión es nuestra primera advertencia que la suposición de cargas puntuales tiene que tomarse con cuidado, ya que la energía para formar tal tipo de configuración es formalmente infinita. Es importante

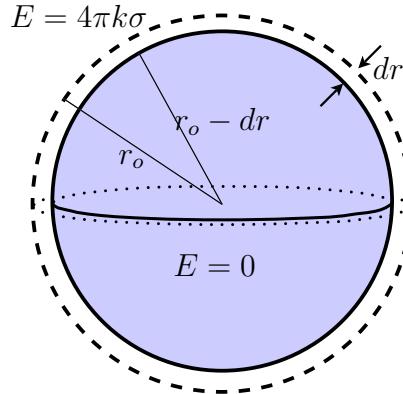


Figura 4.14: Cascarón esférico cargado originalmente de radio r_o es comprimido un dr . El campo interno sigue siendo nulo, y el externo siempre toma el valor equivalente de una carga puntual, que puede expresarse justo en la superficie como como $E = 4\pi k\sigma$. Así en la única región donde el campo ha cambiado es aquella entre $r_o - dr$ y r_o , que pasó de ser interna a externa.

recordar que antes de llegar a esos límites la teoría en sí debe ser reconsiderada y pensada cuánticamente. Para nuestros intereses estas partículas puntuales las tomaremos simplemente con dadas, ya hechas, y la energía con la que podemos trabajar es su energía de movimiento e interacción.

Por ejemplo un sistema de cargas tiene una energía

$$U = \frac{1}{8\pi k} \left(\int_{Vol} |\vec{E}_1|^2 dV + \int_{Vol} |\vec{E}_2|^2 dV + 2 \int_{Vol} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV \right), \quad (4.54)$$

donde el primer y segundo términos están asociados a cada carga y son independientes de la posición de las cargas. Esta es denominada energía de auto-interacción y como vemos no está incluida en el cálculo realizado en la sección 2.3, ya que allí no se tiene en cuenta la energía para formar las partículas en sí. El último término da cuenta de la energía de interacción. Escribiendo esta suponemos que la presencia de cada una de las cargas no distorsiona la estructura interna y por tanto eléctrica de la otra carga. Por esta razón no consideraremos, en adelante, esta energía de autointeracción en configuraciones de cargas puntuales.

Ejercicio 4.10. Una esfera de radio R con carga Q uniformemente distribuida sobre su superficie. ¿Qué tamaño debe tener una superficie esférica

centrada en la esfera, para que contenga el 90% de la energía total de la distribución de carga?

Ejercicio 4.11. Dos cascarones esféricos concéntricos de cargas opuestas Q y $-Q$, uniformemente distribuidas. Calcule la energía del sistema.

Ejercicio 4.12. Cuatro cargas positivas son atadas a hilos sin masa de largo ℓ . En esquinas opuestas se colocan dos cargas iguales Q y en las restantes dos cargas q . ¿Que configuración (forma) toman las cargas si todas son iguales? ¿Y en el caso general?. Halle el ángulo que forman los hilos en la esquina de la carga más grande.

Ejercicio 4.13. Modele el electrón como un cascarón esférico de radio a_o con carga e distribuida uniformemente. Con este modelo y la relación relativista para la energía, $E = mc^2$, determine un radio clásico a_o y encuentre el valor numérico correspondiente. Respuesta: $a_o = \frac{k_1 e^2}{2m_e}$.

¿Cómo cambiaría esta respuesta si se modela el electrón como una esfera uniformemente cargada?

4.8. La divergencia

Para calcular el flujo de un campo vectorial sobre una superficie cerrada podemos optar por dividir el volumen encerrado por la superficie en varias partes y calcular el flujo a través de las superficies que encierran dichos volúmenes, tal como se utilizó en la sección 4.2.1. Como se argumentaba allí la suma de los volúmenes es el volumen encerrado y la suma de los flujos da el flujo total sobre la superficie original. De manera matemática esto es: si

$$\mathcal{V} = \cup_i \mathcal{V}_i, \quad (4.55)$$

y $\partial\mathcal{V}_i$ la superficie del volumen \mathcal{V}_i , entonces,

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{V}} &= \sum_i \Phi_{\mathcal{V}_i}, \\ &= \sum_i \oint_{\partial\mathcal{V}_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{A}_i. \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$(4.57)$$

Para entender esto es necesario tener en cuenta las direcciones de los vectores normales, que hace el flujo de las caras adyacentes se cancelen y sólo quedan los de las superficies externas que hacen la superficie de interés.

Este proceso puede hacerse dividiendo el volumen en pequeñísimas partes, cada vez de volumen menor, pero igualmente con un flujo neto disminuyendo, principalmente debido al hecho que su área disminuye.

Es de esperar que la razón entre el flujo y el volumen de estos pequeños pedazos tenga un límite y tienda a una constante, así una cantidad de interés para estudiar puede ser

$$\frac{\oint_{A_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{A}_i}{V_i}, \quad (4.58)$$

y en particular el límite cuando V_i es muy pequeño, o sea cuando se divide el volumen original en infinidad de partes. Esta será un propiedad local de campo vectorial y es llamada *divergencia* o simplemente $\text{div}\vec{F}$,

$$\text{div}\vec{F} \equiv \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \oint_{\partial V_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{A}_i, \quad (4.59)$$

con V_i el volumen que incluye el punto donde se calcula la divergencia. Así definimos la divergencia como el flujo saliente de V_i por unidad de volumen. Físicamente entendemos la divergencia de un campo vectorial como la medida de cuento el campo se dispersa (diverge) en el punto donde se calcula. Para entender esta “dispersión” es conveniente el campo como las líneas de campo. Así, por ejemplo, un campo uniforme tiene divergencia nula en todo punto del espacio. Un campo producido por una carga puntual tiene claramente divergencia no nula sólo en el punto donde se encuentra la carga. La figura 4.15 ilustra estos en un campo vectorial general. En el siguiente [enlace](#) se puede apreciar el campo de la carga puntual como un campo de velocidades de partículas de un fluido.

La forma pictórica de las líneas de campo falla por ejemplo en el caso de un campo con dirección constante pero magnitud variable. En este caso la divergencia también es distinta de cero. Afortunadamente la divergencia de los campos con que trabajaremos pueden ser entendida a través de la forma de las líneas de campo.

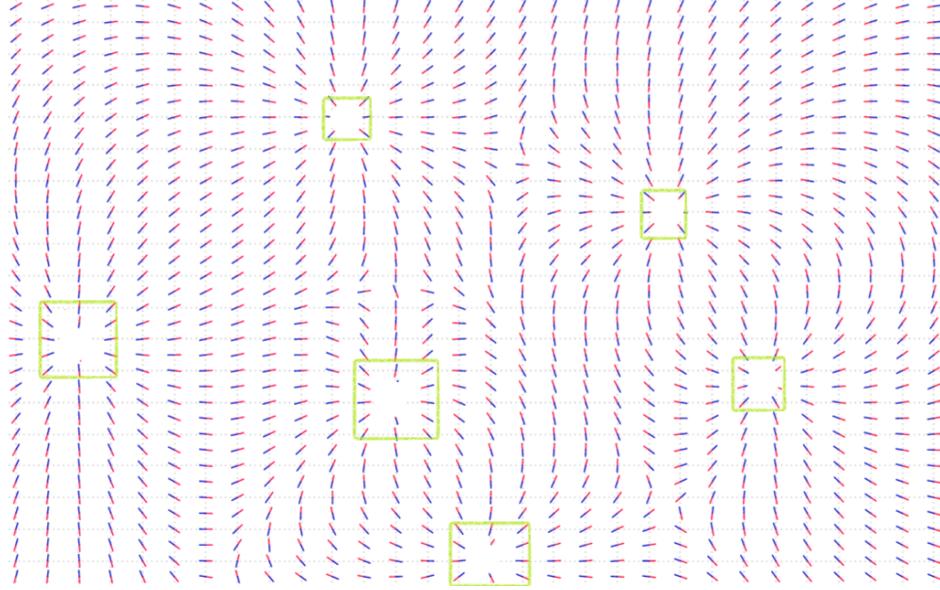


Figura 4.15: Un ejemplo de campo vectorial en una representación tipo brújula para los vectores de campo. Los cuadros verdes encierran los únicos seis puntos donde la divergencia no será nula. En estos puntos se localizarían las cargas si interpretamos este como un campo eléctrico.

4.9. Teorema de la divergencia

Tomando el flujo por una superficie cerrada para un campo vectorial cualquiera , y partiendo la superficie en pequeños pedazos para lograr un flujo por unidad de volumen,

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \oint_{\partial V_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^N V_i \left(\frac{\oint_{\partial V_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{V_i} \right). \quad (4.60)$$

Si tomamos una partición muy fina haciendo $N \rightarrow \infty$ la suma se torna una integral y $V_i \rightarrow dV$, luego

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \mathbf{div} \vec{F} dV. \quad (4.61)$$

Nótese que necesariamente la superficie debe ser cerrada de tal forma que encierre un volumen compacto y en efecto al hacer $N \rightarrow \infty$ los volúmenes V_i

vayan a cero.

Teorema de la divergencia: Sea \vec{F} un campo vectorial diferenciable y \mathcal{V} un volumen en el espacio donde \vec{V} está definido. Tenemos entonces que el flujo a través de la superficie que encierra \mathcal{V} , que denotamos como $\partial\mathcal{V}$, es igual a la integral de volumen del la divergencia sobre el volumen \mathcal{V} . O sea

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F} dV. \quad (4.62)$$

Este, que también se le conoce como teorema de Gauss o, en una forma camouflada, el teorema Green. Es simplemente una generalización del teorema fundamental del cálculo,

$$f(a) - f(b) = \int_a^b \frac{df}{dx} dx. \quad (4.63)$$

En este caso la frontera de la región de integración son los dos puntos $x = a$ y $x = b$. Para nuestro caso la frontera de la región de integración en el lado derecho de la ecuación(4.62) es simplemente la superficie que encierra el volumen.

Es interesante que el teorema no tiene implícito el número de dimensiones del espacio sobre el cual está definido el campo vectorial, utilizando sólo el hecho que la divergencia de un campo está definida como el flujo por unidad de volumen. Por esto se puede extender a espacios con otro número de dimensiones, como ocurre, por ejemplo, en la teoría de supercuerdas.

Ahora, su significado se entiende en una analogía a los fluidos, ya que indica que, para un fluido incompresible, la cantidad de este que brota por las fuentes menos el que entra a los sumideros es igual al flujo que sale por la superficie que los encierra.

4.10. Forma diferencial de la ley de Gauss

Para efectos de evaluación más general del campo eléctrico será más útil una expresión que nos dé información local del campo dada la carga en un punto dado.³ La expresión diferencial de la ley de Gauss para el campo eléctrico da precisamente esta información y es la utilizada más comúnmente

³Además se puede argumentar que la expresión (4.18) presenta un problema cuando se piensa en términos relativistas, pues independientemente del tamaño de la superficie conocemos información del campo sobre esta, así la carga esté alejada, lo que podría acarrear problemas de causalidad (BUSCAR REFERENCIA).

para solucionar sistemas electrodinámicos, aunque disfrazada en lo que será la ecuación de Poisson, que veremos más adelante.

La idea simplemente reside en tomar una superficie extremadamente pequeña, diferencial, y evaluar allí el flujo. Al ser pequeña, la densidad de carga es aproximadamente constante y la carga contenida es prácticamente esta veces el diferencial de volumen. Ahora; gracias a que la divergencia es en cierto modo como una densidad volumétrica de flujo, el flujo también se puede expresarse como la divergencia veces el diferencial de volumen y encontramos una relación entre esta y la densidad de carga. Formalmente esto se muestra a continuación.

Para lograr lo apenas esbozado particularizamos el teorema de la divergencia, ecuación (4.61), al campo eléctrico y la ley de Gauss, ecuación (4.18), obteniendo, entonces,

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi k \int_V \rho dV , \quad (4.64)$$

o, reescribiendo,

$$\int_{V(S)} (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi k \rho) dV = 0 . \quad (4.65)$$

De esta manera todo queda como una integral volumétrica, la cual es válida para cualquier volumen. La única forma que esta integral sea nula para todos los volúmenes arbitrarios que se puedan concebir es su integrando sea nulo, i.e.,

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi k \rho(\vec{r}) , \quad (4.66)$$

que se conoce como la versión diferencial de la ley de Gauss, o ley de Gauss para el campo eléctrico, y nos está indicando que el campo escalar divergencia del campo eléctrico es idéntico en todo el espacio al campo densidad de carga.

4.11. Contenido físico de la ley de Gauss

Recapitulando como obtuvimos la ley de Gauss podemos entender qué es lo que nos está diciendo esta. Inicialmente encontramos que el flujo debido a una carga puntual sobre una superficie esférica que está centrada en la carga no depende del tamaño de esta. Al final, este resultado pudimos extenderlo para un caso completamente general, pero la semilla sigue siendo la carga puntual y el hecho que su campo es radial y decrece como el inverso del

cuadrado de la distancia. Por tanto esta información está contenida en la ley, i.e., la ley de Coulomb está contenida en esta, y no son independientes.

Por otro lado, el análisis por líneas de campo y la expresión diferencial, que será equivalente a tomar un volumen infinitesimal en la forma integral, nos indican que los únicos puntos donde pueden nacer o morir las líneas son sobre las cargas, en las positivas nacen y en las negativas mueren. No existen puntos sin carga donde puedan aparecer o desaparecer líneas de campo, como ya se había advertido alguna vez y ahora demostramos. En efecto, una divergencia no nula sólo es posible si en este punto convergen o divergen las líneas de campo, pues de otro modo todas las que entran vuelven a salir. Decimos, entonces:

la ley de Gauss dicta que las fuentes de campo eléctrico, entendiendo por fuentes tanto a las fuentes como a los sumideros, son exclusivamente las cargas eléctricas.

Nótese que me he cuidado de no decir campo electrostático, pues sucede que la ley de Gauss para el campo eléctrico es válida incluso en el caso dinámico, i.e., dependiente del tiempo. Así nos indica, por ejemplo, que campos eléctricos generados de otra manera, como sucede con la ley de Faraday, deben tener líneas de campo cerradas, de modo que no contribuyan al flujo por una superficie cerrada. También es cierto que esta ley sigue siendo válida en presencia de medio materiales, hasta ahora trabajamos en el vacío. Aunque allí la escribiremos de una manera más apropiada para esta situación.

Matemáticamente, como ya lo habíamos indicado, tenemos que conociendo la distribución de carga sobre todo el espacio, podemos solucionar las ecuaciones que aparecen de la ley de Gauss para determinar \vec{E} . Aunque en el caso dinámico y con medio materiales esta información debe ser complementada con otra que finalmente permitirá establecer los campos electromagnéticos.

4.12. Estabilidad de un sistema de cargas

Lo dicho en la sección anterior y la interpretación del flujo por líneas de campo nos conduce a una conclusión de gran importancia como es la inestabilidad de cualquier sistema de cargas discretas interactuando sólo por interacción electromagnética. Resulta, de hecho, que el único punto donde una carga encuentra estabilidad es exactamente sobre otra carga.

Para ver esto entendamos que para que una carga se encuentre en equilibrio

estable en un punto, una vez se desplace levemente de este debe encontrar una fuerza restauradora apuntando hacia el punto original. En términos del campo esto nos indica un campo eléctrico apuntando, siempre, hacia el punto de equilibrio donde se colocaría la carga, que claramente este campo no puede ser el debido a la propia carga. Esto no es más sino un punto donde las líneas de campo convergen o divergen, dependiendo del signo de la carga que las experimenta, y por la ley de Gauss estos puntos sólo corresponden a puntos donde se encuentran cargas.

Este resultado implica que para explicar la estabilidad de sistemas como las redes cristalinas de iones se requiere de una herramienta extra o otro tipo de interacción. La herramienta necesaria es la mecánica cuántica, pues no podemos contar con las demás interacciones fundamentales: o bien la gravedad es muy débil o las nucleares están prácticamente restringidas al núcleo atómico.

4.13. Divergencia en coordenadas cartesianas

Para hallar la expresión explícita de la divergencia partiremos de su definición y calcularemos explícitamente el flujo neto por un elemento de volúmen. Localicemos un pequeño cubo de lados Δx , Δy y Δz con un vértice en el punto (x, y, z) , como se ilustra en la figura 4.16. Veamos cual es el flujo neto

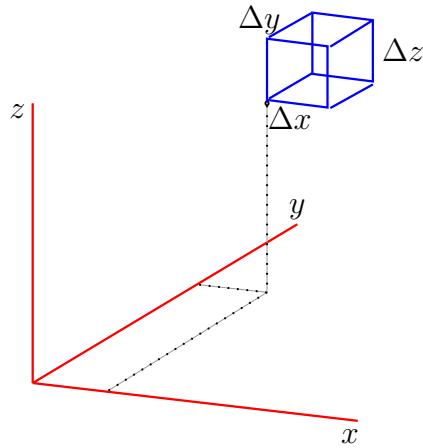


Figura 4.16: Elemento de volumen de lados Δx , Δy y Δz , con vértice en la coordenada arbitrario (x, y, z) .

en las tapas paralelas a los planos con z constante, el debido a la componente de z del campo vectorial \vec{F} . Para calcularlo tomamos el valor del campo en la mitad de las tapas inferior e superior del cubo, a primer orden en Δx , Δy y Δz , como ilustrado en la figura 4.17

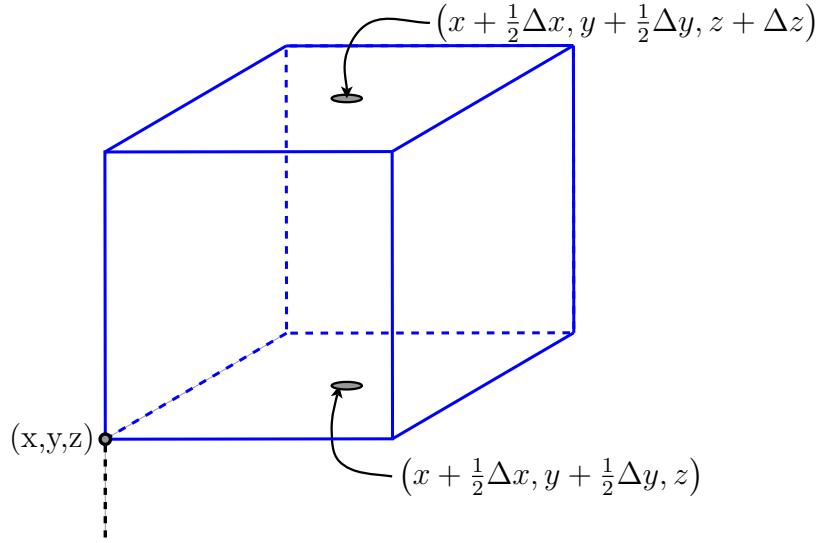


Figura 4.17: Elemento de volumen de lados Δx , Δy y Δz , con vértice en la coordenada arbitraria (x, y, z) . Se identifican las coordenadas de los centro de las tapas que contribuyen al flujo debido a la componente z del campo vectorial.

Considerando el tamaño del elemento pequeño evaluamos el valor de la componente de interés del campo en el centro de las caras como una expansión de Taylor a primer orden. Así:

$$\begin{aligned} F_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z) &= F_z(x, y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} \Delta y, \quad (4.67) \\ F_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z) &= F_z(x, y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta z. \end{aligned}$$

De nuevo considerando pequeñas las caras, tomamos el campo como cons-

tante sobre toda la cara, de modo que el flujo neto queda,

$$\begin{aligned}\Phi_z &= \Delta x \Delta y \left(F_z(x + \frac{1}{2} \Delta x, y + \frac{1}{2} \Delta y, z + \Delta z) - F_z(x + \frac{1}{2} \Delta x, y + \frac{1}{2} \Delta y, z) \right), \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Un análisis análogo se sigue para las otras dos componentes, así el flujo neto total es

$$\Phi = \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right).\tag{4.69}$$

Identificando $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ y utilizando la definición de la divergencia, ecuación (4.59), es directo encontrar la expresión para la divergencia como el flujo por unidad de volumen,

$$\mathbf{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.\tag{4.70}$$

Nótese que esta puede ser expresada en términos del operador nabla definido por,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k},\tag{4.71}$$

como

$$\mathbf{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}.\tag{4.72}$$

Aunque el operador nabla, definido en la ecuación (4.71), cambia de forma dependiendo del sistema de coordenadas (ver Griffiths o Jackson), la relación (4.72) es general para cualquier sistema, por esto en adelante para denotar la divergencia de un vector simplemente la denotaremos como el producto punto del operador nabla con el campo vectorial.

Dicho esto, la ley de Coulomb en forma diferencial toma la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k \rho.\tag{4.73}$$

Esta puede ser entendida como una ecuación diferencial para el campo eléctrico, lo que permite al conocer la distribución de carga sobre todo el espacio determinar el campo como soluciones de esta ecuación.

Podemos comprobar esta relación para los campos calculado anteriormente.

Ejemplo 4.13.1. Densidades a partir de campos

La igualdad entre el campo divergencia del campo eléctrico y el campo densidad de carga muestra una fórmula para obtener la densidad de carga conociendo el campo en todo el espacio. Aunque este no es el objetivo usual en sistemas electromagnéticos, donde lo que se buscan son los campos, ilustraremos esto con un ejemplo.

Consideremos el siguiente campo se encontró que el campo, en coordenadas cilíndricas,

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \times \begin{cases} \rho \hat{\rho} & \text{si } \rho \leq a, \\ \frac{a^2}{\rho} \hat{\rho} & \text{si } \rho > a, \end{cases} \quad (4.74)$$

donde K es una constante con las unidades apropiadas para obtener unidades de campo. Aunque ciertamente el sistema cartesiano no resulta natural para este sistema veamos como ejemplo didáctico el cálculo de la divergencia para este campo.

Para esto utilizamos la traducción de un sistema de coordenadas a otro, así $x = \rho \cos \theta$ y $y = \rho \sin \theta$, o $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$. La misma relación ocurre para las componentes del campo. Así

$$E_x = E \cos \theta = K \times \begin{cases} x & \text{si } x^2 + y^2 \geq a^2, \\ \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 < a^2. \end{cases} \quad (4.75)$$

$$E_y = E \sin \theta = K \times \begin{cases} y & \text{si } x^2 + y^2 \geq a^2, \\ \frac{a^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 < a^2. \end{cases} \quad (4.76)$$

Así, para $x^2 + y^2 \geq a^2$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}, \\ &= K a^2 \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right. \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} &\left. + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Para $x^2 + y^2 < a^2$, en cambio, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}, \\ &= K(1+1) = 2K. \end{aligned} \quad (4.79)$$

De estos resultados y de la expresión (4.73) tenemos

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi k} K, & \text{si } x^2 + y^2 < a^2, \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 \geq a^2. \end{cases} \quad (4.80)$$

Corresponde, entonces, a una densidad uniforme dentro de un cilindro infinito de radio a , pudiendo escribir la constante K como $2\pi k\rho_0$. Es posible contrastar esto con el resultado del ejercicio 4.4.

Ejercicio 4.14. Considera el campo $\vec{V} = x\hat{i}$.

1. Suponiendo que el método pictórico de las líneas de campo es válido, dibuje las líneas de campo que le corresponden.
2. Evalúa el flujo a través de un cubo de lados h , con vértices paralelos a los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , con una cara en el plano $x = 0$ y otra cara en el plano $x = h$.
3. Determina la divergencia de dicho campo.
4. ¿Puede entenderse el flujo en este caso como el número neto de líneas de campo que cruzan por la superficie?

Ejercicio 4.15. Calcula la divergencia para los campos $\vec{F}_a = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{F}_b = \hat{k}$ y $\vec{F}_c = z\hat{k}$.

Ejercicio 4.16. Considera el siguiente campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = kQ \begin{cases} \vec{E}_{in}(\vec{r}), & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \\ \vec{E}_{ext}(\vec{r}), & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2, \end{cases} \quad (4.81)$$

con \vec{E}_{in} dado por

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3}kC(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (4.82)$$

y \vec{E}_{ext} por

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r}) = kD \frac{(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (4.83)$$

Determine la densidad de carga en todo el espacio. ¿Qué puede deducir de su resultado respecto al campo de la carga puntual? ¿Contradice esto la ley de Gauss?

4.14. Ejercicios extra

Berkeley 2nd ed 1985: 1.23, 1.30 y 1.31

Capítulo 5

Potencial eléctrico

Aprovechando la naturaleza conservativa de la interacción eléctrica, podemos definir una función escalar para describir los fenómenos electrostáticos, simplificando en muchos casos no sólo la compresión de estos sino también la manipulación matemática formal.

5.1. Integral de línea de \vec{E}

Así como resulta útil definir la fuerza por unidad de carga, que es independiente de las cargas de prueba, el trabajo por unidad de carga realizado por la fuerza eléctrica nos entrega un cambio que será independiente de las cargas de prueba que se utilicen para medir esta energía. Este trabajo está dado simplemente por la integral de línea del campo.

La integral de línea del campo entre dos puntos del espacio \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , da, entonces, el cambio de la energía potencial por unidad de carga,

$$\text{Trabajo/carga} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.1)$$

Al hablar de energía potencial estamos necesariamente considerando el hecho que la fuerza eléctrica es conservativa, por esto no se define la trayectoria que se sigue al calcular el trabajo. Ciertamente un análisis idéntico al realizado en la sección 2.3 nos muestra que el trabajo realizado entre dos puntos cualquiera es independiente del camino. Por ejemplo, para el campo debido a una carga puntual la integral se reduce a una integral sobre la coordenada radial y sólo

interesan las distancias inicial y final a la carga,

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{q}{r^2} \cdot dr = kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (5.2)$$

Ya que la integral de línea para el campo debido a una carga puntual es independiente del camino el principio de superposición nos permite deducir que este resultado se mantiene en el caso de varias cargas,

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}_{Total} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = \sum_i \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.3)$$

Como la generalización al caso continuo es automática, de lo hecho hasta el momento se sigue, entonces, que la integral de línea para el campo electrostático es independiente del camino.

Generalizando la denominación hecha para las fuerzas decimos que un campo es conservativo, si su integral de línea es independiente del camino o, equivalentemente, si toda integral de línea por un camino cerrado es nula. Así, tenemos que el campo electrostático es conservativo.

Nótese que se hace énfasis en el hecho que el campo \vec{E} tiene origen electrostático ya que lo anterior en general pierde validez en el caso dinámico.

5.2. Potencial electrostático

La independencia en el camino tomado para el cálculo de la integral de línea del campo entre dos puntos permite definir una función escalar univaluada que depende sólo de las posiciones inicial y final,

$$\phi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.4)$$

Este trabajo por unidad de carga depende únicamente de \vec{r}_1 y \vec{r}_2 y se denomina *diferencia de potencial* entre los dos puntos. Por definición tiene unidades de energía por unidad de carga, bien sea J/C o erg/esu , pero resulta práctico dar un nombre propio a esta como Volt (V) o Statvolt, en SI o cgs respectivamente. Entonces conociendo la diferencia de potencial entre dos puntos podemos saber la energía necesaria para llevar un carga cualquiera de uno a otro punto, así, por ejemplo, para trasladar una carga de un Coulomb a

través de una diferencia de potencial de un Volt son necesarios un Joule de energía, ¡independiente de la distancia o el camino!

Nuevamente, dada la arbitrariedad en la definición del cero de la energía potencial es posible escoger un punto de referencia apropiado para facilitar los cálculos y definiciones. De esta forma podemos definir una función que depende sólo de un punto del espacio y que denominaremos potencial electrostático. Así, tomando un punto de referencia r_o donde tomamos que $\phi(\vec{r}_o) = 0$, se define el potencial como

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{r_o}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad (5.5)$$

pero podemos igual definirlo añadiendo una constante si afectar la física detrás de este. Por ejemplo en el caso de la carga puntual es posible tomar el cero en el infinito espacial y definir,

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}, \infty) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.6)$$

Esta arbitrariedad, que más adelante denominaremos libertad de calibre, indica que este no tiene sentido físico real, ya que sólo las diferencias, también denominadas caídas de potencial, pueden ser determinadas experimentalmente. En la próxima sección será claro que las diferencias de potencial son equivalentes a el campo. Por esto, se dice que lo que tiene sentido físico es sólo el campo eléctrico.

Del resultado para una carga puntual tenemos que en general para una distribución de cargas puntuales tenemos un potencial dado por

$$\phi(\vec{r}) = k \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \phi_o, \quad (5.7)$$

donde hemos escrito explícitamente la constante arbitraria ϕ_o , que dicta el valor del potencial en el infinito y, en este caso, puede tomarse como cero.

Ejemplo 5.2.1. Dipolo: Par de carga

Un par de carga corresponde a dos cargas con cargas iguales opuestas. Para este sistema localizado podemos tomar nulo el potencial en el infinito y, de la expresión (5.7), se sigue

$$\phi(\vec{r}) = kq \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{-q}|} \right). \quad (5.8)$$

Notamos que en el plano justo en la mitad de las dos cargas es cero, dado que las distancias a ambas cargas son idénticas y contribuyen con signos opuestos. De esto entendemos que el trabajo realizado en llevar una carga, a través del campo generado por el par, desde el infinito hasta este plano imaginario es cero, pues la diferencia de potencial entre estos puntos es nula.

Ejemplo 5.2.2. Potencial asociado a \vec{E}

Veamos el ejemplo de un campo definido por $\vec{E} = ky\hat{i} + kx\hat{j}$, con k una constante. Al no haber dependencia ni componentes en z podemos restringirnos al plano xy , donde calculamos la integral de línea desde el origen, donde el campo es cero, hasta un punto (x_o, y_o) en el plano. Tomemos primero un ca-

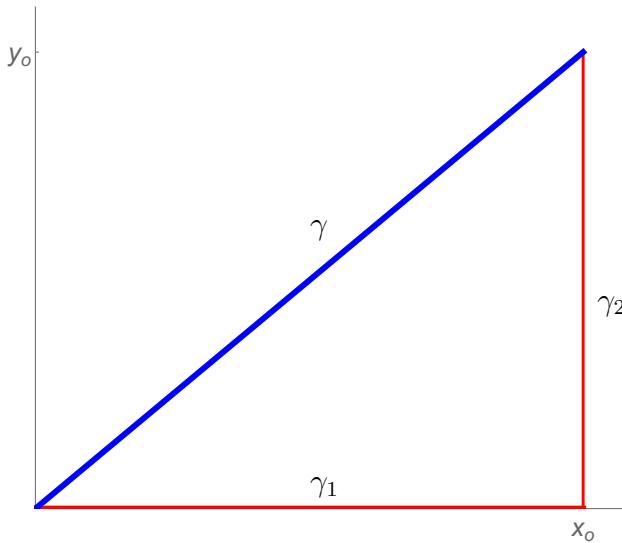


Figura 5.1: Dos ejemplos de caminos para conectar al origen con el punto arbitrario (x_o, y_o) . En rojo uno que devidimos en γ_1 y γ_2 . En azul uno directo en línea recta.

mino sencillo dado por la línea que une los puntos $\gamma = (0, 0) - (0, y_o) - (y_o, x_o)$. Este puede ser descompuesto por dos caminos γ_1 y γ_2 , como se muestra en

la figura 5.1, parametrizados como¹

$$\gamma_1 = x_o \hat{i}t, , \text{ con } t \in (0, 1), \quad (5.9)$$

$$\gamma_2 = x_o \hat{i} + y_o \hat{j}, , \text{ con } t \in (0, 1), \quad (5.10)$$

tales que

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.11)$$

En el primer camino tenemos $x = x_o t$ y $y = 0$, o en otra notación $(x_o t, 0)$, de donde

$$d\vec{\ell} = \gamma'_1 dt = x_o \hat{i} dt, \quad (5.12)$$

y

$$\vec{E}(\gamma_1) = k \left(0 \hat{i} + x_o t \hat{j} \right), \quad (5.13)$$

luego se sigue que

$$\int_{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 k x_o^2 t \hat{j} \cdot \hat{i} dt = 0. \quad (5.14)$$

Para el segundo punto $x = x_o$ y $y = y_o t$, y

$$d\vec{\ell} = \gamma'_2 dt = y_o \hat{j} dt, \quad (5.15)$$

mientras

$$\vec{E}(\gamma_2) = k \left(y_o \hat{i} + x_o \hat{j} \right), \quad (5.16)$$

así

$$\int_{\gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 k x_o y_o dt = k x_o y_o. \quad (5.17)$$

Por todo el camino

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = k x_o y_o. \quad (5.18)$$

Tomemos ahora la segunda curva, una recta directa, en azul en la figura 5.1, descrito por

$$\gamma = (x_o \hat{i} + y_o \hat{j})t, \text{ con } t \in (1, 0). \quad (5.19)$$

¹Recordemos que cualquier recta puede ser escrita como

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{R}_o t,$$

con \vec{r}_o y \vec{R}_o vectores constantes.

Para este camino $x = x_o t$ y $y = y_o t$, y el diferencial de camino es

$$d\vec{\ell} = \gamma' dt = (x_o \hat{i} + y_o \hat{j}) dt, \quad (5.20)$$

mientras

$$\vec{E}(\gamma) = k \left(y_o t \hat{i} + x_o t \hat{j} \right), \quad (5.21)$$

y, por tanto, sobre este camino

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \left(k y_o t \hat{i} + k x_o t \hat{j} \right) \cdot (x_o \hat{i} + y_o \hat{j}) dt, \\ &= 2k x_o y_o t dt, \end{aligned} \quad (5.22)$$

o sea

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^1 2k x_o y_o t dt, \\ &= 2k x_o y_o \left(\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 \right), \\ &= k x_o y_o, \end{aligned} \quad (5.23)$$

recuperando el resultado anterior. De hecho, me he cuidado de escoger un campo vectorial al que efectivamente se le pueda asociar un potencial, i.e., conservativo. Un método sencillo para determinar si un campo es o no conservativo lo desarrollaremos en breve cuando introduzcamos el concepto de rotacional.

Ya que las coordenadas que escogimos no tienen nada de particular podemos llamarlas genéricamente como x y y , así la diferencia de potencial entre el origen y cualquier punto en el espacio, con coordenadas (x, y) , es, recordando el signo menos en su definición,

$$\phi(x, y) - \phi(0, 0) = -k xy. \quad (5.24)$$

Si convenientemente escogemos el cero del potencial como el valor del potencial en el origen, podemos definir la función potencial ϕ como

$$\phi(x, y, z) = -k xy.$$

Ejemplo 5.2.3. Potencial de la placa infinita uniformemente cargada

En el ejemplo 3.2.4 calculamos el campo debido a una placa con densidad constante σ_o , encontrando un campo uniforme $\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi k \sigma_o \hat{k}$ sobre la placa. Ya que el campo está dirigido en la dirección z , la integral de línea sobre un camino con z constante, i.e., restringido a un plano $z = cte$, es nula, osea el potencial es constante. Lo que tenemos es que estos planos forman superficies equipotenciales, las cuales son perpendiculares al campo eléctrico, algo en lo cual profundizaremos luego.

Tenemos entonces que el potencial electrostático depende sólo de la coordenada z , o sea, de la distancia a la placa, como se debe entender también de las simetrías. Calculemos entonces el potencial para un punto z sobre la placa.

Claramente el camino más sencillo es una línea recta desde la placa hasta el punto a considerar, aunque recordemos que el cálculo es independiente del camino. Este camino simplemente lo podemos parametrizar por

$$\gamma_{\hat{k}} = z\hat{k}, \Rightarrow d\vec{\ell} = \hat{k}dz \quad (5.25)$$

y, por tanto

$$\phi(z) - \phi(0) = - \int_{\gamma_{\hat{k}}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_0^z 2\pi k \sigma_o dz' = -2\pi k \sigma_o z, \quad (5.26)$$

o sea

$$\phi(z) = -2\pi k \sigma_o z + \phi_o, \quad (5.27)$$

donde hemos tomado $\phi(z=0) = \phi_o$. Esta, al ser una constante, es irrelevante para la física, donde sólo serán relevantes las diferencias de potencial.

Si hubiéramos calculado el potencial bajo la placa encontraríamos el mismo resultado, como es claro por la simetría $z \rightarrow -z$, luego en general tenemos que

$$\phi(z) = -2\pi k|z| + \phi_o, \quad (5.28)$$

para cualquier z .

Ejemplo 5.2.4. Línea infinita cargada uniformemente

Calculemos el potencial utilizando la integral de línea del campo hallado en el ejemplo 4.3.2,

$$\begin{aligned} \phi_{21} &= - \int_{\rho_1}^{\rho_2} 2k \frac{\lambda}{\rho} d\rho, \\ &= -2k\lambda (\ln \rho_2 - \ln \rho_1), \end{aligned}$$

$$= 2k\lambda \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (5.29)$$

Así podemos definir el potencial para la linea cargada como

$$\phi(\vec{r}) = -2k\lambda \ln \rho + \phi_o. \quad (5.30)$$

Los dos últimos ejemplos discutidos corresponden a distribuciones de carga no acotadas, o sea, se extienden hasta infinito. Es hara que no sea posible fijar el potencial en infinito a cero, como lo hicimos con las cargas puntuales. En general se tiene que tomar un potencial nulo en infinito sólo será posible con distribuciones acotadas.

Pregunta 5.1. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el centro de un cascarón delgado esférico uniforme de carga y su superficie? En general ¿cómo son las diferencias de potencial en el interior del cascarón?

Ejercicio 5.1. ¿Podría asociarle un potencial al campo vectorial del ejercicio 2.10? En particular, compare su el resultado obtenido allí, con el trabajo resultante por el camino directo dictado por el vector $\vec{R}_o = 2\hat{i} + 3\hat{j}$.

Ejercicio 5.2. En el LHC se aceleran protones hasta energías equivalentes a que sean acelerados por un potencial de $10^{12}V$.

- Calcule la energía de estos protones.
- Utilizando la expresión relativista para la energía cinética

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2,$$

con la masa del protón $m_p = 1,7 \times 10^{-27}kg$, $c = 3 \times 10^8 m/s$ la velocidad de la luz en el vacío, halle la velocidad que tienen los protones.

Ejercicio 5.3. Un cascarón del tamaño de una pelota de basket se carga con $-1000V$. ¿Estime cuantos electrones extras hay por cm^2 de superficie?

Ejercicio 5.4. Etiquetando las esquinas de un cuadrado de 5cm de lado en el sentido de las manecillas del reloj por A, B, C y D, coloque una carga de $2esu$ en A y otra de $-3esu$ en B. Determine la integral de línea de \vec{E} entre los puntos C y D. (No es necesario el cálculo de la integral)

Ejercicio 5.5. Calcule el potencial en el centro de una distribución esférica de carga uniforme ρ_o y radio a .

5.3. Distribuciones de carga

En caso que sea una distribución de carga continua podemos proceder de manera análoga que en el límite continuo para el campo, para hallar la expresión correspondiente del potencial. Acá utilizaremos directamente la moraleja aprendida al final de la sección 3.2.3 y simplemente expresamos (5.7) como su análoga continua, a decir:

$$\phi(\vec{r}) = k \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_o, \quad (5.31)$$

que podemos particularizar para los casos de distribuciones volumétricas

$$\phi(\vec{r}) = k \int_{Vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \phi_o, \quad (5.32)$$

donde $dV' = dx'dy'dz'$ en el caso de coordenadas cartesianas; para distribuciones superficiales

$$\phi(\vec{r}) = k \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \phi_o, \quad (5.33)$$

; y lineales

$$\phi(\vec{r}) = k \int_\ell \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\ell' + \phi_o. \quad (5.34)$$

Ejemplo 5.3.1. Potencial en el eje de un anillo circular uniformemente cargado

El análisis es muy similar al hecho en el ejemplo 3.2.3 donde calculamos el campo en eje del anillo. Con el anillo en el plano $z = 0$, tomando coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , tenemos nuevamente que

$$dq = \lambda_o a d\theta, \quad (5.35)$$

con a el radio del anillo. La distancia desde un punto a una altura z al cualquier punto del anillo es $r = \sqrt{a^2 + z^2}$, por tanto el potencial en el eje es

$$\phi(z)_{\rho=0} = k \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_o a}{\sqrt{a^2 + z^2}} d\theta + \phi_o,$$

$$= \frac{2\pi k \lambda_o a}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \phi_o, \quad (5.36)$$

donde como era de esperarse el potencial no depende de θ .² Si fijamos el potencial en infinito como nulo, i.e., $\phi(z \rightarrow \infty) = 0$, tenemos para la constante $\phi_o = 0$. Así, con esta convención el potencial en el eje del anillo está dado por

$$\phi(\vec{r} = z\hat{k}) = \frac{2\pi k \lambda_o a}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (5.37)$$

En el centro del anillo tenemos $\phi(0) = 2\pi k \lambda_o$, el cual sería el trabajo realizado en traer una carga positiva unitaria desde el infinito hasta el centro del anillo.

Ejemplo 5.3.2. Disco de radio b cargado uniformemente

Calculemos el potencial sobre el eje del disco, que suponemos centrado en el eje z y en el plano $z = 0$, fijando a cero el potencial en infinito. En este caso podemos utilizar el resultado del ejemplo 5.3.1 y considerar el disco como la unión de anillos concéntricos. Justo como hicimos en el ejemplo 3.2.4 debemos simplemente remplazar la densidad lineal de carga por $\lambda_o \rightarrow \sigma_o d\rho$ para dar cuenta del grosor de los anillos de radio ρ , así,

$$d\phi(\vec{r} = z\hat{k})_{\text{anillo}} = \frac{2\pi k \sigma_o \rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} d\rho \quad (5.38)$$

Ahora sumaremos las contribuciones de cada anillo integrando hasta el radio del disco, así,

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r} = z\hat{k}) &= \int d\phi_{\text{anillo}}(\vec{r} = z\hat{k}), \\ &= k \int_0^b \frac{2\pi \sigma_o \rho'}{\sqrt{(\rho')^2 + z^2}} d\rho', \\ &= 2k\pi \sigma_o \sqrt{(\rho')^2 + z^2} \Big|_0^b \\ &= 2k\pi \sigma_o (\sqrt{b^2 + z^2} - |z|). \end{aligned} \quad (5.39)$$

En el centro del disco tenemos que el potencial es finito y de valor $2k\pi \sigma_o b$ así el trabajo para traer una carga Q desde el infinito hasta allí será $2k\pi \sigma_o b Q$.

²La definición misma de las coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, el ángulo azimutal θ no está definido en $\rho = 0$.

Nótese que aunque el potencial es continuo y finito su derivada no lo es. En efecto debido al valor absoluto en la expresión el signo de la derivada cambia abruptamente al cruzar el disco,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2k\pi\sigma_o \begin{cases} \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}} - 1 & z \geq 0, \\ \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}} + 1 & z < 0. \end{cases} \quad (5.40)$$

Esto se entiende al recordar la discusión general que se realizó para la discontinuidad del campo al cruzar una superficie cargada en la sección 4.6, y el hecho que, como se verá a continuación, el campo está asociado a las diferencias de potencial infinitesimales, i.e., las derivadas espaciales, y en particular la componente z está dada por $E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$. Calculando el campo en el origen, i.e. $\rho = 0$ y $z = 0$, tenemos

$$E_z = 2k\pi\sigma_o \begin{cases} +1 & z \geq 0, \\ -1 & z < 0, \end{cases} \quad (5.41)$$

los cuales satisfacen la condición encontrada antes, teniendo cuidados con el sentido tomado para los campos previamente, $(E_z(z \geq 0) - E_z(z < 0))|_{z=0} = 4\pi k\sigma_o$.

Claramente si el disco se observa desde distancias muy grandes se debe ver como una carga puntiforme y por tanto reproducir el potencial generado por esta. Tomando $z \rightarrow \infty$ tenemos en efecto, con $z \gg b$,

$$\begin{aligned} \phi_{disco}(\vec{r} = z\hat{k}) &= 2k\pi\sigma_o(\sqrt{b^2 + z^2} - |z|), \\ &= 2k\pi\sigma_o|z|\left(\sqrt{1 + b^2/z^2} - 1\right), \\ &= 2k\pi\sigma_o|z|\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2} + \dots - 1\right), \\ &\approx k\frac{\pi\sigma_o b^2}{|z|}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Con la carga del disco $Q = \pi b^2\sigma_o$ reprodujimos el potencial de una carga puntual. En puntos arbitrarios calcular el potencial se torna más complejo y está fuera del objetivo del curso, sin embargo, es instructivo calcular el potencial en otro punto del disco, en particular el borde de este. Para esto definimos el ángulo φ y la distancia r para denotar la posición de cualquier punto con

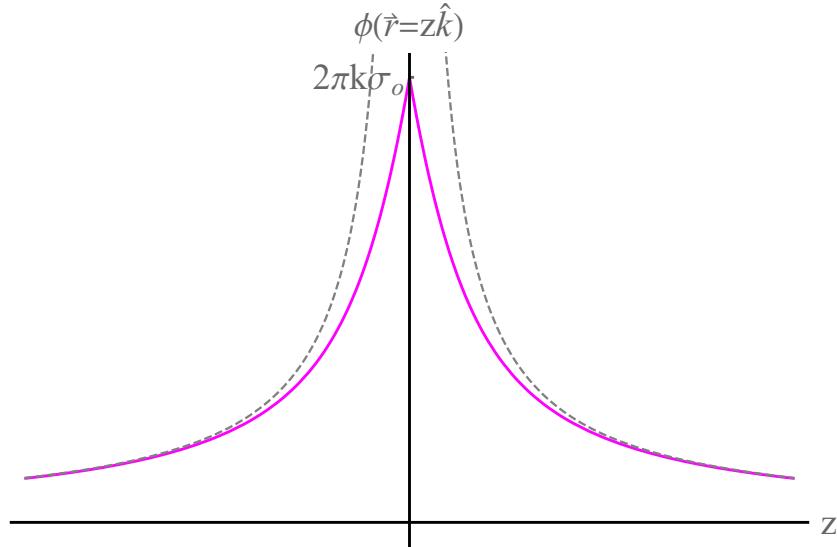


Figura 5.2: Potencial en el eje del disco uniforme en color magenta, comparado con el respectivo (en gris puntuada) de una carga puntual con la misma carga total y situada en el centro del disco.

respecto al punto P donde se calcula el potencial. Con estas convenciones tenemos que el diferencial de área puede escribirse como $dA = r dr d\varphi$, luego

$$dq = \sigma_o r dr d\varphi. \quad (5.43)$$

Para hacer la integración sobre r notamos que el límite superior varía con el ángulo como $r_{max} = 2b \sin \varphi$, donde hemos escogido a φ variando desde cero a π . La figura 5.3 muestra la razón de dichos límites. Así,

$$\begin{aligned} \phi &= k \int_0^\pi \int_0^{2b \sin \varphi} \frac{dq}{r}, \\ &= k \int_0^\pi \int_0^{2b \sin \varphi} \sigma_o dr d\varphi, \\ &= k \int_0^\pi \sigma_o 2b \sin \varphi d\varphi, \\ &= 4k\sigma_o b. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Vemos que el potencial es menor en el borde que en el centro del disco, 2π . Esto se explica físicamente por el hecho que de estar libres las cargas, al ser

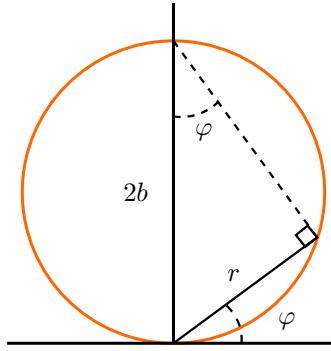


Figura 5.3: Ilustración del realización del dibujo de círculo de radio b sobre el eje x en coordenadas polares. Ilustra la variación del ángulo, $\varphi \in (0, \pi)$, en tanto el radio varía como $r(\varphi) = 2b \sin(\varphi)$.

del mismo signo, tratarían de alejarse lo más posible unas de las otras, siendo esta configuración simplemente que la carga se concentre en el borde. Esto nos indica que debe existir una componente radial del campo no nula.

Falta hacer diagrama mostrando lo anterior

Pregunta 5.2. Con el resultado para el disco cargado ¿qué argumentos puede hallar para contradecir el modelo de tierra plana en forma de disco? En particular ¿dónde se encontrarían los océanos con mayor probabilidad?

Ejemplo 5.3.3. Potencial placa infinita cargada uniformemente II
Si en el ejemplo 5.3.2 hacemos el radio del disco tender a infinito, debemos recuperar el resultado del ejemplo 5.2.3. Escribiendo el resultado ec.(5.39) como

$$\phi(\vec{r} = z\hat{k}) = 2k\pi\sigma_o b (\sqrt{1 + z^2/b^2} - |z|/b), \quad (5.45)$$

y expandiendo al rededor de $b \rightarrow \infty$, o equivalentemente $z \approx 0$ ¡tenemos un resultado infinito!. En efecto el primer término de esta expansión es el término constante $2\pi k\sigma_o b$. Dejando, por el momento, este “problema” a un lado, consideremos el segundo término de la expansión:

$$\phi(\vec{r} = z\hat{k}) = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi k\sigma_o b - 2\pi k\sigma_o |z| + \mathcal{O}\left(\frac{|z|^2}{b^2}\right). \quad (5.46)$$

Ya que el segundo término no depende de b podemos tomar fácilmente el límite, y los términos de alto orden en z/b simplemente se anulan. Ya que

el primer término es una constante podemos considerarlos como un ϕ_o , ¡sin importar que sea infinito!, el potencial que en el ejemplo 5.2.3 tomamos como $\phi(z = 0)$. De esta forma recuperamos el resultado del ejemplo 5.2.3.

Ejercicio 5.6. *Un triángulo recto de altura a y base b tiene una distribución uniforme de carga σ_o . Calcule el potencial en la esquina P de ángulo agudo de la base.*

Para el cálculo tal vez lo más conveniente es encontrar primero la contribución de tiras de ancho dx y altura dependiente de su distancia a P , que puede tomarse como el origen. Luego se suman las contribuciones de todas estas tiras. (El resultado puede escribirse como $\phi(P) = \sigma_o b \text{Log}((1 + \text{sen}\theta)/\text{cos}\theta)$)

Ejercicio 5.7. *Un disco delgado de radio 3cm tiene un agujero circular en el centro de radio 1cm. El disco está cargado uniformemente con $-4\text{esu}/\text{cm}^2$*

- *¿Cuál es el potencial en el centro del disco? Asuma un potencial nulo en infinito.*
- *Un electrón arrancando desde el reposo parte desde el centro del disco repelido por las cargas de este. ¿Cuál es la velocidad final del electrón? (Masa electrónica $m_e = 9 \cdot 10^{-28}\text{Kg}$)*

5.3.1. Superficies equipotenciales

Algo que debe estar claro a este punto es el hecho que un sistema electrostático queda completamente descrito una vez se conoce su campo eléctrico en todo el espacio. Esto lo visualizábamos graficamente al mostrar los vectores de campos en algunos puntos o con las líneas de campo. Como veremos a continuación, otra forma de representar los sistemas parte del potencial, o más precisamente de las diferencias de potencial, y para visualizarlos se pueden escoger métodos usuales para representar campos escalares.

Para campos escalares que dependen de sólo dos variables (coordenadas) un método de representación muy común consiste en las denominadas curvas de nivel. La idea es tomar el campo como un campo de alturas y representar en el plano curvas de altura constante para algunos valores escogidos. En este [enlace](#) pueden jugar con algunos ejemplos de funciones y sus curvas de nivel representadas superpuestas a la función.

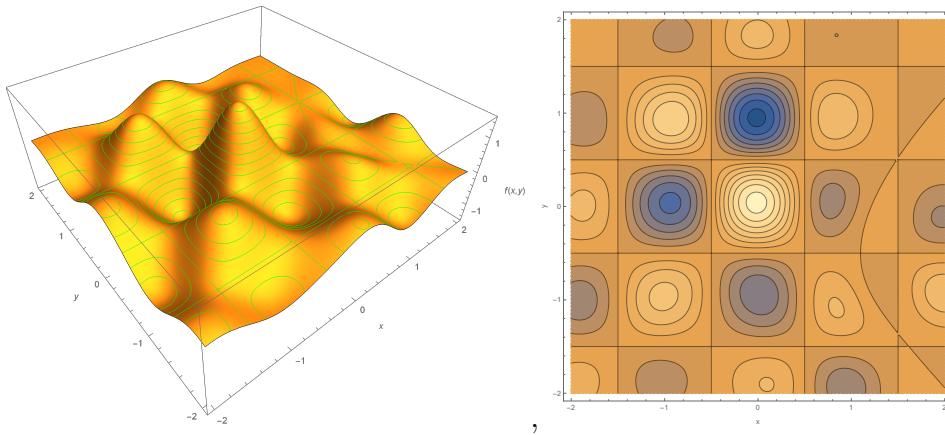


Figura 5.4: A la derecha se muestra un ejemplo de gráfica de una función de dos variables con imágenes en los reales, mostrando en verdes las curvas de alturas (valor de función) iguales. A la derecha se muestra la misma función en una representación por diagrama de nivel.

En los diagramas de curvas de nivel, entonces, simplemente se dibujan dichas líneas en el plano, lo cual muestra a grandes rasgos el comportamiento de la función alrededor del plano. La gráfica 5.4 ilustra dicha construcción con una función ejemplo. Para el caso de la función potencial dichas curvas de nivel se denominan líneas equipotenciales y, en el caso real del espacio físico, con tres coordenadas, estas son superficies dictadas por la condición $\phi(x, y, z) = \text{constante}$. De lo discutido definiendo el potencial tenemos que desplazamientos a lo largo de las superficies equipotenciales no implican ningún trabajo por parte del campo, pues no hay diferencias de potencial.

5.4. El gradiente

La interpretación geométrica o física de la derivada de una función de una sola variable es sencilla, dándonos la rapidez con que la función está cambiando respecto a como varía la variable en la que depende. Para el caso de más coordenadas es posible moverse de infinitas formas en el espacio, y la pregunta a formular es cómo caracterizar este cambio ahora más complejo. Para hacer el análisis más sencillo pensemos por ahora en sólo dos coordenadas. En este caso las funciones $f(x, y)$ se pueden representar como superficies

y nos preguntamos cuál es el cambio de la función cuando nos vamos moviendo en el plano y las coordenadas (x, y) cambian. Esto se ilustra en la figura 5.5.

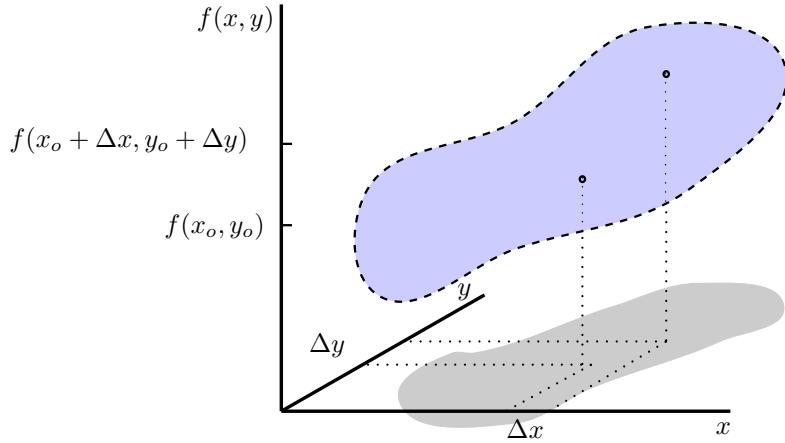


Figura 5.5: Función arbitraria suave de las variables (x, y) . Al cambiar el punto de evaluación original (x_o, y_o) a uno $(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ la función cambia, lo que se refleja en una altura diferente en la gráfica.

Considerando Δx y Δy pequeños podemos utilizar una expansión de Taylor para expresar la función evaluada en las coordenadas $(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ en términos de su valor en (x_o, y_o) , así

$$\begin{aligned} T(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) &= T(x_o, y_o) + \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(x_o, y_o)} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{(x_o, y_o)} \Delta y \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta x \Delta y), \end{aligned} \quad (5.47)$$

con $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta x \Delta y)$ términos cuadráticos que despreciamos al tomar el límite de variaciones diferenciales. Así tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta T &\equiv T(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - T(x_o, y_o), \\ &\approx \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(x_o, y_o)} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{(x_o, y_o)} \Delta y. \end{aligned} \quad (5.48)$$

De donde

$$dT(x_o, y_o) = \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(x_o, y_o)} dx + \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{(x_o, y_o)} dy, \quad (5.49)$$

o en general, para tres variables, i.e. $T(x, y, z)$, al hacer una pequeña traslación en el espacio desde \vec{r}_o hasta $\vec{r}_o + d\vec{\ell}$, con $d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$,

$$dT(\vec{r}_o) = \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\vec{r}_o} dx + \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\vec{r}_o} dy + \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{\vec{r}_o} dz, \quad (5.50)$$

que se puede generalizar para cualquier número de variables. En conclusión las derivadas parciales contienen la información sobre la variación de la función, algo que no debe extrañarnos. De esta podemos extraer la respuesta a la pregunta “qué tan rápido cambia la función” notando que puede ser escrita como un producto punto con el vector desplazamiento $d\vec{\ell}$,

$$dT(\vec{r}_o) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\vec{r}_o} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\vec{r}_o} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{\vec{r}_o} \hat{k} \right) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}), \quad (5.51)$$

$$= \vec{\nabla}T(\vec{r}_o) \cdot d\vec{\ell}, \quad (5.52)$$

donde se ha introducido la función (campo) vectorial

$$\vec{\nabla}T(\vec{r}) = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}, \quad (5.53)$$

denominado el *gradiente de la función* $T(x, y, z)$, y que puede entenderse como la acción del operador *nabla* definido en la ecuación (4.71).

Para entender el significado del gradiente recordemos que el producto punto da la proyección de un vector sobre el otro. Luego, el cambio dT será máximo en el caso que el desplazamiento sea justamente paralelo al gradiente. Osea que el gradiente da la dirección de cambio máximo de la función en el espacio, y su magnitud da la rapidez con que cambia en esta dirección. Por ejemplo en el caso de una función dependiente sólo de dos coordenadas, es posible representarla como una superficie en tres dimensiones con coordenadas $(x, y, f(x, y))$. El gradiente de la función f da la dirección en que la pendiente de la superficie es máxima y su magnitud dicta la pendiente en esta dirección. En este [enlace](#) pueden jugar con algunas visualizaciones utilizando el software *Mathematica*. En las figuras 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10 se muestran algunos ejemplos.

Si el gradiente es nulo en cierto punto del espacio quiere decir que dT es nulo al hacer cualquier cambio infinitesimal alrededor de dicho punto, o sea que corresponde a un punto estacionario de $T(\vec{r})$. Esto nos indica que para el problema de extremizar la función es el gradiente el que toma el rol de la

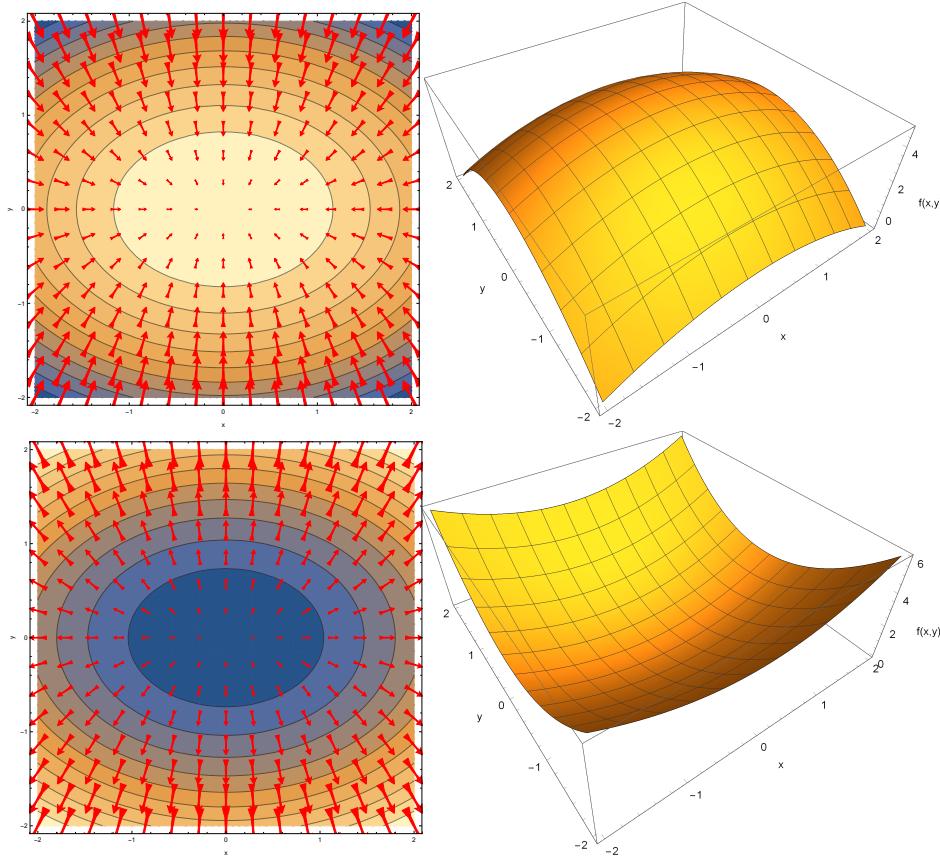


Figura 5.6: Ejemplo de una función de las coordenadas (x, y) , a la derecha representada como una gráfica en tres dimensiones con la altura el valor de la función en dicho punto. A la izquierda como un diagrama de nivel con el gradiente en algunos puntos superpuestos. La función en la parte superior presenta un máximo y en la inferior un mínimo. Vemos como en los alrededores de los puntos extremos el gradiente es pequeño y justo en el extremo se anula, y cómo estos vectores emanan de lo mínimos y convergen en los máximos.

derivada en una sola dimensión.

Una propiedad importante del gradiente es que es perpendicular a las superficies T constante, introducidas en la sección 5.3.1. En efecto, sobre dichas superficies se satisface $dT = 0$, lo cual ocurre si el gradiente es perpendicular

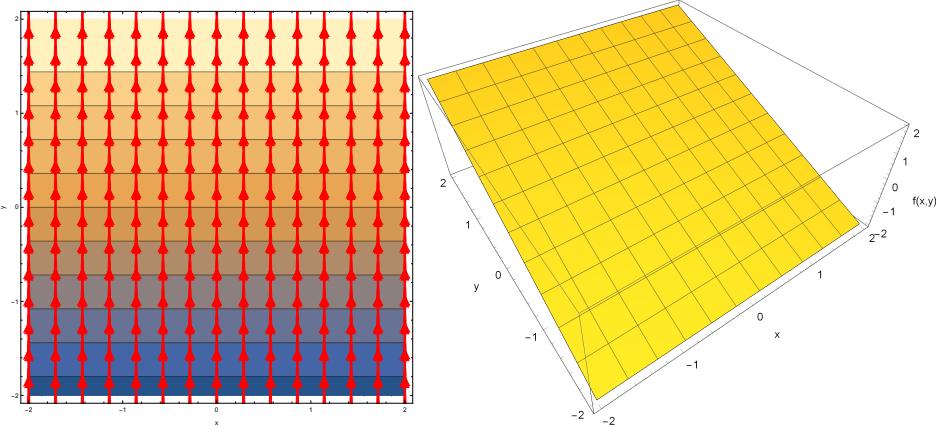


Figura 5.7: Ejemplo de una función de las coordenadas (x, y) , a la derecha representada como una gráfica en tres dimensiones con la altura el valor de la función en dicho punto. A la izquierda como un diagrama de nivel con el gradiente superpuesto evaluado en algunos puntos. La función corresponde a una variación lineal, por lo que el gradiente (pendiente) es constante en todo el espacio.

al desplazamiento $d\vec{r}$ que define esta superficie, o línea en el caso de sólo dos variables.

Como conclusión el gradiente de una función escalar es el campo vectorial de las velocidades (variaciones) máximas en el espacio.

5.4.1. El campo eléctrico como el gradiente del potencial

De la definición del potencial electrostático podemos escribir

$$d\phi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}, \quad (5.54)$$

pero, de lo visto anteriormente, esto es simplemente $\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l}$, o sea que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \quad (5.55)$$

Esta relación es de gran utilidad ya que nos permite trabajar cualquier problema electrostático con una cantidad escalar, el potencial. Lo cual, en general,

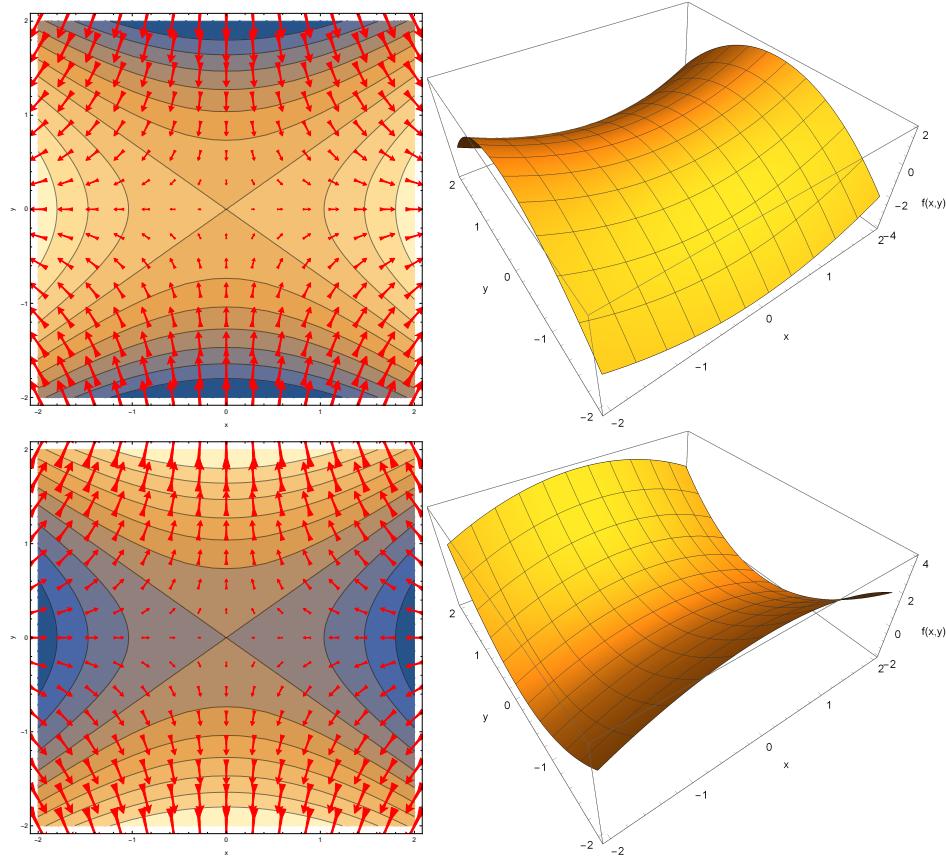


Figura 5.8: Ejemplo de una función de las coordenadas (x, y) , a la derecha representada como una gráfica en tres dimensiones con la altura el valor de la función en dicho punto. A la izquierda como un diagrama de nivel con el gradiente superpuesto evaluado en algunos puntos. Los ejemplos muestran puntos de ensilladura, arriba con máximo en la dirección x y abajo con máximo en la dirección y .

es más simple que trabajar con una cantidad vectorial como lo es el campo. Una vez sepamos la función potencial para el sistema podemos calcular el campo utilizando (5.55). Nótese que estamos simplemente redescubriendo las propiedades de un campo de fuerzas conservativo, donde a la fuerza se le puede asociar una energía potencial cuyo gradiente es el campo de fuerzas. Esto también nos muestra cómo la constante arbitraria en la definición del

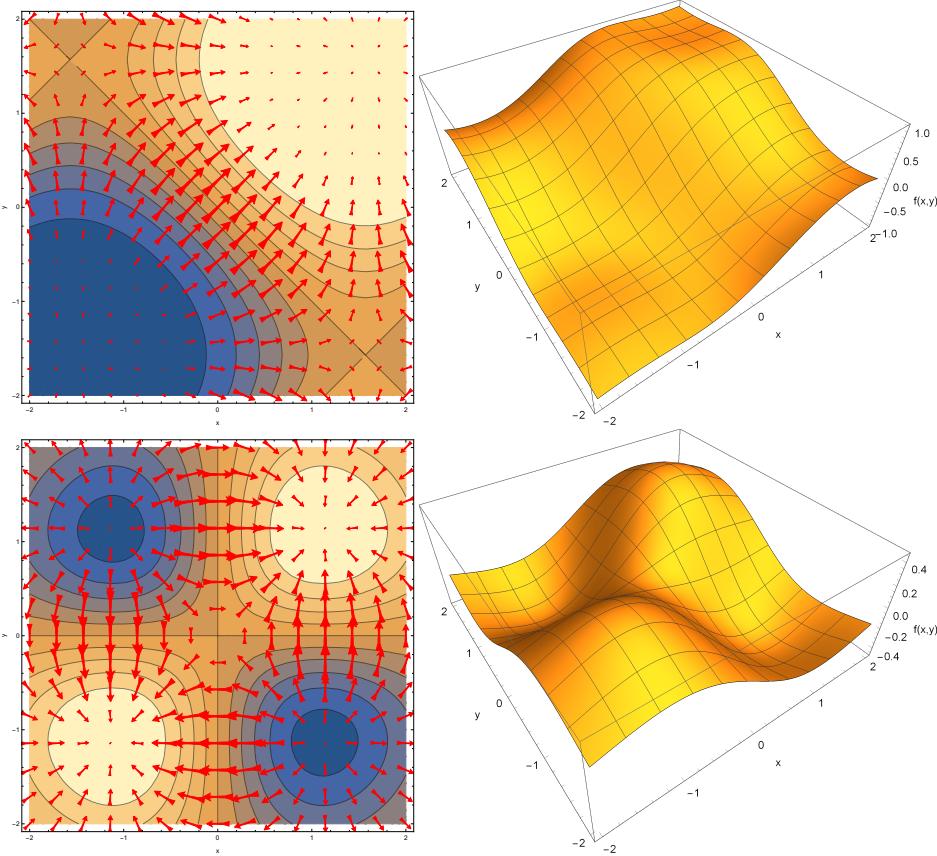


Figura 5.9: Ejemplos de una funciones de las coordenadas (x, y) , a la derecha representada como una gráfica en tres dimensiones con la altura el valor de la función en dicho punto. A la izquierda como un diagrama de nivel con el gradiente superpuesto evaluado en algunos puntos. En la parte de arriba con un máximo y un mínimo, y una dirección plana en la diagonal. En la parte inferior se presentan dos mínimos, dos máximos, y dos direcciones planas justo cortando la región en cuatro cuadrantes.

potencial es irrelevante para calcular \vec{E} , tal y como debe ser ya que el campo sí es una cantidad física.

Ahora bien; dadas las propiedades del gradiente tenemos que el campo eléctrico son los vectores normales a las superficies equipotenciales. Lo que nos brinda una herramienta práctica para determinar campos una vez conocemos

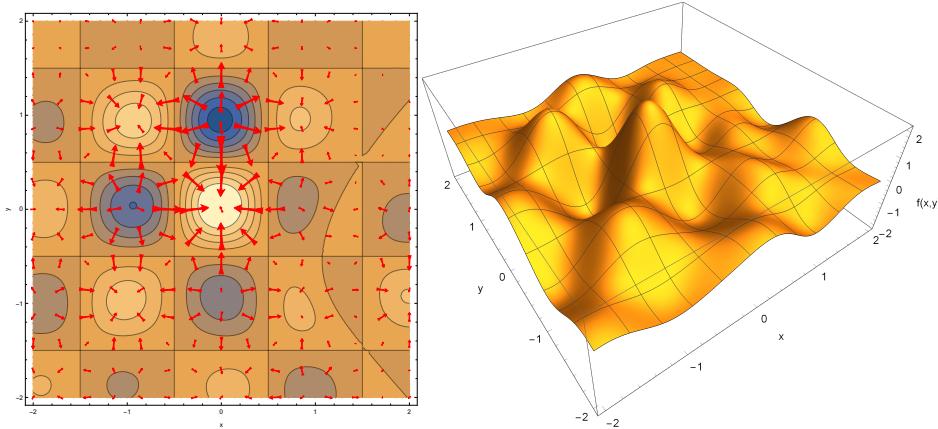


Figura 5.10: Un ejemplo más complejo de una función de las coordenadas (x, y) , a la derecha representada como una gráfica en tres dimensiones con la altura el valor de la función en dicho punto. A la izquierda como un diagrama de nivel con el gradiente superpuesto evaluado en algunos puntos. Presenta varios máximos y mínimos.

las superficies equipotenciales.

Ejemplo 5.4.1. Campo asociado a ϕ

Veamos explícitamente esta relación entre el campo y el potencial para el ejemplo 5.2.2, donde se encontró $\phi(\vec{r}) = -k xy$.

De las derivadas parciales para ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -k y, \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -k x, \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (5.58)$$

obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}), \\ &= -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}\right), \\ &= k y\hat{i} + kx\hat{j}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

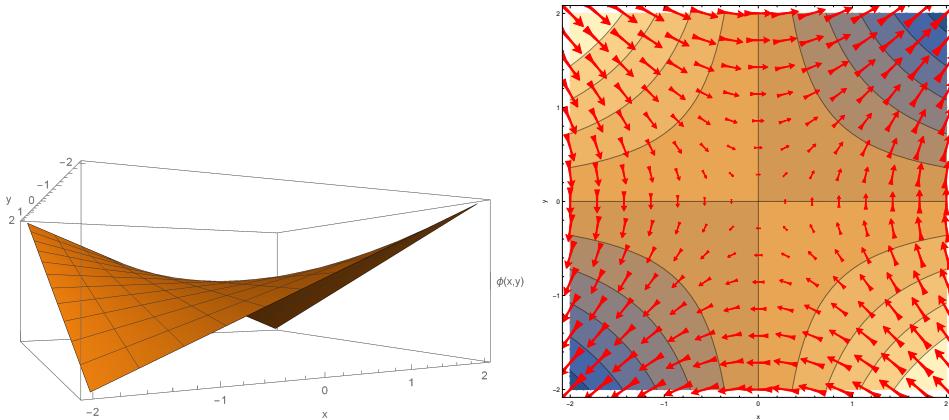


Figura 5.11: Potencial y campo asociado del ejemplo 5.4.1.

5.5. Sobre el método de cálculo de la Ley de Gauss

En el capítulo anterior se introdujo una técnica “fácil” de evaluación que se reducía a calcular el flujo de campo eléctrico a través de una superficie apropiada. Por apropiada nos referímos a: *i*) tal que su vector normal fuera siempre paralelo a \vec{E} , y *ii*) el campo eléctrico fuera constante sobre la superficie. De lo visto en la sección 5.4.1 estas superficies son precisamente ¡superficies equipotenciales!. Podemos entonces precisar mejor donde el método puede ser aplicado

El método de cálculo de campos eléctricos es práctico para casos donde es posible saber de antemano la forma de las superficies equipotenciales y, además, estas son altamente simétricas entre. Las superficies gaussianas que tomamos para el cálculo son precisamente estas equipotenciales.

Ejercicio 5.8. Determine el campo asociado al siguiente potencial

$$\phi(x, y) = \kappa \begin{cases} \frac{x^2}{b} & \text{si } |x| < b, \\ |x| & \text{si } b \leq |x|. \end{cases}$$

Dibuje las superficies equipotenciales correspondientes.

Ejercicio 5.9. Determine el campo asociado al siguiente potencial

$$\phi(x, y) = \kappa \ln(x^2 + y^2).$$

Dibuje las superficies equipotenciales correspondientes.

5.6. Laplaciana: la ecuación de Poisson y Laplace

Hemos definido hasta el momento dos funciones escalares relacionadas con el campo eléctrico, el potencial y la divergencia del campo. Ambas obtenidas a partir de operadores diferenciales:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (5.60)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (5.61)$$

De la expresión para el gradiente en cartesianas tenemos que las componentes del campo están relacionadas con las derivadas parciales del potencial como $E_x = \partial\phi/\partial x$, etc., luego la segunda expresión en términos del potencial queda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right). \quad (5.62)$$

El operador diferencial $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ que estamos operando sobre ϕ tiene nombre propio y se denomina Laplaciana, denotándose como ∇^2 . En efecto de la expresión en coordenadas cartesianas, se tiene que

$$\nabla^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.63)$$

Como se dijo anteriormente el operador $\vec{\nabla}$ toma distintas expresiones para cada sistema de coordenadas, por lo que la expresión simple dada anteriormente y la relación con el operador Laplaciano dejan de ser directas en otros sistemas. Sin embargo, la definición como la divergencia del gradiente es general en todo sistema de coordenadas, por lo que podemos expresar la ley de Gauss en su forma diferencial en términos del potencial como

$$\nabla^2\phi = -4\pi k\rho, \quad (5.64)$$

con ρ la densidad de carga volumétrica, conocida como la ecuación de Poisson. La ecuación (5.64) es una ecuación diferencial que permite el cálculo del potencial dada una distribución de carga. Para puntos del espacio donde no haya cargas esta se reduce a

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (5.65)$$

que, en un contexto general, se conoce como ecuación de Laplace. Las soluciones a esta ecuación estarán completamente dictadas por las condiciones de frontera, i.e. el valor del potencial en las fronteras del espacio a considerar. Así, una propiedad interesante que cumplen las soluciones de la ecuación (5.65) es que el valor promedio que toman en una superficie esférica es igual al valor en el centro del cascarón. Para el caso de un cascarón con distribución uniforme de carga esto es inmediato, ya que hemos mostrado que el campo debido a esta distribución es cero dentro y por tanto el potencial, $\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, es constante sobre toda la superficie y el interior.

Ejercicio 5.10. Describa la distribución de carga y el campo eléctrico asociado con el potencial escalar

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2, & \text{para } x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \\ -a^2 + \frac{2a^3}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, & \text{para } a^2 < x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

Ejercicio 5.11. Muestre que en un espacio unidimensional el único campo posible en regiones sin carga corresponde a un campo uniforme.

Ejercicio 5.12. Muestre que el potencial dado por

$$\phi(\vec{r}) = \phi_o \ln(x^2 + y^2 + z^2),$$

no corresponde a un campo físicamente posible en una región sin cargas.

Ejercicio 5.13. Muestre que el potencial dado por

$$\phi(\vec{r}) = c(|x| + |y|),$$

solo podría corresponder a un campo físicamente posible en los cuadrantes II y IV del plano, es decir donde $x < 0$ y $y > 0$ o en donde $x > 0$ y $y < 0$.

5.7. Resumen

Hemos encontrado varias relaciones entre el campo y las distribuciones de carga. Debemos estresar nuevamente que físicamente lo que se ha hecho reescrito una y otra vez la ley de Gauss. En efecto la relación encontrada entre el flujo del campo y la carga es única del carácter del campo en su dependencia con la distancia, i.e. $\sim 1/r^2$, y su naturaleza radial. Aunque, como se advirtió en su momento, la ley de Gauss es más general al satisfacerse de manera universal. Por el momento, para nuestros intereses será importante el hecho que hemos encontrado variados métodos de evaluación, donde la pregunta “¿cuál es la fuerza sobre las cargas?” transmutó a “¿cuál es el campo que experimentan las cargas?” y, finalmente, para el caso electrostático a “¿cuál es el potencial que experimentan las cargas?”. Todas, dadas unas distribuciones de carga. Aunque, como vimos, la pregunta puede revertirse. Esto se resume en la siguiente figura 5.12.

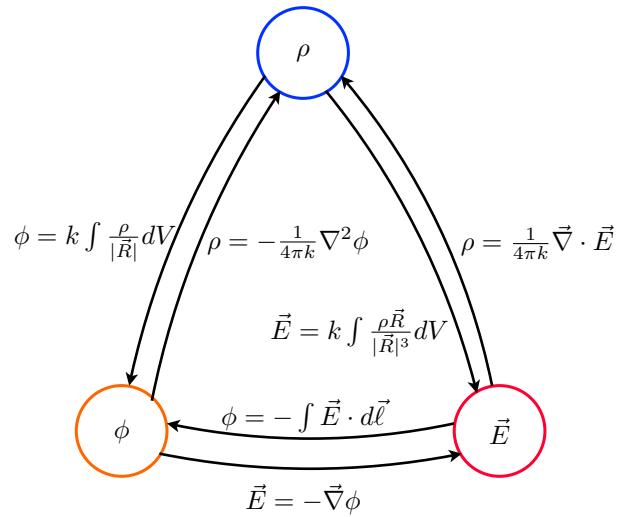


Figura 5.12: Resumen de los diferentes datos y posibles cantidades que se pueden obtener de estos.

5.8. Potencial y energía de una distribución de carga

Es importante estresar la diferencia entre la energía potencial y la diferencia de potencial, del mismo modo que los campos de fuerza y eléctrico no son lo mismo. Notemos, que mientras el potencial será el mismo para todas las cargas la energía potencial cambiará de signo dependiendo del signo de las cargas. Así, mientras las cargas positivas procurarán llegar a lugares con potenciales menores, disminuyendo su energía potencial, para las cargas negativas la disminución de la energía potencial ocurre en el caso opuesto, en la dirección en que el potencial aumenta.

Por otro lado, no debe confundirse esto con la energía asociada a un sistema de cargas, donde se suma el trabajo realizado sobre todas las cargas, debida a una fuerza externa. Ahora; utilizando el potencial podemos evaluar el trabajo y, de este, la energía. En efecto, de la expresión para la energía de una distribución de cargas puntuales (2.20), y el potencial debido a dicha distribución, ecuación (5.7), tenemos que la energía puede expresarse como

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi(\vec{r}_i). \quad (5.66)$$

De la misma forma que hemos obtenido las expresiones para el límite continuo tenemos que la energía para una distribución continua está dada por

$$U = \frac{1}{2} \int \phi(\vec{r}') dq(\vec{r}'). \quad (5.67)$$

de manera genérica, que se puede expresar como

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}') \phi(\vec{r}') dV'. \quad (5.68)$$

Lo que nos dice esta expresión es que, para efectos de la energía, esta se puede entender como si la carga interactuara con el potencial del sistema.

Ejercicio 5.14. *En cada esquina de un cubo se coloca un protón. Suponga que se coloca un noveno protón dentro del cubo. ¿Puede este electrón escapar? Es decir ¿existe algún camino que energéticamente favorezca que el protón escape? Justifique y, si su respuesta es negativa, diga en qué lugar dentro del cubo se localiza en equilibrio este protón.*

Ejercicio 5.15. Utilizando la relación (5.68) determinar la energía electrostática debida a una esfera uniformemente cargada de radio R .

Si ahora utilizamos la ecuación de Poisson para el potencial electrostático, ecuación (5.64), la ecuación (5.68) puede ser reescrita como

$$U = -\frac{1}{8\pi k} \int \phi \nabla^2 \phi dV. \quad (5.69)$$

Integrando por partes, recordando que el operador nabla es un operador diferencia y utilizando $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) = \phi \nabla^2 \phi + (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \phi)$, con $\vec{\nabla} \phi = -\vec{E}$, que no es otra cosa sino la regla de Leibniz para la derivada de un producto, tenemos

$$U = \frac{1}{8\pi k} \int |\vec{E}|^2 dV + \frac{1}{8\pi k} \int \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{E}) dV. \quad (5.70)$$

El primer término es precisamente la contribución que se motivo en la sección 4.7. La segunda es una contribución superficial a la energía debida a las fronteras del sistema, como se puede ver utilizando el teorema de la divergencia (4.62),

$$U = \frac{1}{8\pi k} \int |\vec{E}|^2 dV + \frac{1}{8\pi k} \oint \phi \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (5.71)$$

Para distribuciones localizadas se tiene que el potencial decrece más rápido que $1/r$ y el campo más rápido que $1/r^2$, i.e., el campo y potencial de la carga puntual es el que decae más lentamente. Ya que el área que encierra un volumen crece como r^2 , este último término decrecerá como una potencia negativa de r y por tanto para una superficie suficientemente grande, $\vec{r} \rightarrow \infty$, se anula, recuperando la relación alguna vez determinada entre la energía y el campo (4.53).

5.9. Circulación de campo electrostático

Al introducir el concepto de energía potencial y luego de potencial eléctrico se tiene implícito el hecho que la fuerza eléctrica y el campo eléctrico son campos conservativos. Esto se demuestra a través de la independencia del trabajo en el camino escogido y se traduce en la posibilidad de escribir estos campos como el gradiente de una función escalar. Es posible, todavía, expresar de una manera alterna esta característica de los campos a partir de las propiedades locales del campo y sin necesidad de recurrir a una función

escalar. Para esto necesitamos definir el rotacional de un campo vectorial. Consideremos una integral de línea por un camino cerrado C para el un campo vectorial \vec{F} ,

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.72)$$

Esta cantidad se denomina *circulación del campo* y estará asociada al camino cerrado C . De la definición misma de campos conservativos tenemos que la circulación de campo electrostático a través de cualquier camino es nula, o sea

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad (5.73)$$

que es la versión integral de nuestra segunda ecuación de Maxwell, que en el caso dinámico debemos modificar y conoceremos como la ley de Faraday, y dicta la naturaleza conservativa de este campo. Como sucedió con la ley de Gauss deseamos tener una descripción local dada por una ecuación diferencial, para esto debemos primero hablar del rotacional y el teorema de Stokes.

5.10. Rotacional

De manera análoga a cómo hicimos con la divergencia la idea es tomar un camino cuyo perímetro tienda a cero, de tal manera que la circulación sólo dependa de información local a los alrededores cercanos al punto donde nos interesa evaluar. Para hacer más preciso este límite lo que haremos es hacer el área que esta encierra tienda a cero, lo que garantiza que el perímetro también se anule. En este límite, tanto el área como la circulación pero esperamos que la razón entre ambas tienda a una cantidad finita; denotando $S(C)$ el área encerrada por el circuito, C , se tiene

$$\lim_{S(C) \rightarrow 0} \frac{\Gamma_C}{S(C)} = \lim_{S(C) \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S(C)} = \text{finito}, \quad (5.74)$$

que es la cantidad que definirá esta propiedad que estamos buscando del campo. Pero antes, debemos notar que, dependiendo de cómo escojamos el camino, se pueden obtener tres casos independientes: si se toma un camino en el plano XY sólo contribuirán a la circulación las componentes X y Y del campo; análogo para los casos en el plano XZ y YZ . Como tendremos

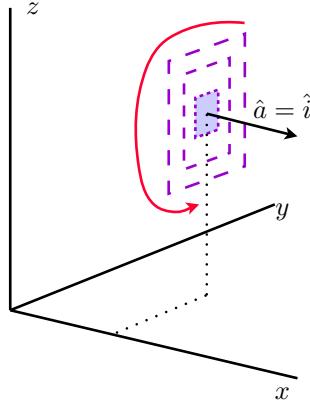


Figura 5.13: Tomando una superficie orientada en la dirección x y tiendiendo su tamaño a cero, se evalúa la circulación para evaluar la componente correspondiente del rotacional.

tres números independientes podemos formar un vector, que denominamos rotacional del campo \vec{F} y denotamos por $\text{rot}\vec{F}$.³ Vemos, entonces, que el rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial cuyas componentes dan la circulación por unidad de área del campo en tres direcciones perpendiculares. Así, por ejemplo, la componente x del rotacional se obtiene tomando $\hat{a} = \hat{i}$, o sea la circulación sobre un circuito en el plano YZ , como se ilustra en la figura 5.13. En general tenemos que con una superficie S vector de área dado por $\vec{A} = A\hat{a}$ (donde vemos que acá es esencial que área sea muy pequeña para poder definir el vector área), y que encierra el camino ∂S (la frontera de S), define la proyección del rotacional como

$$\text{rot}\vec{F} \cdot \hat{a} \equiv \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\partial S}}{A}. \quad (5.75)$$

En este punto es claro que hay algo que no ha sido definido en la anterior expresión. Para notar esto véase que si cambiamos la dirección del vector de área, el área no cambia, y el lado izquierdo de la anterior expresión cambia de signo, mientras que este cambio no se refleja en el lado derecho. Similarmente,

³Claro está que un vector no se puede hacer con cualquier tripleta de números. Estos, además, deben estar relacionados a través de rotaciones, tal y cómo lo hacen las componentes del vector posición. En este caso se garantiza por la forma que se han construido las tres componentes del rotacional.

si se cambia el sentido en que se recorre el camino el lado derecho cambia de signo mientras no se ve este cambio en el lado izquierdo. Tenemos, entonces, que definir una convención que relacione el vector área con la dirección en que se recorre el camino. Esta convención se conoce como *de la mano derecha*, y es ilustrada en la figura 5.14. La idea es que la dirección del vector área queda dictada por el pulgar de la mano derecha, encerrando la mano en la dirección en que se recorre el camino. De este modo, hemos relacionado

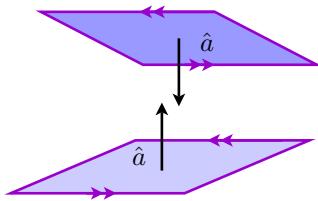


Figura 5.14: Dos superficies idénticas pero recorridas en sentidos contrarios por sus fronteras. Siguiendo la convención de la mano derecha tenemos que les corresponden vectores de área opuestos.

ambas cantidades y los signos de ambos lados de la ecuación (5.75) quedan unívocamente relacionados.

Resumiendo, el rotacional es un campo vectorial, cuyos vectores en cada punto apuntan precisamente en dirección normal al plano donde la circulación del campo es máxima, y su magnitud es el valor límite de la circulación por unidad de área cuando el área tiende a cero. Más adelante analizaremos mejor geométrica y físicamente el contenido de este ente matemático.

5.10.1. Teorema de Stokes

Supongamos que deseamos calcular la circulación de un campo \vec{F} a través de un camino C , que encierra una superficie S . Para realizar dicho cálculo podemos proceder de una manera muy similar a cómo evaluamos el flujo a través de una superficie cerrada partiendo el volumen encerrado en pedazos. Acá, si realizamos una partición del área en secciones S_i , tal que

$$S = \cup_i S_i, \text{ y } \cap_i S_i = \emptyset, \quad (5.76)$$

entonces tenemos que cada sección contará con su propio contorno ∂S_i por el cual podemos evaluar la circulación. Ahora; dado que en la parte interior,

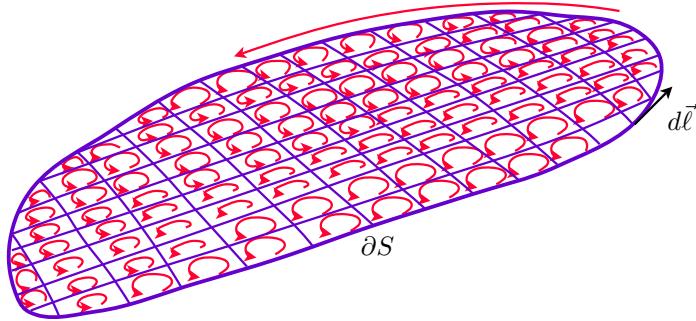


Figura 5.15: Superficie S con frontera la curva cerrada ∂S vista como la unión de una serie de superficies S_i cada una con frontera ∂S_i . La circulación de un campo a través de C es igual a la suma de las circulaciones a través del conjunto completo de los C_i en tanto todos se recorran en el mismo sentido, gracias a que los caminos adyacentes en el interior se recorren en sentidos contrarios y se cancelan sus contribuciones.

si hacemos que todos estos caminos se recorran en el mismo sentido, i.e., si sus vectores área puntan por la misma cara de la superficie,⁴ las secciones de camino compartidas por secciones vecinas se recorrerán en cada caso en sentido opuesto y entregarán el mismo valor pero con signo contrario (véase la figura 5.15), de modo que al sumarlas estas se cancelan. Concluimos, entonces que

$$\begin{aligned}\Gamma_{\partial S} &= \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \\ &= \sum_i^N \oint_{\partial S_i} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_i, \\ &= \sum_i^N \Gamma_i,\end{aligned}\tag{5.77}$$

donde suponemos que hemos dividido en N de estas S_i . Como estamos interesados en una propiedad local debemos tomar el límite cuando el número

⁴Las superficies donde esto es posible se denominan superficies orientables. Un ejemplo de superficie no orientable es la banda de Moebius. Similarmente sucede con la botella de Klein, donde no se puede definir un afuera o adentro y nuestra convención para el vector de área pierde sentido.

de subcircuitos es muy grande $N \rightarrow \infty$ de tal forma que dividimos la superficie encerrada de forma muy fina. Ciertamente este límite coincide con el que iniciamos la discusión del rotacional, pues tanto el área como la circulación a lo largo de cada sección va a tender a cero. Para hacer esto más evidente retomemos la expresión (5.77), multiplicando y dividiendo cada término por el área contenida por el circuito correspondiente, A_i , podemos escribir

$$\Gamma_{\partial S} = \sum_i^N A_i \left(\frac{\Gamma_{\partial S_i}}{A_i} \right), \quad (5.78)$$

que en el límite $N \rightarrow \infty$, según la definición del rotacional, toma la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{\partial S} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i^N A_i \mathbf{rot} \vec{F} \cdot \hat{a}_i, \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i^N \mathbf{rot} \vec{F} \cdot \vec{A}_i, \\ &= \int_S \mathbf{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

donde hemos reconstruido los vectores área $\vec{A} = A_i \hat{a}_i$ y tomado el límite continuo, que a estas alturas ya debe ser natural. Resumiendo tenemos:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \mathbf{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A}. \quad (5.80)$$

Esta relación matemática se conoce por el nombre del teorema de Stokes y relaciona la circulación del campo vectorial \vec{F} con el flujo de su rotacional a través de la superficie que tiene como frontera el circuito original. Nótese la similitud al teorema de la divergencia, ya que en ese caso se relacionaban el flujo del campo, o sea la integral de superficie que es un objeto dos dimensional, con la integral de volumen, tres dimensional, de la divergencia en el volumen encerrado por la superficie. Acá tenemos la integral de línea, elemento unidimensional, con la integral de superficie encerrada por la curva. Sin embargo, hay una diferencia dramática: mientras que para una superficie cerrada hay sólo un volumen que esta encierra, dado un camino cerrado C existen infinitas superficies S con frontera dada por este, i.e. $C = \partial S$ (véase figura 5.16). En esto reside parte de la maravilla del teorema, pues no especifica la superficie y dicta que la circulación de un campo por el camino C coincide con el flujo del rotacional de este campo a través de cualquier superficie cuya frontera sea el circuito C .



Figura 5.16: La formación de burbujas de jabón ilustran cómo dado una frontera, el aro, existen infinitas superficies.

5.10.2. Forma diferencial de la segunda ecuación de Maxwell

Retomando la ley de la electrostática que dicta que el campo es conservativo, reflejada en el hecho que la circulación alrededor de cualquier camino cerrado es nula, utilizando el teorema de Stokes se sigue que

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (5.81)$$

para cualquier camino y, por tanto, para cualquier superficie. Esto sólo es posible si el integrando es nulo, o sea

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \quad (5.82)$$

que es la forma diferencial de la ley.

5.11. Rotacional en coordenadas cartesianas

Partiendo de la definición general veamos la expresión para el rotacional en coordenadas cartesianas. Para esto calculemos la componente Z de esta y por analogía deduciremos las otras dos componentes.

Para la componente Z debemos tomar un circuito en el plano XY el cual por conveniencia tomaremos rectangular de lados Δx y Δy , y dada la convención lo recorreremos primero en la dirección positiva en X y luego en la

dirección positiva en y , es decir en el sentido contrario de la manecillas del reloj mirando el plano XY desde arriba,⁵ como se ilustra en la figura 5.17.

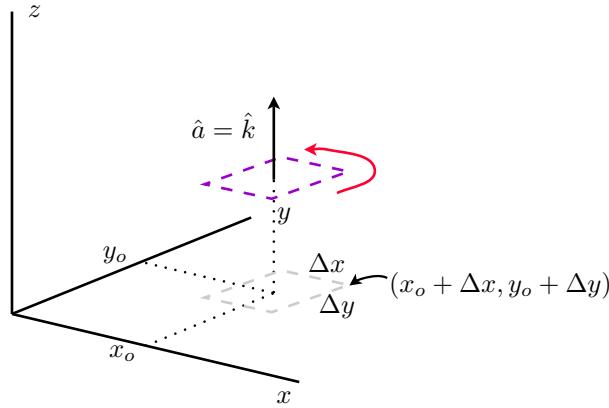


Figura 5.17: Tomamos un rectángulo paralelo al plano XY con lados Δx y Δy y centrado en el punto (x_o, y_o) . El contorno se recorre en el sentido antihorario.

Utilizando una expansión de Taylor podemos relacionar el valor de las componentes en cada lado del rectángulo, suponiendo la el centro del rectángulo en (x_o, y_o) .

$$F_x \left(x_o, y_o \pm \frac{1}{2} \Delta y \right) \approx F_x(x_o, y_o) \pm \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial y} \Big|_{(x_o, y_o)} \Delta y, \quad (5.83)$$

$$F_y \left(x_o \pm \frac{1}{2} \Delta x, y_o \right) \approx F_y(x_o, y_o) \pm \frac{1}{2} \frac{\partial F_y}{\partial x} \Big|_{(x_o, y_o)} \Delta x. \quad (5.84)$$

No calculamos las otras variaciones ya que son irrelevantes ya que F_x contribuye cuando y es constante, y F_y cuando x es constante. La circulación

⁵Recordemos que los ejes coordinados x , y y z satisfacen en este orden un ordenamiento como de mano derecha, i.e., el eje x el índice, el eje y el medio y el eje z el pulgar, de tal manera que $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$.

sobre el circuito una vez calculado queda

$$\begin{aligned}\Gamma_z &= \int_{(x_o - \frac{1}{2}\Delta x, y_o - \frac{1}{2}\Delta y)}^{(x_o + \frac{1}{2}\Delta x, y_o - \frac{1}{2}\Delta y)} F_x(x, y) dx + \int_{(x_o + \frac{1}{2}\Delta x, y_o - \frac{1}{2}\Delta y)}^{(x_o + \frac{1}{2}\Delta x, y_o + \frac{1}{2}\Delta y)} F_y(x, y) dy \\ &\quad + \int_{(x_o + \frac{1}{2}\Delta x, y_o + \frac{1}{2}\Delta y)}^{(x_o - \frac{1}{2}\Delta x, y_o + \frac{1}{2}\Delta y)} F_x(x, y) dx + \int_{(x_o - \frac{1}{2}\Delta x, y_o + \frac{1}{2}\Delta y)}^{(x_o - \frac{1}{2}\Delta x, y_o - \frac{1}{2}\Delta y)} F_y(x, y) dy, \quad (5.85)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\approx F_x \left(x_o, y_o - \frac{1}{2}\Delta y \right) \Delta x + F_y (x_o + \Delta x, y_o) \Delta y \\ &\quad + F_x \left(x_o, y_o + \frac{1}{2}\Delta y \right) (-\Delta x) + F_y (x_o - \Delta x, y_o) (-\Delta y), \quad (5.86)\end{aligned}$$

$$\approx \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (5.87)$$

De la definición para el rotacional como la circulación por unidad de área tenemos que

$$(\mathbf{rot} \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}. \quad (5.88)$$

Un análisis análogo entrega que

$$\mathbf{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (5.89)$$

Este, al igual que la divergencia y el gradiente puede expresarse utilizando el operador nabla,

$$\mathbf{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (5.90)$$

donde se ha utilizado la expresión del producto cruz como el determinante de las componentes de los vectores en coordenadas cartesianas. Al igual que con lo anteriores operadores la expresión varía con el sistema de coordenadas, sin embargo, la relación genérica $\mathbf{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ es valida en todos los sistemas y se escoge para, en adelante, denotar el rotacional, sin referencia al sistema de coordenadas. Así, por ejemplo, la ecuación de Maxwell en forma diferencial queda

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (5.91)$$

La expresión (5.91) es la segunda ecuación de Maxwell que encontramos en el curso, aunque debemos modificarla en el caso dinámico, y nos indica precisamente que los campos electrostáticos son conservativos. Esta, junto con la ley de Gauss, conforman un conjunto de ecuaciones diferenciales que determinan completamente el campo electrostático, una vez se conocen la densidad de carga las condiciones de frontera en el espacio que se desea estudiar.

5.12. Significado geométrico y físico del rotacional

Como hemos visto el rotacional nos indica que el campo vectorial cuyo rotacional no sea nulo entrega una circulación no nula. Esto nos indica que tiene un carácter a curvarse y sus líneas de campo se verán como se muestra en la figura 5.18.

Este comportamiento se conoce como vorticidad y se entiende por ejemplo en el campo de velocidades de las corrientes en un huracán o al bajar la cisterna. En general se puede entender como la tendencia de mantener un movimiento giratorio un molino de tamaño diferencial ubicado en el punto donde se desea evaluar dicha vorticidad. Con los campo electromagnéticos esto sucederá solamente en los puntos alrededor de los cuales el campo se curva, y en el resto del espacio será nulo. La figura 5.19 muestra dos ejemplos con rotacional no nulo en dos puntos. En un caso apuntando ambos en la misma dirección y en el segundo con sentidos opuestos. Como también se advirtió con la divergencia estas interpretaciones que hacen uso de las líneas de campo pueden fallar en ciertas circunstancias. La figura 5.20 ilustra esto para el campo $\vec{F} = x\hat{j}$, donde las líneas de campo no presentarían curvatura y disimularían la vorticidad, la cual igual se presenta debido a que el campo aumenta con la distancia pero no cambia su dirección. Esto nos advierte lo delicado que puede resultar interpretar apresuradamente campos arbitrarios con sólo las líneas de campo, como última ilustración de este punto tenemos el campo mostrado en el [enlace](#) donde la disminución de la velocidad con la distancia garantiza que el rotacional sea no nulo sólo justo en el centro. Por otro lado, dos campos muy similares, [campo 1](#) y [campo 2](#), el primero donde la velocidad decrece muy lento con la distancia y en el segundo donde decrece muy rápido y que, por tanto, cuentan con rotacionales no nulos en

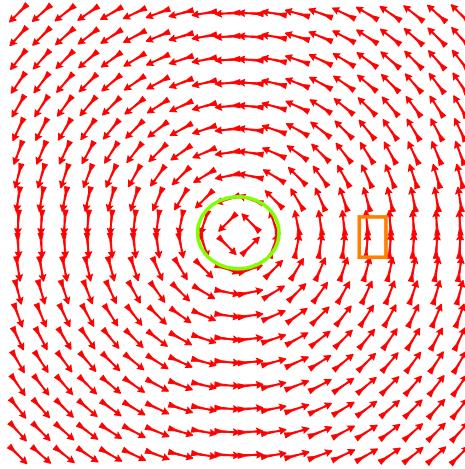


Figura 5.18: El campo vectorial donde se observa un vórtice. En el centro de esta vorticidad, resaltado por el círculo verde, el rotacional será no nulo y apuntando hacia afuera. La circulación a lo largo del rectángulo naranja podrá ser no nula dependiendo de la variación de la magnitud del campo con la distancia. Para los campos con los que trabajaremos (véase discusión más adelante) en el punto marcado por el rectángulo el rotacional será nulo.

todo el espacio. También los invito a que jueguen con este [simulador en línea](#) con varias opciones que ilustran varios campos en distintas maneras.

La pregunta sería si el campo eléctrostático tiene o no rotacional nulo. Experimentalmente es posible, en principio, conocer si el campo tiene vorticidad no nula al entender que las líneas de campo son las trayectorias que seguirían las cargas eléctricas sumergidas en este, mientras se encuentren a muy bajas velocidades. Así un campo eléctrico con vorticidad no nula hará mover las cargas en circuitos cerrados, de tal forma que al colocar carga eléctrica en las aspas de una hélice esta comenzaría a girar por el efecto del campo. Es posible, entonces, medir el torque que surge por esta interacción con bastante precisión; Aunque tal vez más sencillo sería simplemente colocar un circuito con materiales conductores, osea con electrones libres, y observar si aparecen corrientes circulando sin la necesidad de baterías.

Lo que se encuentra es que no hay evidencias de esta fuerza en el caso estático y por tanto se concluye que el rotacional de campo electrostático es

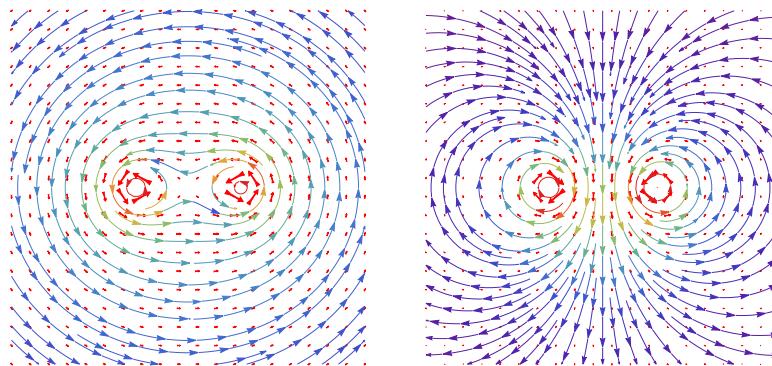


Figura 5.19: Dos ejemplos de campos con rotacional no nulo en dos puntos, a la derecha uno entrando a la página y otro la saliendo, y a la izquierda ambos saliendo.

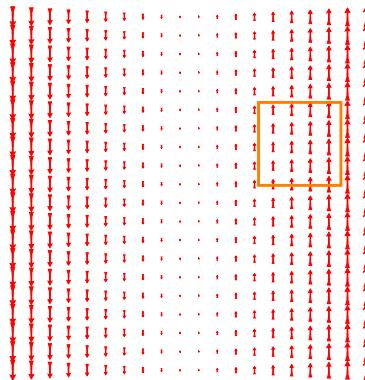


Figura 5.20: Ejemplo de campo en el cuál la descripción por líneas de campo falla para interpretar el rotacional. Vemos que, a pesar que no tiene una vorticidad evidente la contribución a la circulación por el rectángulo naranja será mayor por el lado derecho que por el izquierdo, dado que el campo allí tiene mayor magnitud. De modo que el rotacional es no nulo, saliendo de la página en la mitad derecha del diagrama y entrando en la parte izquierda.

cero. Entendemos entonces, que las líneas de campos electrostáticos nunca se cierran en sí mismas, comenzando y terminando necesariamente en cargas

eléctricas. Más adelante, en el caso dinámico, veremos que es posible generar campos eléctricos de otra forma, tales que sus líneas de campo sean cerradas y por tanto tengan rotacional no nulo. En el caso estático esto está contenido en la ecuación (5.91).

Otra forma de predecir este resultado es utilizando el hecho que el trabajo realizado por el campo electrostático en un circuito cerrado es nulo, o sea el campo es conservativo. Si las líneas de campo se cierran en sí mismas se tiene que el trabajo realizado en todo el circuito, dado por la línea de campo, es no nulo contradiciendo lo que ya hemos calculado explícitamente. Interesantemente el resultado es aun más fuerte ya que es posible demostrar que todo campo cuyo rotacional sea cero puede escribirse como el gradiente de una función potencial, y viceversa, como se puede demostrar explícitamente utilizando la propiedad $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \phi) = 0$, valida para cualquier función escalar diferenciable, i.e.,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} \phi. \quad (5.92)$$

Recordamos que sólo los campos conservativos pueden ser escritos como el gradiente de una función escalar, se sigue que el hecho que el rotacional de un campo vectorial sea nulo nos indica que este es un campo conservativo.

Ejemplo 5.12.1. Rotacional de campo ficticio I

Podemos por ejemplo probar que el campo del ejemplo 5.2.2 tiene rotacional nulo.

El campo está dado por $\vec{E} = k(y\hat{i} + x\hat{j})$, de la expresión encontrada para el rotacional tenemos entonces que,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 + 0 = 0, \quad (5.93)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 + 0 = 0, \quad (5.94)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = k - k = 0. \quad (5.95)$$

Mostrando que efectivamente es un campo conservativo.

Sin embargo, el análisis por líneas de campo no será posible. Este ejemplo nos muestra otra instancia en la la utilización de líneas de campo puede ser engañoso. En efecto el campo, mostrado en la figura 5.21 (también en 5.11), corresponde a la superposición lineal de los campos $ky\hat{i}$ y $kx\hat{j}$, que como se mencionó anteriormente tienen rotacional no nulo aun sin presentar vorticidad en sus líneas de campo, demostrando la raíz de esta aparente contradicción y

la razón de no poder utilizar la representación por líneas de campo sin caer en incongruencias con lo establecido hasta el momento.

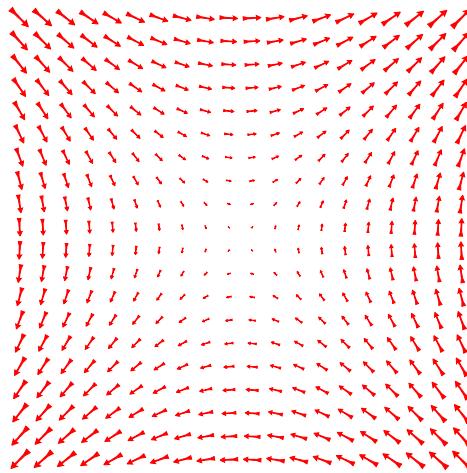


Figura 5.21: Representación gráfica del campo $k(y\hat{i} + x\hat{j})$ aparenta una voracidad no nula. Sin embargo, como mostrado en los ejemplos 5.2.2 y 5.12.1, corresponde a un campo conservativo.

Ejemplo 5.12.2. Rotacional de campo ficticio II

Si tomamos ahora el campo $-ky\hat{i} + kx\hat{j}$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 + 0 = 0, \quad (5.96)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 + 0 = 0, \quad (5.97)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = k - (-k) = 2k. \quad (5.98)$$

Observamos que este campo, representado en la figura 5.22, cuenta con un rotacional no nulo en todo el espacio. Sin embargo, si analizado por líneas de campo el rotacional debería ser no nulo sólo en el origen. El problema nuevamente resulta de haber construido el campo a partir de la superposición lineal de los campos $ky\hat{i}$ y $kx\hat{j}$, que independientemente cuentan con rotacionales no nulos aun sin presentar curvatura en sus líneas de campo.

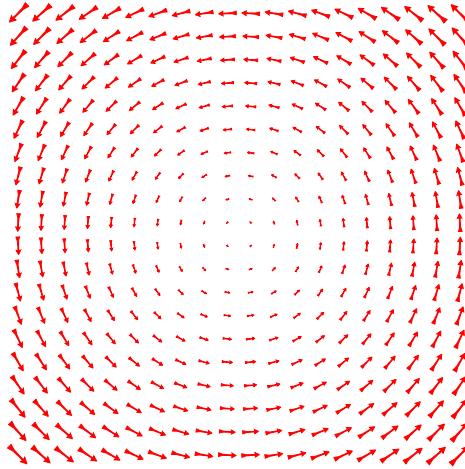


Figura 5.22: Representación gráfica del campo $k(-y\hat{i} + x\hat{j})$ que presenta un geometría como la que discutimos para los campos con vorticidad, y en efecto su rotacional es no nulo. Sin embargo, para este campo tampoco la interpretación por líneas de campo resulta válida.

Ejercicio 5.16. Calcule la divergencia y rotacional de cada uno de los siguientes campos vectoriales:

- $\vec{F} = (x + y)\hat{i} - (x - y)\hat{j} - 2z\hat{k}$.
- $\vec{F} = 2y\hat{i} + 2x\hat{j} + 3y\hat{k}$.
- $\vec{F} = (x^2 - z^2)\hat{i} + 2\hat{j} + 3xz\hat{k}$.
- $\vec{F} = \frac{1}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$, con $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

En caso que el rotacional sea cero, trate de determinar el potencial correspondiente al campo.

Ejercicio 5.17. Para los campos:

- $\vec{F} = \frac{1}{r^2}(-y\hat{i} + x\hat{j})$
- $\vec{F} = \frac{1}{r}(-y\hat{i} + x\hat{j})$

con $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, realice un diagrama aproximado del campo y evalúe el rotacional correspondiente y, para puntos distintos al origen vea si es nulo o no ¿qué dice esto sobre la interpretación por líneas de campo?

Ejercicio 5.18. Calcule el rotacional para el campo de fuerzas del problema 2.10.

Ejercicio 5.19. Muestre, por cálculo explícito, que el rotacional del gradiente de una función escalar es exactamente nulo.

Ejercicio 5.20. Las ecuaciones de Maxwell trabajan mancomunadamente para determinar completamente los campos una vez conocemos las fuentes y condiciones de frontera. Así, por ejemplo, el requerimiento de solamente pedir un campo conservativo no fija completamente el campo de una carga puntual. Vemos que la solución a un rotacional nula es efectivamente un campo radial, pero, esto no fija su dependencia con la distancia. Para ilustrar esto, evalúe el rotacional del campo

$$\vec{M}(\vec{r}) = C \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{n+1}}, \quad \text{con } n \in \mathbf{R}.$$

Ejercicio 5.21. Utilice el teorema de Stokes en una superficie cerrada para demostrar el hecho que la divergencia de un rotacional es idénticamente nula, i.e.,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0.$$

5.13. Ejercicios extra

Berkeley 2ed 1984 2.4, 2.5, 2.7, 2.12, 2.15, 2.20, 2.21, 2.28,

Capítulo 6

Materiales conductores

Ya desde los primeros experimentos con electricidad se conocía que algunos materiales podían mantener durante períodos más largos sus propiedades luego de ser cargados, distinguiéndose distintas clases de materiales por la facilidad de mantener o perder esta carga inducida.

Los estudios de Stephen Gray durante la década de 1730 mostraron que era posible electrizar o des-electrizar los objetos a través de objetos metálicos, lo que indica que el fluido sutil puede ser transportado por ciertos materiales. Por ejemplo, las cuerdas de seda utilizadas para sostener los alambres utilizados por Gray no permiten este transporte. Si se cuelga entonces un objeto previamente cargado con cuerdas de seda se observa que continua cargado por largos períodos, incluso años. Esto en condiciones normales donde hay pérdidas por moléculas de aire. Así, Gray y contemporáneos fueron capaces de determinar que los tiempos de descarga pueden diferir en 10^{20} ordenes de magnitud.¹

Ahora entendemos que la diferencia puede entenderse en términos análogos a los fluidos, donde los conductores son tales que permiten el movimiento de las cargas y los aislantes no; Si, por ejemplo, un conductor se encuentra en presencia de un campo eléctrico no nulo, las cargas comienzan a acelerarse. Para el caso de los metales ocurre que son los denominados electrones de conducción, los que se encuentran libres de moverse, pero en general, debido a que las aceleraciones de cargas positivas y negativas son opuestas se presentará una concentración de cargas de signos contrarios en los límites opuestos del conductor, tal y como se ilustra en la figura 6.1. Las cargas, entonces,

¹Nota personal:[Buscar referencia](#).

comienzan a concentrarse en la superficie del material pues suponemos no pueden escapar de este, a menos que encuentren otro conductor que les permita el paso. Estas comenzarán a acumularse hasta encontrar un estado de equilibrio.

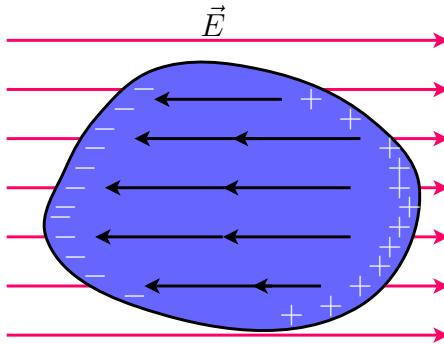


Figura 6.1: Un conductor en presencia de un campo externo (en rojo). La separación de las cargas genera una distribución de carga con signos opuestos en las caras opuestas del conductor. La distribución de cargas inducidas genera un campo extra (en blanco) que, finalmente, origina un equilibrio y las cargas en el interior cesan de acelerarse.

Este equilibrio se logra debido a que la concentración superficial de carga que se está formando genera su propio campo, que es opuesto al externo aplicado al conductor. Así, hasta no encontrar el equilibrio las cargas continuarán acelerándose y moviéndose debido al campo externo alimentado las concentraciones de carga mencionadas. Este equilibrio se logra casi instantáneamente² gracias a que no es debido al desplazamiento de cargas desde el centro hasta el borde sino de la redistribución de cargas desde sus lugares vecinos.

Estamos encontrando, primero, que cuando se habla de campos externos en un conductor sólo la superficie entra en juego, y, segundo, que el campo eléctrico dentro de un conductor es nulo. Todo esto independiente de la forma del objeto y del campo externo. Nuestro análisis considera campos estáticos pero es igualmente válido para campos que no varían muy rápido en el tiempo.³

²Para ser precisos este tiempo se puede estimar dado el tamaño L del objeto y la velocidad de la luz c . Así, el tiempo de relajación es aproximadamente $\tau \sim L/c$.

³Precisaremos a qué nos referimos con rápido luego cuando veamos el caso dinámico, pero del pie de página 2 se puede inferir relativamente fácil.

Asimismo, aun si el cascarón conductor tiene pequeños orificios, por ejemplo, un tubo largo con los extremos abiertos, este efecto que denominaremos de apantallamiento sigue ocurriendo disminuyendo el campo casi a cero. Esta es una de las razones por la que las corazas de los elementos electrónicos son de metal, evitando de este modo la interferencia debida a campos externos. El anterior análisis no sólo nos da información sobre el campo interior sino también sobre el campo en la superficie: el estado de equilibrio lo definimos como tal que las cargas permanecen en reposo respecto al material. En la dirección normal a la superficie esto se entiende por el hecho que más allá no encuentran forma de salir, no hay conductor alguno, mientras que en la dirección tangencial esto ocurre sólo si no hay componente de campo en esta dirección; Concluimos, entonces, que el campo es normal a la superficie del conductor y, por tanto, la superficie es en sí una equipotencial. Pero esto no es todo: dado que el campo al interior del conductor es nulo se sigue que todo el material se encuentra a un mismo potencial, o sea, el conductor en total conforma una región equipotencial. Todo lo anterior se resume al decir que las líneas de campo son normales a la superficie del conductor y nulas en el interior.

Cualquiera que sea el campo externo podemos saber, entonces, la densidad superficial que se genera. Esto aprovechando la relación encontrada para la discontinuidad del campo eléctrico al cruzar una densidad de carga superficial (4.40). Punto a punto, en la superficie del conductor, se tiene la relación entre el campo eléctrico justo afuera del conductor y la densidad de carga inducida

$$E = 4\pi k\sigma . \quad (6.1)$$

Esta también permite proceder de manera inversa: conociendo la densidad de carga conocer el campo. Pero experimentalmente lo usual es proceder de la primera forma midiendo diferencias de potencial, i.e., campos.

Estresamos el hecho que sea punto a punto, ya que en general el campo, y por tanto la densidad, no es constante, aun en magnitud, sobre la superficie. Por ejemplo, una esfera conductora en el campo eléctrico de una carga puntual genera las siguientes líneas de campo

En general, ya que los conductores se comportan como equipotenciales deformarán el campo de las cargas a sus alrededores de modo que se logre una equipotencial con la forma de la superficie del conductor.

Por ejemplo, supongamos una esfera conductora cargada, con carga Q , lejos de cualquier conductor. Al estar libres las cargas, estas por repulsión se

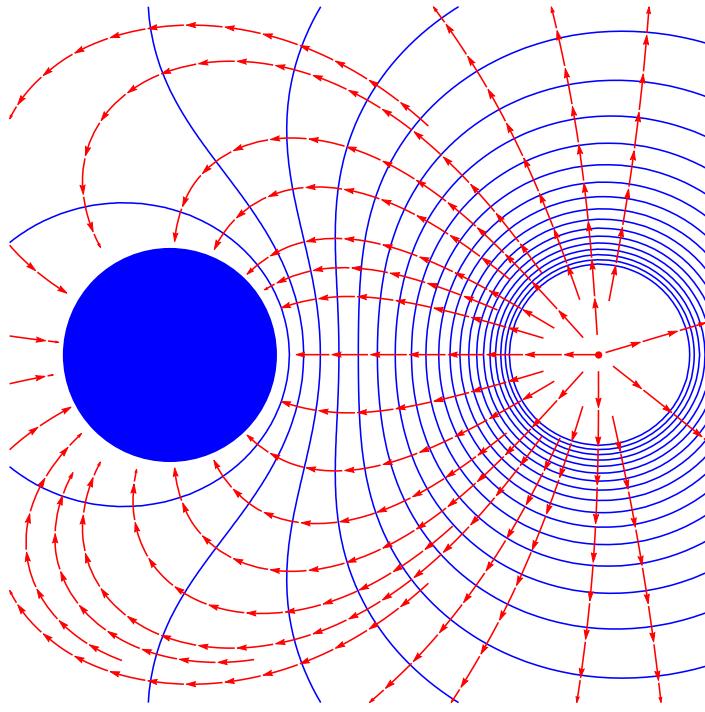
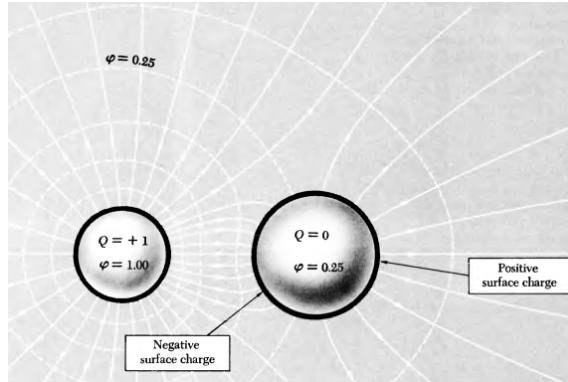


Figura 6.2: Carga puntual positiva en rojo frente a una esfera conductora. Se muestran en rojo las líneas de campo en uno de los planos y las equipotenciales en el azul. La esfera misma es una región equipotencial.

alejarán hacia la superficie hasta lograr un campo interno nulo. La carga entonces queda concentrada toda en la superficie, y por simetría sabemos que debe quedar uniformemente distribuida, i.e., $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$. Lo que tenemos finalmente es un cascarón uniformemente cargado, al cual le conocemos su campo eléctrico externo $\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$, o sea que la esfera conductora cargada se comporta como una carga puntual. Esto deja de ser cierto en presencia de otros conductores que, como ya dijimos, distorsionan el campo y por tanto la distribución de carga del primer conductor, pero siempre tal que las superficies permanezcan como una equipotencial



El caso anterior de la esfera cargada es un ejemplo típico de un problema de frontera electrostático. En cualquier caso dada la relación entre el campo y la densidad de carga podemos expresar la carga en el conductor como

$$\begin{aligned} Q &= \oint_A \sigma dA, \\ &= \frac{1}{4\pi k} \oint_A |\vec{E}| dA, \\ &= \frac{1}{4\pi k} \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde hemos utilizado el hecho que el campo en la superficie es normal a esta.

En un sistema de conductores, entonces, cualquiera que sea la solución debe satisfacer:

$$\phi = \phi_k = cte, \text{ sobre la superficie, } A_k, \text{ del conductor k-esimo.} \quad (6.3)$$

Estos potenciales se consideran que pueden ser determinados experimentalmente y son las condiciones de frontera al problema a solucionar.

Si lo que se conocen son las carga de los conductores tenemos que el campo debe satisfacer:

$$Q_k = \frac{1}{4\pi k} \oint_{A_k} \vec{E} \cdot d\vec{A}_k, \quad (6.4)$$

como es también dictado por la ley de Gauss.

Como se advertía en la sección 5.6 en general no es posible conocer la distribución de carga sobre todo el espacio bajo estudio. En cambio, esta viene implícita en condiciones de frontera que deben implementarse para solucionar

el problema de la ecuación de Poisson como un problema típico de condiciones de frontera, que dictan parte de la solución. Los dos tipos de condiciones de frontera expuestas se conocen como tipo Dirichlet, donde se fija la función como tal, en este caso el potencial; y en el segundo caso de tipo Neuman, donde son las variaciones las que se conocen. En el presente curso no nos adentraremos en las sutilezas de dicho problema y sus soluciones, limitándonos a mostrar que efectivamente dada una densidad de carga en el volumen y una condición de frontera existe una única solución.

6.1. Teorema de la unicidad

En los capítulos anteriores encontramos la ecuación diferencial que rige los sistemas electrostáticos,

$$\nabla^2 \phi = -4\pi k \rho, \quad (6.5)$$

esta debe ser combinada con un conjunto de condiciones de frontera de tal forma que determine las soluciones. En el caso de conductores hemos encontrado las condiciones (6.3) y (6.4). La ecuación (6.4) en particular determina las componentes normales del campo, o sea, las derivadas normales del potencial. Estas condiciones son simplemente restricciones que se le imponen a las posibles soluciones de (6.5). Lo que hemos planteado es lo que se conoce como problema de frontera.

Una pregunta valida que uno puede formularse es si dadas una condiciones de frontera la solución a (6.5) es única o si existen varios potenciales que sean solución y además satisfagan las condiciones de frontera. Físicamente esperamos que este sea el caso ya que somos capaces de medir y repetir la medición sin lugar a confusión sobre lo que estamos midiendo, o sea el campo que cumple con las condiciones de frontera dadas. Matemáticamente la demostración se hace por reducción al absurdo.

Supongamos que tenemos dos soluciones distintas φ y ψ , soluciones de la ecuación (6.5) para una densidad de carga ρ_* , i.e.,

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi k \rho_*, \quad \nabla^2 \psi = -4\pi k \rho_*, \quad (6.6)$$

que además satisfacen las mismas condiciones de frontera. Por simplicidad tomaremos condiciones tipo Dirichlet, ecuación (6.3),⁴ i.e.,

$$\varphi|_{\text{frontera}} = f(\vec{r}), \quad \psi|_{\text{frontera}} = f(\vec{r}). \quad (6.7)$$

Si definimos la función $U = \psi - \varphi$ es tal que satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 U = 0 \quad (6.8)$$

y, además, satisface las condiciones de frontera

$$U|_{\text{frontera}} = 0. \quad (6.9)$$

Sin demostrarlo formalmente, decimos que una función que satisface la ecuación de Laplace y cumple que es cero en toda la frontera es necesariamente cero sobre todo el espacio, o sea

$$U(\vec{r}) \equiv 0. \quad (6.10)$$

De la definición de U tenemos que es cero si y sólo si φ y ψ son idénticas sobre todo el espacio, o sea son la misma función, demostrando lo pedido.

6.2. Algunos sistemas con conductores

La información apenas obtenida nos servirá para determinar las soluciones al problema electrostático en diversos sistemas. En esta sección veremos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 6.2.1. Cascarones cargados concéntricos

Consideremos dos cascarones concéntricos con cargas Q_1 y Q_2 , y radios $R_1 > R_2$. A diferencia a los visto en el capítulo anterior la desidad de carga no puede ser simplemente dada ya que las cargas son libres de moverse. Sin embargo, las simetrías del sistemas nos permiten conocer cómo será la distribución. En este caso es clara la simetría esférica luego no esperamos que exista concentración de carga en exceso en ninguna dirección en particular, i.e. la carga está uniformemente distribuida sobre los cascarones. De este análisis extraemos inmediatamente que el problema se reduce a uno del capítulo anterior donde aprendimos: 1) fuera de una distribución con simetría

⁴La demostración para el caso con condiciones de frontera del tipo (6.4) sigue el mismo análisis.

esférica el campo es el de una carga puntual con carga la carga total y en el centro de la distribución, y ii) dentro de un cascarón con distribución de carga uniforme el campo debido a este es cero.

$$\vec{E} = k \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} \hat{r}$$

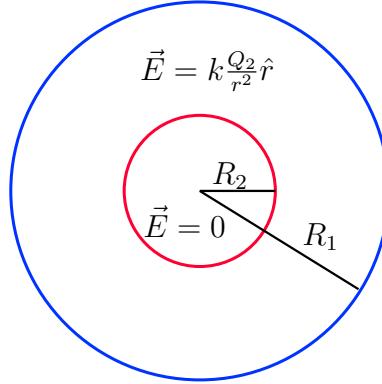


Figura 6.3: Dos cascarones conductores cargados con radios $R_2 < R_1$. La simetría implica una densidad de carga uniforme para la cual conocemos que el campo en el interior es nulo y en el exterior es como una carga puntual situada en el centro. De esta forma se identifican los campos en cada región.

Entonces, por superposición,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}k \begin{cases} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2}, & \text{si } r > R_1, \\ \frac{Q_2}{r^2}, & \text{si } R_1 \geq r > R_2, \\ 0, & \text{si } R_2 \geq r. \end{cases} \quad (6.11)$$

El potencial fuera del cascarón externo lo podemos o bien calcular de la integral de línea del campo o utilizar el principio de superposición, sabiendo las contribuciones de cada cascarón. Para cada cascarón para $r > R_1$ tenemos una contribución de la forma kQ_i/r , luego

$$\phi(r \geq R_1) = k \frac{Q_1 + Q_2}{r}. \quad (6.12)$$

Si utilizamos el mismo argumento para calcular el potencial entre el cascarón interno y el externo, debemos recordar que el campo debido a el cascarón con radio R_1 es cero para $r < R_1$. Por tanto el potencial debido a este es constante

dentro de la superficie $r = R_1$ y es igual a kQ_1/R_1 . Por lo tanto

$$\phi(R_2 \leq r \leq R_1) = k\frac{Q_2}{r} + k\frac{Q_1}{R_1}, \quad (6.13)$$

donde la primera parte es la contribución usual debida al cascarón interno. Este se puede comprobar directamente calculando la integral de línea del campo,

$$\phi(R_2 \leq r \leq R_1) = - \int_{\infty}^{R_2 \leq r \leq R_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad (6.14)$$

$$= - \int_{\infty}^{R_1} E(r) dr - \int_{R_1}^{R_2 \leq r \leq R_1} E(r) dr, \quad (6.15)$$

$$= - \int_{\infty}^{R_1} k \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} dr - \int_{R_1}^{R_2 \leq r} k \frac{Q_2}{r^2} dr, \quad (6.16)$$

$$= k \left(\frac{Q_1 + Q_2}{R_1} + \frac{Q_2}{r} - \frac{Q_2}{R_1} \right), \quad (6.17)$$

$$= k \frac{Q_2}{r} + k \frac{Q_1}{R_1}. \quad (6.18)$$

En la región interna al cascarón de radio R_2 el campo es cero y por tanto el potencial es constante e igual al del potencial del cascarón pequeño, o sea,

$$\phi(r \leq R_2) = k\frac{Q_2}{R_2} + k\frac{Q_1}{R_1} \quad (6.19)$$

Una cantidad de interés en este caso será la diferencia de potencial entre el cascarón interno y el externo, dada por

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{R_1-R_2} &= \phi(R_1) - \phi(R_2), \\ &= k\frac{Q_1 + Q_2}{R_1} - k\frac{Q_2}{R_2} - k\frac{Q_1}{R_1}, \\ &= kQ_2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

que, como es de esperarse, depende sólo de la carga del cascarón interno. Un caso particular de para este ensamble, y que consideraremos a fondo dentro de poco, es cuando las cargas de los cascarones son iguales de signo contrario $Q_1 = -Q_2$. En este caso el campo externo es nulo.

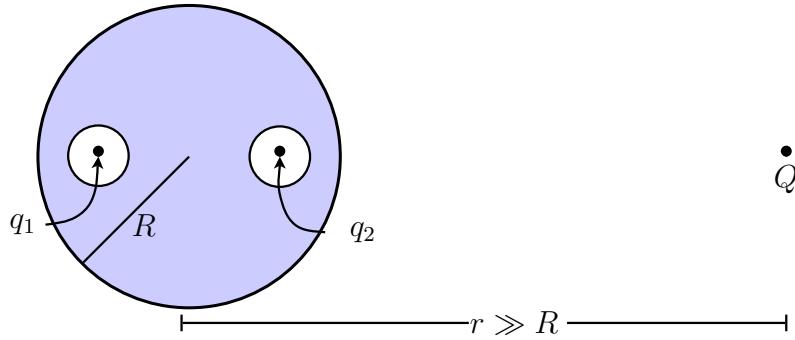


Figura 6.4: Conducto esférico neutro con dos cavidades esféricas y dos cargas justo en el centro de estas. Otra carga se situa por fuera y muy lejos.

Ejemplo 6.2.2. Conductor esférico con cavidades

Supongamos un conductor de forma esférica al que se le realizan dos cavidades, esféricas también.

El conductor en sí es neutro pero en el centro de cada cavidad hay una carga, con q_1 y q_2 respectivamente. Supongamos que muy lejos de la esfera, o sea a una distancia r mucho mayor que el radio de la esfera, $r \gg R$, se coloca una carga Q . Analicemos el problema para determinar, así sea aproximadamente la fuerza sobre cada objeto.

Aprovechando el hecho que la carga externa se encuentra muy lejos, tenemos que el la esfera conductora, con lo que sea que tenga adentro se verá casi como un punto, por lo que esperamos que el campo generado por esta se vea con simetría esférica. Podemos por tanto calcular el campo de la esfera utilizando Gauss y una superficie esférica, lo que nos entrega el resultado bien conocido a esta altura

$$\vec{E}_{esfera} = k \frac{Q_{enc}}{r^2} \hat{r}. \quad (6.21)$$

Ya que el conductor es neutro la carga neta encerrada es simplemente la suma de la las cargas que se encuentran en las cavidades, esto independientemente de la distribución de carga que se haya inducido en el conductor, o sea $Q_{enc} = q_1 + q_2$. Tenemos entonces que la fuerza que experimenta la carga externa es

$$F = QE_{esfera} = k \frac{Q(q_1 + q_2)}{r^2}. \quad (6.22)$$

Este resultado es sólo aproximado ya que hemos considerado la esfera a una distancia muy grande donde podemos despreciar el hecho que su campo

no es exactamente efericamente simétrico. En cierta forma estamos de este modo despreciando la distribución de carga inducida en la esfera debida a la carga externa, ya que esta genera una fuerza que es independiente de las cargas internas. Un cálculo más riguroso debe entonces mostrar, además de correcciones del orden R/r , términos con dependencias extra en el valor de la carga externa Q , i.e., términos que no cambian linealmente con el cambio de Q . Más precisamente, como se puede mostrar utilizando el método de las imágenes que ilustraremos dentro de poco, existe un término cuadrático que a grandes distancias se observa como $\frac{R}{r^3}Q^2$.

Para las cargas dentro de las cavidades, la fuerza que estas pueden experimentar puede provenir sólo de su interacción con el conductor, pues este se encarga de apantallar completamente los campos externos y, en particular, el resultado que encontramos será independiente de la distancia r e incluso de la separación entre las cavidades. Por esta razón para el análisis de esta fuerza nos concentraremos sólo de los efectos de esta carga sobre el conductor; Para iniciar analicemos la densidad de carga inducida en la superficie de la cavidad: tomando una superficie gaussiana rodeando la cavidad el flujo es nulo, pues el campo en el interior del conductor es nulo. Como este flujo es proporcional a la carga encerrada, tenemos que la carga inducida en la superficie es idéntica a valor de la carga dentro de la cavidad pero con signo contrario. Ahora, la cancelación del campo dentro del conductor es sólo posible si el campo generado por la densidad de carga en la superficie de la cavidad es igual y contrario al de la carga, de modo que la única opción es que sea una distribución de carga uniforme, para simular una carga puntual en el centro. Pero un cascarón con una distribución de carga uniforme no genera campo eléctrico interno, por lo que el campo en el interior de la cavidad es exclusivamente generado por la carga y esta no percibe fuerza alguna. Notemos que esto implica que la densidad de carga inducida en la superficie externa del conductor tiene igual valor y signo que la carga en la cavidad, y es esta la que finalmente va a interactuar con la carga externa. Es más, en tanto la carga externa no esté presente la distribución de carga en la superficie también será uniforme, i.e., con simetría esférica; ya que la carga externa perturba esta simetría la distribución de carga en la superficie externa dejará de ser homogénea, y se ordenará de modo que el campo en el interior siga nulo.

Interesantemente estamos encontrando una aparente contradicción con la tercera ley de Newton: las cargas internas no experimentan ninguna fuerza mientras que la externa sí. El problema se resuelve al entender que la fuer-

za ejercida sobre la carga afuera es debido a la carga inducida en la esfera sobre su superficie externa, ya que las cargas inducidas en las superficies de las cavidades simplemente anulan los campos de las cargas internas. Así la interacción es entre la carga interna y la esfera conductora, la cual debe necesariamente experimentar una fuerza igual opuesta a la ejercida sobre Q y con magnitud dada por (6.22).

Ejemplo 6.2.3. Carga sobre un plano conductor (Método de las imágenes)

El sistema más sencillo con cargas y conductores es el de una carga Q frente a un plano conductor infinito a tierra. Este sistema es, además instructivo ya que presenta un método particular para calcular campos en sistemas complejos. La idea es encontrar el potencial en cualquier punto del espacio del lado de la carga. Ya sabemos que en el otro lado el campo es nulo debido al apantallamiento de la placa.

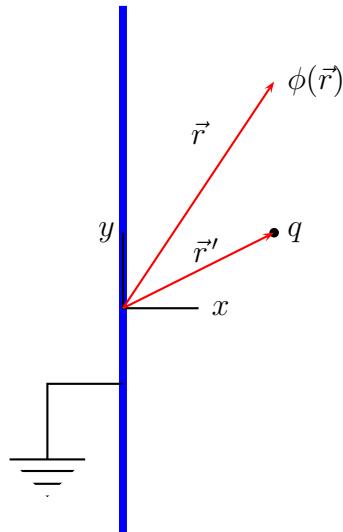


Figura 6.5: Una carga puntual q frente a un plano infinito en $x = 0$ que se coloca a potencial nulo. El símbolo a lado de la placa indica que el potencial es nulo (tierra) y supone, que en el infinito el potencial también es nulo.

Al colocar la carga frente la placa conductora se genera un reordenamiento

de las cargas en la placa debido a la interacción con las cargas en la placa, atrayendo a las de signo opuesto y repeliendo a las del mismo signo. Debido a que las cargas en la placa se repelen entre sí la distribución de carga resultante no es un pico de carga justo debajo de la carga sino, más bien, una distribución suave. Esta distribución de carga en la placa genera un campo eléctrico que se manifiesta como una deformación del campo original de la carga puntual.

Podemos iniciar realizando una aproximación visual al campo. Para esto utilizamos el hecho que cerca a la carga el campo debe verse como el de la carga sola en el universo, i.e., radial; por otro lado en la placa el campo debe llegar normal, pues es una equipotencial. Así tenemos algo como lo mostrado en la figura 6.6.

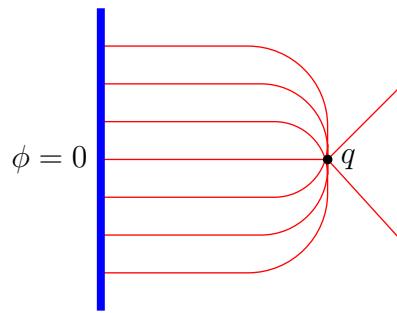


Figura 6.6: Forma aproximada de las líneas de campo para la carga puntual frente al plano fijado como equipotencial. Cerca a la carga el campo se comporta como el de la carga en el espacio infinito. Las líneas de campo deben ser perpendiculares al plano al ser este una equipotencial.

Ahora; del teorema de unicidad se sigue que el problema, al menos para la región $x > 0$, es equivalente a un sistema donde se coloca una carga puntual de valor q en un punto \vec{r} y se impone que en $x = 0$ el potencial sea nulo, i.e., $\phi(x = 0) = 0$. Así que basta con encontrar un sistema que cumpla estas dos condiciones. A estas alturas debe ser más o menos claro que ya hemos estudiado dicho sistema, a decir el par de cargas, en la sección 5.2.1. Concluimos que, para $x > 0$, el potencial de la carga puntual frente a la placa infinita a tierra es idéntico al potencial de la misma carga, en la misma posición, y una carga igual de signo opuesto en la posición specular, pero ahora sin la

placa en $x = 0$, o sea,

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}''|}, \\ &= k \frac{q}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ &\quad - k \frac{q}{\sqrt{(x + x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}.\end{aligned}\quad (6.23)$$

La figura 6.7 compara el sistema original, carga-placa, con el sistema carga-carga imagen mostrando cómo coinciden en la región $x > 0$.

El hecho que los campos no coincidan en la región $x < 0$ es una consecuencia que mientras que para uno está región está vacía, para el otro hay una carga en la posición $\vec{r}'' = (-x', y', z')$.

Este método puede ser generalizado a sistemas más complejos consistiendo siempre simular la superficie sobre la que se impone una condición de frontera tipo Dirichlet como una equipotencial de un sistema distinto donde se han introducido cargas imagen, denominadas así pues precisamente se localizan de igual manera a sí la superficie conductora se comportara como un espejo. Por esta razón el método se denomina “Método de las imágenes”. Sin embargo, el método es más general en el sentido que sistemas que reproducen la forma de las superficies conductoras como equipotenciales no necesariamente funciona como un sistema de espejos.

Una vez determinamos el campo del sistema, que es igual al campo de dos carga opuestas, restringido a la región $x > 0$, podemos calcular la densidad de carga inducida en la placa. Para esto necesitamos el campo en la superficie. Suponiendo la carga a una distancia h , i.e., $x' = h$, de la placa tenemos que el campo está dado por

$$\begin{aligned}E_x(x = 0) &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= k \frac{q(x - h)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - k \frac{q(x + h)}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \Big|_{x=0}, \\ &= -2k \frac{qh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}},\end{aligned}\quad (6.24)$$

donde hemos denotado por $\rho = \sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2}$, la distancia en el plano $x = 0$ desde donde se evalúa al punto justo frente a la carga. Tenemos, entonces, de la relación $\Delta E_x = E_x = 4\pi k\sigma$, la densidad de carga superficial

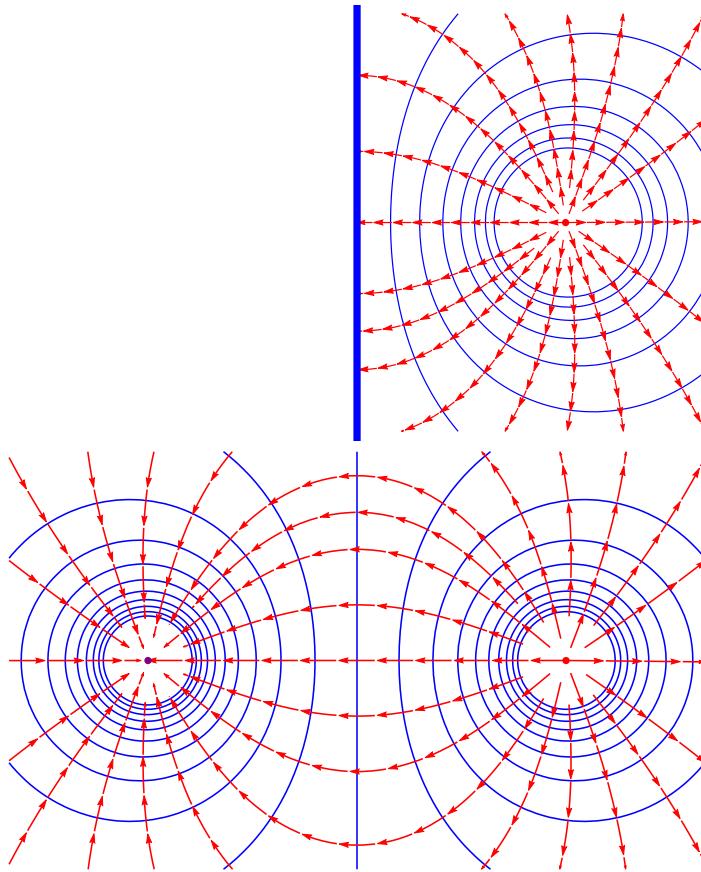


Figura 6.7: Comparación de las líneas de campo y equipotenciales del sistema carga puntual frente a una placa conductora infinita a tierra y el de dos cargas opuestas en posiciones especulares respecto a la placa.

inducida como función de la coordenada ρ

$$\sigma = -\frac{Qh}{2\pi(h^2 + \rho^2)^{3/2}}, \quad (6.25)$$

mostrada en la figura 6.8, donde vemos explícitamente que para $\rho = 0$ es finita, y dada por

$$\sigma(0) = -\frac{Q}{2\pi h^2}, \quad (6.26)$$

cómo habíamos advertido al principio.

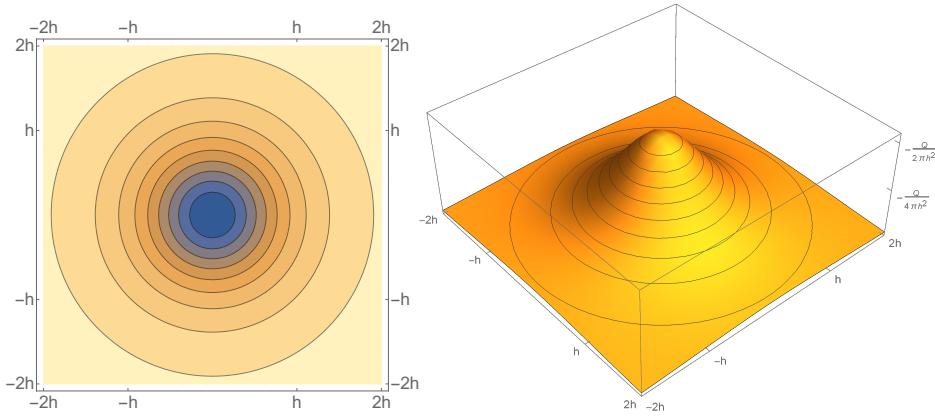


Figura 6.8: Densidad de carga inducida en la placa. Se muestra a la izquierda en una gráfica de contorno y a la derecha en una gráfica tipo 3d. Nótese el signo opuesto al de la carga

La carga total inducida en la superficie de la placa,

$$\begin{aligned}
 \int \sigma dA &= - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{Qh}{2\pi(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi, \\
 &= - \int_0^\infty \frac{Qh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho, \\
 &= \frac{Qh}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \Big|_0^\infty = -Q.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Encontramos así que la carga total inducida sobre la placa es igual a la carga que la induce pero con signo contrario, como es de esperarse.

Pero ¿no estaba inicialmente el conductor neutro? ¿Qué pasó con la carga Q que no estamos calculando? En efecto estamos considerando bien sea que el plano es infinito de tal forma que la carga del mismo signo de la carga, que compensa la calculada $-Q$, se ha distribuido lejos del punto bajo la carga, así si el plano no fuera infinito veríamos esta carga positiva distribuida en los bordes de la placa. Otra forma de entender el problema es que hemos mantenido la placa a un potencial cero, esto en términos experimentalmente se conoce como “poner a tierra”, y simplemente es colocar un polo a tierra que asegura que el potencial sea independiente de los que se coloque al rededor. Es precisamente por este polo a tierra que la carga positiva fluye de tal forma que, si estando la carga sobre la placa se desconecta el polo, y luego

se retira la carga la placa restará cargada con carga $-Q$. Este procedimiento es precisamente como se carga un electroscópio en el laboratorio.

Ejercicio 6.1. *Calcule el trabajo realizado para traer una carga puntual hasta una distancia d a una placa infinita a potencial cero. Compare su resultado con el trabajo para traer la carga y la carga imagen hasta una distancia $2d$.*

Ejercicio 6.2. *El método utilizado para solucionar el campo de una carga al frente de una placa conductora a tierra puede ser utilizada en forma genérica. Suponga una línea delgada de carga de 200 m de largo y una densidad uniforme $\lambda = 10^3 \text{ esu/cm}$ a una altura de 10 cm del suelo. ¿Cuál es la magnitud del campo justo bajo la línea a una altura de 3 cm del suelo?*

Ejercicio 6.3. *Coloque dos cargas q en las esquinas diagonales opuestas de un cuadrado y dos cargas $-q$ en las esquinas restantes. Muestre que hay dos planos equipotenciales y de esta forma obtenga, y dibuje cualitativamente, el campo debido a una carga puntual al frente de la intersección, en ángulo recto, entre dos planos conductores a tierra.*

?Qué configuraciones de cargas puntuales y planos pueden ser resueltas de esta forma? ?Qué sucede, por ejemplo, si trata de solucionar el caso en que los planos se cortan en ángulo 120° ?

6.3. Capacitancia y capacitores

Un conductor aislado, o sea sin polo a tierra, con carga Q se encuentra a un potencial ϕ_o , con potencial cero en el infinito. La carga es proporcional al potencial la constante de proporcionalidad depende sólo en el tamaño y forma del conductor. Este factor de proporcionalidad es conocido como capacitancia y lo denotaremos como C ,

$$Q = C\phi_o. \quad (6.28)$$

Para una esfera cargada de radio a el potencial sabemos es $\phi_o = kQ/a$, por tanto la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{\phi_o} = \frac{a}{k}. \quad (6.29)$$

Vemos entonces que en unidades *cgs* donde $k = 1$ las unidades de capacitancia son de distancia, i.e. centímetros, por lo que no es necesario introducir ninguna otra unidad. Este análisis dimensional nos permite, además, saber

que la capacitancia de un objeto de una forma dada escala en forma lineal con las dimensiones del objeto. En el sistema *MKS* en cambio se utiliza el Faradio ($F = C/V$) como unidad de capacitancia, definida como la capacitancia de un objeto que se encuentra a un Volt cuando esta cargado con un Coulomb. Esto permite convenientemente expresar la permitividad del vacío como

$$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} F/m, \quad (6.30)$$

entendiendo a ε_0 como una capacitancia del vacío por unidad de longitud. Lo anterior aplica para cualquier sistema de conductores aislados. El sistema más común es el de dos con conductores con cargas opuestas Q y $-Q$. En este caso la capacitancia se define como la razón entre la carga Q y la diferencia de potencial entre los conductores. Este sistema se conoce como *capacitor* y es una de las componentes más importantes de cualquier aparato electrónico.

Ejemplo 6.3.1. Capacitor de placas paralelas

El sistema más sencillo de este tipo son dos placas paralelas separadas una distancia s . Para el análisis de este sistema supondremos que la carga se distribuye uniformemente, lo cual es claramente una consideración equivalente a tomar cada placa como infinita. En el caso real, con placas finitas, esta aproximación es simplemente despreciar lo que se denomina como efectos de borde, y es una buena consideración en tanto $s \ll L$, donde L es la dimensión más pequeña de las placas, que en general se espera sea del orden de $L \sim \sqrt{A}$. Por el momento vamos a utilizar esta aproximación para discutir mejor lo que se espera si consideran estos efecto para después.

Bajo esta aproximación cada placa aporta al campo entre las placas con $E = 2\pi k\sigma$ con $\sigma = Q/A$. Al tener cargas opuestas los sentidos de ambos campos se refuerzan en la región entre las placas y se cancelan fuera. Así entre las placas tenemos un campo uniforme $E = 4\pi kQ/A$.

Calculemos ahora la diferencia de potencial,

$$\phi_{12} = - \int_0^s E dx = -4\pi ksQ/A. \quad (6.31)$$

Tenemos entonces que la capacitancia del sistema es, tomando el valor absoluto de la diferencia de potencial,

$$C = \frac{A}{4\pi ks}. \quad (6.32)$$

Como hemos considerado $L \gg s$, esperamos que un cálculo más preciso entregue correcciones al valor apenas hallado del orden s/L , osea, esperamos

$$C = \frac{A}{4\pi ks} (1 + \mathcal{O}(s/L)) . \quad (6.33)$$

Para una razón $s/L \sim 0,2$ la corrección al valor con una razón $s/L \sim 0,01$ es casi del 30 % mostrando como los efectos de borde pueden ser considerables y no pueden ser despreciables cuando de cálculos de presición se trata.

Del cálculo hecho vemos que la unidad Faradio es increíblemente grande necesitando placas con una razón $A/s \sim 10^{12} m$, i.e. para una separación de un centímetro el lado de la placa debe ser de unos $100 km$. Por ejemplo la capacitancia de una esfera como la Tierra es de apenas unas decimas de Farad. Así unidades más comunes son el micro Faradio ($\mu F = 10^{-6} F$) y el pico Farad ($pF = 10^{-12} F$).

Cualquier par de conductores, independiente de su forma y tamaño se comporta como un capacitor y por este nombre entederemos tal sistema. Claramente en el mundo real no sólo se tienen los dos conductores. Para empezar tenemos los materiales que los mantienen en su posición, que ciertamente son aislantes, por ahora supondremos que sus efectos son despreciables, lo cual es cierto mientras no ocupen el espacio entre los conductores. Luego están los elementos necesarios para cargar los conductores o para mantenerlos a un potencial dado. Estos son también hechos de material conductor, sin embargo, supondremos como es natural que: i) son elemento delgados por tanto con efectos pequeños, ii) se encuentran en regiones donde el campo es despreciable (para esto la anterior suposición es necesaria) y iii) su carga es nula. Estas suposiciones son condiciones usuales encontradas en cualquier dispositivo, incluso en circuitos dinámicos.

Con estas consideraciones imaginemos un sistema de conductores cargados, donde uno de estos está rodeado por el otro. Estos no necesariamente son cascarones, por lo que el externo tiene efectivamente dos superficies una interna y otra externa. Para el conductor interno necesariamente la carga se acumulará en la superficie externa por lo que para efectos de nuestro análisis podemos considerarlo como un cascarón, sin embargo, el campo debido al conductor interno genera una redistribución en las cargas del externo produciendo una densidad de carga en la superficie interna. Si la carga del interno es Q_1 podemos demostrar que la densidad generada en la superficie interna de conductor que lo rodea es $Q_{2,in} = -Q_1$, esto ya que si tomamos una superficie gaussiana cerrada encerrando el conductor interno que se encuentre en el conductor, i.e., que encierra a la vez la superficie interna, como se ilustra en la figura 6.9, el flujo de campo eléctrico es necesariamente cero, pues

el campo es nulo dentro del conductor. Utilizando la ley de Gauss tenemos necesariamente que la carga encerrada es cero mostrando lo dicho anteriormente (el mismo análisis se realizó en el ejemplo 6.2.2).

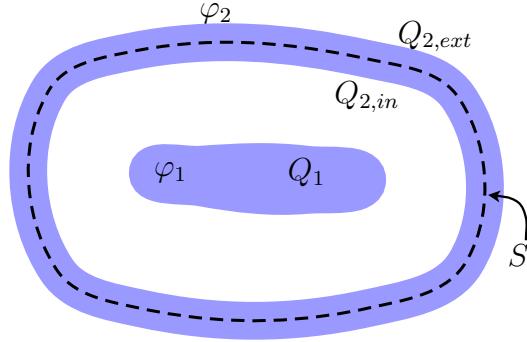


Figura 6.9: Sistema de dos conductores uno encerrando al otro. Se visualiza también una superficie gaussiana S que encierra la cara interna del conductor externo.

Ahora, como el campo entre los dos conductores queda completamente determinado por el campo del conductor interno, las cargas en la cara interna y externa del conductor que lo rodea son irrelevante y podemos definir la capacitancia de sistema como,

$$C = \frac{Q_1}{\phi_1 - \phi_2}. \quad (6.34)$$

Claramente, aunque el potencial dependerá de la carga externa de conductor fuera, la diferencia de potencial es independiente de esta y la capacitancia queda completamente definida por el conductor interno.

6.3.1. Varios conductores

Interesantemente el análisis hecho para dos conductores puede fácilmente extenderse y ser generalizado al caso de múltiples conductores. Para esto utilizamos el principio de superposición, tal y como se ilustra en la figura 6.10. Para ser concretos consideremos el caso de un sistema de tres conductores rodeados por una superficie conductora, la cual colocaremos a tierra fijando su potencial a cero.

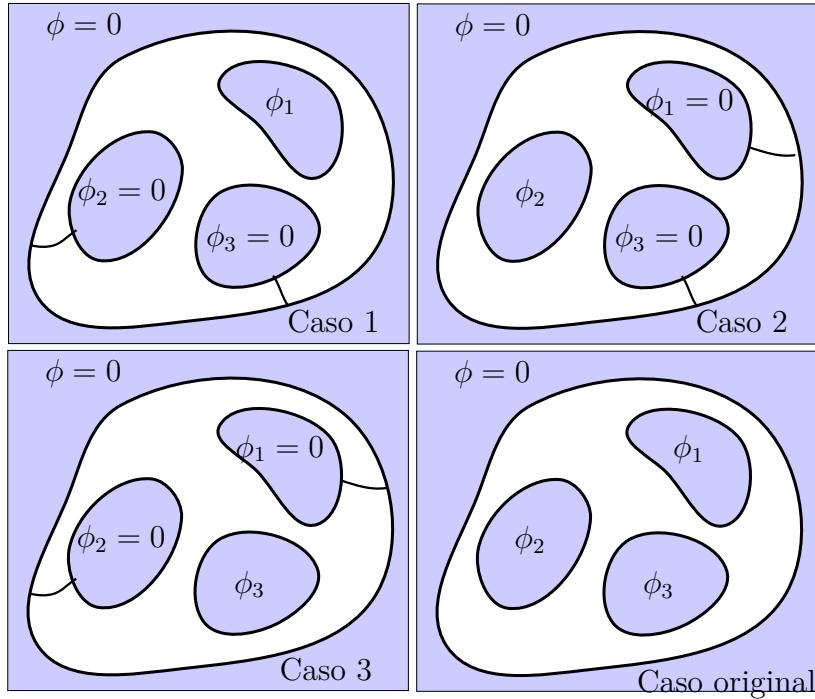


Figura 6.10: Procedimiento de superposición lineal para ilustrar el procedimiento para solucionar un sistema con diversos conductores.

Los potenciales quedan fijos con respecto a la superficie con valores ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 . El teorema de unicidad me asegura que una vez se fijan los potenciales el campo eléctrico queda completamente definido sobre todo el espacio. Asimismo, se sigue que las cargas sobre los conductores quedan determinadas. La carga sobre la superficie del conductor que los rodea es necesariamente $-(Q_1 + Q_2 + Q_3)$ por análisis hecho para un sólo conductor.

Consideremos ahora una situación en la que dejamos sólo un conductor aislado, digamos el 1, colocando los otros dos a tierra, por ejemplo conectándolos a la superficie que los rodea. En este caso el campo del sistema queda completamente determinado por ϕ_1 , y las cargas inducidas sobre los conductores serán proporcionales a este, i.e.,

$$Q_{1,\phi_2=\phi_3=0} = C_{11}\phi_1, \quad Q_{2,\phi_2=\phi_3=0} = C_{21}\phi_1, \quad Q_{3,\phi_2=\phi_3=0} = C_{31}\phi_1, \quad (6.35)$$

con los parámetros de proporcionalidad C_{11} , C_{21} y C_{31} constantes que dependen sólo de la forma y tamaño del arreglo de conductores. Podemos ahora

imaginar el caso en que es el conductor 2 el que queda aislado y los otros se colocan a tierra, y tenemos

$$Q_{1,\phi_1=\phi_3=0} = C_{12}\phi_2, \quad Q_{2,\phi_1=\phi_3=0} = C_{22}\phi_2, \quad Q_{3,\phi_1=\phi_3=0} = C_{32}\phi_2, \quad (6.36)$$

y el caso en que es el conductor 3 el que está aislado,

$$Q_{1,\phi_1=\phi_2=0} = C_{13}\phi_3, \quad Q_{2,\phi_1=\phi_2=0} = C_{23}\phi_3, \quad Q_{3,\phi_1=\phi_2=0} = C_{33}\phi_3. \quad (6.37)$$

Un estado general en que ninguno de los potenciales es cero es simplemente una superposición de los anteriores casos, luego en general tenemos,

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3, \\ Q_2 &= C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 + C_{23}\phi_3, \\ Q_3 &= C_{31}\phi_1 + C_{32}\phi_2 + C_{33}\phi_3. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Tenemos que el sistema está determinado por una matriz 3×3 , \tilde{C} , con componentes C_{ij} . De estos nueve componentes sólo seis son independientes ya que es posible demostrar que $C_{ij} = C_{ji}$. A la matriz componentes de la matriz \tilde{C} se les denomina *coeficientes de capacitancia*, y se generalizan trivialmente para cualquier número de conductores.

Tenemos entonces un sistema de ecuaciones simultáneas que podemos escribir $\vec{Q} = \tilde{C} \cdot \vec{\Phi}$, donde $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$ y $\vec{\Phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$. Podemos solucionar en favor de los potenciales,

$$\vec{\Phi} = \tilde{P} \cdot \vec{Q}, \quad (6.39)$$

donde la matriz $\tilde{P} = \tilde{C}^{-1}$ es la inversa de \tilde{C} , y tiene componentes P_{ij} denominados *coeficientes de potencial*, los cuales están claramente relacionados con los *coeficientes de capacitancia*. El anterior es un ejemplo particular de lo que se encuentra en general en cualquier sistema físico lineal.

Ejercicio 6.4. *Considere dos placas paralelas distanciadas una distancia L conectadas por medio de un cable conductor. Una placa con una densidad de carga σ , cuando está fuera de las placas, se coloca en medio a una distancia d de la placa de abajo y $L - d$ de la de arriba. ¿En qué proporción se distribuye la carga entre las caras de arriba y abajo de la placa del medio?*

Ejercicio 6.5. *Calcule la capacitancia para un sistema de cascarones esféricos concéntricos metálicos. Considere que el radio del cacáron interno es a y el del externo b . Compruebe su resultado al tomar el límite $b - a \ll b$, donde el sistema se debe reducir a dos placas planas paralelas.*

Ejercicio 6.6. Calcule la capacitancia para el sistema de dos cascarones cilíndricos concéntricos metálicos, con radios a y b , y altura L . Asuma $L \gg b - a$ tal que pueda despreciar efectos de borde. Compruebe su resultado tomando el caso extremo $b \gg b - a$.

6.3.2. Energía almacenada en un capacitor (condensador)

Como hemos visto un capacitor es una sistema que encierra un campo eléctrico al cual como sabemos se le puede asociar una energía almacenada. En esta sección calcularemos esta energía almacenada entre los conductores y el primer método que utilizaremos será precisamente utilizar directamente la expresión en términos del campo.

Ejemplo 6.3.2. Energía del sistema de placas paralelas

Como hemos visto, el sistema de placas paralelas genera un campo uniforme entre las placas, si despreciamos efectos de borde, y nulo en la parte externa. Así que la expresión general (4.53) puede evaluarse explícitamente:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi k} \int |\vec{E}|^2 dV, \\ &= \frac{1}{8\pi k} |\vec{E}_0|^2 \int_V dV, \\ &= \frac{1}{8\pi k} |\vec{E}_0|^2 \mathcal{V}, \\ &= \frac{1}{8\pi k} |\vec{E}_0|^2 A \cdot s, \end{aligned} \tag{6.40}$$

donde consideramos que el volumen entre las placas está dado por $\mathcal{V} = A \cdot s$. Ahora, utilizando el valor del campo entre las placas $|\vec{E}_0| = 4\pi kQ/A$ y la capacitancia $C = \frac{A}{4\pi ks}$, anterior expresión puede escribirse como

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \tag{6.41}$$

En términos de la diferencia de potencial tenemos, $V = Q/C$,

$$U = \frac{1}{2} C V^2. \tag{6.42}$$

Con los siguientes ejemplos intentaremos mostrar que las expresiones (6.41) y (6.42) son generales para cualquier capacitor

Ejemplo 6.3.3. Experimento mental de Repisa de altura variable

Antes de atacar el problema del sistema del capacitor general pensemos en el siguiente sistema mecánico. Supongamos una repisa donde se van a colocar una serie de objetos que, por simplicidad son idénticos, con masa m . La repisa, sin embargo, tiene una propiedad particular: dependiendo de la masa que soporte su altura se va elevando de manera lineal. Decimos, entonces, que si contiene una masa M su altura, h , respecto al suelo, satisface $h = kM$. Así, si inicialmente la repisa está vacía esta se encontrará en el suelo. Evaluemos el trabajo total que nos toma cargar la repisa con N de estos objetos en un campo gravitacional uniforme.

Para llevar el primer objeto, la altura es nula, $h_1 = 0$, y, por tanto, el trabajo es nulo también,

$$W_1 = 0, \quad (6.43)$$

pero, luego de colocar la masa la altura es $h_2 = km$. Así que el trabajo para la llevar la segunda masa hasta la repisa está dado por

$$W_2 = mgh_2 = kgm^2. \quad (6.44)$$

Ahora la altura es $h_3 = 2km$ y el trabajo para llevar la tercera está dado por

$$W_3 = mgh_3 = 2kgm^2. \quad (6.45)$$

En general, podemos ver que para llevar la j -ésima masa se requiere un trabajo dado por

$$W_j = mgh_j = (j - 1)kgm^2. \quad (6.46)$$

Así que para llevar las N masas el trabajo total está dado por

$$\begin{aligned} W_{Tot} &= \sum_{j=1}^N W_j, \\ &= kgm^2 \sum_{j=1}^N (j - 1), \\ &= \frac{1}{2}kgm^2(N - 1)N. \end{aligned} \quad (6.47)$$

donde hemos utilizado la formula $\sum_{n=0}^N n = \frac{1}{2}N(N + 1)$. Si consideramos que el número de objetos es muy grande, i.e., $N \gg 1$, entonces tenemos

$$W_{Tot} = \frac{1}{2}kgm^2(N - 1)N,$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{2}kgm^2N^2, \\ &= \frac{1}{2}kgM^2, \end{aligned} \tag{6.48}$$

con $M = Nm$. Podemos, también, expresar esta energía en términos de la altura final, recordando la relación entre la masa depositada y la altura, $H = kM = kNm$, se sigue

$$W_{Tot} = \frac{1}{2}g\frac{H^2}{k}. \tag{6.49}$$

donde queda claro que dada una altura máxima de alcance existe una energía máxima de almacenamiento.

Reconocemos que la energía almacenada en el sistema, luego de ser cargada, aumenta como el cuadrado de la masa que esta soporta, y no linealmente, como sucede con una repisa usual. Si contrastamos nuestros resultados con los obtenidos para el capacitor de placas paralelas (6.41) y (6.42) vemos que existe una analogía directa si cambiamos cargas por masas, o alturas por diferencias de potencial, y acá el papel que juega la constante k es el equivalente al de la capacitancia. Ahora bien; para nosotros, además, es importante reconocer que el origen de una relación cuadrática está en el hecho que paulatinamente el “esfuerzo” de llevar a una masa hasta la repisa aumentaba linealmente. Una circunstancia que también sucede con los capacitores y que espero sea más fácil de evidenciar luego de este análogo mecánico.

Ejemplo 6.3.4. Energía como trabajo sobre las cargas

De manera análoga a como hicimos con la repisa del ejemplo 6.3.3 evaluaremos la energía almacenada en el capacitor como el trabajo necesario llevar diferenciales de carga dQ , progresivamente, de una a otro conductor hasta lograr que ambos queden cargados con una carga igual y opuesta Q_f .

De la definición de la diferencia de potencial, denotando como ϕ_{12} la presente entre los conductores, se sigue que para llevar un dQ de la negativa a la positiva el trabajo realizado está dado por

$$dW = \phi_{12}dQ, \tag{6.50}$$

disminuyendo la carga de la negativa y aumentando la de la positiva por dQ . Por tanto, el campo, y por consiguiente el potencial, aumenta y el trabajo paulatinamente va aumentando conforme el capacitor se va cargando, tal y

como sucedía con nuestro experimento mental de la repisa que se va elevando, pero en este caso es debido a que el campo como tal aumenta y no porque las placas se estén alejando. Esto se hace más evidente utilizando la relación $Q = C\phi_{12}$ con Q la carga momentánea del capacitor y reescribiendo el anterior trabajo como,

$$dW = \frac{Q}{C} dQ. \quad (6.51)$$

Para hallar el trabajo total entonces integramos desde una carga inicial $Q = 0$ hasta $Q = Q_f$, así:

$$\begin{aligned} W_{Tot} &= \int dW, \\ &= \int_0^{Q_f} \frac{Q}{C} dQ, \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

recuperando así la expresión encontrada en el caso particular de las placas paralelas, (6.41), mostrando así su generalidad. De allí que la expresión (6.42) también lo sea.

Ejemplo 6.3.5. Placas paralelas fuerzas y energía

Una tercera forma de obtener el resultado es suponiendo que los conductores como tal ya se encuentran cargados, pero que está una distancia nula el uno del otro, de modo que no hay volumen encerrado entre estos y la energía inicialmente es cero. Luego, separando los conductores podemos evaluar la energía contenida en el sistema como el trabajo necesario para llevarlos hasta su posición final. Para abordar explícitamente este método, utilizamos nuevamente las placas paralelas.

Como se dijo inicialmente consideramos que las placas ya están cargadas, así que las consideramos aisladas, i.e., no están conectadas a ningún tipo de fuente de carga, y su carga constante. Esto implica que el campo entre las placas sea el mismo independiente de la distancia entre las placas, despreciando efectos de borde, pues depende sólo de la densidad de carga, $E = 4\pi kQ/A$. Este campo genera una fuerza sobre cada elemento de área de la placa positiva de magnitud

$$dF = 2\pi k\sigma dq = 2\pi k\sigma^2 dA. \quad (6.53)$$

Bajo la hipótesis de trajo de efectos de borde nulos la densidad de carga es uniforme, $\sigma = Q/A$, y la placa entera experimenta una fuerza

$$F = 2\pi k \left(\frac{Q}{A}\right)^2 A, \quad (6.54)$$

donde vemos la similitud de esta forma de atacar el problema con lo que se hizo en la sección 4.7. O sea que, mientras que la carga permanezca constante, la fuerza es independiente de la distancia entre las placas, luego el trabajo realizado al mover la placa una distancia s , la distancia que separa las placas, es

$$\begin{aligned} U &= F \cdot s, \\ &= 2\pi k \left(\frac{Q}{A}\right)^2 As, \end{aligned} \quad (6.55)$$

que coincide con la expresión (6.52) una vez se hace el caso particular $C = \frac{A}{4\pi ks}$.

6.3.3. Fuerza entre los elementos de un capacitor

En la anterior sección encontramos la energía almacenada por un capacitor y mostramos en el caso particular de las placas paralelas que esta energía podía ser asociada al trabajo realizado por la fuerza de atracción entre los componentes del capacitor. En esta sección utilizaremos un argumento inverso para calcular la fuerza entre los elementos del capacitor conociendo la energía almacenada en este.

Suponiendo que las componentes del capacitor se encuentran aisladas y que, por tanto, la carga del capacitor permanece constante, al mover los componentes del capacitor, digamos, un Δx la energía potencial cambiará debido sólo al cambio en la capacitancia. Este cambio lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x, \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) \Delta x, \\ &= \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) \Delta x. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Este es el trabajo realizado por la fuerza, que al menos para pequeños desplazamientos podemos considerar constante y, por tanto, está dado por $F\Delta x$. De esto último podemos distinguir la magnitud de la fuerza entre los componentes del capacitor como

$$F = \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right). \quad (6.57)$$

En general el desplazamiento está dado por un vector $\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$, de tal forma que la variación de U está dada por

$$\Delta U = \vec{\nabla}U \cdot \Delta\vec{r}, \quad (6.58)$$

así encontramos en general que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \quad (6.59)$$

donde hemos tenido cuidado con la dirección, que como sabemos debe ser atractiva. Para el caso en que la carga permanesca constante entonces

$$\vec{F} = -\frac{Q^2}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{C} \right). \quad (6.60)$$

En caso que el potencial permanesca constante, por ejemplo conectando el capacitor a una fuente de voltaje, es entonces conveniente escribir la energía en términos de este, obteniendo

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\phi_{12}^2 \vec{\nabla} C. \quad (6.61)$$

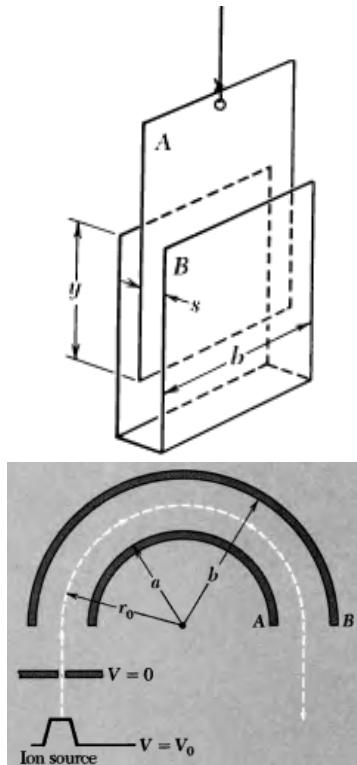
Ejercicio 6.7. Calcule la fuerza entre las placas de una capacitors de placas paralelas para: a) carga constante y b) diferencia de potencial constante. Analice sus resultado, en particular discuta sobre la dirección de las fuerzas.

Ejercicio 6.8. Una placa A pende por medio de un hilo aislante entre las placas de otra placa B en forma de C . Las placas están cargadas de forma opuesta. La diferencia de po-

tencial genera una fuerza extra además del peso. Halle la diferencia de potencial V en términos de esta fuerza extra.

Ejercicio 6.9. Iones son acelerados

a travez de una diferencia de potencial V_o , luego lo cual entran en el aparato mostrado, formado por dos electrodos semicilíndricos concéntricos. Muestre que los iones seguirán una trayectoria semicircular de radio r_o si los electrodos están respectivamente a un potencial $2V_o \ln(b/r_o)$ y $2V_o \ln(a/r_o)$. Suponga que los electrodos son largos, en la dirección perpendicular a la hoja, comparados a la distancia entre estos.



Ejercicio 6.10. Un cilindro de 4 cm de radio pende con su eje verticalmente, parcialmente dentro de otro cilindro de radio 5 cm. Calcule la fuerza ejercida sobre el primer cilindro cuando la diferencia de potencial entre estos es de 5 kV.

6.4. Ejercicios extra

berkeley 2 ed 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.10, 3.18, 3.19, 3.23

Capítulo 7

Materiales diléctricos

Este tipo de material, también denominados aislante, se distinguen de los conductores por el hecho que las cargas están ligadas, incluso para campos relativamente fuertes. Esta condición ciertamente deja de ser cierta luego de un valor de campo particular, conocido como campo de ruptura, pero para nuestro estudio consideraremos que estamos siempre por debajo de este límite.

En general podemos suponer que el material dieléctrico es neutro, pero aún así está constituido por moléculas y átomos, cuyas cargas, aunque ligadas, seguirán experimentando una fuerza cuando se encuentran en presencia de un campo eléctrico no nulo. Así, un campo eléctrico originará un desplazamiento de las cargas negativas respecto a las positivas, resultando en una situación similar, aunque menos dramática a la sucedida con los materiales conductores, polarizando el material.

En este capítulo exploramos rápidamente pero con cierto detalle los efectos de esta polarización dieléctrica y cómo esto cambia lo que hemos aprendido de la electrostática en el vacío. Para iniciar estudiaremos el dipolo puntual y cómo es el campo de este, para luego utilizar este resultado en un procedimiento análogo al hecho con las cargas puntuales para una distribución general de cargas.

7.1. El dipolo puntual

Ya habíamos discutido en la sección 3.2.2 el sistema de par de cargas. Ahora vamos a tomar el límite en que las cargas se encuentran prácticamente

en el mismo punto, pero no justo una sobre la otra, de modo que se mantengan los efectos eléctricos. Este sistema límite es lo que denominaremos dipolo puntual.

Para iniciar, consideremos que la separación entre la cargas está dictada por el vector \vec{d} . Así, $\vec{r}_{-q} = \vec{r}'$ y $\vec{r}_q = \vec{r}' + \vec{d}$, ver figura ??.

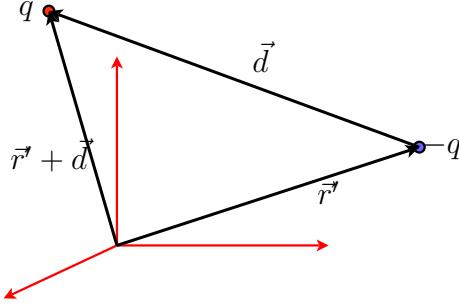


Figura 7.1: Par de cargas con una posición relativa \vec{d} .

El potencial para este sistema, entonces está representado por la expresión

$$\phi(\vec{r}) = k \frac{q}{|\vec{r} - (\vec{r}' + \vec{d})|} - k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.1)$$

Como advertíamos al inicio deseamos tomar el límite en que la distancia de las cargas va a cero, o dicho de manera más precisa $|\vec{d}| = d \ll |\vec{r} - \vec{r}'|$. Esto lo podemos formalizar escribiendo

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{1/2}, \quad (7.2)$$

y realizando una expansión de Taylor, así,

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}' - \vec{d}|^{-1} &= \left(|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + d^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{d} \right)^{-1/2}, \\ &= |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \left(1 + \frac{d^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right)^{-1/2}, \\ &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{2} \frac{d^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \mathcal{O}(d^2/|\vec{r} - \vec{r}'|^3), \\ &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \mathcal{O}(d^2/|\vec{r} - \vec{r}'|^3), \end{aligned} \quad (7.3)$$

donde escribimos explícitamente los términos hasta orden lineal en d y los de orden superior están implícitos en lo que denotamos como $\mathcal{O}(d^2/|\vec{r} - \vec{r}'|^2)$,

que en el caso de d yendo a cero serán más pequeños. Así que el potencial del par de cargas puede escribirse como

$$\phi(\vec{r}) = k \frac{q(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \mathcal{O}(qd^2/|\vec{r} - \vec{r}'|^2), \quad (7.4)$$

donde observamos que el término independiente de \vec{d} se cancela. También vemos que si tomamos el límite $d \rightarrow 0$, sin ningún miramiento, el potencial es nulo, lo cual no es de extrañar dado que tendremos una carga puntual de valor nulo. Así qué tomaremos el límite pero con la restricción que el producto $qd \equiv p$ sea finito, así que el potencial del dipolo puntual, ubicado en \vec{r}' , queda

$$\begin{aligned} \phi_{d.p.}(\vec{r}) &= \lim_{d \rightarrow 0} k \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \mathcal{O}(pd/|\vec{r} - \vec{r}'|^2), \\ &= k \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

con $\vec{p} = q\vec{d}$, conocido como momento dipolar, un vector que apunta de la carga negativa a la positiva y cuya magnitud es el producto entre la carga y la distancia.

De este modo observamos que aunque el sistema es neutro y formalmente puntual, cuenta con un potencial no constante y, por tanto, un campo no nulo.

Para evaluar el campo conviene tomar el dipolo en el origen y alineado con el eje z , i.e., $\vec{r}' = 0$ y $\vec{p} = p\hat{k}$, y escribirlo en términos de coordenadas cartesianas, así

$$\phi_{d.p.}(\vec{r}) = k \frac{pz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = k \frac{pz}{r^3}, \quad (7.6)$$

recordando, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, de modo que

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi_{d.p.}}{\partial x} = \frac{3kpxz}{r^5}, \\ E_y &= -\frac{\partial \phi_{d.p.}}{\partial y} = \frac{3kpyz}{r^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial \phi_{d.p.}}{\partial z} = \frac{kp}{r^5} (3z^2 - r^2) \end{aligned} \quad (7.7)$$

que se muestra en la figura 7.2.

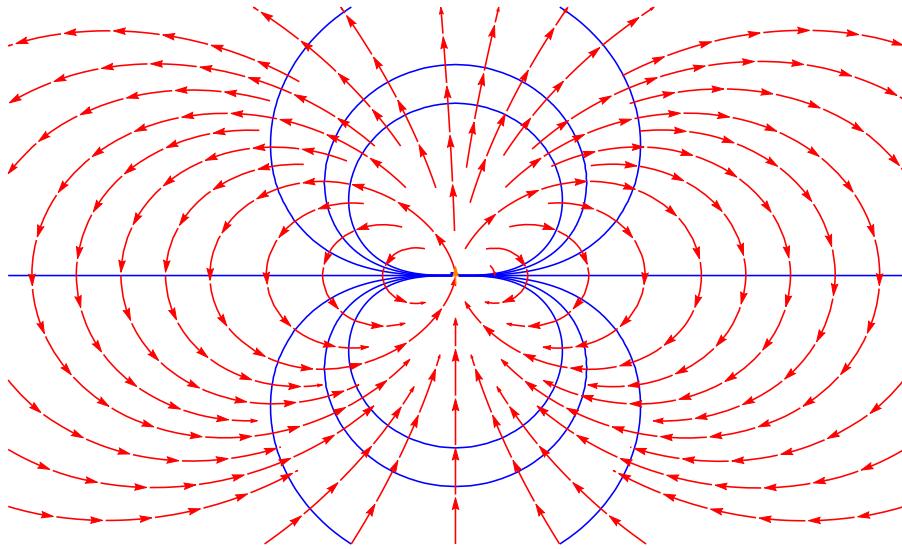


Figura 7.2: Líneas de campo, en rojo, y equipotenciales, en azul, para el dipolo puntual apuntando en la dirección z (flecha naranja), en el plano $y = 0$.

Una forma más común, y a veces conveniente, de escribir este campo es en coordenadas esféricas, con $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$ y $z = r \cos \theta$, se tiene

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{3kp \cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{r^3}, \\ E_y &= \frac{3kp \cos \theta \sin \theta \sin \varphi}{r^3}, \\ E_z &= kp \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

que puede traducirse en

$$E_r = k \frac{2p}{r^3} \cos \theta, \quad E_\theta = k \frac{p}{r^3} \sin \theta \text{ y } E_\varphi = 0. \quad (7.9)$$

Con estas últimas expresiones es totalmente evidente que el campo del dipolo puntual decrece como el cubo de la distancia, más rápido que el caso de la carga puntual, mientras que el potencial lo hace como el cuadrado de la distancia.

Ejercicio 7.1. Suponiendo un dipolo puntual de magnitud $\vec{p} = 1 \text{ Cm}$ ubicado en el origen y apuntando alineado al eje z . Determine el ángulo respecto al

plano XY para el cual, a una distancia de 3 m del dipolo, el potencial de $3 \times 10^8 \text{ V}$.

7.2. Multipolos Eléctricos

Aprovechamos lo realizado en la anterior sección para introducir un concepto de utilidad general. Partiendo de la expresión general para el potencial en el espacio infinito

$$\phi = k \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (7.10)$$

vamos a pararnos fuera de la distribución, $r > r'$, y considerar la expansión de Taylor

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}') + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \frac{1}{r^4} (r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 + \dots \right), \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r}' + \frac{1}{2r^5} [(3\vec{r} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') - r^2 r'^2] + \frac{1}{r} \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (7.11)$$

De donde se sigue, con $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \mathbb{I} \cdot \vec{r}$,

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= k \frac{1}{r} \int dV' \rho(\vec{r}') + k \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \\ &\quad + \frac{\vec{r}}{r^5} \cdot \int dV' [\vec{r}' \vec{r}' - \mathbb{I} r'^2] \cdot \vec{r} + \dots. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Definiendo los momentos multipolares, parámetros intrínsecos de la distribución,

- Momento Monopolar: $q \equiv \int dV' \rho(\vec{r}') =$ carga total.
- Momento dipolar: $\vec{p} \equiv \int dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}')$.
- Momento cuadrupolar: $\mathbb{Q} \equiv \int dV' [\vec{r}' \vec{r}' - \mathbb{I} r'^2]$,

se sigue

$$\phi(\vec{r}) = k \frac{q}{r} + k \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \vec{r} \cdot \mathbb{Q} \cdot \vec{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (7.13)$$

Esta expresión, conocida como expansión multipolar, lo que nos está indicando es que cualquier distribución de carga acotada, mientras nos encontremos fuera de esta, puede simularse por una serie de momentos, cuya contribución disminuye cada vez más rápido conforme sea mayor el orden del momento correspondiente. En general, entonces, para una distribución con una carga neta no nula, la contribución más importante será la monopolar. Pero si la carga es nula la contribución dipolar dominará, a menos que sea también nula, y así sucesivamente.

Estos momentos nos están indicando cómo es la geometría de la distribución de carga. Así, para una distribución completamente simétrica (simetría esférica) los momentos multipolares de orden superior son todos nulos, sobreviviendo solo la carga neta. En efecto, eso es lo que hemos encontrados para las distribuciones de carga esféricas, que su potencial y campo son idénticos que los de la carga puntual; Para distribuciones donde la carga negativa se encuentre desplazada respecto a la positiva encontramos un momento dipolar, que simula un dipolo puntual como el estudiado en la sección anterior. Para el dipolo puntual tanto el momento monopolar como cuadrupolar son nulos, pero si el dipolo no es puntual aparecen términos cuadrupolares; Un ejemplo de una distribución de carga donde el primer momento no nulo es el cuadrupolar, es el de dos dipolos no puntuales, enfrentados: por ejemplo una carga $-q$ en $(0, 0, -d)$, otra carga $-q$ en $(0, 0, d)$ y una de magnitud $2q$ en el origen. Esto nos ilustra que un momento cuadrupolar no nulo nos indica de una distribución donde un signo de carga se encuentra concentrado en el centro mientras el otro signo se encuentra en los extremos, ver figura 7.3.

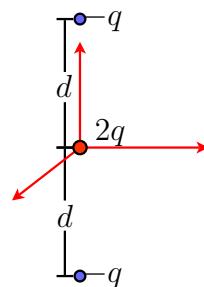


Figura 7.3: Dos dipolos enfrentados presentan una configuración cuadrupolar.

Otra enseñanza que nos deja la expansión multipolar es que si conocemos cómo es el comportamiento del potencial, o el campo, con la distancia tenemos información indirecta sobre qué tipo de distribución lo está generando.

Ejemplo 7.2.1. Carga puntual

Consideremos el sistema más sencillo de todo: una única carga puntual de valor q . Se puede mostrar que la expresión del primer momento multipolar no nulo es independiente de la escogencia del origen, pero para los superiores existe una dependencia. En este caso, que tenemos que el momento monopolar es no nulo, tendremos que del momento dipolar en adelante la posición relativa al origen tomado cambia lo que encontraremos. Para la ilustración supondremos que la carga se encuentra a una distancia a del origen y se encuentra sobre el eje z , figura 7.4.

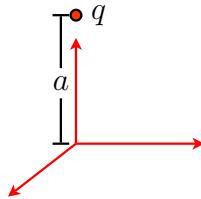


Figura 7.4: Carga puntual en la posición $(0, 0, a)$.

El momento monopolar es simplemente q . Ahora evaluemos el dipolar. Para esto utilizamos el hecho que podemos escribir¹

$$\rho(\vec{r})dV = \begin{cases} q, & \text{si } \vec{r} = \vec{r}_0 = (0, 0, a), \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (7.14)$$

de modo que reproduzca que $q = \int \rho dV$. De esto se sigue que

$$p_x = \int \rho(\vec{r})xdV = qx|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = 0, \quad (7.15)$$

$$p_y = \int \rho(\vec{r})ydV = qy|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = 0, \quad (7.16)$$

$$p_z = \int \rho(\vec{r})zdV = qz|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = qa. \quad (7.17)$$

O sea

$$\vec{p} = (0, 0, qa). \quad (7.18)$$

¹Utilizaré una notación un poco absurda siendo la correcta una que utilice la denominada funcional delta de Dirac. Por estar fuera de los objetivos del curso intentaré seguir con esta notación esperando no cause mucha confusión.

Así, por ejemplo, si colocamos una carga idéntica en $(0, 0 - a)$, el momento dipolar total es nulo,

$$\vec{p} = \vec{p}_{q,a} + \vec{p}_{q,-a} = (0, 0, qa) + (0, 0, -qa) = (0, 0, 0), \quad (7.19)$$

un resultado que se puede entender de la simetría que presenta el sistema. Si, en cambio, la segunda carga es de signo opuesto, en cambio,

$$\vec{p} = \vec{p}_{q,a} + \vec{p}_{-q,-a} = (0, 0, qa) + (0, 0, qa) = (0, 0, 2qa). \quad (7.20)$$

Ejercicio 7.2. *Evalúe los momentos dipolares para los siguientes arreglos de cargas puntuales.*

1. *Tres cargas puntuales en las esquinas de un triángulo equilátero de lado de largo d . Suponga que el triángulo está en el plano XY y con la base en el eje x. Las cargas en la base tienen valor q y en la equina superior tiene valor $-2q$.*
2. *Cuatro cargas, dos de carga q y las otras dos con $-2q$, dispuestas alternativamente en las esquinas de un cuadrado de lados de largo d .*
3. *En las esquinas de un cuadrado de ancho d cuatro cargas, dos de carga q en uno de los lados, y las otras dos con valor $-2q$ en el lado opuesto..*

Ejercicio 7.3. *Considerese un capacitor de placas paralelas, separadas una distancia 1,5 cm, con capacitancia $C = 22,5 \text{ pF}$, que se carga con una diferencia de potencial $\Delta V = 1800 \text{ V}$. Despreciando efectos de bordes, proponga un modelo para evaluar el campo fuera de las placas utilizando los conceptos trabajados en este capítulo y discuta sobre el rango de distancias para las cuales su modelo resulta válido, más certero. Con este, evalúe el campo en los siguientes puntos:*

1. *A una distancia de 3 m del condensador en el plano de las placas.*
2. *A una distancia de 3 m del condensador en la dirección perpendicular de este.*

7.3. Polarización de un material dieléctrico

La discusión anterior nos muestra que aun un material que punto a punto sea neutro puede tener un campo no nulo. En el caso de los dieléctricos en ausencia de carga sus moléculas están arregladas logrando una distribución de carga con simetría esférica con muy buena aproximación, lo que se traduce en un campo neto nulo. Cuando aparece un campo, este o bien distorsiona las moléculas (figura 7.5), haciendo que cada una tenga un momento dipolar no nulo, o que las moléculas, originalmente dipolares, como es el caso del agua y en general las moléculas denominadas polares, se alineen (figura 7.6). En cualquier caso se genera un momento dipolar neto. El hecho que estemos hablando de un momento dipolar neto nos indica que nuestro análisis no es microscópico, sino que consideramos diferenciales de volumen que abarcan varias moléculas y sus efectos son promediados. En ninguno de los dos casos, con momentos dipolares inducidos y en el caso que sean intrínsecos, la alineación es perfecta: tanto las fluctuaciones como la interacción entre las moléculas vecinas hacen que el campo externo no sea el único a dictar esta alineación. Cabe anotar, que de la discusión hecha en la sección 7.2 tenemos que, aunque en general se presentan momentos multipolares superiores, el análisis es buena aproximación restringirnos solo a los momentos dipolares.

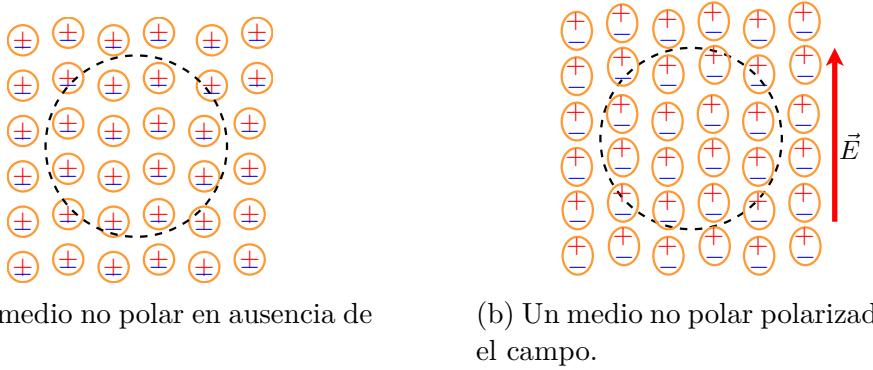


Figura 7.5: Polarización de un medio no polar. La deformación de la distribución de carga en cada molécula causa un efecto de polarización neto. En el círculo punteado el promedio pasa de ser nulo a uno neto apuntando verticalmente.

Para formalizar la discusión que sigue, y especificando mejor lo antes men-



(a) Un medio polar en ausencia de campo.

(b) Un medio polarizado por el campo.

Figura 7.6: Polarización de un medio polar. La alineación de los dipolos individuales de cada molécula causa un efecto de polarización neto. En el círculo punteado el promedio pasa de ser nulo a uno neto apuntando verticalmente.

cionado, definimos el vector polarización:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}}{dV} = \sum_i N_i \langle \vec{p}_i(\vec{r}) \rangle, \quad (7.21)$$

con N_i la densidad de moléculas del tipo i y $\langle \vec{p}_i \rangle$ la media del momento dipolar para estas en una unidad de volumen diferencial dV . Así \vec{P} hace un promedio de los momentos multipolares en una unidad de volumen, y puede tomarse como una densidad volumétrica de momento dipolar. Acá es evidente que el diferencial de volumen debe ser lo suficientemente grande para abarcar varias moléculas y permitir el promedio mencionado.

7.4. Campo Debido a Medios Polarizados Neutros

Ahora que estamos medianamente convencidos que los materiales dieléctricos, aun si neutros, pueden afectar el campo. Estudiemos, entonces, cómo es el campo de una distribución de carga polarizada.

La idea es extender lo hecho para la partícula puntual, ahora considerando pequeños elementos de dipolo, $d\vec{p}$, cada uno contribuyendo como un dipolo puntual

$$d\phi = k \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (7.22)$$

Pero, de la definición de polarización, se tiene que podemos expresarlo como

$$d\phi = k \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |^3} dV'. \quad (7.23)$$

Para evaluar el potencial en cualquier parte, simplemente hacemos uso de la

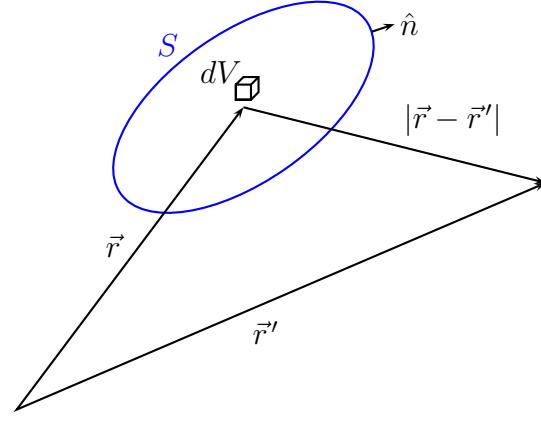


Figura 7.7: Cada elemento de volumen se considera con una polarización \vec{P} que contribuye al campo como un dipolo puntual.

superposición lineal, como se ilustra en la figura , obteniendo una expresión integral

$$\phi(\vec{r}) = \int d\phi = k \int_V dV' \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |^3}, \quad (7.24)$$

cuyo integrando es no nulo solo en V , el volumen comprendido por el material. La expresión (7.24) aunque correcta, no permite identificar explícitamente el hecho que son, siempre, las cargas las fuentes del campo. Para hacer esto evidente utilicemos la identidad

$$\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{| \vec{r} - \vec{r}' |} \right) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |^3}, \quad (7.25)$$

lo cual nos permite integrar por partes, pues

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |} \right) = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{| \vec{r} - \vec{r}' |} \right) + \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |}, \quad (7.26)$$

así que

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= k \int_{\mathcal{V}} dV' \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - k \int_{\mathcal{V}} dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \\ &= k \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{S}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k \int_{\mathcal{V}} dV' \frac{(-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P})}{|\vec{r} - \vec{r}'|},\end{aligned}\quad (7.27)$$

donde hemos hecho uso del teorema de la divergencia para expresar la primera integral como una integral de superficie. Lo interesante es que ahora tenemos dos contribuciones, ambas con un factor de $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$, tal y como se espera para la contribución debida a un diferencial de carga dq . Podemos, entonces, definir las densidades de carga ligada volumétrica

$$\rho_P(\vec{r}') = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}'), \quad (7.28)$$

y superficial

$$\sigma_P(\vec{r}') = \hat{n}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \Big|_{\partial\mathcal{V}}, \quad (7.29)$$

tal que

$$dS' \sigma_P = d\vec{S}' \cdot \vec{P} \Big|_S \quad (7.30)$$

y

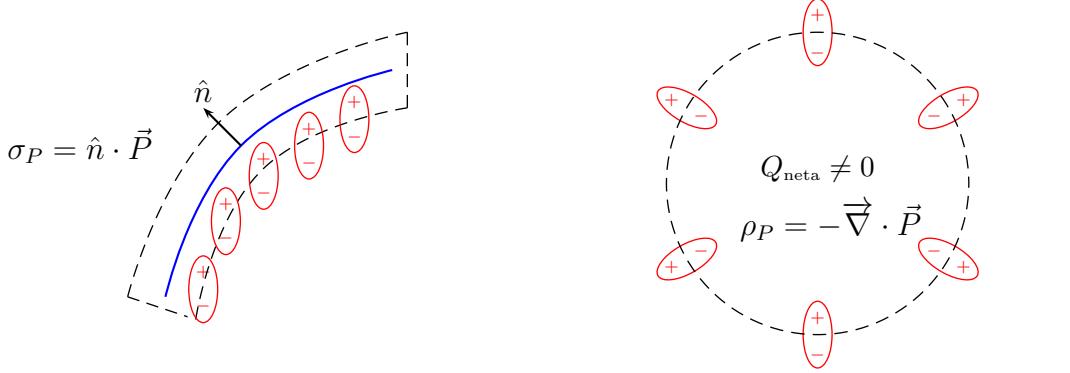
$$\phi(\vec{r}) = k \int_{\partial\mathcal{V}} dS' \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k \int_{\mathcal{V}} dV' \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (7.31)$$

La figura 7.8 ilustra cómo deben entenderse estas carga ligadas inducidas. Es importante tener claro que estas densidades de carga, que denominamos genéricamente ligadas, no es que aparezcan, sino que son debidas exclusivamente al desplazamiento de las cargas de signos opuestos unas respecto a las otras. En particular, las carga total del medio sigue siendo nula:

$$\begin{aligned}Q &= \int_{\partial\mathcal{V}} dS \sigma + \int_{\mathcal{V}} dV \rho, \\ &= \int_{\partial\mathcal{V}} dS \hat{n} \cdot \vec{P} - \int_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{P},\end{aligned}\quad (7.32)$$

$$= \int_{\partial\mathcal{V}} dS \hat{n} \cdot \vec{P} - \int_{\partial\mathcal{V}} dS \hat{n} \cdot \vec{P} = 0, \quad (7.33)$$

donde nuevamente utilizamos el teorema de la divergencia para expresar la integral volumétrica como una de superficie.



(a) Inducción de una densidad de carga superficial por polarización.

(b) Inducción de una densidad de carga volumétrica por polarización.

Figura 7.8: Idea pictórica de la aparición de densidades de carga ligada, superficial y volumétrica. La proyección de la polarización en la dirección normal a la superficie muestra un exceso de carga en la superficie. Para el caso volumétrico es donde

Ejemplo 7.4.1. Esfera polarizada

Consideremos el una esfera dieléctrica de radio R con polarización uniforme dada por $\vec{P} = P_o \hat{k}$. Este es un problema que, utilizando la expresión (7.24) o (7.31), técnicamente puede ser relativamente complejo para las herramientas matemáticas con las que contamos. Por tanto, haremos un esfuerzo para aproximarnos al problema utilizando argumentos físicos.

Para la parte interior lo que utilizaremos es la expansión multipolar, considerando que los momentos multipolares distintos al dipolo son nulos. Así que basta con evaluar el momento dipolar de la distribución. Para esto hay dos opciones: una es evaluar las densidades de carga ligadas y de estas y la definición del momento dipolar evaluarlo; la otra es simplemente notar que la polarización es una densidad volumétrica de momento dipolar y $\vec{p} = \int dV \vec{P}$. Para nuestro caso, al ser uniforme ciertamente la segunda es mucho más sencilla, entregando

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 P_o \hat{k}. \quad (7.34)$$

Con esta información y la expansión multipolar, ecuación (7.13), tenemos que en el exterior

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\pi k}{3} R^3 P_o \frac{\hat{k} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (7.35)$$

donde hemos considerado la esfera centrada en el origen. Considerando que $\vec{r} \cdot \hat{k} = r \cos \theta$, que es prácticamente la definición del ángulo θ , se tiene

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\pi k}{3} R^3 P_o \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (7.36)$$

Para el exterior, vamos a utilizar el potencial apenas encontrado y el valor que toma en $r = R$ como una condición de frontera para la ecuación de Poisson. La densidad de carga que utilizaremos es la densidad volumétrica de carga ligada. Sin embargo, esta es nula,

$$\rho_{lig} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0, \quad (7.37)$$

pues la polarización es uniforme. Luego la ecuación que debemos resolver es la de Laplace con condición de frontera

$$\phi(r = R) = \frac{4\pi k}{3} R P_o \cos \theta. \quad (7.38)$$

Ahora, bien; notando que $z = R \cos \theta$ es la altura z en un punto en la superficie de la esfera, tenemos que

$$\phi(r = R) = \frac{4\pi k}{3} P_o z, \quad (7.39)$$

la cual es satisfecha por la función $f(\vec{r}) = \frac{4\pi k}{3} P_o z$, ahora en todo el volumen, que además satisface la ecuación de Laplace. Como el teorema de unicidad nos dice que existe solo una solución que satisface esta condición de frontera y de contorno, se sigue que el potencial en el interior está dado por

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\pi k}{3} P_o z. \quad (7.40)$$

En resumen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\pi k}{3} P_o \times \begin{cases} z, & \text{si } r < R, \\ \frac{R^3 \cos \theta}{r^2}, & \text{si } R \leq r. \end{cases} \quad (7.41)$$

Se sigue que en el exterior el campo es como el de un dipolo puntual y en el interior

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{4\pi k}{3} P_o \hat{k} = -\frac{4\pi k}{3} \vec{P}. \quad (7.42)$$

Esto se muestra en la figura 7.9.

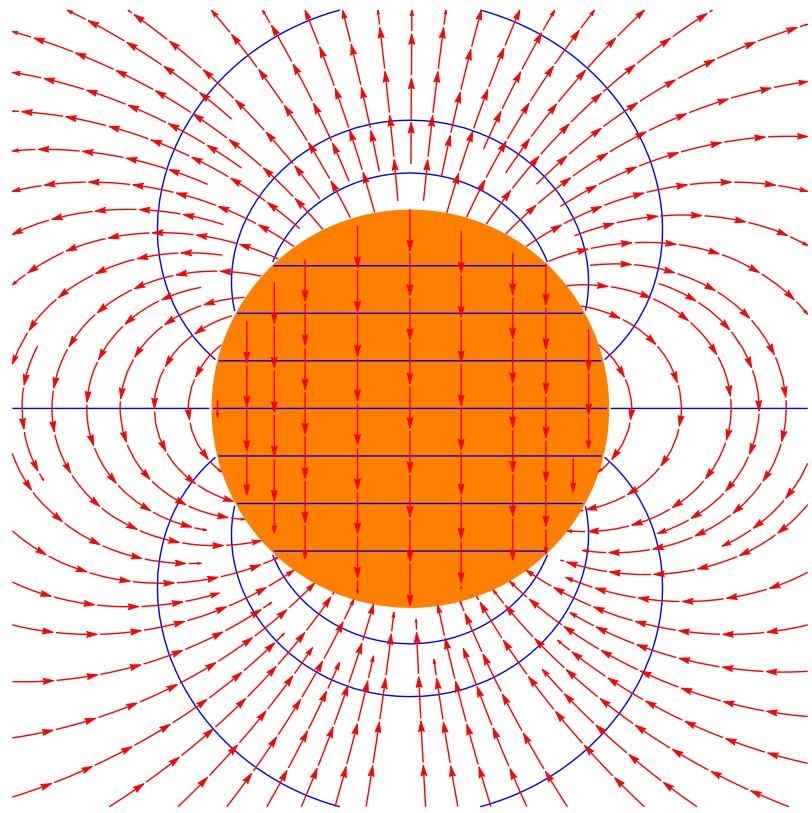


Figura 7.9: Líneas equiponteciales, en azul, y de campo, en rojo, para la esfera uniformemente polarizada.

Como último comentario, si evaluamos la densidad de carga superficial

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{r} = P_o \cos \theta, \quad (7.43)$$

vemos que esta corresponde a la superposición de dos esferas cargadas de signos opuestos ligeramente desplazadas en la dirección z . De modo que el mismo campo lo hubieramos obtenido si superponemos los campos de estas dos.

7.5. Ley de Gauss

La ley de Gauss que descubrimos en capítulos anteriores es completamente válida, hasta donde sabemos, incluso en el caso dinámico. Es conveniente, aún así, distinguir entre las densidades de carga con distinto origen. Una que llamamos libre, y sobre la que se tiene control o información directa, y otra ligada, que es inducida por la presencia de la anterior y sobre la que no tenemos información directa, como sucedía con los conductores.² Tenemos, entonces, que la ley de Gauss en su forma diferencial puede escribirse como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k (\rho_{\text{Libre}} + \rho_P) . \quad (7.44)$$

Como tal, repetimos, esta es correcta, sin embargo, la forma de lectura de las ecuaciones de Maxwell es que existen unas fuentes que generan los campos, y así como está escrita tenemos que lo que denominamos como fuente, ρ_P , es, asu vez, inducido por el campo. Otra forma de enunciar esto es que al lado derecho deseamos dejar la información que tenemos del sistema para evaluar y determinar los campos; mientras que a la izquierda dejamos las incógnitas que deseamos encontrar una vez resolvamos el problema. Siguiendo esta idea escribimos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + 4\pi k \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 4\pi k \rho_{\text{Libre}} . \quad (7.45)$$

Pero dado que tanto el campo \vec{E} como el campo \vec{P} son desconocidos, podemos definir un único, denominado vector desplazamiento, así:

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi k \vec{P} , \quad (7.46)$$

el cual satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi k \rho_{\text{Libre}} . \quad (7.47)$$

Esta es la expresión para la ley de Gauss en medios materiales, que nuevamente expresa que las cargas, de cualquier tipo, son las fuentes de campo eléctrico, pero que para el vector desplazamiento las líneas de campo solo tienen origen en las cargas libres. Esto último implica que determinar el campo vector desplazamiento se reduce al mismo problema abordado para el campo \vec{E} en el vacío, con solo cargas libres.

²Las cargas en los conductores no las incluiremos en esta categoría pues, como se estudió en el anterior capítulo, conviene más pensar en estos como condiciones de contorno.

Resumiendo, dado que la fuerza electrostática en cualquier caso sigue siendo conservativa, las ecuaciones de Maxwell para la electrostática son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi k\rho_{\text{Libre}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (7.48)$$

De estas, la idea es obtener los campos dadas las fuentes y condiciones de frontera. Sin embargo, el teorema de Helmholtz, o teorema fundamental del cálculo vectorial, implica que para establecer completamente un campo vectorial es necesario conocer tanto su divergencia como su rotacional. En el vacío las ecuaciones de Maxwell dictaban esta información para el campo electrostático \vec{E} , pero ahora conocemos: la divergencia de \vec{D} y el rotacional de \vec{E} . En conclusión necesitamos información extra que relacione \vec{D} y \vec{E} y que nos permita utilizar las ecuaciones para solucionar.

7.6. Materiales Lineales

La información extra que necesitamos se encuentra en la caracterización misma del material con que trabajaremos. Nosotros nos centraremos en los materiales lineales, para los cuales existe una relación lineal entre la polarización y el campo.

7.6.1. Susceptibilidad Eléctrica

La propiedad que dicta esta relación se conoce como susceptibilidad y es denotada por la matriz $\tilde{\chi}(\vec{r})$, estableciendo

$$\vec{P}(\vec{r}) = \tilde{\chi}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}), \quad (7.49)$$

o, en componentes,

$$P_i(\vec{r}) = \sum_j \chi_{i,j}(\vec{r}) E_j(\vec{r}). \quad (7.50)$$

En esta relación es importante recordar que el campo que aparece en la expresión es el campo total, que incluye también los efectos del material

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{Externo}}(\vec{r}) + \vec{E}_{\text{Material}}(\vec{r}), \quad (7.51)$$

lo que recuerda que la interacción entre las moléculas del material también afectan la polarización y, por tanto, el campo final obtenido.

Entre los materiales lineales podemos distinguir tres tipos:

1. *Isótropos*: para los cuales no existe ninguna dirección preferencial, más allá de la dictada por el propio campo, por lo que \vec{P} y \vec{E} son paralelos, i.e., $\tilde{\chi}$ es un escalar, y

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}). \quad (7.52)$$

2. *Homogéneos*: para los cuales todos los puntos dentro del material son idénticos y, en particular, sus propiedades son las mismas. Por tanto $\tilde{\chi}$ es constante:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \tilde{\chi} \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (7.53)$$

3. *Isótropos Homogéneos*: en los cuales las dos condiciones anteriores se satisfacen simultáneamente

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}). \quad (7.54)$$

Concentramos en el último caso, que es suficiente para abordar una situación general como la superposición de diversos materiales homogéneos isótropos. Por tanto, en nuestra discusión el material estará caracterizado por un único número, el cual, a su vez también puede depender de otros parámetros como la temperatura.

De la susceptibilidad sabemos que debe ser positiva, i.e., $\chi_e \geq 0$, y para el vacío es nula, $\chi_e = 0$, i.e., clásicamente el vacío no es polarizable.³ Sus unidades dependen del sistema de unidades, pues de $[\vec{P}] = \left[\frac{\vec{P}}{V} \right] = \left[\frac{q}{L^2} \right]$, se sigue $[\chi_e] = \left[\frac{1}{k} \right]$. Así en cgs la susceptibilidad eléctrica es adimensional.

7.6.2. Permitividad Eléctrica

Aunque con la susceptibilidad ya tenemos la información necesaria para tener un problema bien definido, conviene definir otro parámetro que caracteriza el material. Para medios materiales tenemos

$$\vec{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \vec{E}, \quad (7.55)$$

donde se ha definido la matriz de permitividad eléctrica

$$\tilde{\epsilon} \equiv \mathbb{I} + 4\pi k \tilde{\chi}_e, \quad (7.56)$$

³El fenómeno de creación de pares permite que a nivel cuántico el vacío presente propiedades de polarización.

Dependiendo de si homogéneos o isótropos se siguen las mismas consideraciones que para $\tilde{\chi}_e$. Para materiales homogéneos e isótropos

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (7.57)$$

con la permitividad, también denominada constante dieléctrica, satisfaciendo $\epsilon \geq 1$. Esta indica, al igual que la susceptibilidad, qué tan polarizable es el material. El cuadro 7.1 muestra los valores experimentales aproximados de este parámetro para varios medios. Como es de esperarse el agua, al ser polar, presenta una permitividad elevada pero fuertemente dependiente de la temperatura. A bajas temperaturas las fluctuaciones térmicas disminuyen tanto como para permitir una alineación más efectiva entre las moléculas. Como

Plástico	$\epsilon \sim 4$
Vidrio	$\epsilon \sim 5$
Aqua Líquida	$\epsilon \sim 80$
Aqua Líquida (-40°C)	$\epsilon \sim 100$

Cuadro 7.1: Valores de susceptibilidad para distintos medios.

se había advertido esta nueva información permite solucionar el problema, pues ahora solo resta un solo campo como incognita:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 4\pi k \rho_{\text{Libre}}. \quad (7.58)$$

Para materiales homogéneos, al ser la susceptibilidad independiente de la posición, se sigue que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k \frac{\rho_{\text{Libre}}}{\epsilon}. \quad (7.59)$$

Vemos que \vec{E} satisface una ecuación análoga a la encontrada en el vacío pero con carga efectiva $\rho_{\text{ef}} = \frac{\rho_{\text{Libre}}}{\epsilon}$. ¡La carga neta observada es menor! Este fenómeno de apantallamiento es similar, pero menos dramático que el ocurrido con los conductores y se puede entender gráficamente como se muestra en la figura 7.10

Ejemplo 7.6.1. Capacitores y dieléctricos

Los capatitores en vacío, estudiados en el capítulo anterior, resultan en general inútiles para necesidades prácticas. Siendo necesarios tamaños demasiado

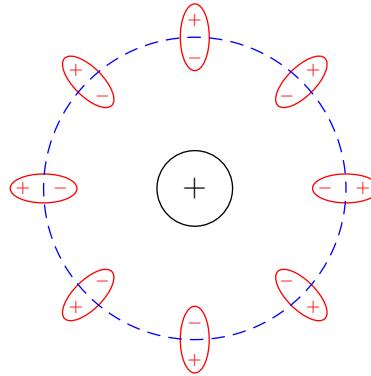


Figura 7.10: La presencia de una carga positiva sumergida en un material dieléctrico genera una alineación radial entorno a esta. Una superficie que encierre la carga revela una carga encerrada menor dada la contribución por cargas ligadas. En efecto se tiene que la divergencia de la polarización en este punto será distinta de cero y positiva.

grandes para poder tener aplicaciones tecnológicas. Como veremos ahora, el efecto de apantallamiento apenas encontrado resuelve este problema.

Imaginemos un capacitor de placas paralelas, pero ahora en medio de estas situaremos un medio con permitividad eléctrica ϵ . Si cargamos las placas con una densidad de carga de magnitud Q/A , tenemos un campo generado por estas dado por $E_{ext} = 4\pi kQ/A$. Pero este campo no es el total, que es el que finalmente dictará la diferencia de potencial y la energía almacenada. Debemos incluir el campo de polarización.

Ahora bien; recordemos que para el campo vector desplazamiento solo necesitamos las cargas libres. Así que este tiene una magnitud como la del campo en el vacío, i.e., dentro de las lacas

$$D = 4\pi k \frac{Q}{A}, \quad (7.60)$$

independientemente de si hay o no un dieléctrico allí. De este podemos determinar el campo,

$$E = \frac{1}{\epsilon} D = 4\pi k \frac{Q}{\epsilon A} < E_{Ext}. \quad (7.61)$$

De esto resulta que la diferencia de potencial será menor

$$V = E \cdot s = 4\pi k \frac{Q \cdot s}{\epsilon A}, \quad (7.62)$$

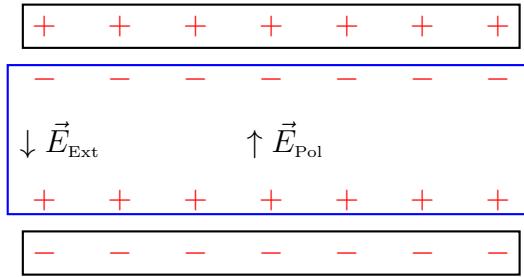


Figura 7.11: Capacitor de placas paralelas. El campo generado por las cargas en las placas induce una polarización. Esta se revela como una carga superficial ligada que, a su vez, genera un campo que se opone al externo. El campo total es menor al del caso en el vacío.

logrando una capacitancia

$$C_{\text{Mat}} = \frac{\epsilon A}{4\pi k s} = \epsilon C_{\text{vac}} > C_{\text{vac}}. \quad (7.63)$$

¡Hemos aumentado la capacitancia! Lo que permite que con la misma batería, la misma diferencia de potencial, podamos almacenar más carga.

De nuestro resultado podemos tener la magnitud y dirección del vector polarización en medio de las placas:

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi k} (\vec{D} - \vec{E}) = -\frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \frac{Q}{A} \hat{k}, \quad (7.64)$$

recordemos que $\epsilon \geq 1$, osea la polarización apunta hacia abajo. Ya que es constante se tiene que su divergencia es nula

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0, \quad (7.65)$$

y no hay carga ligada volumétrica. En cambio para las superficies

$$\sigma_{P,ar} = \hat{k} \cdot \vec{P} = -\frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \frac{Q}{A}, \quad \sigma_{P,ab} = (-\hat{k}) \cdot \vec{P} = \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \frac{Q}{A}, \quad (7.66)$$

con $\sigma_{P,ar}$ y $\sigma_{P,ab}$, las densidades arriba y abajo respectivamente, demostrando lo visto en la figura 7.11 sobre la carga inducida superficial.

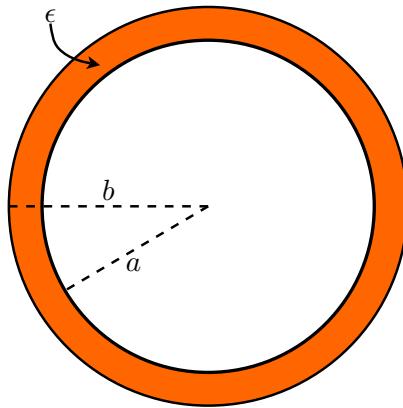


Figura 7.12: Sistema estudiado en el ejemplo 7.6.2. Cascarón uniforme con una película dieléctrica de grosor $b - a$.

Ejemplo 7.6.2. Cascarón uniforme con capa dieléctrica

Cascarón esférico de radio $r = a$ cargado uniformemente y carga q sumergido en una esfera de radio $r = b$ dieléctrica con permitividad ϵ . De la ley de Gauss

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi k Q_{\text{Libre encerrada}}. \quad (7.67)$$

De hecho la situación para el vector desplazamiento es como la que ya estudiamos para el campo en el vacío. Por simetría en una superficie esférica:

$$|\vec{D}| = k \frac{q}{r^2}, \quad \vec{D} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad (7.68)$$

para afuera del cascarón y dentro es nulo. Así, de la relación con el campo

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\vec{D}}{\epsilon}, & r \in (a, b), \\ \vec{D}, & r \notin (a, b). \end{cases}, \quad (7.69)$$

Para la polarización, por otro lado,

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi k} (\vec{D} - \vec{E}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} q \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{\hat{r}}{r^2} & r \in (a, b), \\ 0, & r \notin (a, b), \end{cases}, \quad (7.70)$$

Las cargas ligadas por su parte resultan

$$\sigma_P(r = a) = \vec{P} \cdot (-\hat{r}) \Big|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right), \quad (7.71)$$

$$\sigma_P(r = b) = \vec{P} \cdot \hat{r} \Big|_{r=b} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{b^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right), \quad (7.72)$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0. \quad (7.73)$$

Donde en la última parte utilizamos el resultado del ejercicio 4.16 mostrando que la divergencia es nula, al menos para $r \neq 0$.⁴

Como una forma de prueba podemos evaluar el campo eléctrico utilizando

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k Q_{\text{Total encerrada}}, \quad (7.74)$$

donde se deben incluir las cargas ligadas. Para una superficie dentro del dieléctrico encerrando la esfera, además de la carga libre se tiene la carga ligada en la superficie interna

$$Q_{\text{lig a}} = 4\pi a^2 \sigma_p(r = a) = -q \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right).$$

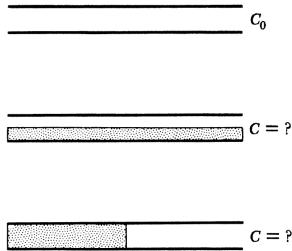
Obteniendo el resultado conocido para \vec{E} dentro del dieléctrico. Para afuera se deben incluir las cargas en ambas superficies. Sin embargo, esas se anulan entregando que \vec{E} y \vec{D} coinciden.

Ejercicio 7.4. Tenemos un surtido de cinta de polietileno, de constante dieléctrica de 2,3, de 5,6 cm de ancho y 0,0025 cm de espesor; también disponemos de cinta de aluminio de 5 cm de ancho y 0,00125 cm de espesor. La idea es construir un capacitor de unos $0,05 \mu F$ de capacitancia, en forma de un rollo cilíndrico. Describa cómo podemos construirlo y estime la cantidad de cinta de cada clase que se necesita y el diámetro del capacitor una vez construido.

Ejercicio 7.5. La botella de Leyden es simplemente un capacitor que utiliza el vidrio como dieléctrico. Estime el valor de la capacitancia para una botella de Leyden y compare su tamaño con el de una esfera conductora con la misma capacitancia.

⁴También podemos entenderlo de forma que la divergencia de la polarización es solo distinta de cero en el origen, pues es un campo radial y sus solo en este punto las líneas de campo nacen (o mueren dependiendo del signo de Q).

Ejercicio 7.6. Considere tres capacitores de placas paralelas cuyas placas son idénticas y la distancia entre estas es igual. Uno de estos está al vacío y con capacitancia C_0 . Los otros dos están llenos, hasta la mitad de un dieléctrico con constante dieléctrica ϵ , como se muestra en la figura. Evalúe la capacitancia de los dos capacitores con dieléctrico en términos de C_0 .



Ejercicio 7.7. Es posible utilizar lo encontrado en este capítulo para, por ejemplo, determinar la cantidad de combustible en un tanque. Suponiendo que se trata de un tanque con las paredes superior e inferior conductoras, que el combustible tiene una constante dieléctrica relativa ϵ y el vapor del combustible tiene una constante relativa ϵ_v , dada una diferencia de potencial V_o cuando el tanque se encuentra lleno, determine la diferencia de potencial como función de la cantidad de combustible que resta en el tanque.

Ejercicio 7.8. Un capacitor de placas paralelas está lleno de un material dieléctrico pero sólo cubriendo mitad del área. Muestre que si la carga total en las placas es Q las densidades de carga en cada sección se distribuyen como $\sigma_d = 2\epsilon Q/A(1 + \epsilon)$ en la sección del dieléctrico y $\sigma_v = 2Q/A(1 + \epsilon)$ donde el dialéctrico no cubre.

7.6.3. Condiciones de Interfaz

En la sección 4.6 discutimos cómo al cruzar una superficie cargada el campo eléctrico sufre un salto. Ahora podemos discutir esta situación con mayor generalidad. La idea es tomar una superficie gaussiana que rodee una sección de la interfaz y evaluar el flujo de vector desplazamiento a través de esta (ver figura 7.13). Análogo a lo que sucedía para el campo en la sección 4.6, del hecho que solo contribuyan las tapas, ya que ley de Gauss para el vector desplazamiento es idéntica que la de \vec{E} en el vacío se sigue:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{1,2} \Big|_S = 4\pi k \sigma_{\text{Libre}}, \quad (7.75)$$

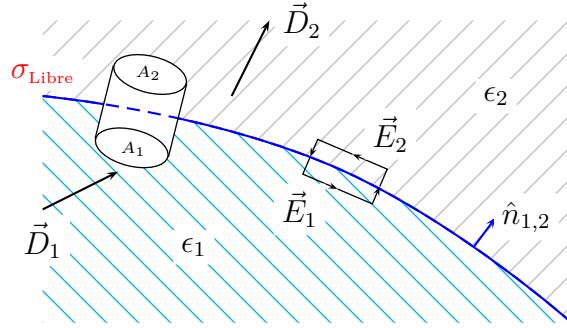


Figura 7.13: Evaluamos el flujo de vector desplazamiento a través del cilindro de tamaño minuscúlo con tapas paralelas a la superficie y la circulación de campo eléctrico alrededor del camino músculo que cruza la interfaz y con caminos paralelos a la superficie.

que en términos de \vec{E} queda:

$$\left(\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1 \right) \cdot \hat{n}_{1,2} \Big|_S = 4\pi k \sigma_{\text{Libre}} . \quad (7.76)$$

la cual nos dicta que las componentes normales del campo a ambos lados de la interfaz sufren un discontinuidad dictada por la densidad de carga y las susceptibilidades eléctricas.

El hecho que la circulación de campo electrostático sea nula siempre, se reduce a la siguiente relación:

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \times \hat{n}_{1,2} \Big|_S = 0 , \quad (7.77)$$

o en términos de las componentes tangenciales:

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \Big|_S = 0 , \quad (7.78)$$

que indica que las componentes tangenciales son continuas. Esta última relación, aunque aparentemente válida solo para el caso estático, se puede justificar incluso en el caso dinámico.

Como ilustración a lo apenas discutido tenemos las discontinuidades presentadas por el campo en el ejemplo 7.6.2. Por ejemplo al pasar del interior del cascarón al interior de la capa dieléctrica el campo sufre un cambio

$$\epsilon E_{die} - E_{in} \Big|_{r=a} = k \frac{q}{a^2} = 4\pi k \sigma . \quad (7.79)$$

Y para pasar del interior del dieléctrico al exterior se tiene una discontinuidad de

$$E_{out} - \epsilon E_{die}|_{r=b} = k \frac{q}{b^2} - \epsilon k \frac{q}{\epsilon b^2} = 0. \quad (7.80)$$

Tal y como indica la discontinuidad general apenas establecida.⁵

Ejemplo 7.6.3. Esfera dieléctrica en campo uniforme

Podemos pensar en este sistema como una esfera dieléctrica de radio R y constante dieléctrica ϵ en medio de dos placas infinitas cargadas uniformemente y que se encuentran muy lejos de la esfera.

Esta última consideración lo que nos indica es que muy lejos de la esfera lo que se debe observar es un campo uniforme, que vamos a considerar vertical $\vec{E} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} E_0 \hat{k}$, o sea las placas están separadas en la dirección vertical.

Lo otro que debemos tener en cuenta es que en la superficie de la esfera la componente tangencial del campo debe sufrir una discontinuidad como la dictada por la ecuación (7.76), mientras la componente tangencial es continua, como dicta la realación (7.78).

Afortunadamente no tenemos que solucionar el problema pues la respuesta ya la tenemos a la mano. Efectivamente verifiquemos que la superposición lineal del campo de una esfera uniformemente polarizada, ejemplo 7.4.1, y un campo uniforme cumplen nuestros requerimientos; Suponemos que el campo está dado por

$$\vec{E} = E_0 \hat{k} + \vec{E}_{esf.pol}, \quad (7.81)$$

con $\vec{E}_{esf.pol}$ dado por (7.9) en el exterior y (7.42) en el interior. Como en el exterior $\vec{E}_{esf.pol}$ el campo decrece con la distancia, se tiene que efectivamente se cumple la condición $\vec{E} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} E_0 \hat{k}$. Ahora veamos el campo justo en la superficie de la esfera: en el interior el campo está dado por

$$\vec{E}\Big|_{r=R^-} = E_0 \hat{k} - \frac{4\pi k}{3} P_0 \hat{k}, \quad (7.82)$$

mientras que en el exterior

$$\vec{E}\Big|_{r=R^+} = E_0 \hat{k} + k \frac{8\pi P_0}{3} \cos \theta \hat{r} + k \frac{4\pi P_0}{3} \sin \theta \hat{\theta}, \quad (7.83)$$

⁵Notemos que en términos generales también podríamos utilizar las densidades de carga ligadas superficiales para justificar este salto como se hizo en el vacío. Por ejemplo, las densidades de carga (7.71) y (7.72) explicarían las discontinuidades apenas estudiadas.

donde hemos utilizado $p = \frac{4\pi}{3}R^3P_0$. Para comparar las componentes tangenciales nos paramos en $\theta = \pi/2$, en el ecuador de la esfera, donde, además $\hat{\theta} = -\hat{k}$. Así se tiene

$$\vec{E}\Big|_{r=R^+, \theta=\pi/2} = E_0\hat{k} - k\frac{4\pi P_0}{3}\hat{k}, \quad (7.84)$$

y verificamos que efectivamente el campo tangencial es continuo. Para las componentes normales, nos paramos en el polo norte, $\theta = 0$, donde, además $\hat{r} = \hat{k}$:

$$\vec{E}\Big|_{r=R^+, \theta=0} = E_0\hat{k} + k\frac{8\pi P_0}{3}\hat{k}. \quad (7.85)$$

Con esta información y la condición de interfaz (7.76), se sigue

$$\epsilon\left(E_0 - \frac{4\pi k}{3}P_0\right) - \left(E_0 + k\frac{8\pi P_0}{3}\right) = 0, \quad (7.86)$$

pues no hay carga libre. Esta es una condición sobre el valor de P_0 , que resulta en

$$P_0 = \frac{3}{4\pi k}\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}E_0, \quad (7.87)$$

que en particular nos indica que si $\epsilon = 1$, i.e., la esfera es vacía, la polarización efectivamente es nula. Concluimos, entonces que

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \begin{cases} \frac{3}{\epsilon+2}\hat{k}, & \text{si } r < R, \\ \hat{k} + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right), & \text{si } R \leq r. \end{cases} \quad (7.88)$$

La figura 7.14 muestra las líneas de campo de este sistema para dos valores distintos de constante dieléctrica.

Algo interesante para apreciar es el hecho que entre más grande sea la constante dieléctrica el campo interno es más pequeño, y en el límite $\epsilon \rightarrow \infty$ es nulo. ¡Tal y como un conductor! En efecto un conductor es como un material con facilidad de polarización infinita.

Ejercicio 7.9. Verificar las condiciones de interfaz para los sistemas del ejercicio 7.6.

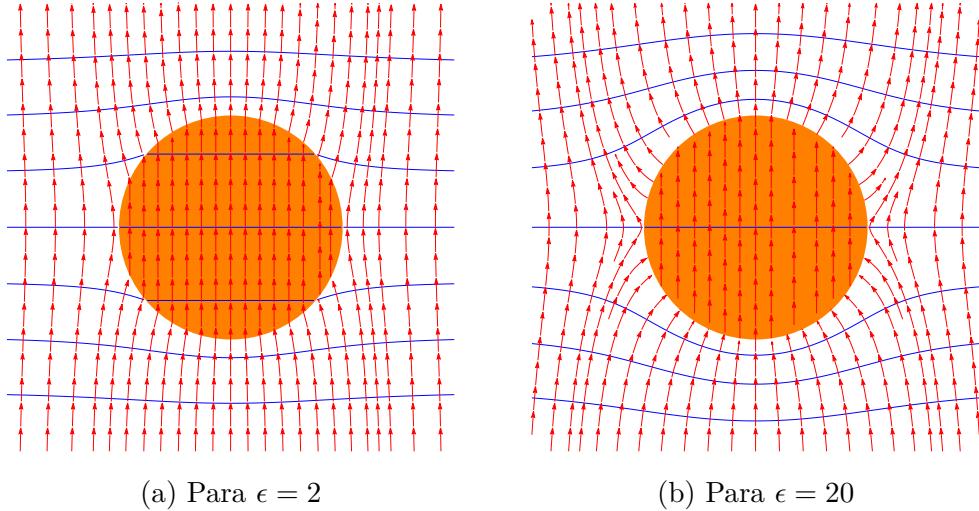


Figura 7.14: Campo para una esfera dieléctrica sumergida en una región con un campo uniforme. Se muestran para dos valores para la constante dieléctrica, evidenciando que para valores grandes el campo se ve más deformado.

7.7. Energía Potencial

Para formar una distribución de carga en presencia de un dieléctrico es necesaria una energía extra que se utiliza en polarizar el medio.

El apantallamiento hace que la energía necesaria, trabajo realizado, sea menor. Nuevamente:

$$W = \frac{1}{2} \int dq \phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}). \quad (7.89)$$

De la ley de Gauss e integrando por partes:

$$W = \frac{1}{2} \int dV \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}{4\pi k} \phi = \frac{1}{8\pi k} \int dV \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{D}) - \frac{1}{8\pi k} \int dV \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \phi. \quad (7.90)$$

La primera, por el teorema de la divergencia, es una integral de superficie en el infinito con un integrando que, para cargas localizadas, decae al menos tan rápido como $\frac{1}{r^3}$, luego es nula. Así:

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int dV \vec{D} \cdot \vec{E}, \quad (7.91)$$

entonces:

$$\mathcal{U}_l = \frac{1}{8\pi k} \vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (7.92)$$

Como ejemplo evaluaremos la energía almacenada en formar el cascarón con carga q y la capa dieléctrica de grosor d sobre este. Como vimos antes $\vec{D} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$ para $r > a$ y:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \left[\frac{1}{\epsilon} \theta(r - a) + \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \theta r - a - d \right]. \quad (7.93)$$

Así:

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int dV \vec{D} \cdot \vec{E}, \quad (7.94)$$

$$= \frac{1}{8\pi k} 4\pi (kq)^2 \left[\int_a^{a+d} dr \frac{1}{\epsilon r^2} + \int_{a+d}^{\infty} dr \frac{1}{r^2} \right], \quad (7.95)$$

$$= \frac{kq^2}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} \right) + \frac{1}{a+d} \right], \quad (7.96)$$

$$\leq \frac{kq^2}{2a} = W_0 = W|_{\epsilon=1} = W|_{d=0}. \quad (7.97)$$

$$(7.98)$$

De modo que la energía de polarización resulta

$$\Delta W = W - W_0 = -\frac{2q^2}{2\epsilon a} \left(1 - \frac{a}{a+d} \right). \quad (7.99)$$

7.7.1. Placas Paralelas

Para este análisis utilizamos el hecho que el campo vector desplazamiento resulta tal y como el campo eléctrico en el caso de vacío, mientras que el campo eléctrico se encuentra apantallado. Para hacer el análisis en el caso de carga constante conviene escribirlos de la siguiente manera

$$\vec{D} = 4\pi k \sigma \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{E} = \frac{4\pi k}{\epsilon} \sigma \hat{k}, \quad (7.100)$$

de modo que, como el campo es uniforme el trabajo simplemente la densidad de energía veces el volumen, así

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int dV \frac{(4\pi k\sigma)^2}{\epsilon} = \frac{2\pi k}{\epsilon} \sigma^2 \cdot \text{Vol} = \frac{1}{\epsilon} W_0 < W_0. \quad (7.101)$$

Para el caso de una diferencia de potencial constante, en cambio, conviene dejarlos expresados en términos de esta, así, con L la distancia entre las placas,

$$\vec{E} = \frac{V}{L} \hat{k}, \quad \vec{D} = \epsilon \frac{V}{L} \hat{k}, \quad (7.102)$$

de tal forma que

$$W = \epsilon \left(\frac{V}{L} \right)^2 \cdot \text{Vol} = \epsilon W_0 > W_0. \quad (7.103)$$

En el primer caso el campo neto \vec{E} es apantallado al introducir el dieléctrico y es más fácil cargar las placas.

En el segundo caso para mantener la diferencia de potencial, y por tanto el campo neto \vec{E} , se debe aumentar la carga, lo que implica un trabajo extra desde una fuente externa.

7.7.2. Energía de Polarización

Veamos que efectivamente la energía extra puede ser entendida debido a la polarización. Para esto denotamos la energía original sin material como

$$W_0 = \frac{1}{8\pi k} \int dV |\vec{E}_0|^2. \quad (7.104)$$

Ahora $W = \frac{1}{8\pi k} \int dV \vec{E} \cdot \vec{D}$, pero sabemos que \vec{D} no es sensible a la presencia del dieléctrico se sigue $\vec{D} = \vec{E}_0$, luego:

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int dV \vec{E}_0 \cdot \vec{E}, \quad (7.105)$$

o sea:

$$\Delta W = W - W_0, \quad (7.106)$$

$$= \frac{1}{8\pi k} \int dV \vec{E}_0 \cdot (\vec{E} - \vec{E}_0), \quad (7.107)$$

$$= \frac{1}{8\pi k} \int dV \vec{E}_0 \cdot (\vec{E} - \vec{D}). \quad (7.108)$$

Recordando $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi k \vec{P}$ se sigue:

$$\boxed{\Delta W = -\frac{1}{2} \int dV \vec{P} \cdot \vec{E}_0.} \quad (7.109)$$

Ejercicio 7.10. *Evaluar y comparar la energía almacenada en los tres sistemas del ejercicio 7.6 suponiendo que todos se encuentran con la misma diferencia de potencial.*

7.8. Ejercicios extra

Purcell 2da Ed. Capítulo 10. 10.5, 10.8, 10.21,

Capítulo 8

Corrientes eléctricas

En este capítulo estudiaremos el transporte de cargas, para lo cual definiremos la corriente y densidad de corriente, basandonos en el hecho que la carga se conserva y precisaremos matematicamente esta ley de conservación. Se definiran propiedades como la conducción y planteremos la ley de Ohm, y estudiaremos la clasificación de los materiales según su conductividad eléctrica. Veremos que el hecho la conductividad no sea perfecta implica una disipación de energía, la cual asociaremos a la corriente y el voltaje. Por último comenzaremos a estudiar los primeros circuitos con resistores, resistencias, encontrando las reglas básias para su tratamiento, denominadas leyes de Kirchoff, que se desprenden precisamente de la conservación de la carga y la energía.

8.1. Corriente y densidad de corriente

La corriente, independientemente de los portadores de carga implicados, se define como la cantidad de carga que pasa por un punto por unidad de tiempo, y a esta cantidad escalar la denotaremos por I . Así tiene unidades de esu/s en *cgs* y C/s o Amperios A en MKS. Por definición se toma el Amperio como unidad fundamental, y el Coulomb como unidad derivada de este $1C = 1A \cdot s$, por esta razón suele denominarse el sistema de unidades como *MKSA*. Una corriente de un Amperio, o $\sim 2,998 \times 10^9 esu/s$, es equivalente al paso de aproximadamente 6×10^{18} electrones por segundo.

Vemos que en la definición sólo se tienen en cuenta la carga neta transportada, siendo equivalente cargas de un signo moviéndose en un sentido que

cargas de signo opuesto moviéndose en la dirección contraria. Así, por ejemplo, el transporte de átomos neutros no equivale una corriente ya que cargas de ambos signos están pasando en la misma dirección y con la misma velocidad. En cambio, el movimiento de un objeto cargado, donde hay una exceso de carga de cualquier signo, constituye una corriente.

La definición hasta ahora expuesta, además, involucra el movimiento e una única dirección, bien sea adelante y atrás, o sea unidimensional, por ejemplo restringido a un alambre delgado. Claramente, en general este no es el caso y debemos considerar con cuidado la dirección en que las cargas se mueven. Para esto será necesario, como debe ser obvio, utilizar una cantidad vectorial que denominaremos densidad de corriente y notaremos por \vec{J} .

Recordando la definición general de flujo de un campo vectorial introducida en la sección 4.1, vemos que es precisamente el flujo sobre una superficie plana, con una orientación dada la cantidad que nos da la información que estamos pidiendo. En efecto en este caso podemos considerar el campo vectorial el campo de velocidades de las cargas moviéndose y para encontrar la carga que pasa por segundo simplemente multiplicamos el flujo de la velocidad por la densidad de cargas, ρ , en el punto donde se calcula. Así, si el campo de velocidades lo denotamos por \vec{V} , el flujo del campo $\vec{J} = \rho\vec{V}$, da la cantidad de carga que atraviesa una superficie por unidad de tiempo, i.e.,

$$\frac{\text{Cantidad de carga a través de } \vec{A}}{\text{Tiempo}} = \Phi_{\vec{A}} = \vec{J} \cdot \vec{A}, \quad (8.1)$$

donde hemos supuesto el caso uniforme y una superficie plana para que el flujo se reduzca a su versión simple del producto punto con el vector área total. El campo vectorial \vec{J} es lo que denominamos densidad de corriente, esto debido a sus unidades de corriente por unidad de área. Esta no solo da la velocidad de las cargas sino ademas la densidad de estas en cada punto del espacio. Vemos entonces que la corriente por una superficie puede definirse como el flujo de densidad de corriente a través de dicha superficie.

Un caso particular es el movimiento de cargas puntuales en el espacio. Supongamos que tenemos sólo un tipo de carga, q_1 , y hay n_1 cargas por unidad de volumen, todas moviéndose con la misma velocidad \vec{v}_1 . La densidad de

corriente está dada en este caso por¹

$$\vec{J}_1 = n_1 q_1 \vec{v}_1 . \quad (8.2)$$

Y la corriente a través de una superficie \vec{A} , que suponemos plana y pequeña de tal forma que \vec{J} no varie sobre esta, será $I = n_1 q_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{A}$. En general tenemos varios tipos de cargas, distinguidas principalmente por sus velocidades, \vec{v}_i , en este caso la densidad de corriente y corriente por una superficie \vec{A} son

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i , \quad I = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{A} . \quad (8.3)$$

Si queremos distinguir los distintos tipos de partículas por su carga y no por su velocidad es conveniente definir una velocidad promedio para este conjunto. Así si la densidad total de cargas con un valor dado q_m es $N_m = \sum_i n_{m,i}$, con $n_{m,i}$ la densidad de las cuales se mueven con velocidad $\vec{v}_{m,i}$, tenemos una velocidad promedio

$$\overrightarrow{\bar{V}}_m = \frac{1}{N_m} \sum_i n_{m,i} \vec{v}_{m,i} , \quad (8.4)$$

con la que podemos definir una densidad de corriente por especie de carga

$$\vec{J}_m = N_m q_m \overrightarrow{\bar{V}}_m , \quad (8.5)$$

que efectivamente reproduce la corriente que se obtiene por cálculo directo,

$$\vec{J}_m = \sum_i q_m n_{m,i} \vec{v}_{m,i} = q_m \sum_i n_{m,i} \vec{v}_{m,i} = N_m q_m \overrightarrow{\bar{V}}_m . \quad (8.6)$$

La definición que hemos dado para la corriente eléctrica es independiente de si las partículas implicadas se mueven con velocidades relativistas. Así por ejemplo puede ser utilizada en caso extremos como el presentado en el ejercicio 8.1.

Ejercicio 8.1. En un sincrotrón de 10 GeV los electrones viajan en una trayectoria circular de 100 m de largo (perímetro). Es usual tener un promedio de 10^{11} electrones por cada ciclo de aceleración. La velocidad de los electrones es prácticamente la velocidad de la luz. ¿Cuál es la corriente?

¹Nótese que estamos descuidando el hecho que las cargas se encuentran en un punto específico del espacio, información que no aparece la expresión (8.2), por lo que formalmente no estamos escribiendo un campo. Por el momento no entraremos en detalle en cómo introducir esta información concentrándonos en las propiedades de las corrientes

8.2. Conservación de la carga

Del análisis hecho en la sección anterior tenemos que la corriente es el flujo de la densidad de corriente, luego para una superficie arbitraria podemos escribir,

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (8.7)$$

Supongamos que queremos calcular la corriente sobre una superficie cerrada de tal forma que la carga en el volumen encerrado por la superficie permanezca constante. Cómo la corriente nos da la carga neta que sale de la superficie entonces la única forma que la carga se mantenga constante es que este flujo de cargas sea cero, de otra forma implicaría que se crea o destruye carga dentro de la superficie, algo que sabemos no sucede. Encontramos, entonces, que

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (8.8)$$

Utilizando el teorema de la divergencia, ec.(4.61), esta restricción es equivalente a decir $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, o sea, que las líneas de campo del campo vectorial \vec{J} no pueden nacer en puntos donde la carga no cambie en el tiempo. De hecho los puntos donde la divergencia de densidad de corriente es no nula son los puntos de donde emana carga, si es positiva, o es recibida, si es negativa.

Si el flujo de densidad de corriente, a través de una superficie cerrada es no nulo, por conservación de la carga, implica necesariamente que la carga encerrada esté variando en el tiempo. Más precisamente, como un flujo positivo implica que la carga está saliendo se sigue que la carga disminuye en el tiempo tal y como el flujo lo dicta, o sea

$$\frac{\partial Q_{enc}}{\partial t} = - \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad (8.9)$$

que simplemente la formalización matemática de la conservación de la carga, también conocida en general como la ecuación de continuidad en forma integral. Para escribirla en su forma más conocida, diferencial, recordamos que la carga encerrada por una superficie está dada por

$$Q_{enc}(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV, \quad (8.10)$$

con \mathcal{V} el volumen encerrado por cierta superficie bajo estudio. Se sigue, entonces,

$$\begin{aligned}\frac{dQ_{enc}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) dV, \\ &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV,\end{aligned}\quad (8.11)$$

pensando que la superficie y, por tanto, el volumen no cambia en el tiempo de modo que la derivada temporal pueda entrar en la integral y, ya actuando sobre la densidad de carga, se verá reflejada como una derivada parcial. Finalmente encontramos

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV, \quad (8.12)$$

pero como esta esta relación se debe satisfacer para cualquier volumen tenemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (8.13)$$

Esta ecuación de continuidad simplemente está dando la información que la carga se conserva y que la única forma que esta varíe es por que existe un flujo neto de carga, o de forma inversa, no puede haber un flujo neto de carga sin que la carga encerrada cambie.

Ejemplo 8.2.1. Corriente entre placas paralelas

Este análisis nos permite conocer el comportamiento de las cargas aceleradas por un sistema de placas paralelas, una de las cuales emite carga y otra que la recibe. Las cargas, que son emitidas con velocidad nula, son aceleradas por la diferencia de potencial entre las placas y finalmente chocan y son absorbidas por la otra placa.² Aunque están llegando cargas a la otra placa, se puede lograr un estado estacionario colocando una fuente de potencial constante entre las placas (ver figura 8.1).

Por simetría, en la aproximación de placas infinitas o, equivalentemente, despreciando efectos de borde, se sigue que no hay corrientes en la dirección tangencial a las placas que tomamos paralelas al plano YZ , o sea $J_y = J_z = 0$. Una vez el sistema logra el estado estacionario sabemos que la densidad de

²Un ejemplo práctico que se puede aproximar por este arreglo es el de un diodo de vacío. En este caso una de las placas (cátodo) es recubierta con un material que al ser calentado emite electrones fácilmente.

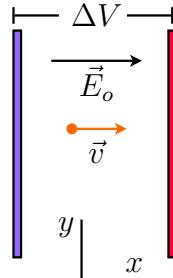


Figura 8.1: Placas a una diferencia de potencial fijo con una corriente de cargas entre estas.

carga en y entre las placas no varia en el tiempo, luego de la ecuación de continuidad nos indica que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} = 0. \quad (8.14)$$

O sea que la densidad de corriente es la misma en todo punto entre las placas. Pero la velocidad sabemos no es constante, de hecho es un problema uniformemente acelerado, $F = eE_o$ con E_o uniforme, luego $a = \frac{e}{m}E_o$ y, como inician del reposo $v^2 = 2ax$, midiendo las distancias desde la placa que emite,

$$v_x = \sqrt{\frac{2m_e}{eE_o}}x, \quad (8.15)$$

i.e., la velocidad aumenta como la raíz cuadrada de la distancia. Ya que $J_x(x) = \rho(x)v_x(x)$ lo que encontramos es que en el estado estacionario, tal que se satisface (8.14), la densidad de carga no es uniforme sino que varía de modo que la densidad de corriente permanezca constante. Más precisamente debe variar de modo inverso a como lo hace la velocidad, $\rho \sim 1/\sqrt{x}$, o sea que se la densidad de electrones es mayor cerca al cátodo.

Ejercicio 8.2. Suponga un alambre conductor de largo L y sección transversal circular, pero cuyo diámetro cambia con la distancia x al extremo del alambre de la siguiente manera $r(x) = r_o - ax$, con a una constante adimensional cuyo valor satisface $a < r_o/L$, de modo que el radio nunca se anula. Considerando el estado estacionario, discuta como es aproximadamente la dependencia de la densidad de la corriente y la corriente la distancia al extremo. ¿Puede la densidad de corriente tener sólo componente apuntando a lo largo del alambre?

8.3. Ley de Ohm

Aunque las definiciones que hemos descrito hasta el momento son completamente generales y aplica para cualquier tipo de corriente, e.g., transporte de carga como en el generador de Van der Graaff, o el simple movimiento de cargas como el de las gotas de lluvia, que se cargan por fricción, centraremos nuestro estudio a un tipo particular de corrientes. Esta estarán generadas por campos eléctrico que inducen movimiento en las cargas.

El campo eléctrico al ejercer una fuerza sobre las cargas genera un flujo neto de carga que, para velocidades bajas, va en la dirección del campo. De manera general, aunque el campo es el origen de la corriente, la relación precisa puede llegar a ser muy complicada. Sin embargo, para una gran gama de materiales (denominados materiales ohmicos) y un rango amplio de magnitudes de campos la relación entre la corriente y el campo es lineal y se tiene

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (8.16)$$

que se conoce como Ley de Ohm, donde el factor de proporcionalidad σ se denomina conductividad y su valor dependerá de la naturaleza del material: alto para los metales y bajo para los aislantes. También puede depender de parámetros como la temperatura pero en todo caso es independiente del campo aplicado.

Al igual que con la discusión hecha en la sección 7.6, los materiales lineales pueden ser tanto inhomogéneos como anisotópicos, en cuyo caso la conductividad será, respectivamente, dependiente de la posición y de carácter tensorial (matricial). En este último caso, por ejemplo, la corriente no será paralela al campo, y

$$\vec{J} = \tilde{\sigma}(\vec{r}) \cdot \vec{E}. \quad (8.17)$$

Tenemos, entonces, que para utilizar la relación (8.16) es necesario considerar que el material es lineal, homogéneo e isotropo.

Debemos estresar el hecho que la Ley de Ohm es una ley empírica y no está dictada por ninguna ley fundamental de la naturaleza. En efecto se encuentra que falla en cualquier material al que se le apliquen campos muy grandes, e incluso existen ejemplos donde el comportamiento no ohmico se encuentra para campos pequeños, y materiales que definitivamente no cumplen con esta ley. Sin embargo, es remarcable el número de materiales que la cumplen y el rango tan amplio de campos donde se cumple.

En el caso estacionario la conservación de la carga implica $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. Si la

conductividad es uniforme la ley de Ohm implica que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Si por el contrario la conductividad no es homogénea aun en el caso estático tenemos que la divergencia del campo puede ser no nula. De la ley de Gauss leemos entonces que existe una densidad de carga no nula en el medio. Por ejemplo en el caso que la conductividad cambia por el cambio de una material a otro, una interfaz entre materiales homogéneos, se genera una densidad de carga superficial, de tal forma que el campo eléctrico sufre un cambio abrupto que precisamente satisface la relación encontrada para el campo en estas circunstancias, ec.(4.40). Esto se ilustra en la figura 8.2 y se explora con más detalle en el ejercicio 8.4.

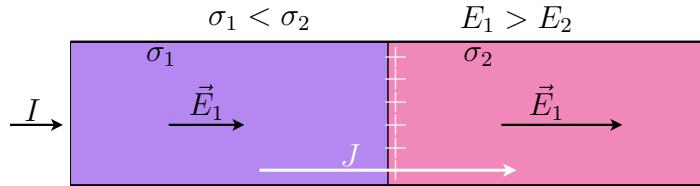


Figura 8.2: La densidad de corriente por ambos conductores en la juntura es igual, garantizando la misma corriente, pero la diferencia de conductividades implica campos distintos. Este salto es inducido por una densidad de carga superficial inducida en la juntura.

Ejercicio 8.3. Suponga un alambre conductor de largo L y sección transversal circular, pero cuyo diámetro cambia con la distancia x al extremo del alambre de la siguiente manera $r(x) = r_o\sqrt{1 - ax/L}$, con a una constante adimensional cuyo valor satisface $a < 1$, de modo que el radio nunca se anula. Suponiendo el estado estacionario y que se trata de un material ohmico ¿cómo varía aproximadamente el campo en función de la distancia?

Ejercicio 8.4. Muestre que la carga total en la juntura plana entre dos materiales por los cuales fluye una corriente I está dada por $Q = \frac{I}{4\pi k} (1/\sigma_2 - 1/\sigma_1)$, con σ_1 y σ_2 las conductividades de los materiales.

Ejemplo 8.3.1. Resistencia de un alambre homogéneo

Tomando la ley de Ohm, para materiales isótropos y homogéneos, como cierta veamos qué consecuencias implica. Dado un objeto al cual se le aplica un campo uniforme la diferencia de potencial, caída de potencial, que notaremos por V es proporcional al campo. Asimismo la corriente es proporcional a

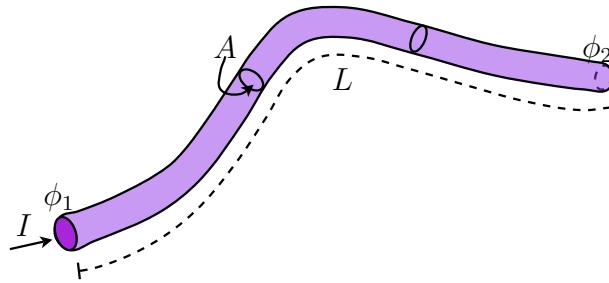


Figura 8.3: Hilo de material conductor de sección transversal A y longitud L . Entre sus extremos existe una diferencia de potencial $V = \phi_2 - \phi_1$.

la densidad de corriente, la cual, por ley de Ohm, es uniforme también. Obtenemos, de este análisis, la expresión más conocida para la ley de Ohm,

$$V = RI, \quad (8.18)$$

donde la constante de proporcionalidad es la resistencia del objeto. Debe ser claro que esta relación fue obtenida bajo condiciones de homogeneidad del campo y el material, por lo que es menos general que la relación local entre el campo y la densidad de corriente.

Sabiendo la relación precisa entre las corrientes, campos y potenciales veamos la relación de la resistencia de un objeto, con las dimensiones de este y la conductividad. Consideremos un sistema como el mostrado en la figura 8.3: un hilo de material con una conductividad σ , rodeado de un material aislante, de modo que las cargas sólo pueden transportarse a través del hilo. Entre los extremos tenemos se aplica una diferencia de potencial $V = \phi_2 - \phi_1$, que considerando un campo constante a lo largo del hilo y el largo del hilo L , se relaciona de la siguiente manera:

$$V = EL. \quad (8.19)$$

Por otra parte, de nuestra definición para la corriente,

$$I = JA, \quad (8.20)$$

donde suponemos un sección transversal constante A y que las cargas se mueven justo en la dirección normal a esta. Reemplazando estas dos en la ley de Ohm miscroscópica, ec.(8.16), tenemos,

$$V = \frac{L}{\sigma A} I, \quad (8.21)$$

de donde encontramos una expresión precisa para la resistencia en términos de las propiedades del hilo:

$$R = \frac{L}{\sigma A}. \quad (8.22)$$

Físicamente esta relación se muestra lógica ya que al aumentar la conductividad del material el trabajo necesario para llevar una carga de un extremo al otro del objeto será menor, y este trabajo se espera aumente con la longitud de la trayectoria. Asimismo la dificultad que encuentran las cargas al desplazarse, en tanto se mantenga la misma cantidad de cargas por unidad de tiempo, aumenta cuando el área transversal disminuye.

Para nuestro análisis hemos asumido que el objeto tiene unas dimensiones definidas, longitud y área transversal, y que las cargas sólo pueden moverse en el espacio definido por objeto, es decir, que está rodeado por un aislante. Esto nos permite olvidar incluso la forma del conductor y pensar la trayectoria simplemente como una línea recta. Hemos supuesto, también, que la densidad de corriente se mantiene uniforme incluso en los puntos extremos del objeto. Esto ciertamente dependerá de como se esté aplicando el campo y cómo estén entrando y saliendo las cargas del conductor (ver figura 8.4), así distintas junturas pueden afectar esta relación. En adelante supondremos que estos efectos de junturas son despreciables para nuestros intereses.

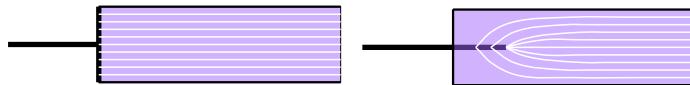


Figura 8.4: Dos tipos de junturas ilustrando cómo la consideración de una densidad de corriente uniforme depende fuertemente de como se realicen estas uniones entre conductores.

Otra manera de expresar la ley de Ohm es utilizando el reciproco de la conductividad, $\rho = \frac{1}{\sigma}$, denominada resistividad,

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (8.23)$$

De tal forma que la resistencia macroscópica queda expresada como

$$R = \frac{\rho L}{A}. \quad (8.24)$$

Cerramos esta sección introduciendo las unidades de la resistencia. En *cgs* la

resistividad tiene unidades de segundos, algo que se tornará más claro en la próxima sección. En MKS se introduce una nueva unidad el Ohm, Ω , para la resistencia, y la resistividad es entonces el Ohm por metro. En ocasiones es conveniente utilizar unidades combinadas de Ohm por centímetro lo cual no tiene ningún problema mientras se mantengan las convenciones.

Ejercicio 8.5. *Suponga que se alarga un alambre conductor por medio de disminuir su diámetro en un 25 %. ¿En qué factor aumenta su resistencia?. Con un rodillo ahora se aplana de tal forma que se alarga el doble de la longitud original. ¿Cuál es el cambio total en la resistencia del alambre?*

Ejercicio 8.6. *Suponga un alambre conductor de largo L y sección transversal circular, pero cuyo diámetro cambia con la distancia x al extremo del alambre de la siguiente manera $r(x) = r_o\sqrt{1 - ax/L}$, con a una constante adimensional cuyo valor satisface $a < 1$, de modo que el radio nunca se anula. Considere elementos de largo diferencial y argumente una superposición de elementos homogéneos hómicos con conductividad σ_o en serie para determinar una resistencia para este alambre. Res.: $R = \frac{1}{\sigma_o \pi r_o^2} \ln(1 - a)$.*

8.4. La Física de la Ley de Ohm

Cuando hablamos de corrientes estacionarias necesariamente nos estamos refiriendo al paso neto de iones por unidad de tiempo, los cuales supondremos se encuentran presentes en el material antes que el campo eléctrico sea aplicado. Para entender las corrientes producidas una vez el campo entra en juego debemos responder a dos preguntas ¿cuál es la densidad de iones en el material? Y ¿cómo se mueven estos bajo la influencia del campo?

Que la primera pregunta sea relevante lo entendemos del ejemplo del agua. En agua pura en promedio sólo un par de moléculas fuera de un mil millones se encuentran formando iones OH^- y OH_3^+ , lo que da una densidad de alrededor de 6×10^{13} iones/ cm^3 para cada tipo de ion. Si se añade sal, las moléculas se disocian fácilmente y esta densidad aumenta en un factor de 10^7 , o sea es diez millones de veces mayor. Así encontramos que la resistividad del agua pura es de $2,5 \times 10^5 \Omega m$ mientras que la del agua salina, como la del mar, es $0,25 \Omega m$. En los gases la presencia de iones usualmente es debida a agentes externos que rompen las moléculas, y el número de iones dependerá fuertemente en qué y cómo son generados. Decimos, entonces, que

la conductividad de un gas aislados de agentes ionizantes es cero.

Supondremos una densidad dada de iones, positivos y negativos, los cuales suponemos libres de moverse. Para modelar un conductor con conductividad finita debemos, sin embargo, precisar la definición de movimiento libre. En efecto, aun suponiendo los iones como partículas sobre las cuales no se ejercen fuerzas, aparte de los campos electrostáticos, choques con otros elementos del sistema, que pueden ser los mismos iones, hacen que el movimiento de estos sea distinto a lo que usualmente se entiende por partícula libre.³ Este tipo de choques son tales que la dirección del movimiento de la partícula antes y luego del choque están completamente no correlacionadas, es decir que la dirección con que sale es completamente aleatoria.⁴ Este tipo de sistema claramente tiene que entendérselas con la probabilidad que un choque ocurra y entramos en un proceso estadístico que por el momento no nos interesa, conocido como *Random Walk*. Para nosotros será suficiente considerar que el sistema está caracterizado por una longitud promedio a la cual estas colisiones ocurren, que se denomina *camino libre medio*, y que denotaremos por ℓ_f . Así las partículas en promedio cada vez que se trasladan una distancia ℓ_f chocan y pierden la información sobre el movimiento que llevaban. El camino libre medio claramente dependerá del tipo de ion, de la densidad y de características estructurales del medio en que los iones se mueven.

Previamente a encender el campo eléctrico las velocidades de los iones son completamente aleatorias y las notaremos por \vec{u}_i . Al ser aleatorias el promedio de velocidad de los iones en el medio es cero en cualquier instante,

$$\overrightarrow{\bar{u}} = \frac{1}{N} \sum_i^N \vec{u}_i = 0, \quad (8.25)$$

donde la suma corre sobre los iones de cierto tipo y N es el número total de estos por unidad de volumen. Esto nos indica que la densidad de corriente antes de aplicar el campo eléctrico es cero. Cuando encendemos el campo los iones comienzan a ser acelerados. Supondremos que estudiamos una región del material suficientemente pequeña para considerar el campo como

³De hecho, a menos que el campo sea homogéneo, no se espera que las velocidades de las cargas, i.e., la densidad de corriente, sean paralelas al campo. Pues el campo dicta es la aceleración. Así que no podemos esperar que para cargas completamente libres estas sigan las líneas de campo.

⁴En realidad la información sobre el movimiento inicial se pierde luego de una serie de choques, pero nuestro análisis simplificado es suficiente para entender lo esencial de la física del sistema.

uniforme, de tal forma que el movimiento de los iones es uno uniformemente acelerado por una fuerza constante, $\vec{F} = q\vec{E}$. Esta aceleración, sin embargo, actúa efectivamente sólo entre los intervalos que no ocurren colisiones; así el momentum de cada ion está dado por

$$\vec{p}_i = M\vec{u}_i + q\vec{E}t_f, \quad (8.26)$$

con M la masa de los iones y donde el tiempo t_f es el tiempo entre dos colisiones el cual está relacionado con ℓ_f por

$$\ell_f = |\vec{u}_i|t_f + \frac{1}{2}\frac{q|\vec{E}|}{M}t_f^2, \quad (8.27)$$

suponiendo un movimiento unidimensional. Si suponemos que el efecto del campo eléctrico en el cambio de momentum es pequeño comparado con las velocidades \vec{u}_i tenemos que $\ell_f \approx |\vec{u}_i|t_f$, i.e., el tiempo característico entre colisiones es igual a cuando no hay campo eléctrico aplicado. Expresamos en adelante las ecuaciones en términos del tiempo t_f , pero teniendo en cuenta que este es independiente del campo, algo sólo cierto para campos con intensidades pequeñas. Si calculamos ahora la velocidad promedio de los iones, nuevamente la contribución de las velocidades aleatorias es nula y tenemos,

$$\vec{\bar{u}} = \frac{1}{N} \sum_i^N \left(\vec{u}_i + \frac{q\vec{E}}{M}t_f \right) = \frac{q\vec{E}}{M}t_f, \quad (8.28)$$

que se puede entender como una velocidad de arrastre terminal, como la que se encuentra en los sistemas mecánicos con fricción que depende de la velocidad. Tenemos entonces que el movimiento efectivo de las cargas es sólo debido al campo y una corriente es generada,

$$\vec{J} = Nq\vec{\bar{u}} = N\frac{q^2\vec{E}}{M}t_f. \quad (8.29)$$

Vemos que la corriente es independiente del signo de las cargas. Esto debido a que aunque las cargas negativas se mueven en sentido contrario su desplazamiento es equivalente al de una carga positiva moviendo se en el sentido del campo. En presencia de distintos tipos de iones,

$$\vec{J} = \sum_i N_i \frac{q_i^2 \vec{E}}{M_i} t_{i,f} = \left(\sum_i N_i \frac{q_i^2}{M_i} t_{i,f} \right) \vec{E}, \quad (8.30)$$

donde se ha considerado que el tiempo característico es particular a cada tipo de ion aun sobre un mismo medio. Ya que ninguno de los parámetros dentro de la suma dependen del campo estamos encontrando la relación lineal que buscábamos entre la densidad de corriente y el campo eléctrico. Podemos, entonces, darle una definición microscópica a la conductividad

$$\sigma = \sum_i N_i \frac{q_i^2}{M_i} t_{i,f}, \quad (8.31)$$

que aumenta con la densidad de portadores de carga, la carga de estos y es inversa a su masa, la cual hace más difícil su aceleración. Es además lineal con el tiempo carateristico, o sea es mayor mientras el camino libre medio sea mayor, algo lógico desde el punto de vista físico.

En general, las densidades de portadores de carga libre y el tiempo característico son dependientes de la temperatura, por lo que se espera que la conductividad dependa de esta. Así tenemos que para materiales para los cuales las cargas son prácticamente fijas, i.e., su camino libre medio es diminuto, al aumentar la temperatura se aumente la movilidad de las cargas y por consecuencia la conductividad. Esto es precisamente lo que ocurre con el cloruro de sodio *NaCl*. Otro caso es en el que a cierta temperatura la densidad de portadores de cargas sea nula y que al calentar el material esta densidad aumente, aumentando la conductividad, que es el fenómeno que se presenta en los semiconductores. Interesantemente el caso contrario sucede en los metales, para los cuales la conductividad disminuye con el aumento de la temperatura. En este caso la vibración térmica de la red de átomos en los que se mueven los electrones es la causante que su movimiento sea más difícil. Es de remarcar que en todos estos tipos de materiales la ley de Ohm se cumple, mientras que los campo eléctricos sean suficientemente pequeños. Un punto que muestra el hecho que debemos reconsiderar nuestro análisis en el caso de valores de campo elevados, es el siguiente: si el campo es muy intenso es posible que los portadores de carga adquieran suficiente energía que sean capaces de ionizar partículas neutras con las que chocan. En este caso lo que sucede es una cascada de portadores de carga generados a partir de uno original. Esto se observa, por ejemplo, los rayos de las tormentas, o el experimento de la la chispa trepadora, donde un voltaje enorme logra ionizar algunas moléculas de aire que luego conllevan a la cascada de de cargas, que se evidencia por una chispa. Si el gas se encuentra a menor presión su densidad será menor y por tanto el camino libre medio será mayor, haciendo que

la energía que adquieren las cargas sea mayor y sea más fácil ver el efecto. Debemos nombrar, sin embargo, la existencia de los *Superconductores*, materiales que a bajas temperaturas presentan resistencia cero al movimiento de las cargas. En este caso es claro que nuestro análisis pierde sentido y la ley de Ohm no es aplicable.

Ejercicio 8.7. *Un alambre de cobre de un kilómetro de largo es conectado a una batería de 6 Voltios. La resistividad del cobre es $17 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{cm}$ y el número de electrones de conducción por centímetro cúbico es de $8 \cdot 10^{22}$. ¿Cuál es la velocidad de arrastre de los electrones en el alambre bajo estas circunstancias? ¿Cuánto tiempo le cuesta a un electrón cruzar el alambre?*

8.5. Materiales conductores

Veamos un poco más en detalle dos casos de interés donde la conductividad tiene origen de forma distinta.

8.5.1. Metáles

El primer caso son los metales, donde los portadores de carga son electrones libres de moverse dentro. En efecto es posible saber que a diferencia a las soluciones como el agua los portadores no contienen ninguna característica química como la corriente puede fluir por años incluso sin cambiar las propiedades químicas del material. Como dicho anteriormente los electrones de la banda de conducción, constituida por las órbitas más lejanas al núcleo, son prácticamente libres de moverse en la red cristalina de átomos que forman el material. Incluso la modelación de estos como un gas de electrónico resulta muy precisa (ver textos de Mec. Estadística o Estado Sólido). Está libertad, sumada a la gran cantidad de electrones disponibles, para el sodio por ejemplo $2,5 \times 10^{22}$ por cm^3 , los hacen muy buenos conductores.

Esperamos entonces que estos electrones encuentren obstáculos debido a los átomos de la red y el camino libre medio sea precisamente la dimensión de las celdas de red. Podemos comparar esto con nuestro análisis teórico para la conductividad hecho en la sección anterior. Tomando por ejemplo para el sodio $2,5 \times 10^{22}$ electrones por cm^3 , con la masa y carga del electrón, $m_e = 9 \times 10^{-28} \text{ gr}$, $e = 4,8 \times 10^{-28} \text{ esu}$ y la conductividad experimental $\sigma = 1,9 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}$, podemos, de la expresión (8.31), encontrar el tiempo

característico,

$$t = \frac{\sigma m_e}{Ne^2} = 3 \times 10^{-14} s. \quad (8.32)$$

La velocidad térmica de un electrón a temperatura ambiente $v \sim \sqrt{kT/m_e} \sim 10^7 \text{ cm/s}$, con $k = 1,31 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ la constante de Boltzmann. Con esta velocidad en ese tiempo alcanza a recorrer una distancia de $3 \times 10^{-7} \text{ cm}$ que es una decenas de veces más grande que el espaciamiento interatómico de la red cristalina del sodio $3,8 \times 10^{-8} \text{ cm}$. Claramente hay algo que no entendemos o que hemos omitido. Esta fue una de las preguntas que sólo fue posible responder con la mecánica cuántica, la cual dice que los electrones más que como bolas se deben tratar como ondas. Estas interactúan de manera bien distinta con los puntos de la red y pueden explicar por qué pueden viajar por tan largo trayecto sin ser dispersados. De hecho, si la red fuera perfecta la mecánica ondulatoria predice que no deberían ser dispersados y por tanto la conductividad sería infinita. Dos razones hacen que esto no sea así. Primero imperfecciones en la red cristalina e impurezas que hacen que el caso real se aleje de un caso ideal, y segundo, y ciertamente inevitable, las vibraciones térmicas de la red. Estos dos efectos generan “fricción” en las cargas que se revela como resistencia. Con el segundo efecto entendemos cómo la conductividad de los metales disminuye con el aumento de la temperatura.

8.5.2. Semiconductores

El segundo tipo de materiales que discutiremos son lo denominados semiconductores. Estos son materiales formados por enlaces covalentes, donde es el balance de fuerzas repulsivas y atractivas lo que lo mantiene unido, de tal forma que los electrones en forma natural no son libres de moverse y la banda de conducción se encuentra vacía y la conductividad es nula. La banda de valencia, sin embargo, se encuentra lo suficientemente cercana (en términos energéticos) a la de conducción que basta una pequeña inyección de energía, $\sim 10^{-12} \text{ erg} \sim 1 \text{ eV}$, para que algún electrón en la banda de valencia salte a la de conducción y su movimiento sea libre **hacer dibujo**. Al liberar el electrón un puesto en la banda de valencia queda vacante. Este hueco, interesantemente, se comporta igualmente como una carga pero positiva y, al aplicar un campo eléctrico, el par electrón-hueco se mueven en el mismo sentido, ya que sobre el hueco no hay una verdadera fuerza eléctrica y este sólo está saltando sobre los puntos de la red que el electrón está saltando. En general los semiconductores puros no son buenos conductores, en parte

porque el flujo de carga neta es cero y por su poca densidad de cargas libres $\sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Al añadir impurezas, *dopar*, esto se mejora: con una impureza con electrones de más para la banda de valencia hace que sea más fácil extraer el electrón a la banda de conducción aumentando la densidad de carga en varios ordenes de magnitud, $n \sim 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, además a cambio de un hueco móvil se tiene un ion positivo fijo correspondiente la impureza. Estos se conocen por semiconductores tipo *n*. Si por el contrario se dopa con un elemento con un electrón menos en la banda de valencia, lo que se obtiene es un hueco móvil y un ion positivo fijo correspondiente a la impureza. Estos se conocen como semiconductores tipo *p*. En ambos casos la conductividad se puede aumentar en varios ordenes de magnitud, y son estos precisamente los elementos esenciales en todos los aparatos electrónicos que conocemos.

8.5.3. Superconductores

En este caso tenemos materiales que bajo circunstancias muy particulares, en especial temperaturas bajas, gracias al movimiento de la misma red presentan estados ligados de dos electrones, los denominados pares de Cooper. El transporte de estos pares de Cooper a través de la red, que de hecho conspira para que puedan coexistir, resulta sin dificultad alguna y por tanto con cero gasto energético. Este estado de la materia, además presenta una propiedad que lo caracteriza unívocamente: es un diamagneto perfecto. El diamagnetismo es una propiedad que discutiremos más adelante.

Para temperaturas superiores a una temperatura crítica característica para cada material, la energía de los electrones que conforman el par es demasiado elevada para poder mantenerlos juntos, además que las vibraciones de la red pierden las propiedades necesarias y tenemos que el estado superconductor se pierde. Similarmente sucede con campos magnéticos mayores a un campo crítico.

8.6. Curiosidades

El arte y la ciencia se cruzan en más de un punto. Un ejemplo de esto son las líneas de Lichtenberg. En la siguiente [página](#) pueden saber un poco sobre estas y maravillarse con sus formas.

Enlace <http://capturedlightning.com/frames/lichtenberg.html?fbclid=IwAR2BTzFqNJJ6uzc7QU0cx0SfH8sUof-tjfqoxUXEcoSY>

8.7. Ejercicios extra

Berkeley 2ed:
Corriente def: 4.1.
Resistencia def: 4.4, 4.7.
Velocidad de arrastre: 4.11.

Capítulo 9

Circuitos

Supongamos que tenemos ahora un elemento eléctrico con dos conexiones por las que se piensa pasar corriente. Por el momento suponemos estados estacionarios, o sea corrientes continuas (DC), para los cuales no puede haber acumulación de carga dentro del elemento. Entonces sabemos que la corriente que pasa por ambos extremos es igual, I , y estarán a cierta diferencia de potencial, V . Podemos caracterizar el circuito por una constante R que denota la razón V/I . Si todos los elementos dentro del circuito satisfacen un comportamiento ohmico entonces R será un número independiente de la corriente que fluye. Ya que esto es suficiente para caracterizar un circuito con elementos resistivos tenemos que varios circuitos pueden resultar equivalentes unos con otros (véase figura 9.1).

Puede suceder que alguno de estos abandone rápidamente la región lineal o su resistencia cambie más rápidamente que los otros pero existe un cierto límite bajo el cual estos son indistinguibles unos de otros. Estos son equivalentes a una resistencia, o resistor, que notamos por el símbolo , y en ocasiones se encontrará como  y en la descripción en que el circuito es equivalente a un solo elemento de estos lo remplazamos por esta abstracción. Una red o circuito eléctrico es una colección de resistores unidos por sus extremos, que puede ser representado en forma diagramática **hacer dibujo**. La ventaja de estos diagramas es que muestran lo esencial de los circuitos, como lo es su topología, ya que su forma y otros detalles en general son irrelevantes.

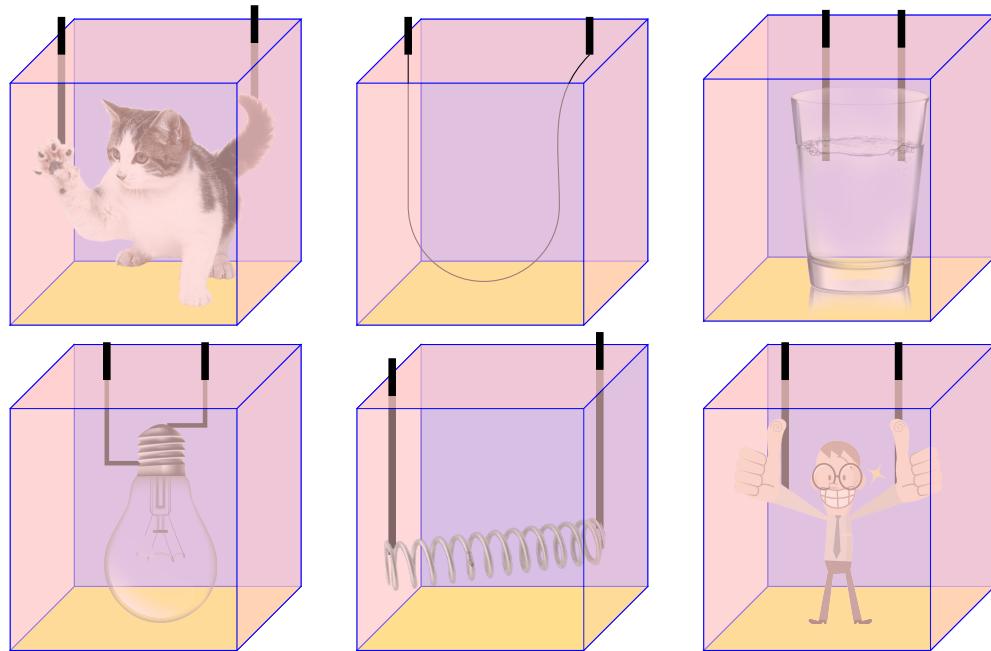


Figura 9.1: Distintos conductores dentro de una caja sellada. La única forma que tenemos para experimentar qué hay adentro es pasando una corriente entre las conexiones. Mientras el parámetro R sea el mismo todas las situaciones son equivalentes.

9.1. Conservación de la carga y la energía, leyes circuitales de Kirchhoff

Para entender cómo reducir un circuito a un equivalente más sencillo utilizaremos la conservación de la carga y de la energía, que en el contexto de los circuitos se conocen como leyes de Kirchoff.

- **Conservación de la carga:** Dado que suponemos que no se acumula carga tenemos que sobre cualquier nodo del circuito la corriente que entra es igual a la que sale.
- **Conservación de la energía:** al estar en el caso estático el campo eléctrico es conservativo y por tanto $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Esto conduce a que la suma de las caídas de potencial al rededor de cualquier lazo cerrado del circuito debe ser cero.

A estas debemos sumar la ley de Ohm

- La corriente por cada elemento del circuito es igual al voltaje en sus extremos dividido por su resistencia.

Estas tres entregan suficientes ecuaciones para determinar las resistencias equivalentes que simplifican el circuito.

Ejemplo 9.1.1. Resistencias en serie y paralelo

Veamos los ejemplos más sencillos pero igualmente los básicos para reducir circuitos en general. Supongamos dos resistencias R_1 y R_2 en serie, figura 9.2. Por conservación de carga la corriente que pasa por ambas es igual, diga-

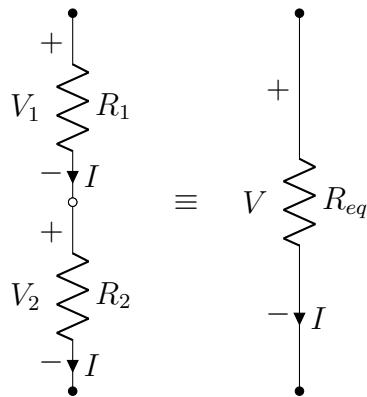


Figura 9.2: Dos resistencias R_1 y R_2 en serie, de modo que por ambas circula la misma corriente I , pueden ser remplazadas por una resistencia equivalente R_{eq} .

mos I ; por otro lado, por la conservación de la energía, la caída de potencial total será la suma de las caídas por separado, que, por ley de Ohm, pueden expresarse en términos de la corriente y las resistencias respectivas. Así:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2, \\ &= IR_1 + IR_2, \\ &= I(R_1 + R_2) \equiv IR. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Encontramos entonces que el circuito equivalente a dos resistencias en serie es una resistencia con valor,

$$R = R_1 + R_2. \quad (9.2)$$

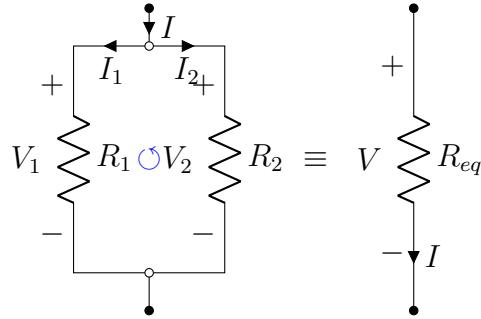


Figura 9.3: Dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, de modo que la caída potencial en ambas es la misma, pueden ser remplazadas por una resistencia equivalente R_{eq} .

Si por el contrario están en paralelo 9.3, la corriente que entra al circuito I se divide en dos tal que por conservación de carga

$$I = I_1 + I_2. \quad (9.3)$$

Por conservación de la energía las caídas de potencial en ambas resistencias es igual, como debe ser claro por el hecho que comparten el punto de partida y llegada. Para realizar la suma tomamos la siguiente convención:

- si pasamos por la resistencia en dirección de la corriente, osea del + al -, el voltaje se toma como negativo (perdida),
- si vamos en la dirección opuesta a la corriente, del - al +, se toma positivo (ganancia).

Así, recorriendo el lazo en el sentido antihorario (círculo azul en el centro del lazo), tenemos

$$\sum_i V_i = V_2 - V_1 = 0. \quad (9.4)$$

y coincide con la caída de potencial del circuito, V . Utilizando la ley de Ohm en la ecuación de las corrientes, ec. (9.3),

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}, \quad (9.5)$$

encontramos, entonces,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (9.6)$$

para un circuito en paralelo. Con estas es posible reducir circuitos complicados celda por celda, tal y como se ilustra en la figura 9.4.

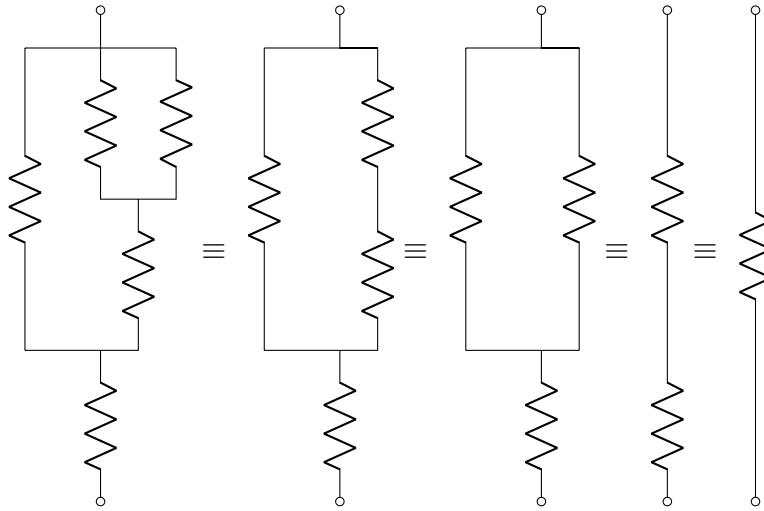


Figura 9.4: Diagrama que ilustra como un arreglo complejo de resistencias es reducido de izquierda a derecha, identificando resistencias en paralelo y en serie, para finalmente llegar a la resistencia equivalente final.

Aun así, existen arreglos como los denominados puentes, figura 9.5, que no

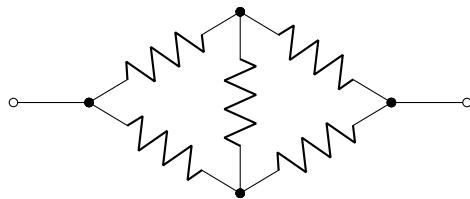


Figura 9.5: Circuito de dos mallas tipo *puente*.

pueden ser reducidos y es necesario utilizar directamente las reglas de Kirchhoff.

Nótese que las condiciones de Kirchoff son ecuaciones lineales, lo que nos indica que las soluciones son sensibles a ser superpuestas, es decir, la suma de dos o más estados posibles por las reglas de Kirchoff también las satisfacen y por tanto son una configuración posible, lo cual puede facilitar el análisis de sistemas con fuentes de energía.

9.2. Energía disipada

El hecho que haya una resistencia al movimiento de las cargas se debe traducir en una energía disipada. En nuestro modelo de resistencia esta debe ser clara, y es la energía cinética entregada al medio por los portadores de carga en cada choque que desvía su trayectoria. Estos choques con dirección aleatoria generan energía cinética en los elementos del medio, e.g., átomos de la red, los cuales usualmente son mucho más pesados que las cargas. Al ser energía cinética aleatoria se manifiesta como calor.

Esta energía disipada implica un trabajo hecho por la fuerza eléctrica para mantener una velocidad promedio. La potencia, trabajo por unidad de tiempo, para lograr esto está dada por

$$P = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} / \Delta t = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (9.7)$$

Ya que la fuerza es eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$, podemos calcular la potencia sabiendo la velocidad promedio de las cargas. Calculemosla, sin embargo, por otro lado.

El trabajo realizado en llevar un Δq de carga a través de una diferencia de potencial V es $W = \Delta qV$ pero por Ohm,

$$W = \Delta qIR. \quad (9.8)$$

La potencia será entonces

$$P = IR\Delta q / \Delta t = I^2 R. \quad (9.9)$$

Está con unidades de Vatios (W) o $V \cdot A$. En efecto, de la ley de Ohm otra forma de expresarla es

$$P = IV. \quad (9.10)$$

Ejemplo 9.2.1. Resistencias en paralelo y ley de la mínima potencia
 Su pongamos que tenemos dos resistencias en paralelo de tal forma que por conservación de la carga la corriente que entra al circuito es tal que $I = I_1 + I_2$, con I_i la corriente respectiva por cada resistencia R_i . La potencia disipada por el circuito es entonces

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2(R_1 + R_2) - 2I_1 I_2 R_2 + I^2 R_2. \quad (9.11)$$

Donde hemos utilizado la relación entre las corrientes y considerado que la potencia total es la suma de las potencias debida a cada resistencia. Para

hallar el valor de la corriente I_1 dada una corriente de entrada I , conjeturaremos que esta es tal que la potencia disipada es la mínima posible. En otras palabras, que la naturaleza procura que el desperdicio de energía sea mínimo. Dicho esto, lo que debemos hacer es derivar con respecto a I_1 e igualar a cero:

$$2I_1(R_1 - R_2) - 2IR_2 = 0, \Rightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}I. \quad (9.12)$$

Como la caída de potencial $V = IR$ es igual a la caída de potencial por cualquiera de las dos resistencias, conservación de la energía,

$$IR_{eq} = I_1R_1 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}I, \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (9.13)$$

Encontramos que requiriendo que la potencia disipada por el circuito se mínima se tiene la relación entre la resistencia equivalente para las resistencias en paralelo.

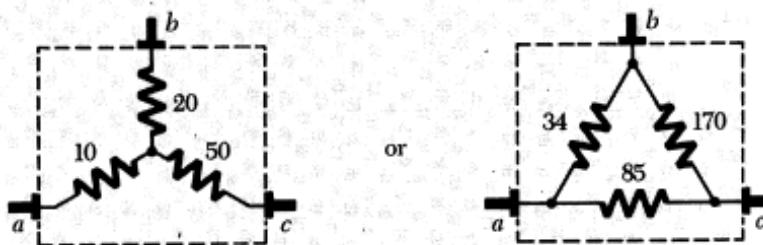
En efecto, las relaciones que hemos encontrado pueden en general enmarcarse en un *principio de mínima potencia disipada* que puede ser más poderoso en ciertos contextos al utilizar métodos variacionales que se introducen en el curso de mecánica analítica.

Si hubiéramos tomado la corriente I_2 para solucionar el sistema tendríamos el mismo resultado y uno análogo para su expresión,

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}I. \quad (9.14)$$

Estas expresiones, podemos ver, tienen sentido ya que si una de las resistencias es muy grande, o análogamente la otra muy pequeña, toda la corriente pasará por la resistencia menor, y será igual a I .

Ejercicio 9.1. Una caja negra con tres terminales a , b y c contiene tres resistencias conectadas. Midiendo la resistencia entre pares de terminales se encuentra $R_{ab} = 30\Omega$, $R_{ac} = 60\Omega$ y $R_{bc} = 70\Omega$. Muestre que la caja puede contener cualquiera de las dos configuraciones siguientes:

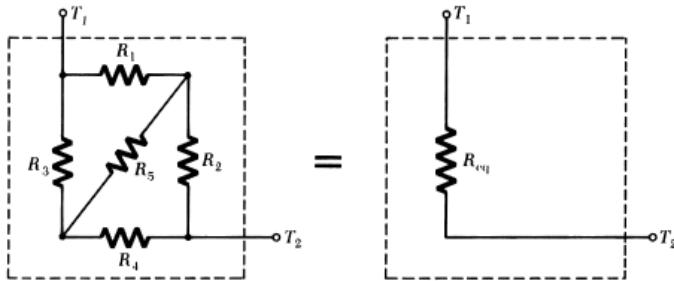


¿Hay alguna otra posibilidad? ¿Son completamente equivalentes los dos circuitos?, i.e., ¿existe alguna medición externa que los pueda diferenciar?

Ejercicio 9.2. El circuito mostrado en la figura es conocido como puente de resistencias y no admite una solución por reducción en resistencias equivalentes. Es posible abordarlo directamente solucionando para la corriente a través de los terminales en función de la diferencia de potencial entre estos, y hacer $R_{eq} = V/I$. Parte de la solución es

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + ? + R_2 R_3 R_4 + R_5(R_1 R_3 + R_2 R_3 + ? + R_2 R_4)}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + ? + R_3 R_4 + R_5(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}, \quad (9.15)$$

Utilizando argumentos de simetría encuentre los términos restantes. Compruebe la formula comparando sus resultados con los cálculos directos para los casos particulares a) $R_5 = 0$, b) $R_5 = \infty$ y c) $R_1 = 0$.



9.3. Fuerza electromotriz

La fuerza electromotriz (FEM) es cualquier mecanismo que transporte las cargas en sentido opuesto al que lo haría el campo, tal y como lo haría un ascensor en un campo gravitacional. Un ejemplo es el generador de Van der Graaff, que realiza un transporte mecánico, y donde la energía, que finalmente realiza este trabajo, proviene de un agente externo que mueve la banda. En las baterías es la energía química la que hace este trabajo: iones positivos pueden moverse a lugares de potencial mayor, i.e. en contra del campo, si hay una reacción química que produzca una energía suficiente para que escale el potencial.

Los detalles internos de la FEM no nos interesarán por el momento, centrándonos en el hecho que estas serán forman parte esencial de los circuitos

eléctricos que, además, nos permiten ahora estudiar circuitos funcionales. Para esto, en los diagramas, utilizaremos el símbolo $\begin{smallmatrix} + \\ \diagdown \\ - \end{smallmatrix}$, con el lado largo denotando el punto de mayor potencial, para denotar la presencia de una FEM.

Ejemplo 9.3.1. Resistencia interna

En la práctica no existen fuentes potencial ideales ya que presentan una resistencia intrínseca, denominada resistencia interna. Así, circuitalmente hablando, una fuente de potencial real puede representarse como una FEM, \mathcal{E} , en serie con una resistencia de valor la resistencia interna, R_i .

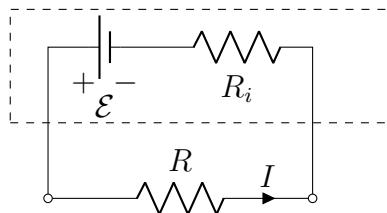


Figura 9.6: Diagrama para el modelo de una fuente de potencial real, con resistencia interna R_i , alimentando un resistencia R .

Al conectar una resistencia externa circulará entonces una corriente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}. \quad (9.16)$$

El voltaje de salida de la fuente, que es igual al de la caída en la resistencia externa es entonces

$$V = IR = \frac{R}{R + R_i}\mathcal{E}, \quad (9.17)$$

que es menor a la FEM de la fuente y depende de la resistencia externa que se coloque. En caso que $R_i \ll R$ estos efectos pueden ser despreciados, pero en general hay que tenerlos en cuenta.

Ejemplo 9.3.2. Circuitos con fuentes de voltaje

En general pueden haber en un circuito más de una fuente de voltaje. Podemos atacar estos circuitos nuevamente utilizando las reglas de Kirchoff. Por ejemplo un circuito con dos fuentes \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 con sus respectivas resistencias internas R_1 y R_2 alimentando en paralelo una resistencia externa, ver figura 9.7.

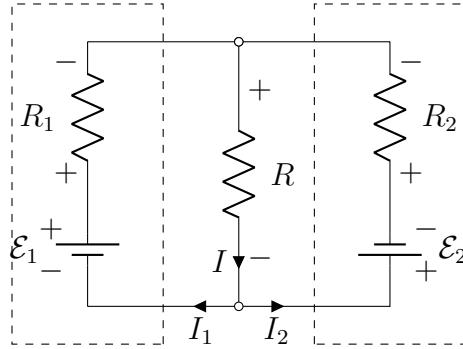


Figura 9.7: Dos fuentes con resistencia interna alimentando paralelamente una resistencia R .

El análisis se realiza dibujando de manera arbitraria la dirección de las corrientes, si en la solución resulta un valor negativo quiere decir que esta va en la dirección contraria. De la primera regla de Kirchhoff

$$I = I_1 + I_2. \quad (9.18)$$

Para cada lazo del circuito tenemos que aplicar la segunda regla. El circuito en cuestión cuenta con tres lazos distintos,¹ sin embargo, sus ecuaciones no son independientes, así sólo dos de estas son linealmente independientes y podemos no considerar una de estas. Así tomando los lazos con la resistencia externa y las fuentes tenemos, haciendo la lectura en la dirección de las manecillas del reloj,

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - IR = 0, \quad (9.19)$$

$$\mathcal{E}_2 + I_2 R_2 + IR = 0. \quad (9.20)$$

La solución para el sistema de tres ecuaciones permite solucionar para las tres corrientes

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R) + \mathcal{E}_2 R}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R}, \quad (9.21)$$

$$I_2 = -\frac{\mathcal{E}_2(R_2 + R) + \mathcal{E}_1 R}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R}, \quad (9.22)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R}. \quad (9.23)$$

¹De hecho existen infinitos caminos cerrados, pero hay tres sencillos.

Vemos que por ejemplo la corriente I_2 tiene en realidad sentido contrario al que tomamos, al menos suponiendo \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 positivos, y la corriente I puede tener sentido contrario dependiendo de la relación entre las fuerzas electromotrices y resistencias internas de las fuentes. En efecto cada una intentará generar corrientes en sentidos contrarios.

Ejemplo 9.3.3. Superposición

El sistema puede ser solucionado utilizando superposición de dos posibles situaciones. Una en que las FEM \mathcal{E}_1 es cero y la otra en que \mathcal{E}_2 es cero.

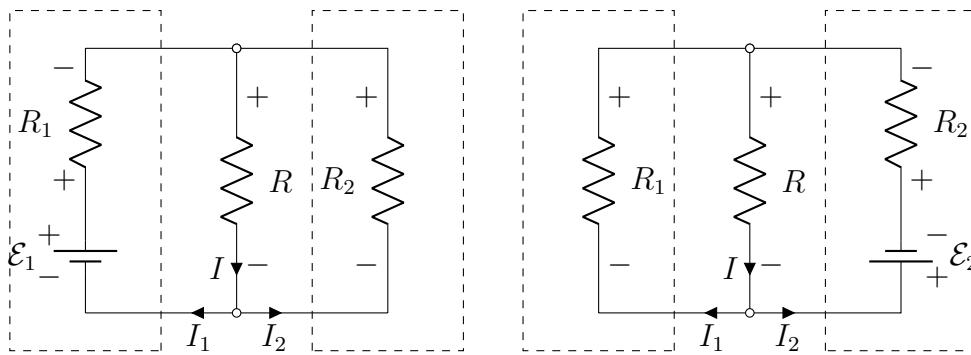


Figura 9.8: Sistemas cuya superposición entrega el sistema con dos fuentes de la figura 9.7.

Cuando $\mathcal{E}_2 = 0$, derecha en la figura 9.8, la resistencia externa R y R_2 se ven como una resistencia externa equivalente a su resistencia en paralelo

$$R_{R2} = \frac{RR_2}{R + R_2}. \quad (9.24)$$

Así la corriente por la fuente es

$$I_{1,\mathcal{E}_2=0} = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + R_{R2}} = \frac{(R + R_2)\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R + R_2R}. \quad (9.25)$$

Utilizando el resultado de la sección 9.2.1, ecuación (9.12),

$$I_{\mathcal{E}_2=0} = \frac{R_2}{R + R_2} I_{1,\mathcal{E}_2=0} = \frac{R_2\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R + R_2R}. \quad (9.26)$$

$$I_{2,\mathcal{E}_2=0} = -\frac{R}{R + R_2} I_{1,\mathcal{E}_2=0} = -\frac{R_1\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R + R_2R}, \quad (9.27)$$

donde el signo menos indica que va en la dirección contraria a la que se le asignó en el diagrama, los cuales se entienden de los signos tomados en el análisis en la sección 9.2.1. El procedimiento análogo para el caso $\mathcal{E}_2 = 0$, derecha de la figura 9.8, entrega

$$I_{2,\mathcal{E}_1=0} = -\frac{\mathcal{E}_2}{R_1 + R_{R1}} = -\frac{(R + R_1)\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_1R + R_2R} \quad (9.28)$$

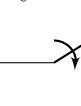
$$I_{\mathcal{E}_1=0} = -\frac{R_1}{R + R_1}(-I_{2,\mathcal{E}_1=0}) = -\frac{R_1\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_1R + R_2R}. \quad (9.29)$$

$$I_{1,\mathcal{E}_1=0} = \frac{R}{R + R_1}(-I_{2,\mathcal{E}_1=0}) = \frac{R\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_1R + R_2R}. \quad (9.30)$$

Cuando sumamos estas soluciones para hallar la solución general encontramos nuevamente las expresiones (9.21), y .

Ejercicio 9.3. *Muestre que si una batería con resistencia interna R_i es conectada a una resistencia externa variable R la potencia máxima es entregada cuando $R = R_i$.*

9.4. Circuitos RC

Consideremos un capacitor cargado. Cerramos el circuito a través de una resistencia por la cual el capacitor comienza a descargarse. Para hacer una representación diagramática del circuito utilizamos el signo  para el capacitor, y el interruptor que abre y cierra el circuito por .

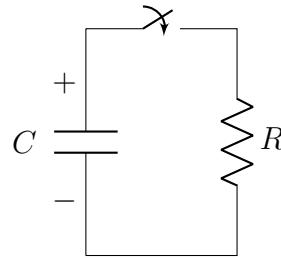


Figura 9.9: Circuito RC, de una capacitor en paralelo con una resistencia.

Supondremos que inicialmente el interruptor está abierto y el capacitor cargado. No hay caída de potencial por la resistencia pues la corriente es nula,

al cerrar el circuito la caída de potencial es $V = IR$, por de Kirchhoff de las caídas de potencial tenemos:

$$V_R + V_c = IR - \frac{Q}{C} = 0, \quad (9.31)$$

el signo lo da el sentido de la corriente que fluye de la placa positiva, a potencial mayor, a la placa negativa, potencial menor, del capacitor. La corriente y la carga del capacitor está ciertamente relacionada con la carga dando la rapidez que esta cambia en el tiempo

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad (9.32)$$

el signo notanto el hecho que la carga disminuye. Entonces la ecuación de los voltajes es

$$R \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C}. \quad (9.33)$$

Está es simplemente la ecuación diferencial que describe el comportamiento del cambio de la carga en el circuito, integrando en el tiempo obtenemos la carga en el tiempo,

$$\int_0^{t_f} \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} dt = - \int_0^{t_f} \frac{dt}{RC}. \quad (9.34)$$

La integral del lado izquierdo se entiende como una integral sobre la carga

$$\int_0^{t_f} \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} dt = \int_{Q_i}^{Q(t_f)} \frac{1}{Q} dQ = \ln \left(\frac{Q(t_f)}{Q_i} \right). \quad (9.35)$$

Tenemos entonces

$$\ln \left(\frac{Q(t_f)}{Q_i} \right) = -\frac{t_f}{RC}, \quad (9.36)$$

que podemos expresar como

$$Q(t) = Q_i e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.37)$$

Puede que se conozca la carga inicial Q_i o el potencial inicial V_i , en este segundo caso es entonces conveniente expresarla como

$$Q(t) = CV_i e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.38)$$

Que también entrega el comportamiento del voltaje

$$V(t) = V_i e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.39)$$

Podemos calcular la corriente bien sea como la derivada temporal de la carga o como $I(t) = V(t)/R$, en cualquier caso obtenemos,

$$I(t) = \frac{V_i}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.40)$$

Vemos un decaimiento exponencial caracterizado por un tiempo $\tau = RC$, sus unidades en efecto, para MKS: $[R] = V/A = V.s/C$ y $[C] = F = C/V$, para cgs entrega que necesariamente las unidades de resistividad son de segundos como advertido previamente. Este tiempo da cuando la carga, corriente, o voltaje, a caído a exactamente $1/e$ veces el valor inicial.

Ejemplo 9.4.1. Capacitor y medio ionizado Un ejemplo interesante es el de las placas paralelas en un gas levemente ionizado que permite el paso de cargas. Consideramos que el gas no afecta la capacitancia lo cual para ser precisos no ocurre, ver capítulo 7, pero si la densidad del gas es baja esta aproximación es viable. El gas con resistividad ρ tiene una resistencia

$$R = \rho \frac{s}{A}, \quad (9.41)$$

donde consideramos que sólo habrá transporte de cargas en la sección entre las placas, la cual tiene sección transversal A , y estas se encuentran alejadas por una distancia s . Con la capacitancia para las placas paralelas $C = \frac{A}{4\pi k s}$, tenemos que el tiempo característico de descarga es

$$\tau = RC = \frac{\rho}{4\pi k} s. \quad (9.42)$$

Interesantemente este tiempo de descarga no depende de la distancia entre las placas. Esto nos muestra una importante hecho en el transporte de cargas en un conductor: que una de las placas se este descargando y la otra cargando no implica que las cargas de una estén viajando de una a la otra. Aunque las cargas están siendo aceleradas por el campo entre las placas las que están cargando al placa negativa son las que se encuentran cercanas a estas, y las cargas que salen de la positiva toman una posición cercana a esta. Así el proceso es muy similar al fluir de un líquido incompresible, donde las cargas que salen “empujan” a las demás siendo las últimas de la fila las que entran

a la placa negativa. La analogía no es perfecta pues acá es al campo eléctrico lo que empuja las cargas y no las cargas mismas entre ellas.² Así vemos que las cargas no se están desplazando la distancia entre las placas y explica que el tiempo de descarga no dependa de esta. Si en lugar de un gas colocáramos un buen conductor $\rho \sim 10^{-7} \Omega m$ obtenemos $\frac{\rho}{4\pi k} \sim 10^{-18} s$, lo que implica un cambio rápido del campo eléctrico, algo que por el momento no hemos tratado en nuestra aproximación estacionaria.

Ejercicio 9.4. *Muestre que la energía total disipada por la resistencia en el proceso de descarga del capacitor es igual a la energía inicialmente almacenada en el capacitor. Suponga que alguien objeta el análisis argumentando que el capacitor sólo estará descargado en $t = \infty$. ¿Cómo contraargumentaría esto? Estime por ejemplo el tiempo que se requiere para que la carga disminuya a un sólo electrón en el capacitor.*

Ejercicio 9.5. *Plantee el problema de una circuito RC de un capacitor en serie con una resistencia y una fuente de voltaje constante. Encuentre cómo varía en el tiempo el potencial en el capacitor y la resistencia como función del tiempo, suponiendo que el capacitor se encuentra inicialmente descargado y la fuente entrega un potencial \mathcal{E} .*

9.5. Ejercicios extra

Berkeley 2ed:

Circuitos con resistencias: 4.15, 4.17,

Circ. con fuentes y resistencias: 4.21, 4.22,

²De manera precisa en ambos casos es el campo eléctrico lo que lo hace. Aunque en el caso del fluido esto se evidencia como una fuerza de contacto.

Capítulo 10

Magnetostática

A comienzos del siglo *XIX* se comprendía *grosso modo* la naturaleza de la electricidad y las corrientes eléctricas, como un fluido de cargas, aun los fenómenos eléctricos y magnéticos eran considerados partes independientes de la naturaleza.

En 1920, mientras presentaba sus charlas sobre Electricidad, Galvanismo y Magnetismo, Oersted observó como una brújula podía ser desviada en presencia de una hilo con corrientes. Una espira con corriente funciona como un imán! Esta sencilla observación condujo posteriormente a la comprensión sistemática del magnetismo, así como su relación íntima con los fenómenos eléctricos.

Los trabajos de Ampère, Biot y Savart en la década de 1820, formalizan finalmente las interacciones magnéticas como una interacción entre corrientes. A nivel cualitativo encuentran el la fuerza entre dos hilos paralelos con corrientes es:

- proporcional a la intensidad de las corrientes a través de estos.
- la inversión de alguna de las corrientes invierte también el sentido de la fuerza. Más precisamente: corrientes en el mismo sentido se repelen, mientras que corrientes opuestas se atraen.
- es independiente de la fuerza electrostática de Coulomb, i.e., aun siendo neutros existe una fuerza.
- aun al colocar una placa conductora en medio la fuerza persiste.

En un lenguaje moderno, se tiene entonces que: una carga en reposo en presencia de un campo magnético no experimenta fuerza alguna. Es el movimiento lo que causa la interacción. Por ejemplo, los rayos catódicos se desvian en presencia de un imán.

La unificación completa de los campos electromagnéticos, sin embargo, es completamente evidente sólo en el caso dinámico, estudiado por Faraday y Maxwell a mediado del siglo *XIX*, y que estudiaremos en próximos capítulos. Estos son, en efecto, las semillas a la relatividad especial de Einstein, que muestra desde una perspectiva de la universalidad de las leyes de la física la necesidad de unificar estos dos fenómenos.

Una pequeña introducción a las transformaciones de Lorentz la encuentran en el apéndice C o en el siguiente [video](#).

10.1. Medición e invarianza de la carga

Para formalizar nuestro estudio de las interacciones entre cargas en movimiento recordemos que en el caso de cargas en reposo la carga está definida a través de la fuerza de Coulomb, sólo establecida para cargas en reposo. Ahora que se encuentran en movimiento esto debe reconsiderarse.

Para empezar dado que la carga está en movimiento existe una dirección preferencial, dictada por la dirección en que se mueve la carga, y no podemos asegurar que las fuerzas se comporten de forma radial. Podemos pensar, sin embargo, en un instante de tiempo t_o tomar cierto promedio de las fuerzas, sobre un cascarón que encierre la carga. Esto en práctica se vería como colocar infinitas cargas puntuales de prueba en reposo rodeando la carga a medir y promediando la fuerza experimentada por estas, lo que sería equivalente a tomar el promedio del campo sobre el cascarón, que no es otra cosa sino el flujo. Definimos, entonces, la carga eléctrica como

$$Q = \frac{1}{4\pi k} \oint_{S(t)} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (10.1)$$

Interesantemente este valor es independiente de la forma y tamaño de la superficie cerrada $S(t)$, que incluso hemos dejado dependiente del tiempo, y experimentalmente se comprueba que aun en este caso se mantiene la ley de Gauss.

Un hecho importante relacionado con nuestra definición de carga dada en la ecuación (10.1) es el hecho que el valor numérico de la carga eléctrica es

independiente de su estado de movimiento. Hechos como la neutralidad del átomo de hidrógeno, con un electrón en movimiento alrededor de protón, muestra con gran precisión, 10^{20} decimales, que en efecto esto se cumple. Esto adquiere más soportancia al recordar la cuantización de la carga, la cual se vería afectada dependiendo si las cargas son medidas en reposo o en movimiento.

La pregunta, de si existe una dependencia o no, aparece cuando, por medio del trabajo de Einstein, se comprende que la masa de una partícula, caracterizando su inercia ante una interacción, cambia dependiendo si está en reposo o en movimiento.

Tenemos entonces que dos observadores \mathcal{O} y \mathcal{O}' , con distintos movimientos relativos con respecto a la carga medida observan la misma carga, i.e.,

$$Q = \frac{1}{4\pi k} \oint_{S(t)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{4\pi k} \oint_{S'(t')} \vec{E}' \cdot d\vec{A}'. \quad (10.2)$$

La carga eléctrica por tanto corresponde a lo que se conoce como una cantidad invariante relativista.

Ejemplo 10.1.1. Transformación de la densidad de carga

La invarianza de la carga eléctrica lejos de trivializar los fenómenos electromagnéticos presenta características interesantes por investigar. Consideremos por ejemplo una placa infinita con densidad de carga σ uniforme medida en el sistema en reposo con respecto a la placa. Según la relatividad especial, un observador en un sistema en movimiento relativo observa una contracción de las longitudes en la dirección de sus movimiento. Así, para una observador en movimiento paralelo a la placa, ve que las dimensiones de esta se contraen. Específicamente la relación de medida entre el observador en reposo, \mathcal{O} , y el que está en movimiento relativo, \mathcal{O}' , está dada por

$$L' = \sqrt{1 - v^2/c^2} L, \quad (10.3)$$

donde $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ y c es la rapidez de la luz. Esto hace que la medida de área se contraiga en este mismo factor, i.e., $A' = \sqrt{1 - v^2/c^2} A$, y por tanto, de la invarianza de la carga se tiene que,

$$\sigma' = \frac{Q}{A'} = \frac{Q}{\sqrt{1 - v^2/c^2} A} = \gamma \sigma, \quad (10.4)$$

utilizando la notación convencional $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Ejemplo 10.1.2. Transformación del campo eléctrico

Al escribir la ecuación (10.2), hemos supuesto que el caso más general en que todas las cantidades físicas y coordenadas cambian de una sistema de referencia a otro. Así, por ejemplo, el campo eléctrico medido por los dos observadores no tiene porque coincidir. Utilicemos la invarianza de la carga para ver que en efecto los campos medidos son distintos.

Considerando un sistema de placas paralelas con densidades uniformes pero opuestas. En el sistema primado en movimiento con respecto a las placas, contrario al caso estático, a pesar que las placas son infinitas no podemos concluir que el campo no tiene componentes paralelas a la placa, ya que hay una dirección preferencial dada por la velocidad. Así, en principio, existe una componente en la dirección de movimiento.

Ya que las dos placas son idénticas la componente con que contribuyen cada placa en esta dirección debe ser igual, pero de sentido opuesto, así, entre las placas esta componente se cancela, figura 10.1, de hecho por esta razón hemos tomado esta configuración y no la de una placa individual. Fuera de

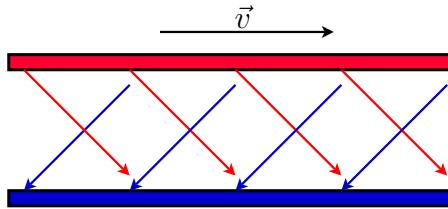


Figura 10.1: Dos placas idénticas cargadas uniformemente de signo opuesto vistas por un observador en movimiento relativo en el plano de las placas. Suponiendo la aparición de una componente tangencial y recordando que los campos son idénticos pero opuestos en dirección la componente tangencial neta desaparece.

las placas el campo sigue siendo nulo por cancelación de los campos de cada una. Tenemos, entonces, una situación idéntica a la del caso en reposo pero ahora dada por una densidad de carga σ' . El cálculo del campo lo realizamos idéntico encontrando que,

$$E' = 4\pi k\sigma' = 4\pi k\gamma\sigma = \gamma E. \quad (10.5)$$

En forma vectorial tenemos que

$$E'_\perp = \gamma E_\perp, \quad E'_\parallel = E_\parallel (= 0), \quad (10.6)$$

que son las reglas genéricas para la transformación del campo eléctrico de un sistema de referencia a otro. Estas, junto con las transformación de Lorentz, ecuación (B.9) para las coordenadas, permiten relacionar la dinámica observada por los dos sistemas de referencia. Durante este curso no repararemos en las transformaciones de los campos ni coordenadas siendo este un tema extenso que fácilmente puede ser cubierto en un curso de relatividad especial. El lector interesado puede referirse a discusiones particulares dadas como el del capítulo dedicado en Purcell.

Es importante estresar que aunque los observadores obtienen mediciones distintas, la física que concluyen de esta es la misma. Así por ejemplo ambos deben coincidir que a velocidades bajas el efecto de una fuerza está dictado por $\vec{F} = m\vec{a}$, aun si cada uno mide una fuerza, una masa y una aceleración distintas. Es a esto a lo que se refiere el principio de relatividad

“La física es la misma para todo observador.”

Ejemplo 10.1.3. Campo de una carga puntual en movimiento

Suponiendo que la carga se mueve en el eje x y utilizando las trasformaciones de los campos tenemos, ec.(10.6), restringiéndonos al plano $z = 0$, $E'_x = E_x$ y $E'_y = \gamma E_y$, luego

$$E'_x(x', y') = kq \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad E'_y(x', y') = \gamma kq \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (10.7)$$

Donde se ha estresado el hecho que las coordenadas en cada sistema son distintas. De las transformaciones de Lorentz tenemos las expresiones en términos de las coordenadas medidas en el sistema primado. Tomando $t' = 0$ se sigue

$$E'_x(x', y') = \gamma kq \frac{x'}{(\gamma^2(x')^2 + (y')^2)^{3/2}}, \quad E'_y(x', y') = \gamma kq \frac{y'}{(\gamma^2(x')^2 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (10.8)$$

Así la magnitud del campo en el plano $z = 0$ está dada por, con $x' = r' \cos \theta'$ $y' = r' \sin \theta'$ y $\beta = v/c$,

$$E' = k \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}, \quad (10.9)$$

que claramente ¡no es esfericamente simétrico! Las líneas de campo se van densificando simétricamente alrededor al plano perpendicular al movimiento,

$\theta = \pi/2$. Para ilustrar esto se presentan las figuras 10.2 donde comparamos la magnitud del campo respecto al caso en reposo e un corte en el plano de movimiento, 10.3 mostrando los vectores de campo y cómo se densifican angularmente y 10.4 donde sólo se muestra la densificación de las líneas de campo con el ángulo.

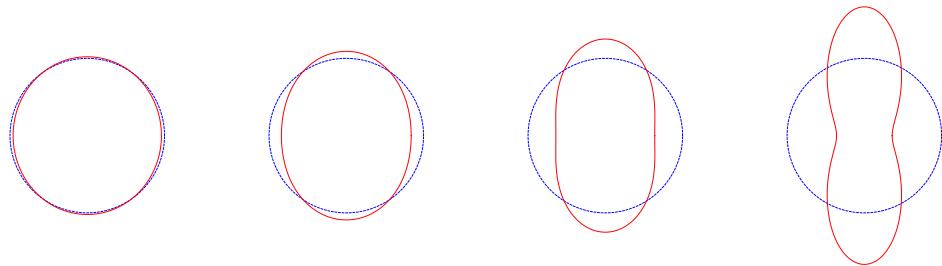


Figura 10.2: Comparación de la magnitud del campo en su dependencia angular respecto al campo de la carga en reposo, en azul discontinua. La carga se mueve horizontalmente en el plano de la imagen. Las figuras corresponden respectivamente a velocidades $v = 0,2c$, $v = 0,4c$, $v = 0,6c$ y $v = 0,8c$, de izquierda a derecha.

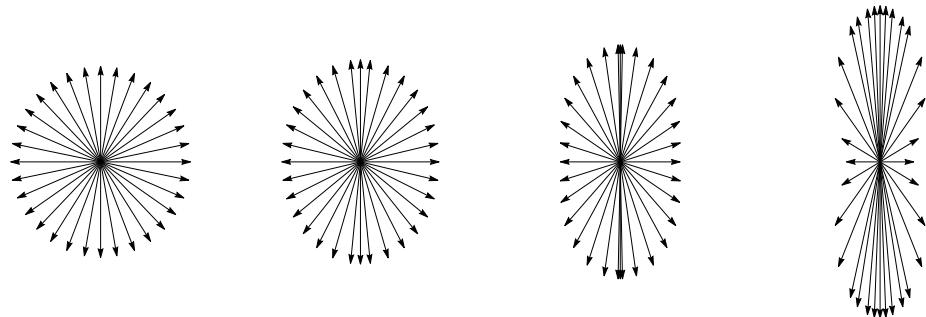


Figura 10.3: Vectores de campo y densidad de líneas de campo para la carga puntual en movimiento horizontal en el plano de la imagen. Las figuras corresponden respectivamente a velocidades $v = 0,2c$, $v = 0,4c$, $v = 0,6c$ y $v = 0,8c$, de izquierda a derecha.

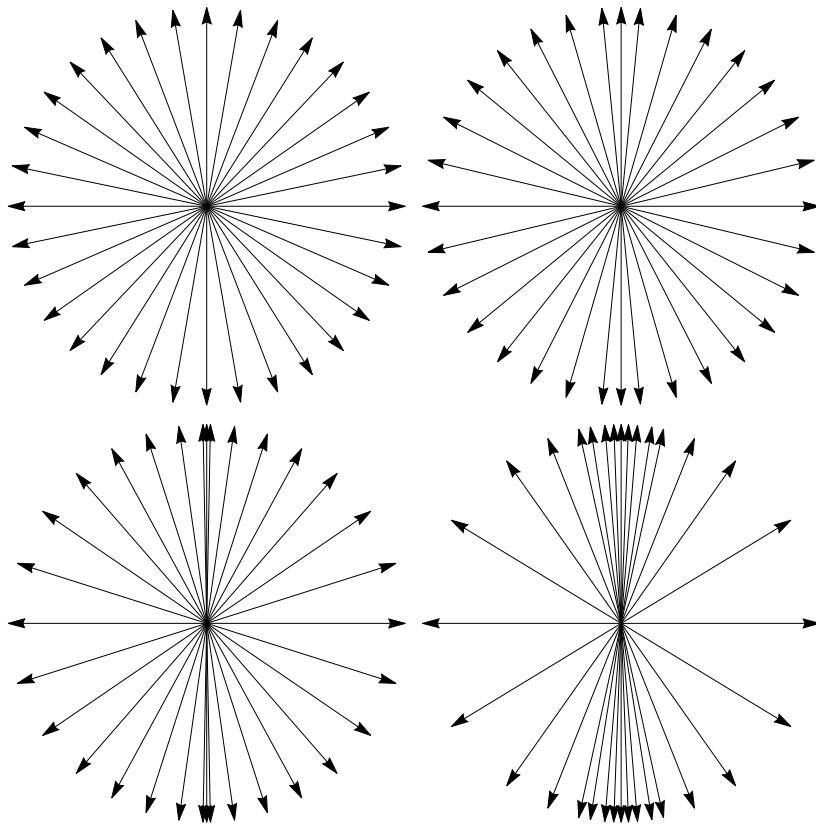


Figura 10.4: Vectores de campo y densidad de líneas de campo para la carga puntual en movimiento horizontal en el plano de la imagen. Las figuras corresponden respectivamente a velocidades $v = 0,2c$, $v = 0,4c$, $v = 0,6c$ y $v = 0,8c$, de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

Ejercicio 10.1. Argumente alrededor de si el campo eléctrico de una carga puntual, que se muestra en la anterior figura, es conservativo o no.

Ejemplo 10.1.4. Fuerza sobre una carga debida a un hilo con corriente

Con este ejemplo explotaremos el principio de relatividad para ilustrar cómo se puede utilizar para analizar sistemas que en principio parecen complejos estudiandolo desde un marco de referencia conveniente. El resultado, además, nos mostrará la existencia de un nuevo campo, que compensará vacíos en la descripción de la dinámica por parte del campo eléctrico.

El hilo con corriente lo modelaremos como un conjunto de cargas puntuales moviéndose en línea recta con rapidez constante.¹ El campo para cada una de estas lo acabamos de estudiar en el ejemplo 10.1.3. Una carga de prueba, entonces, colocada en reposo frente al hilo constituye el sistema mostrado en la figura 10.5. Como resulta evidente, una vez tenemos en cuenta que

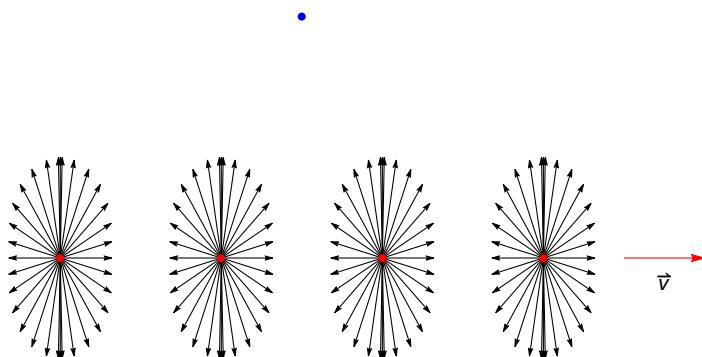


Figura 10.5: El hilo con corriente lo vemos como un conjunto de cargas, en rojo, con velocidad constante uniformemente distribuidas en línea recta. Una carga de prueba, en azul, experimenta una situación simétrica en la dirección horizontal (suponemos la distribución de carga continua). Por tanto sólo experimenta una fuerza en la dirección horizontal.

la distribución de las cargas debe considerarse en muy buena aproximación como homogénea, el sistema es simétrico horizontalmente y las componentes horizontales del campo en cualquier punto se cancelarán. Por tanto, una carga de prueba en reposo experimenta una fuerza neta en la dirección vertical. Algo que, como veremos, no ocurre si la carga de prueba tiene una velocidad con componente vertical².

Si la carga de prueba tienen una velocidad vertical, i.e., si se está alejando

¹Para ser precisos un hilo conductor con corriente no sólo consiste en cargas en movimiento. Como se expuso en el capítulo 6, además de las cargas libres (electrones) están las cargas fijas al material (iones positivos) y que logran que este se mantenga neutro. Sin embargo, la conclusión relevante del ejemplo no va a cambiar si las incluimos, véase el ejemplo correspondiente en el libro de Purcell, así que no las consideraremos.

²Las componentes horizontales de la velocidad siempre las podremos eliminar analizando el sistema desde un marco de referencia en el cual la carga de prueba se encuentra en reposo y las cargas que conforman la corriente se mueven a una una velocidad distinta pero aun horizontal. Así que esta situación será análoga a la de la carga de prueba en reposo.

o acercando a el hilo con corriente nos conviene analizar el sistema desde su propio marco de referencia. En este marco, la carga de prueba está en reposo y lo que se observa es que las cargas que conforman la corriente se mueve ahora de forma oblicua. Esto se muestra en la figura 10.6.

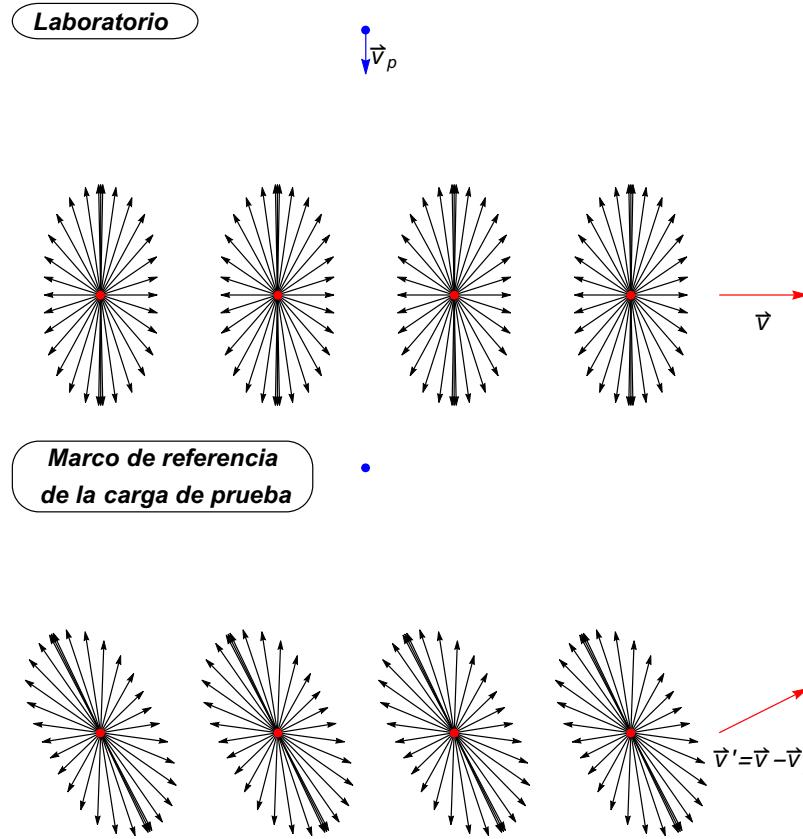


Figura 10.6: El sistema de la carga aproximandose al hilo con corriente se puede analizar bien sea en el marco de referencia del laboratorio (arriba) o en el marco de referencia de la carga (abajo). En el segundo la carga de prueba está en reposo y las cargas que conforman la corriente se mueven oblicuamente con una componente vertical de la velocidad. Ya no hay una simetría horizontal, siendo las contribuciones provenientes de las cargas a la derecha mayores que la de la izquierda. Si la carga es positiva, entonces, experimentará una fuerza horizontal hacia la izquierda.

Observamos que, debido a la deformación del campo eléctrico, la simetrías

horizontal se pierde y ahora las contribuciones del campo, provenientes de cargas a la derecha son mayores que las de cargas a la izquierda. Esto implica que el campo eléctrico neto en la posición de la carga de prueba tenga una componente horizontal hacia la izquierda no nula, lo que indica que una carga positiva se verá acelerada horizontalmente hacia la izquierda, además de la ya existente fuerza vertical.

Como la física debe ser la misma en ambos sistemas de referencia, en el sistema de referencia del laboratorio debemos también concluir que la carga se ve acelerada hacia la izquierda, lo cual no se puede entender utilizando nuestra definición del campo eléctrico. Pues en el marco del laboratorio las contribuciones del campo son simétricas y el campo neto no tiene componente horizontal. Concluimos, entonces, que al estar en movimiento la carga de prueba experimenta una interacción con un campo extra, el cual precisamente definimos como tal que explica dicho fenómeno.

10.2. Fuerza de Lorentz, definición de campo magnético

Como vimos en el anterior ejemplo, las transformaciones de los campos eléctricos no son suficientes para describir la dinámica de las cargas vista por los dos sistemas de referencia, i.e., la fuerza dictada por $\vec{F}' = q\vec{E}'$ falla al describir la dinámica de las cargas.

Para describir completamente la dinámica es necesario introducir un nuevo campo \vec{B} .³ La fuerza que describe la dinámica de una carga puntual q con velocidad \vec{v} , está dada entonces por

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (10.10)$$

La nueva pieza en la fuerza experimentada por una carga se conoce como Fuerza de Lorentz y define el campo inducción magnética, \vec{B} , en cada punto del espacio. Nótese la dependencia en la velocidad de la carga, lo cual explica el hecho que la fuerza entre dos hilos con corriente sea proporcional a la intensidad de corriente $I \sim v$.

Contrario al caso con el campo eléctrico la definición del campo magnético

³Este también puede ser entendido como un resultado de las transformaciones de Lorentz para la fuerza ejercida sobre una carga en reposo en el sistema de referencia original, pero no consideramos en detalle este caso.

sufre una pequeña modificación dependiendo del sistema de unidades en que se esté trabajando. Así la expresión dada en (10.10) corresponde al sistema MKS. Para el sistema *cgs* se tiene

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \quad (10.11)$$

con c la velocidad de la luz. La expresión de la Fuerza de Lorentz en *cgs* tiene la propiedad de mostrar explícitamente cómo esta fuerza es un efecto relativista. En efecto, si la velocidad de la luz es infinita esta no será experimentada por carga alguna.

El diccionario entre MKS y *cgs* es entonces

$$\vec{B}_{cgs} \longleftrightarrow c\vec{B}_{MKS}. \quad (10.12)$$

Para completar la confusión, el nombre que se le da al campo \vec{B} puede variar de un texto a otro, siendo denominado también simplemente como *Campo Magnético* o como *Densidad de campo Magnético*. Nosotros dejaremos de lado esta última sutileza siendo usualmente claro a qué campo nos estamos refiriendo.⁴

10.2.1. Unidades

En MKS las unidades para el campo magnético están relacionadas como

$$[E] = [vB] \Rightarrow [B] = \text{Volt} \cdot \text{s/m}^2 \equiv \text{Tesla (T)}, \quad (10.13)$$

definiendo las unidades de campo inducción magnética, Tesla (T), definida como la magnitud de campo que genera un Newton de fuerza sobre una carga de un Coulomb que se mueve de manera perpendicular al campo con rapidez de un metro por segundo. A decir

$$1 T = 1 \frac{N \cdot s}{m \cdot C} = 1 \frac{N}{A \cdot m^2} = 1 \frac{V \cdot s}{m^2}. \quad (10.14)$$

En ocasiones esta se escribe en términos de las unidades del flujo magnético, $Weber (Wb) \equiv T/m^2$.

En el sistema *esu* (*cgs*), según la fuerza de Lorenz, ec.(10.11), las unidades de

⁴Más adelante cuando se introduzca el campo de intensidad magnética \vec{H} es importante hacer la distinción.

campo magnético son las mismas que las unidades de campo eléctrico, pero se da el nombre *Gauss*, (G), definido como el campo producido por un hilo con una corriente de un Amperio ($1A \equiv \frac{c}{10} esu/s \sim 3 \times 10^9 esu/s$, con c el valor de la velocidad de la luz en el vacío en centímetros por segundo) a una distancia de dos milímetros,

$$B(\text{Gauss}) = \frac{2}{10} \frac{I(A)}{r(cm)}. \quad (10.15)$$

Aunque formalmente incorrecto, debido a que poseen dimensiones distintas, la equivalencia entre ambas unidades está dada por

$$1 G = 10^{-4} T. \quad (10.16)$$

Esto explica cómo, a pesar de no estar dentro del sistema MKS, el Gauss es, en muchos casos la unidad preferida, pues campos del orden de los Teslas son muy poco comunes. Para entender la magnitud de estas unidades listamos algunos ejemplos cubriendo desde los más débiles a los más intensos generados artificialmente.

Origen	$B(\text{Gauss})$
Radiación de fondo (MWB)	$\sim 10^{-5}$
Superficie terrestre	$\sim 1/2$
Manchas solares	~ 100
Electroimán grande	$\sim 10^3$
Electroimán superconductor	$\sim 10^5$
Superficie estrella neutrones	$\sim 10^9$

Aun así, el Gauss también resulta la raíz del sistema de unidades conocido como *Gaussiano*, el cual resulta útil por simplificar gran variedad de expresiones. En particular, el único parámetro que aparece es la velocidad de la luz, por lo que resulta poderoso cuando se utiliza en contextos distintos a la electrodinámica, como la física de partículas elementales.

Debe ser claro que dada la inequivalencia entre las dimensiones del campo en los distintos sistemas de unidades, en particular cgs y MKS, llevar una notación general será más complicado si no imposible. Aun así haré el deber de intentarlo

Ejercicio 10.2. 6.27 *Berkeley 2da ed.*

10.3. Ejemplos

Ejemplo 10.3.1. Campo magnético de un hilo con corriente

De la fuerza de Lorentz, para explicar la fuerza experimentada por una carga puntual frente a un hilo recto infinito con corriente, se tiene que la magnitud de \vec{B} debe corresponder, sin demostrarlo, a

$$B = \kappa \frac{I}{r}, \quad \kappa = \begin{cases} \frac{2}{c}, & \text{cgs,} \\ \frac{\mu_0}{2\pi}, & \text{MKS.} \end{cases} \quad (10.17)$$

donde r es la distancia al hilo, y

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A = 4\pi \times 10^{-7} kg \cdot m/C^2 \quad (10.18)$$

es la permeabilidad del vacío. El diccionario dado antes relaciona las dos expresiones al utilizar $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ con ε_0 la expresión, valor, en cada sistema de unidades.

Para explicar el movimiento visto para una carga que se aproxima al hilo se tiene que el campo debe tener líneas de campo en forma circular centradas en el hilo. Se toma la convención que la dirección de los vectores de campo está dictada por la regla de la mano derecha con el pulgar apuntando en la dirección de la corriente y la mano cerrada da dirección del campo, como se muestra en la figura 10.7. Esto es usual escribirlo como

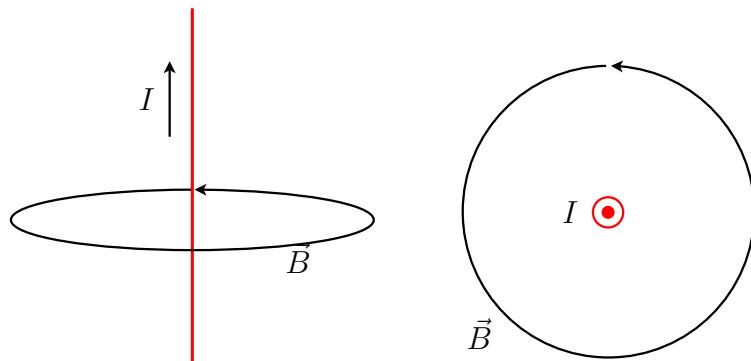


Figura 10.7: Una línea de campo para el hilo recto infinito con corriente. Estas forman círculos centrados en el hilo, con el sentido del campo dictado por la regla de la mano derecha.

$$\vec{B} = \kappa \frac{I}{r} \hat{\varphi}, \quad (10.19)$$

con $\hat{\varphi}$ el vector unitario angular rodeando el hilo.

Ejercicio 10.3. 6.5 Berkeley 2da ed.

Ejercicio 10.4. 6.10 Berkeley 2da ed.

Ejercicio 10.5. 6.12 Berkeley 2da ed.

Ejemplo 10.3.2. Efecto Hall

Una aplicación práctica, tecnológica y científica fácil de comprender es el denominado efecto Hall, descubierto y estudiado por E. H. Hall en 1879. Para esa época aun no era clara la naturaleza de la corriente, incluso se desconocía la existencia de los electrones, y los estudios de Hall fueron un gran aporte para este entendimiento.

Debido a que una corriente \vec{J} puede de igual forma ser debida a cargas positivas con velocidades en dirección \vec{J} , o a cargas negativas en dirección opuesta, la determinación de la naturaleza de los portadores de cargas no es una tarea trivial. Así, suponiendo una placa conductora en el plano xy , al aplicar un campo $\vec{E} = E_o \hat{i}$ se genera una corriente en la dirección \hat{i} dada por la ley de Ohm $\vec{J} = \sigma E_o \hat{i}$, independiente de la carga de los portadores de carga.

Dependiendo de la carga de los portadores la velocidad será $\vec{v}^+ = v_o \hat{i}$, con $v_o > 0$, para cargas positivas o $\vec{v}^- = -v_o \hat{i} = -\vec{v}^+$ para cargas negativas.⁵ Si ahora se aplica un campo magnético en la dirección \hat{k} las partículas se verán desviadas por la acción de la fuerza de Lorentz, de la expresión en MKS

$$\vec{F}^+ = q \vec{v}^+ \times \vec{B} = -qv_o B \hat{j}, \quad \text{cargas positivas,} \quad (10.20)$$

$$\vec{F}^- = (-q) \vec{v}^- \times \vec{B} = -qv_o B \hat{j}, \quad \text{cargas negativas.} \quad (10.21)$$

Tenemos, entonces, que al moverse en direcciones opuestas las cargas experimentan fuerzas en el mismo sentido y se desvíen en cualquier caso hacia la misma pared de la placa. Así, dependiendo del tipo de cargas que se movilicen en el medio tenemos que se acumulará carga positiva en un caso y carga negativa en el otro, y es posible discernir entre las dos situaciones! Experimentalmente esto se revela como una corriente lateral, en la dirección \hat{j} que se asocia al denominado voltaje Hall que es lo que finalmente se mide.

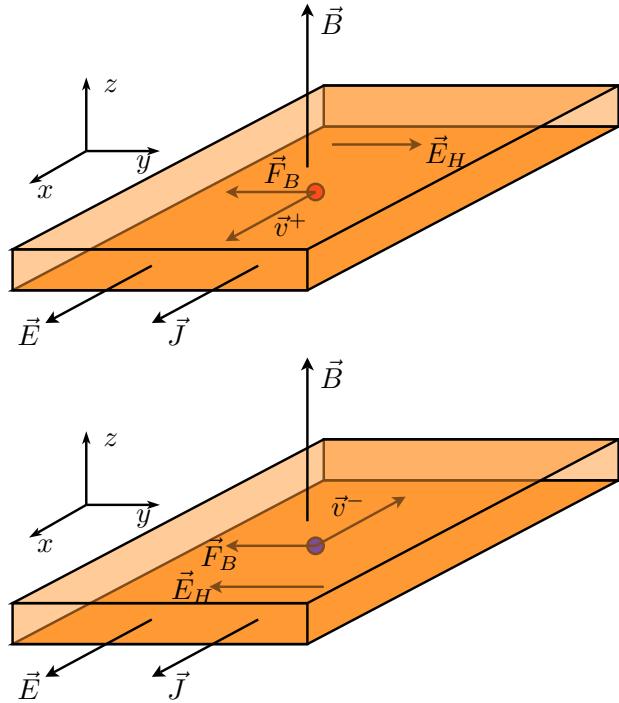


Figura 10.8: Un campo magnético atraviesa perpendicularmente a una placa conductora con corriente. Independientemente del signo de los portadores de carga la fuerza debida al campo magnético apunta en la misma dirección. Arriba se muestra el caso con portadores de carga positivos y abajo el caso de portadores negativos. Los dos casos se revelan con un potencial Hall de signo opuesto entre las caras derecha e izquierda de la placa, producida por un campo eléctrico lateral que contrarresta la fuerza magnética y logra un estado estacionario.

Esto se ilustra en la figura 10.8.

La acumulación de cargas en las caras de la placa produce un campo eléctrico en la dirección \hat{j} que logra una situación estacionaria una vez la fuerza debida al campo eléctrico sea de igual magnitud a la de Lorentz pues en efecto van en cualquier caso en direcciones opuestas,

$$|qE_H| = |qv_oB| \quad \Rightarrow \quad E_H = v_oB . \quad (10.22)$$

⁵ Esto suponiendo que los dos tipos de carga sólo se distinguen por su carga, de otra forma la velocidad de arrastre no deben por qué coincidir.

Este campo estacionario genera un diferencia de potencial entre las caras de la placa,

$$V_H = E_H L_y, \quad (10.23)$$

que induce una corriente en la dirección \hat{j} ,

$$J_y = \sigma E_H, \quad (10.24)$$

que puede ser medida (al igual que el voltaje). De la ley de Ohm en la componente \hat{i} , y con

$$J = nqv_o, \quad (10.25)$$

donde n es la densidad de portadores de carga, podemos expresar el campo inducido en la dirección \hat{j} cómo,

$$E_H = \frac{1}{nq} JB = \frac{1}{nq} \sigma EB, \quad (10.26)$$

de tal forma que midiendo J , B y E_H se puede determinar el denominado coeficiente Hall

$$|R_H| \equiv \frac{1}{nq} = \frac{E_H}{JB}, \quad (10.27)$$

del cual se puede conocer la densidad de portadores de carga n .

Entendemos, entonces, cómo el efecto Hall puede ser utilizado para la caracterización de materiales. Así además de determinar qué tipo de cargas generan las corrientes, recordemos que en los semiconductores tipo p los portadores son positivos, es posible conocer su densidad y movilidad en el material.

Ejercicio 10.6. 6.35 Berkeley 2da ed.

Ejemplo 10.3.3. Fuerza entre dos hilos rectos con corriente

Cómo vimos anteriormente el campo generado por un hilo con corriente está dado por la expresión (10.17). Utilizando la definición para la corriente tenemos

$$I_1 = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \lambda_1 v_1, \quad (10.28)$$

con v_1 la velocidad de las cargas que conforman la corrientes.

Ya que el campo magnético generado por el hilo tiene sólo componentes transversales al hilo, si los hilos son paralelos la velocidad de las cargas en el hilo de prueba es perpendicular al campo generado por el otro. Así, la magnitud

de la fuerza de Lorentz sobre las caras del hilo de prueba es, trabajando en *cgs*,

$$|\vec{F}_q| = |q_2| \frac{v_2}{c} B_1 , \quad (10.29)$$

con v_2 la velocidad de las cargas en el hilo de prueba. Reemplazando la expresión para el campo generado por el otro hilo se sigue,

$$F_q = 2|q_2| \lambda \frac{v_2 v_1}{c^2 r} . \quad (10.30)$$

Como nos interesa la fuerza sobre el hilo evaluamos la fuerza por unidad de longitud considerando que hay λ_2/q_2 cargas por cada segmento, considerando que todos los portadores tienen la misma carga, así

$$\frac{dF}{d\ell} = 2\lambda_2 \lambda \frac{v_2 v_1}{c^2 r} , \quad (10.31)$$

que resulta simétrica bajo el intercambio 1 con 2, como es de esperar por la tercera ley de Newton. Tenemos, entonces, que la fuerza por unidad de longitud entre dos hilos con corrientes, retomando la expresión para las corrientes, se puede expresar como

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{I_1 I_2}{r} \times \begin{cases} \frac{2}{c^2}, & \text{en cgs.} \\ \frac{\mu_0}{2\pi}, & \text{en MKS.} \end{cases} \quad (10.32)$$

En general la fuerza que experimenta un elemento de hilo es perpendicular al campo y al hilo, así la dirección está dictada por

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B} , \quad (10.33)$$

con $d\vec{\ell}$ un elemento del hilo.

Valores usuales para estos parámetros, con electrones como portadores de carga $|q_2| = |q_1| = e = 4,8 \cdot 10^{-10} esu$, $\lambda \sim 3 \cdot 10^{11} esu/cm$, velocidades de arrastre $v_2 \approx v_1 \approx v \sim 12 cm/s$ para el cobre, entregan una magnitud para la fuerza sobre cada electrón del orden

$$F_e \sim 1,6 \cdot 10^{-20} din , \quad (10.34)$$

que se puede comparar con el peso del electrón en la superficie terrestre

$$W_e = 9,1 \times 10^{-25} din . \quad (10.35)$$

Aunque la fuerza magnética es superior a la gravitacional por más de cuatro ordenes de magnitud, es más relevante compararla con la electrostática. Por cada centímetro hay $\lambda/e \sim 10^{20}$ electrones, luego la fuerza por unidad de longitud, ec. (10.31), está en el orden de

$$\frac{dF}{d\ell} \sim 10 \text{ din/cm}, \quad (10.36)$$

pero si fuera de origen electrostático, debida a la carga en los electrones, sería del orden de $\sim 4 \cdot 10^{21} \text{ din/cm} \sim 10^{15} \text{ Ton/m}$. En efecto se tiene que

$$\frac{dF_B}{d\ell} = 2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{dF_E}{d\ell} = 2\beta^2 \frac{dF_E}{d\ell}, \quad (10.37)$$

revelando su naturaleza relativista y mostrando que serán comparables sólo para velocidades cercanas a la de la luz.

Aun así, dado que la materia (macroscópica) es efectivamente neutra los efectos electrostáticos se suprimen y dominan los magnéticos.

Ejercicio 10.7. 6.1 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 10.8. 6.21 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 10.9. 6.22 *Berkeley 2da ed.*

10.4. Propiedades del campo magnético

Una vez hemos generalizado la fuerza sobre una carga para el caso en que esta se encuentra en movimiento, encontramos que la dinámica de esta está completamente determinada una vez se conozcan los campos eléctricos y magnéticos. Tenemos, entonces, que el problema magnetostático se reduce, en analogía al caso electrostático, a determinar el campo \vec{B} . Para esto son necesarias una serie de reglas generales, las ecuaciones de Maxwell, que deben satisfacer los campos y las cuales introducimos a continuación.

10.4.1. Circulación de \vec{B} , Ley de Ampère

En ejemplo 10.3.1 estudiamos el campo magnético producido por un hilo recto infinito con corriente. Encontrabamos en particular que la líneas de campo era círculos centrados en el hilo, la dirección dictada por la regla de

la mano derecha, y su magnitud dependía de la distancia al hilo como $1/r$. Analicemos la integral de línea para este campo en un circuito cerrado.

Sin perdida de generalidad tomaremos un circuito en el plano transversal al hilo. El caso general, en efecto, no contiene mayor información ya que el campo no tiene componentes longitudinales al hilo. Dicho esto tenemos dos clases de circuitos inequivalentes: los que encierran el hilo, y los que no. Claramente son inequivalentes pues no se puede pasar de una familia a otra sin pasar por el punto particular donde se encuentra el hilo en el plano.

Tomando como primer caso un circuito que no encierra el hilo, escogemos por facilidad el circuito descrito por la trayectoría $ABCD$ en la figura 10.9.

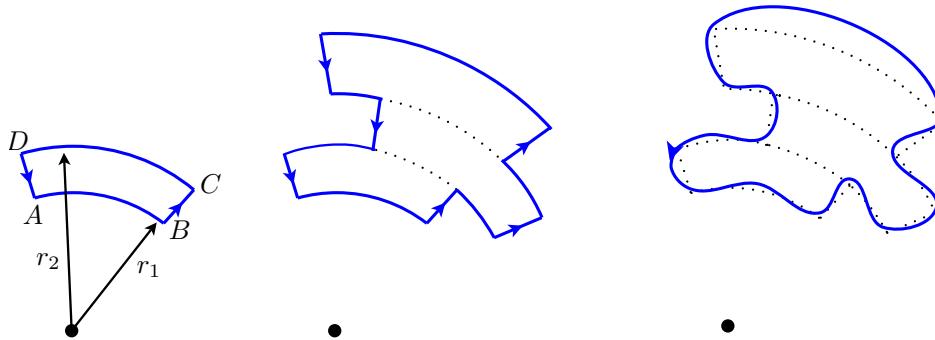


Figura 10.9: Tres caminos que no encierran la corriente, simbolizada acá por el punto, que representa a su vez una corriente que sale del plano de la imagen. En el primer caso, extremo izquierdo, se puede mostrar explícitamente que la circulación es nula. El camino en el medio también entrega un resultado nulo al ser una extensión clara de tres caminos como el inicial. Un camino general siempre se podrá entender como una unión, así sea aproximada, de este tipo de caminos, extremo derecho, que entrega, entonces también una circulación nula.

Del hecho que el campo sólo tiene componentes tangenciales tenemos que en las trayectorias BC y DA las integrales del líneas son nulas y la circulación sobre este circuito se reduce a

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell}. \quad (10.38)$$

Ya que las líneas de campo de \vec{B} son circulares, por construcción $d\vec{\ell}$ es paralelo a las líneas, sin embargo, mientras en una de las secciones es paralelo en la

otra es antiparalelo pues el sentido es opuesto. Para ser más preciso esto tomamos la corriente del hilo como si saliese del plano de la hoja, de tal forma que las líneas de campo están enrollándose en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. Con esta escogencia y dado el sentido tomado para el circuito tenemos que, en la sección CD , \vec{B} y $d\vec{\ell}$ son paralelos mientras que en la sección AB son antiparalelos. Se sigue entonces

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r_1) \int_A^B d\ell - B(r_2) \int_C^D d\ell, \quad (10.39)$$

donde hemos utilizado el hecho que la magnitud del campo sólo depende de la distancia y no del ángulo, luego es una constante sobre las secciones. Con la convención estándar que los ángulos aumentan en el sentido contrario de las manecillas del reloj tenemos que

$$d\ell = -r_1 d\theta, \text{ sección } AB, \quad (10.40)$$

$$d\ell = r_2 d\theta, \text{ sección } CD. \quad (10.41)$$

Luego si los ángulos son barridos entre un ángulo inicial θ_1 y θ_2 , tenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= -B(r_1)r_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta - B(r_2)r_2 \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta, \\ &= -(B(r_1)r_1 - B(r_2)r_2)(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (10.42)$$

El hecho que la magnitud del campo dependa de r como $1/r$, nos indica que $B(r) = \frac{C}{r}$, con C una constante, o sea $rB(r) = C$, encontrando, por tanto, que la circulación, dada por (10.42), es anula, i.e.,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0. \quad (10.43)$$

Cualquier circuito que no encierre el hilo puede ser aproximado por una partición fina de este tipo de circuito rectangular, véase figura 10.9. La circulación será la suma de todas las circulaciones, dado que las secciones internas, coincidentes, se recorren en sentidos opuestos y se cancelan, véase la discusión en la sección 5.10.1. El resultado, por tanto, es válido inmediatamente para el caso general de un circuito Γ que no encierre el hilo.

Pasando ahora a la familia de circuitos que encierran el hilo tenemos que la trayectoria más simple es el círculo centrado en el hilo, para el cual el

campo será paralelo al diferencial de línea. Nuevamente, cualquier circuito general que encierre el hilo puede ser reproducido mediante la unión, fina, de este circuito con circuitos que no encierran la corriente, mediante secciones radiales, que no contribuyen a la circulación. Dado que los circuitos que no la encierran entregan un resultado nulo basta con calcular el caso simple del camino circular para obtener el resultado general.

Existe aun una libertad por fijar y es la dirección del circuito. Contrario al caso anterior para el circuito externo, donde el resultado era nulo y por tanto la dirección de la trayectoria irrelevante, ahora, como estamos a punto de ver, el resultado no es nulo y el sentido debe ser tenido en cuenta. En efecto dependiendo de este el signo de la integral cambia. Esta arbitrariedad se fija requiriendo que la dirección de la corriente sea paralela al vector área de la superficie que encierra el circuito, i.e., $\vec{I} \cdot \vec{A} > 0$. La dirección del elemento de línea queda unívocamente determinada con la convención de la mano derecha con el anular dictando la dirección del vector área. Así, el campo y el vector de línea resultan paralelos y $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = Bd\ell$. Con esta convención tenemos entonces, con $d\ell = r_o d\theta$,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint B(r_o) r_o d\theta, \\ &= \oint \kappa \frac{I}{r_o} r_o d\theta = 2\pi\kappa I, \end{aligned} \quad (10.44)$$

donde hemos utilizado la expresión para el campo del hilo infinito con corriente. Nuevamente estresamos que este resultado es general para cualquier circuito que encierre al hilo, incluso si se sale del plano perpendicular al hilo. El caso, sin embargo, no es general pues dentro de la familia de circuitos que encierran el hilo existen infinitas familias topológicamente inequivalentes⁶ al circuito apenas descrito. En efecto, aunque cualquier circuito fuera de hilo, con cualquier número de enrollamiento puede deformarse sin ser roto para reproducir el de una sola vuelta,⁷ los circuitos que enrollan el hilo con un número de vueltas distintas no pueden ser deformados uno en el otro sin ser rotos y/o pasar por encima de hilo. Podemos caracterizar, entonces, cada

⁶El área de las matemáticas denominada topología en particular se encarga de las propiedades de las formas que quedan invariantes bajo deformaciones que no impliquen roturas. Así, por ejemplo, una cobija y una ruana son topológicamente inequivalentes, mientras que la ruana es equivalente a una falda, ambas tienen un agujero.

⁷Esto puede implicar pasar una sección de la trayectoria sobre otra pero nunca implica pasar sobre el punto donde está el hilo.

familia de circuitos por el número de vueltas que enrolle el hilo, el cual llamaremos $n = 0, 1, 2, \dots$ ⁸

Para extender nuestro resultado vemos que en el último paso en (10.44) la integral simplemente da el total de ángulo barrido, que en ese caso es de 2π . Para un circuito Γ_n que encierra n veces el hilo, tenemos que

$$\oint_{\Gamma_n} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi n \kappa I. \quad (10.45)$$

Tenemos en general que la circulación del campo magnético es proporcional a la corriente encerrada por el circuito, y la constante de proporcionalidad es lineal con el número n de veces que la encierra. Este resultado se conoce como Ley de Ampère para la magnetostática.

Este resultado es análogo a la ley de Gauss para el campo electrostático, indicando en este caso que el campo magnético de la fuente fundamental, i.e., un hilo de corriente, decrece como $1/r$, y su dirección es circular.

La analogía se hace más evidente enunciando en su forma más común la ley de Ampère,

$$\oint_{\Gamma_n} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi \kappa I_{\text{neta encerrada}}, \quad (10.46)$$

donde por neta se entiende la suma algebraica de las corrientes tomando el signo positivo para las corrientes tales que $\vec{I} \cdot \vec{A} > 0$ y negativo para el caso contrario. Además, una corriente se cuenta tantas veces como el circuito la encierre.

Ejemplo 10.4.1. Campo para una placa infinita de corriente.

La analogía entre la ley de Gauss de la electrostática y la ley de Ampère de la magnetostática se extiende también en el contexto práctico del cálculo de campos. En el caso de la ley de Ampère: si para el sistema es directo identificar la forma de las líneas de campo, y su posible independencia de la magnitud con la posición a lo largo de las líneas de campo, de tal forma que la circulación pueda ser evaluada implícitamente, la expresión (10.46) puede ser utilizada para el cálculo de campos magnéticos.

Por ejemplo consideremos el caso de una placa delgada infinita con una densidad de corriente superficial $\vec{\lambda}$ uniforme. Por simetría, de traslación paralela a la placa, se observa que las líneas de campo sólo pueden estar en planos

⁸Esto es lo que se conoce como número topológico, pues es igual para cualquier trayectoria topológicamente equivalente. Un enrollamiento en sentido opuesto puede verse como un n negativo.

paralelos a la placa. Esto lo podemos también entender al pensar en la placa como la unión de infinitos hilos con corriente, y el resultado de superponer todos sus campos queda como sólo con componentes paralelas a la placa y perpendiculares a las corrientes, idea que también nos da la dirección del campo dictada por la regla de la mano derecha, véase la figura 10.10.

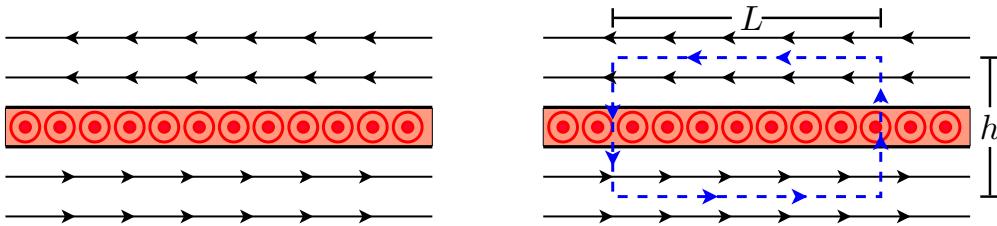


Figura 10.10: Placa infinita con una densidad uniforme superficial de corriente. Se puede entender como la superposición de hilos delgados con corriente uniformemente distribuidos en la placa. La simetría de traslación y la regla de la mano derecha implican líneas de campo rectas paralelas a la placa, con dirección dictada como se muestra. A la derecha un camino cerrado con dos partes paralelas a la placa y otras dos perpendiculares.

Análogo al caso electrostático de la placa infinita, las conclusiones hasta ahora obtenidas se mantienen sólo en el límite en que las dimensiones de la placa son muy grandes comparada con la distancia a la placa desde la cual se mide el campo. Cuando las dimensiones son apreciables a el observador, los efectos de borde comienzan a ser relevantes y la líneas de campo dejan de ser rectas. Con estas consideraciones podemos calcular la circulación del campo a lo largo de una trayectoria rectangular con dos secciones paralelas a la placa de longitud L , que por simetría tomamos a la misma distancia h de la placa, figura 10.10. Ya que el campo sólo tiene componentes paralelos a la placa las secciones perpendiculares a esta no contribuyen a la circulación y tenemos

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2B(h) \int_0^L d\ell = 2B(h)L, \quad (10.47)$$

donde hemos tenido en cuenta que, por simetría, el campo debe ser constante a lo largo de las trayectorias, que al ser equidistantes a la placa contribuyen de igual forma. También hemos escogido la dirección para el camino tal que sea paralelo al campo.

De la ley de Ampère tenemos que la circulación (10.47) debe ser proporcional

a la corriente encerrada por la trayectoria Γ . La dirección escogida para la trayectoria es tal que el vector área es paralelo a la corriente, cuya dirección está dictada por la densidad de corriente $\vec{\lambda}$. La corriente encerrada es por tanto positiva y su magnitud está dada por la densidad de corriente veces la longitud de la sección encerrada, recordemos que la placa es delgada,

$$I_{enc} = \lambda L, \quad (10.48)$$

que combinado con (10.47) entrega el campo para la placa infinita

$$B = \pi \kappa \lambda, \quad (10.49)$$

que como era de esperarse de su análogo electrostático es independiente de la distancia a la placa.

Ejemplo 10.4.2. Campo de una bobina infinita

Una bobina o solenoide es el enrollado (devanado) de un hilo con corriente, el cual en primera aproximación se puede considerar como un conjunto de espiras paralelas seguidas uniformemente espaciadas. Para el presente cálculo no será importante la forma del corte transversal de la bobina, i.e., la forma de las espiras individuales, mientras todas sean idénticas. Para poder aplicar el método de Ampère en la evaluación del campo, además, supondremos que las espiras están densamente espaciadas, de modo que podemos considerar una densidad n de espiras por unidad de longitud. O sea que en una longitud dL encontramos ndL espiras. Resumiendo, tenemos una bobina recta infinita uniformemente devanada donde no distinguimos las espiras individuales que la conforman. Esto indica que tenemos una simetría de translación a lo largo de la bobina, suponemos que la bobina es recta, de modo que las líneas de campo sólo pueden ir paralelas al eje de la bobina, o sea, el campo debe, necesariamente, ser uniforme.

Como las líneas de campo magnético deben cerrarse en sí mismas el mismo número de líneas deben pasar por dentro de la bobina como por fuera. Así, las líneas que salen por las bocas de la bobina se deben diluir en todo el espacio exterior. Siendo las bobinas, en nuestro caso, efectivamente infinitas la líneas de campo deben espaciarse uniformemente en todo el espacio exterior y estarán efectivamente infinitamente espaciadas entre sí, i.e., el campo exterior es nulo. En general, el campo dentro de una bobina es mucho más intenso que en su exterior y en la zona media, lejana a las aperturas el campo es en buena aproximación uniforme.

Con estas consideraciones la evaluación del campo al interior de la bobina sigue muy de cerca a lo hecho para la placa en el ejemplo 10.4.1. Calcularemos la circulación de campo magnético a lo largo de un camino rectangular con dos de sus lados tangenciales al la bobina verticalmente, uno interno y otro externo, y las otras dos secciones cerrando el camino cruzando perpendicularmente la pared de la bobina, como se muestra en la figura 10.11.

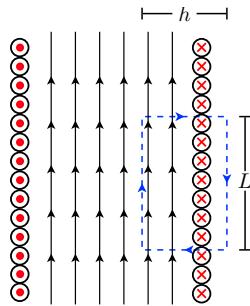


Figura 10.11: Corte longitudinal de la bobina. La corriente fluye en sentido antihorario si vista desde arriba. Esto se refleja con la corriente saliendo en la sección izquierda y entrando en la sección derecha. El camino sobre el que se calcula la circulación tiene altura L y ancho h ,

La corriente encerrada por el camino es proporcional a L , más precisamente

$$I_{enc} = \int_0^L nIdL = nI \int_0^L dL = nLI, \quad (10.50)$$

donde hemos utilizado el hecho que la densidad lineal de espiras es constante y la corriente por todas las espiras es la misma. Por otro lado la circulación de campo por el camino cerrado es

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{interna} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}, \\ &= \int_{vertical int} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}, \\ &= B_{int} \int_{vertical int} d\ell, \\ &= B_{int} L, \end{aligned} \quad (10.51)$$

donde hemos utilizado que el campo es no nulo sólo al interior de la bobina, y que en la sección horizontal del camino el producto punto con el vector

diferencial de línea en la sección horizontal es nulo. Además, como el campo es uniforme vertical, puede salir de la integral. Por la ley de Ampére ambas cantidades deben ser idénticas, con un factor de proporcionalidad de $2\pi\kappa$, por tanto

$$B_{int} = 2\pi\kappa nI. \quad (10.52)$$

Ejercicio 10.10. ¿Puede el rotacional del campo magnético ser nulo en todos los puntos del espacio? Justifique y de dos ejemplos, uno para cada caso, de puntos donde el rotacional se anule y donde no.

Ejercicio 10.11. 6.2 Berkeley 2da ed.

Ejercicio 10.12. 6.3 Berkeley 2da ed.

Ejercicio 10.13. 6.14 Berkeley 2da ed.

Ejercicio 10.14. 6.16 Berkeley 2da ed.

10.4.2. Forma diferencial de la Ley de Ampère

Partiendo de expresión integral (10.46) escribiendo la corriente encerrada como el flujo de densidad de corriente a través de la superficie encerrada por el circuito

$$I_{enc} = \int_{S(\Gamma)} \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad S(C) \text{ superficie encerrada por } \Gamma. \quad (10.53)$$

Ahora, utilizando el teorema de Stokes (ver sección 5.10.1) tenemos que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S(\Gamma)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}, \quad (10.54)$$

y la ley de Ampère toma la forma

$$\int_{S(\Gamma)} (\vec{\nabla} \times \vec{B} - 2\pi\kappa \vec{J}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (10.55)$$

donde hemos pasado todos los términos al lado izquierdo. Ya que esta igualdad se cumple independientemente del circuito tomado, en particular, de la

supuerficie que este encierra, esta se satisface si y sólo sí el integrando es nulo, i.e.,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 2\pi\kappa\vec{J}, \quad (10.56)$$

recordando $\kappa = \frac{2}{c}$ en *cgs* y $\kappa = \frac{\mu_0}{2\pi}$ en MKS. La expresión (10.56) es la forma diferencial de la Ley de Ampère para la magnetostática y nos indica que son las corrientes a generar el campo magnético, que tiene un carácter circular, no radial como el campo eléctrico, y que el campo de un hilo decrece como el inverso de la distancia a este.

10.4.3. Divergencia de \vec{B}

La ley de Ampère nos indica que para el caso estático dadas las corrientes en todo el espacio el campo magnético queda determinado completamente. En realidad aun falta información para que realmente este quede totalmente determinado, esto según el teorema de Helmholtz que indica que para determinar completamente un campo vectorial se deben conocer, además de las condiciones de frontera, su rotacional y divergencia en todo el espacio.

Dada la información física que la divergencia da sobre un campo vectorial, para determinala se debe primero identificar donde nacen o mueren las líneas de campo, en este caso, magnético. Experimentalmente este es uno de los retos más grandes que la física fundamental tiene aun en el presente, y se conoce como la búsqueda de los monopolos magnéticos, que serían los análogos a las cargas eléctricas. A pesar de los esfuerzos hasta ahora hechos, y las multiples motivaciones teóricas⁹, no hay evidencia experimental de estos monopolos, por lo que tenemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (10.57)$$

Esta es la segunda ecuación de Maxwell para la magnetostática e indica la ausencia de monopolos magnéticos. O sea que las líneas de campo magnéticos siempre se cierran en sí mismas.

Tenemos, entonces, que ¡las únicas fuentes de campos magnético son las corrientes!, ¡incluso dentro de los imanes!. En los imanes cualquier esfuerzo por separar los dos polos de este siempre resulta vano, y aun el pedazo más pequeño de imán es aun la unión de dos polos.

⁹Existen varias teorías que pretenden explicar el universo temprano, i.e., a tiempos cercanos a La Gran Explosión, así como teorías de gravedad cuántica que predicen la existencia de dichas partículas.

Algo que no discutiremos en este curso es el hecho que incluso las corrientes electrónicas en los átomos, debidas a los electrones orbitando el núcleo, no pueden describir el campo de los átomos en un imán. Sucede que los electrones en sí también se comportan como pequeños imanes, y la explicación de este hecho resulta que es parte de la revolución que acompaña a la mecánica cuántica, con lo que se conoce como el espín intrínseco del electrón.

10.4.4. Trabajo realizado por \vec{B}

Aunque hemos encontrado que el campo magnético no es un campo conservativo, pues su integral de línea no es nula en general, esto no da indicaciones de cual es el trabajo que este realiza sobre una carga en un circuito cerrado. En efecto, al contrario del campo electrostático, donde la fuerza es paralela al campo \vec{E} , la fuerza de Lorentz, que es la fuerza generada por \vec{B} , no es paralela a \vec{B} y no podemos concluir directamente que el trabajo en un circuito sea no nulo.

Para calcular el trabajo realizado por el campo magnetostático escribimos la fuerza de Lorentz como

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = q \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}, \quad (10.58)$$

donde hemos visto la velocidad como la rata de cambio de la posición de la carga, que se mueve en una trayectoria dictada por el vector $d\vec{l}$. Dadas las propiedades del producto cruz entre vectores tenemos que la fuerza de Lorentz es siempre perpendicular a la trayectoria, i.e.,

$$\vec{F}_B \cdot d\vec{l} = 0. \quad (10.59)$$

Se sigue, entonces, que el trabajo realizado por el campo magnetostático, $W = - \int \vec{F}_B \cdot d\vec{l}$, es nulo, independiente de la trayectoria. Esto incluso el caso de una trayectoria cerrada.

Una pregunta interesante que surge en este punto es qué sucede entonces cuando dos hilos con corriente se atraen, ya que el desplazamiento ocurre en la dirección de la fuerza y un trabajo debe evidenciarse.¹⁰ Notece, sin embargo, que el movimiento del hilo implica que aparece una componente de la velocidad en la dirección de la fuerza de Lorentz original, y que genera por tanto una componente de la fuerza en la dirección longitudinal del hilo

¹⁰Agradezco a Fabian Bautista por formular esta pregunta en el justo momento.

con corriente. Esta fuerza más precisamente apunta en dirección opuesta a la dirección original en que se mueven las cargas, que supondremos constante, y produce por tanto un trabajo negativo que puede mostrarse es de la misma magnitud al trabajo realizado en la dirección de movimiento del hilo.¹¹ Resulta así que el trabajo es efectivamente nulo a pesar que el hilo se ha desplazado.

Claramente para mantener una corriente constante, y mantener el sistema en el estado estacionario, se requiere entonces una FEM que “empuje con más fuerza” la corriente. Lo que explicaría cómo aunque el campo magnético no realiza trabajo la energía del sistema cambia pues el hilo ahora se encuentra en movimiento mientras las cargas dentro siguen con la misma rapidez.

El caso del trabajo realizado en hacer una espira con corriente, como es el caso de un motor eléctrico, debido a un campo uniforme se requiere una herramienta extra. Al ser un campo uniforme la espira no experimenta fuerza neta y por tanto el único trabajo aparecería debido al torque que la hace girar.¹² El giro de espira evidencia un trabajo, y el hecho que el campo magnético que esta produce permanezca constante muestra que la corriente interna también. Así, si una espira con corriente el colocada en un campo magnético uniforme esta gira manteniendo su corriente constante, pero para mantenerla constante debe aparecer una fuerza, FEM. Esta FEM será encontrada en próximos capítulo bajo en título de Ley de Faraday, y será la responsable de cancelar el trabajo eléctrico de la fuerza de Lorentz.

Para extender nuestro análisis a los imanes, donde es claro el trabajo que se realiza, debemos entender primero el concepto de momentos magnéticos que exploraremos en el próximo capítulo.

10.5. Ecuaciones estáticas de Maxwell

Este es un buen punto para resumir las cuatro ecuaciones de Maxwell que hemos encontrado a esta altura del curso, las cuales escribimos en su forma diferencial en la tabla 10.1, En la primera columna tenemos la ley de Coulomb, que nos indica que el campo electrostático es radial y decrece, para la carga puntual, como el inverso del cuadrado de la distancia. Tenemos en la segunda fila el hecho que el campo eléctrico sea conservativo, que indica para

¹¹Ver por ejemplo la sección 15-1 del volumen 2 de la lecturas de Feynman

¹²Recordemos que el trabajo debido aun torque $\vec{\tau}$ al hacer girar el objeto un $d\vec{\theta} = \hat{n}d\theta$, con \hat{n} el eje al rededor que se hace el giro, está dado por $dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$, así $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k\rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 2\pi\kappa\vec{J}$

Cuadro 10.1: Ecuaciones estáticas de Maxwell en el vacío en forma diferencial. $k = 1$ y $\kappa = 2/c$ en *cgs*, mientras $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ y $\kappa = \mu_0/(2\pi)$ en MKS.

su caso particular que el trabajo realizado por la fuerza electrostática en una trayectoria cerrada es nulo. Estas dos ecuaciones en conjunto nos indican que las cargas eléctricas son las únicas fuentes de campo electrostático.

En la segunda columna tenemos el hecho experimental de la ausencia de monopolos magnéticos y la ley de Ampère que indica que las corrientes son las únicas fuentes de campo magnetostático y que este campo es de naturaleza circular y decrece como el inverso de la distancia para el hilo infinito con corriente.

10.6. Potencial vectorial

Como hemos visto resulta apropiado, y en general más sencillo, trabajar con el campo escalar electrostático por lo que es natural pensar en un acercamiento análogo para el caso magnetostático; sin embargo, dado que la circulación de \vec{B} por un camino cerrado en general no es nula, o, analógicamente, su rotacional no es cero en todo el espacio, no podemos asociarle un campo escalar como lo hicimos con el campo electrostático. Podemos, sin embargo, utilizar la ley de Gauss para vB , que tiene por solución general

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (10.60)$$

de acuerdo con la identidad $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ para cualquier campo vectorial bien comportado. El campo vectorial \vec{A} lo denominamos potencial vectorial y cumple el papel nálogo a ϕ en el caso electrotáctico.

Una de las motivaciones que nos llevó a construir ϕ fue el hecho claro se reducían el número de grados libertad que deben ser solucionados, al pasar de una cantidad vectorial a una escalar.¹³ En el caso de la magnetostática

¹³Esto al precio de pasar de ecuaciones diferenciales de primer orden a una de segundo orden

esta motivación no es clara pues resultamos nuevamente trabajando con una cantidad vectorial. Sin entrar en detalles podemos justificar, a este nivel, la utilización de \vec{A} con dos argumentos:

- Cómo se ha advertido desde el comienzo del curso la Electrodinámica es una teoría relativista, y cómo tal es posible enmarcarla en un lenguaje propio de esta. De esto se sigue que una descripción donde relatividad sea completamente manifiesta requiere que \vec{E} y \vec{B} se conjuguen en un mismo objeto, conocido como tensor electromagnético. De igual forma, entonces, los potenciales ϕ y \vec{A} estarán contenidos en un sólo objeto, conocido como cuadrivector potencial. El resultado es que el objeto que contiene los potenciales es mucho más sencillo que el tensor electromanético,¹⁴ y por tanto las ecuaciones de movimiento, i.e., la ecuaciones de Maxwell tendrán una expresión más sencilla.
- Otra razón es el hecho que sobre \vec{A} , al igual que sobre ϕ , existe una libertad que no existe sobre los campos y que indica que, contrario a los campos, estos no tienen sentido físico.¹⁵ Así para ϕ podemos sumar una constante sin que el campo electrostático cambie. Para \vec{A} esta libertad de calibre permite, dependiendo del sistema estudiado, simplificar de manera substancial las ecuaciones tratadas. Esto está relacionado con el hecho que para definir \vec{A} sólo se ha especificado su rotacional, dejando en principio completamente arbitraria su divergencia.

Pregunta 10.1. De la identidad $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\psi) = 0$ y la definición de \vec{B} ¿cuál es la libertad de calibre sobre \vec{A} ? O sea ¿qué tipo de transformaciones de \vec{A} que deja invariante \vec{B} ?

Con estas justificaciones, por ahora superficiales, veamos cuales son las ecuaciones que rigen a \vec{A} .

Tomando la componente x de ley de Ampère, ecuación (10.56),

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 2\pi\kappa J_x, \quad (10.61)$$

¹⁴En efecto de las seis componentes linealmente independiente del tensor electromagnético se tienen ahora sólo las cuatro del cuadrivector potencial.

¹⁵Se debe anotar, sin embargo, que existen efectos cuánticos generados por \vec{A} , por ejemplo el efecto Aharonov-Bohm (ver la sección 15-4 del volumen 2 de las lecturas de Feynman), lo que indica que el potencial vectorial debe considerarse en muchos casos como físico.

con la definición del campo magnético en términos de \vec{A} (10.60)

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (10.62)$$

se sigue

$$\begin{aligned} 2\pi\kappa J_x &= -\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right), \\ &= -\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right), \\ &= -\nabla^2 A_x + \frac{\partial}{\partial x} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \end{aligned} \quad (10.63)$$

donde para pasar de la primera a la segunda línea se sumó y restó $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$.¹⁶ La libertad de calibre nos permite escojer la divergencia de \vec{A} a conveniencia, siendo el más obvio

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (10.64)$$

conocido como calibre o gauge de Coulomb. Fijando este calibre, de todas la posible soluciones para \vec{A} que satisfagan (10.60), sólo tomaremos las que tengan divergencia nula. La ecuación por resolver es, entonces,

$$\nabla^2 A_x = -2\pi\kappa J_x, \quad (10.65)$$

con $\kappa = 2/c$ en *cgs* y $\kappa = \mu_0/2\pi$ en MKS. Salvo un factor de 2 la ecuación es identica a la ecuación de Poisson que ya resolvimos para el potencial escalar ϕ

$$\nabla^2 \phi = -4\pi k\rho, \Leftrightarrow \phi(\vec{r}) = k \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (10.66)$$

de donde tenemos

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2} \int \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (10.67)$$

Para las demás componentes se sigue el mismo análisis encontrado una expresión similar. Todas en conjunto se pueden, entonces, expresar como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (10.68)$$

¹⁶A este resultado se llega directamente utilizando la identidad $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{F} = -\nabla^2 \vec{F} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$.

que es la solución a

$$\nabla^2 \vec{A} = -2\pi\kappa \vec{J}. \quad (10.69)$$

Se sigue que si se conoce la distribución de corrientes en todo el espacio es posible determinar el potencial vectorial \vec{A} y de este, con (10.60), conocer el campo magnetostático \vec{B} .

Ejemplo 10.6.1. \vec{A} para el hilo recto infinito

Suponiendo el hilo en la dirección z y que su área de sección transversal es a y por este pasa una corriente I , se sigue que

$$\vec{J} = \frac{I}{a} \hat{k}, \quad (10.70)$$

restringida a la región dentro del hilo, i.e., $x^2 + y^2 \leq a^2$. Supondremos que deseamos evaluar el campo en el exterior del hilo, donde consideraremos que el grosor de este es despreciable, o sea $x' \ll x$ y $y' \ll y$. Al ser una densidad de corriente homogénea es posible escribir el diferencial de volumen simplemente como $dV = adz$ y la integral se volumen se reduce a sólo una en la componente z , así

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{k} I dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}}. \quad (10.71)$$

Para calcular esta integral utilizamos el resultado

$$\int_{-C}^C \frac{dz}{\sqrt{f + z^2}} = \ln \left(\frac{C + \sqrt{f + C^2}}{\sqrt{f + C^2} - C} \right) \xrightarrow[C \rightarrow \infty]{} -\ln f + \ln(4C^2 + f). \quad (10.72)$$

¡Tenemos entonces que la integral tiene una parte divergente! Sin embargo, la dependencia en las coordenadas está contenida sólo en $f = x^2 + y^2$, mientras que C es una constante. Esto implica que las derivadas con respecto a las coordenadas en la parte divergente están suprimidas, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln(4C^2 + f) = \frac{1}{4C^2 + f} \frac{\partial f}{\partial x} \xrightarrow[C \rightarrow \infty]{} 0, \quad (10.73)$$

o sea que la parte divergente es una constante que, dada la libertad de calibre, no tiene algún efecto sobre el campo magnético y, por tanto, no es física. Podemos, entonces, escribir

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{2} I \hat{k} \ln(x^2 + y^2) + cte, \quad (10.74)$$

que efectivamente satisface el calibre de Coulomb, ecuación (10.64).

Conociendo el potencial vectorial podemos calcular \vec{B} ,

$$\begin{aligned} B_x &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\kappa I \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ B_y &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \kappa I \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ B_z &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (10.75)$$

Utilizando la relación entre los vectores unitario cartesianos y polares,

$$\hat{\varphi} = -\operatorname{Sen}\varphi \hat{i} + \operatorname{Cos}\varphi \hat{j} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y \hat{i} + x \hat{j}), \quad (10.76)$$

y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, tenemos

$$\vec{B} = \kappa I \frac{1}{x^2 + y^2} (-y \hat{i} + x \hat{j}) = \kappa \frac{I}{r} \hat{\varphi}, \quad (10.77)$$

que es precisamente el resultado conocido desde el principio del capítulo.

10.7. Campo de un hilo arbitrario de corriente, Ley de Biot-Savart

Del ejemplo anterior tenemos que para un hilo con área transversal a la densidad de corriente puede escribirse en términos de un vector corriente como

$$\vec{J} = \frac{1}{a} \vec{I}, \quad (10.78)$$

donde la dirección de \vec{I} está dictada por el elemento de hilo $d\vec{\ell}$ donde se determine y la densidad de corriente es no nula sólo en el interior del hilo. Asimismo el elemento de volumen queda $dV = ad\ell$, de tal forma que un elemento de hilo en la posición \vec{r}' , ver figura 10.12, contribuye a potencial vectorial con

$$d\vec{A} = \frac{\kappa}{2} \frac{Id\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (10.79)$$

que es análoga a la contribución de una elemento diferencial de carga dq al potencial escalar. Sin embargo, contrario a lo que sucede en el caso electrostático, los elementos diferenciales de corriente no son independientes en el sentido estricto, ya que la corriente pasa de un elemento al siguiente. De todas maneras, en nuestro manejo formal de la solución podemos ignorar esta observación y proceder exactamente como en el caso electrostático.

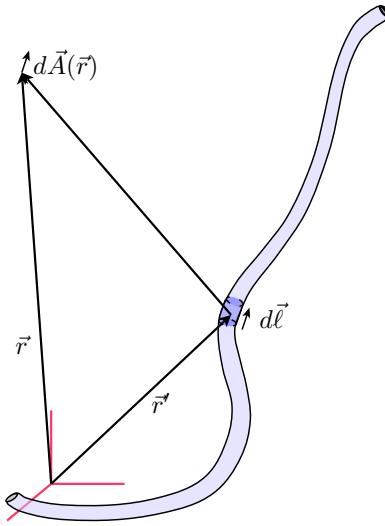


Figura 10.12: Un hilo arbitrario con corriente cuya contribución total se puede entender por medio de la superposición lineal de elementos diferenciales de longitud $d\ell$.

Para entender cómo este elemento de corriente contribuye al campo consideremos por el momento que este está en el origen y dirigido en la dirección \hat{k} , de tal forma que

$$\begin{aligned}
 d\vec{B} &= \vec{\nabla} \times d\vec{A} = i \frac{\partial dA_z}{\partial y} - j \frac{\partial dA_z}{\partial x} \\
 &= \frac{\kappa}{2} \frac{Id\ell}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (-y\hat{i} + x\hat{j}), \\
 &= \frac{\kappa}{2} I \frac{d\ell}{r^2} \text{Sen}\theta (-\text{Sen}\varphi\hat{i} + \text{Cos}\varphi\hat{j}), \\
 &= \frac{\kappa}{2} I \frac{d\ell}{r^2} \hat{\varphi}, \tag{10.80}
 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la relación entre los vectores unitarios en coordenadas cartesianas y esféricas, muy similar a la relación (10.76) con un $\text{Sen}\theta$ extra por la proyección en el plano xy . Reconociendo el vector unitario en la coordenada axial como $d\ell\hat{\phi} = d\vec{\ell} \times \hat{r}$ tenemos

$$d\vec{B} = \frac{\kappa I}{2} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (10.81)$$

Por tanto, para el caso general, cuando el elemento no se encuentra en el origen

$$d\vec{B} = \frac{\kappa I}{2} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (10.82)$$

que se conoce como ley de Biot-Savart.

El anterior resultado puede directamente extraerse partiendo de (10.79) utilizando

$$\vec{\nabla} \times (F(\vec{r})\vec{b}) = \vec{b} \times \vec{\nabla} F(\vec{r}), \quad (10.83)$$

con \vec{b} un vector constante en el espacio¹⁷ y $F(\vec{r})$ una función escalar, y sabiendo

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (10.84)$$

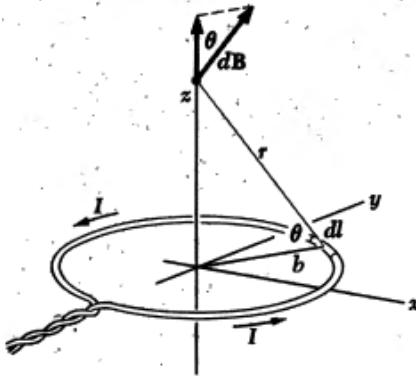
cómo se deduce de la relación entre el potencial y campo electrostáticos de una carga puntual.

Ejemplo 10.7.1. Campo para la espira circular con corriente

Supongamos una espira de radio a en el plano xy , centrada en el origen, por la cual pasa una corriente I . Para calcular el campo en un punto arbitrario otros métodos son necesarios que se verán en el curso de Electrodinámica. Sin embargo, es posible determinar el campo en regiones determinadas, como por ejemplo el eje del anillo.

Sobre el eje z el vector posición está dado por $\vec{r} = (0, 0, z)$, y para cada punto z tenemos que el producto entre $d\vec{\ell} = \hat{\phi}d\ell$ y $(\vec{r} - \vec{r}')$ tiene sólo componentes en z y radial. Una vista transversal en el plano xy muestra además, que la contribución radial de elementos opuestos en el anillo son iguales pero en sentidos contrarios y por tanto se cancelan. **Hacer dibujo**

¹⁷Recordemos que $d\vec{\ell}$ depende sólo de \vec{r}' .



Tenemos, por tanto, que sólo la componente z es no nula, con $|\vec{r} - \vec{r'}|^2 = a^2 + z^2$,

$$dB_z = \frac{\kappa}{2} I \frac{d\ell}{a^2 + z^2} \cos\theta, \quad (10.85)$$

donde se ha proyectado sobre el eje z . Con $\cos\theta = a/\sqrt{a^2 + z^2}$ se sigue

$$dB_z = \frac{\kappa I a}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} d\ell. \quad (10.86)$$

Para hallar la contribución total sumamos sobre todo el anillo, pero como todas las contribuciones son identicas, nada depende de la posición sobre el anillo, esto se reduce multiplicar por la longitud total del anillo, esto de $\oint d\ell = L = 2\pi a$. Se tiene, entonces, que el campo sobre el eje z está dado por

$$B_z(\vec{r} = z\hat{k}) = \frac{\pi\kappa I a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (10.87)$$

En particular en el centro del anillo

$$B_x(0) = \frac{\pi\kappa I}{a}, \quad (10.88)$$

que es distinto de cero, contrario al campo electrostático que se anula por su naturaleza radial.

Para terminar este ejemplo miremos cómo se verían las líneas de campo en el espacio, cómo las muestra la siguiente figura

Estas líneas de campo de lejos reproducen las del campo de un imán recto, i.e., un dipolo magnético, y en primera aproximación al campo terrestre. Lo que nos da a entender cómo comprender estos campos como generado por corrientes.

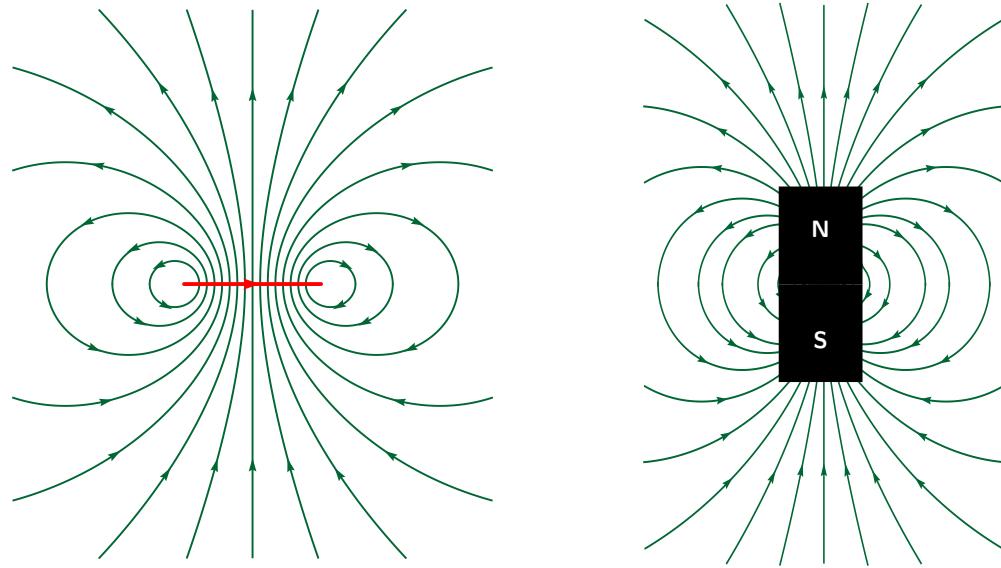


Figura 10.13: Líneas de campo magnético de la espira circular con corriente en un corte en el plano medio de la espira. La línea roja indica la dirección de la corriente. La figura se ha generado utilizando el paquete [pst-magneticfield](#).

Ejemplo 10.7.2. Campo producido por una bobina con corriente

En el ejemplo 10.4.2 estudiamos el sistema de una bobina recta densa e infinita. Ahora, tenemos suficientes herramientas para determinar el campo de la bobina finita, al menos en su eje.

Nuevamente suponemos que las espiras están densamente espaciadas, de modo que podemos considerar una densidad n de espiras por unidad de longitud y tomaremos la espira a lo largo del eje z , de modo que $dL = dz$. De este modo un elemento de bobina que se extiende a lo largo de dz contribuye como una única espira con corriente $nIdz$. Del resultado anterior,

$$dB_z = \pi\kappa \frac{a^2 n I}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz, \quad (10.89)$$

donde hemos supuesto como a el radio de la bobina. Cada elemento contribuye de forma distinta pues están a distintas distancias z del punto donde se mide el campo. En este punto basta con identificarla siguiente integral

$$\int dz (a^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{z}{a^2 \sqrt{a^2 + z^2}}, \quad (10.90)$$

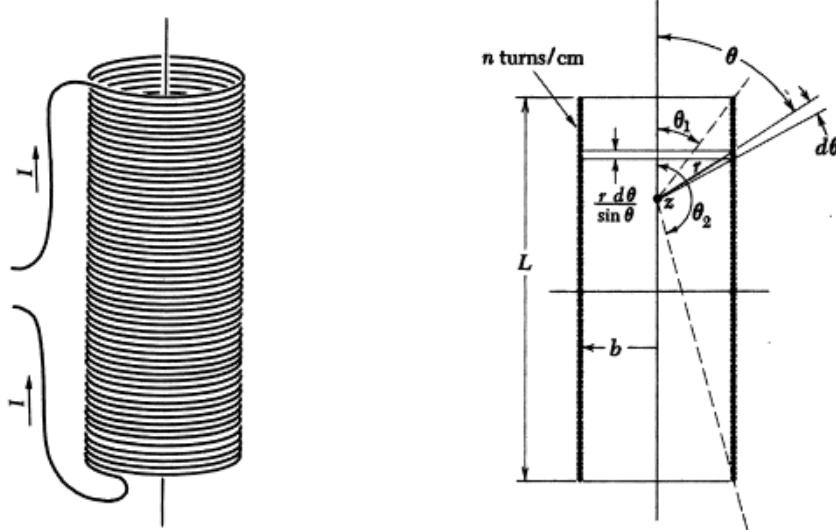


Figura 10.14: Ilustración del sistema bajo estudio. Al lado derecho se identifican los distintos parámetros que aparecen en la integración.

para hallar el resultado. Sin embargo, realicemos un cambio de variable para ver detenidamente cómo resulta esto; la idea será utilizar como variable de integración el ángulo de barrido θ , considerando las siguientes relaciones, que se deducen de la figura 10.14,

$$\operatorname{Sen}\theta dz = rd\theta, \quad r^2 = a^2 + z^2, \quad a = r \operatorname{Sen}\theta, \quad (10.91)$$

de donde se sigue,

$$\begin{aligned} dB_z &= \pi \kappa I a^2 n \frac{1}{r^3} \frac{rd\theta}{\operatorname{Sen}\theta}, \\ &= \pi \kappa I n \operatorname{Sen}\theta d\theta. \end{aligned} \quad (10.92)$$

Para el campo total debemos integrar desde un ángulo θ_1 donde se encuentra el punto $z' = L$ hasta θ_2 donde $z' = 0$, notece que estos ángulos dependen del punto z donde se mida el campo. Así tenemos,

$$B_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB_z = \pi \kappa I n (\operatorname{Cos}\theta_1 - \operatorname{Cos}\theta_2). \quad (10.93)$$

Podemos escribir este resultado en términos de z , tomando el origen en la

mitad de la bobina, utilizando

$$\cos\theta_1 = \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}}. \quad (10.94)$$

Podemos particularizar este resultado para el caso de una bobina infinita tomando $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$, reproduciendo el resultado expresado en la ecuación 10.52.

Como ya debe ser natural, las líneas de campo pueden entenderse de la

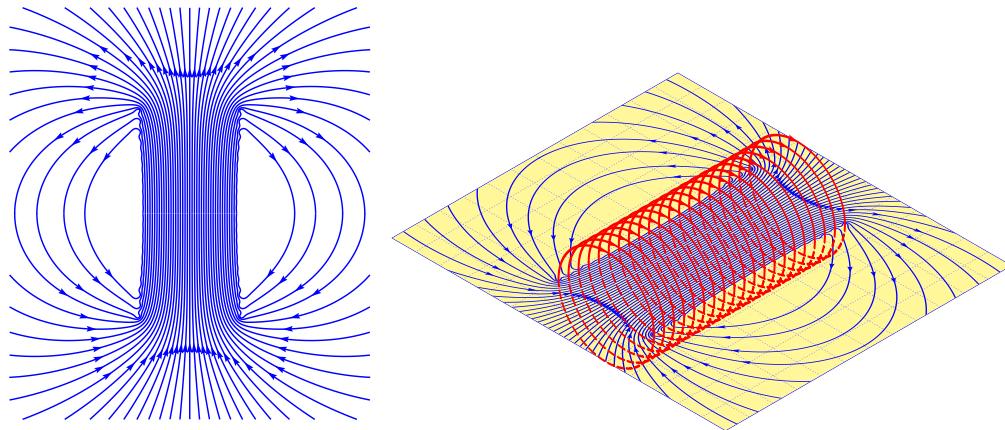


Figura 10.15: Líneas de campo del solenoide. Para la ilustración se utiliza un caso no denso y en la vista 2D eliminamos las espiras, observando que aun así el campo tiene propiedades muy similares. En este caso es una bobina de largo 8 cm, radio 2 cm y con 20 espiras uniformemente espaciadas.

superposición de las líneas de las espiras que la componen. En la figura 10.15 se ilustran las líneas de campo para una bobina. Vemos cómo las líneas de campo se concentran en el interior de la bobina y en la mitad tienen una forma bastante uniforme. En efecto las bobinas además de generar campos magnéticos grandes tienen la propiedad de que estos sean en muy buena aproximación uniforme. Así tenemos el ejemplo de las bobinas de Helmholtz, figura 10.16 un par de espiras separadas una cierta distancia, que logran con gran precisión un campo uniforme en la región media entre estas.

En efecto aun para la bobina finita el campo es casi constante dentro de la bobina, variando sólo cerca de los bordes. Vemos que la no uniformidad viene

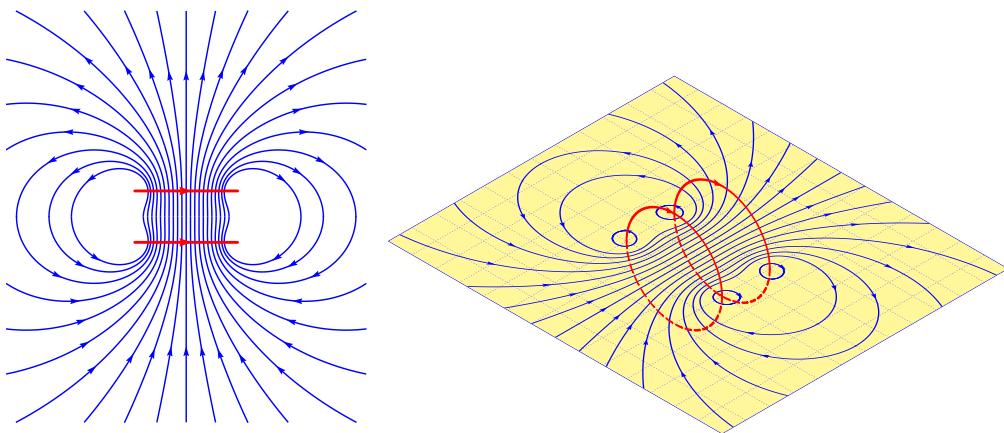


Figura 10.16: Líneas de campo para las bobinas de Helmholtz, dos espiras paralelas con corriente en el mismo sentido y separadas una distancia igual al radio de estas se obtiene un campo en muy buena aproximación homogéneo en la región entre estas.

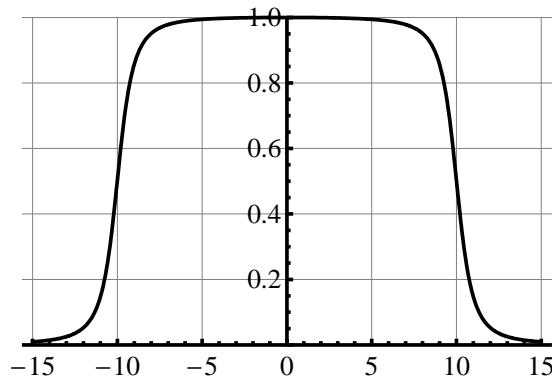
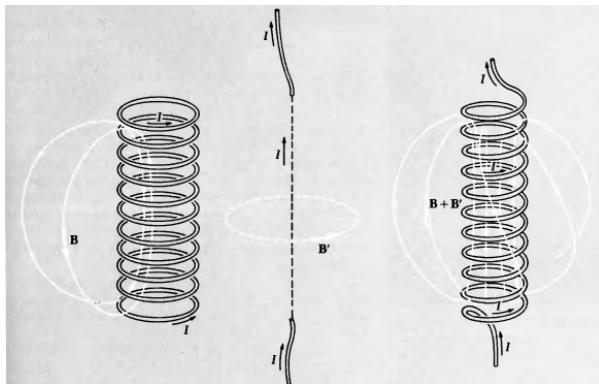


Figura 10.17: Intensidad del campo magnético sobre el eje de la bobina en función del largo. Una intensidad de uno equivale a el campo en el centro $B_z = 2\pi\kappa I n$, con 10 y menos -10 en el largo los bordes de la bobina.

principalmente debido a las líneas de campo que escapan de la bobina y no salen por los extremos, la cuales aparentemente cambian discontinuamente al cruzar la bobina. De forma más detallada las líneas esquivan las espiras que conforman la bobina y cambian de forma continua, pero rápida, al atravesar la pared de la bobina.

Nuestro análisis aunque de muy buena aproximación de hecho tiene una limitación por construcción: para construir la bobina hemos juntado espiras que suponemos paralelas entre estas, de tal forma que todas contribuyen de la misma forma como una espira en el plano sobre su eje. Sin embargo, en una bobina real el enrollamiento se realiza en forma tal que hay cierta componente en el hilo de corriente en la dirección de la bobina. Para tener



una mejor aproximación podemos superponer a nuestro resultado el campo de un hilo de corriente paralelo al eje de la bobina. Dependiendo qué tanto sea esta componente de inclinación de las espiras, esta corriente será más o menos importante en el resultado total.

Ejercicio 10.15. 6.4 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 10.16. 6.17 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 10.17. 6.37 *Berkeley 2da ed.*

10.8. Discontinuidad del campo por una superficie con corriente

Supongamos una placa en el plano zx por la cual circula una corriente $\vec{J} = J\hat{i}$. Si el grosor de la placa es s podemos considerar una densidad superficial de corriente λ_J ,

$$\lambda_J = Js, \quad (10.95)$$

que genera un campo en dirección \hat{k} . Tomando ahora un camino cerrado rectangular que corte la placa perpendicularmente y tenga secciones paralelas

a esta a cada lado, podemos calcular la circulación del campo.

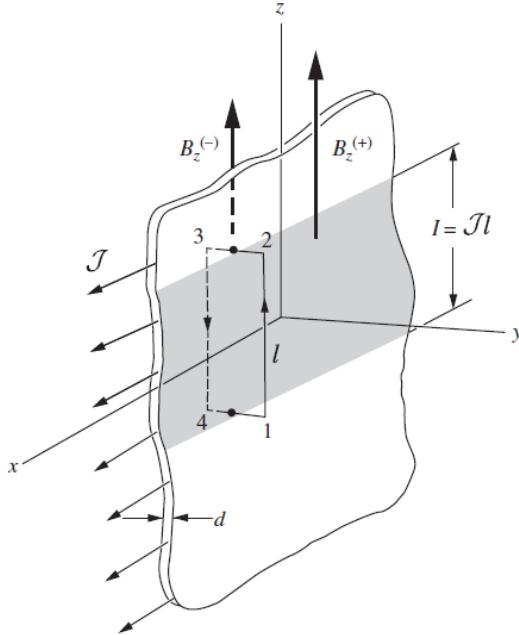


Figura 10.18: Una placa delgada plana con una densidad de corriente. Utilizando la ley de Ampere a lo largo del camino dibujado podemos establecer una relación entre los capos a ambos lados.

La placa en general está sumergida en un campo externo, por lo que puede haber una componente perpendicular a la placa y las secciones perpendiculares del camino pueden contribuir a la circulación. Supongamos que escojemos el camino con secciones perpendiculares a la placa muy cortas, i.e., el camino apenas atraviesa la placa, entonces las contribuciones debidas a estas pueden despreciarse. Además, en las secciones tangenciales se tendrá el campo evaluado justo en la superficie de la placa, que denotaremos como $B_z^{(-)}$ y $B_z^{(+)}$. Así, si la altura del camino es L tenemos que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B B_z^{(+)} dz - \int_C^D B_z^{(-)} dz, \\ = (B_z^{(+)} - B_z^{(-)}) L, \quad (10.96)$$

donde hemos supuesto que L es lo suficientemente pequeño como para ignorar posibles variaciones de B_z y tomarlo constante. La corriente encerrada por

el camino es $\lambda_J L$, así por ley de Ampère tenemos

$$B_z^{(+)} - B_z^{(-)} = 2\pi\kappa\lambda_J . \quad (10.97)$$

Tenemos entonces, que al pasar una corriente superficial el campo sufre una discontinuidad en su componente tangencial a esta y perpendicular a la dirección de la corriente. Esto es análogo al salto sufrido en la componente perpendicular del campo electrostático al cruzar una densidad superficial de carga.

Si el campo es debido sólo a la placa, los campos en ambos lados deben ser identicos por simetría, $B = |B_z^{(+)}| = |B_z^{(-)}|$, y en sentidos opuestos luego

$$B = \pi\kappa\lambda_J . \quad (10.98)$$

Obteniendo así el campo de una placa infinita con corriente uniforme. Este resultado es aun valido para el caso no uniforme pero sólo en puntos muy cercanos a la placa y con la corriente evaluada en el punto donde se mide el campo.

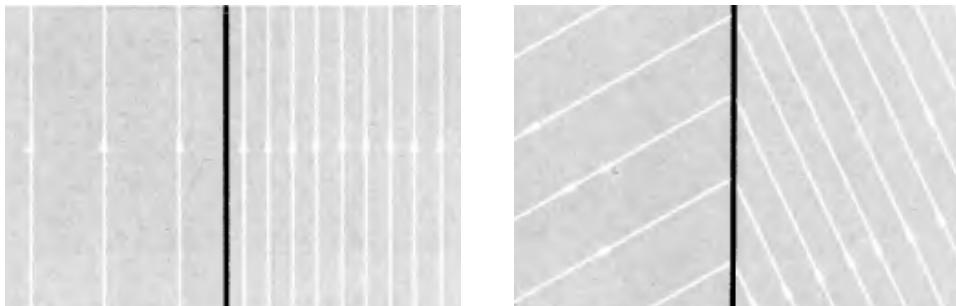


Figura 10.19: Dos posibles situaciones del campo en presencia de una placa con corriente. En la primera el campo externo sólo tiene componente tangencial que se refuerza a un lado de la placa con el campo de la placa y se cancela al otro. En el segundo caso una componente perpendicular es adicionada. Esta o cambia al cruzar la placa, pero la componente tangencial sí.

Ejemplo 10.8.1. Fuerza sobre una placa con corriente

Hemos visto cómo las bobinas presentan un sistema donde el campo magnético es confinado. Esto puede entenderse en general por el sistema base de dos placas con corriente idénticas en sentidos opuestos. Al estar en sentidos opuestos los campos en medio de estas se refuerzan mientras que en las zonas

externas se cancellan, obteniendo campo sólo entre las placas. Este sistema es análogo al de las placas paralelas con cargas opuestas. De la relación para el salto del campo magnético, o simplemente por la superposición de los campos, tenemos que el campo interno es $B = 2\pi\kappa\lambda_J$.

Las corrientes de la placas interactúan entre ellas vía la fuerza de Lorentz generando una fuerza, en este caso atractiva, entre las placas. En general una placa sumergida en un campo experimenta el efecto de

$$\bar{B}_z = \frac{1}{2}(B_z^{(+)} + B_z^{(-)}) = B_{ext,z}, \quad (10.99)$$

que es un promedio de los campos a ambos lados, de modo que substraer el campo de la placa que no puede interactuar con ella misma. La fuerza por unidad de área experimentada por la placa es

$$\frac{dF}{dA} = \frac{1}{2}(B_z^{(+)} + B_z^{(-)})\lambda_J, \quad (10.100)$$

en MKS, para *cgs* debe multiplicarse por el factor $1/c$. Utilizando la discontinuidad en el campo tenemos que esta puede escribirse como

$$\frac{dF}{dA} = \frac{1}{2\mu_0} \left[(B_z^{(+)})^2 - (B_z^{(-)})^2 \right], \quad \text{en MKS}, \quad (10.101)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left[(B_z^{(+)})^2 - (B_z^{(-)})^2 \right], \quad \text{en } cgs. \quad (10.102)$$

El hecho que esto esté asociado con la energía y no con la forma de la placa nos indica que las anteriores consideraciones son en buena aproximación válidas para cualquier superficie, aun con corrientes no uniformes, mientras se tomen los campos muy cercanos a esta. Así, si en la superficie existe una corriente y hay una diferencia de campo (en la componente perpendicular a la corriente y tangencial a superficie) la superficie experimenta una fuerza.

Notemos que este resultado es completamente análogo al de la sección ?? para la placa cargada, donde posteriormente se entendía como el gradiente de densidad de energía entre ambos lados de la placa. De manera análoga podemos identificar la densidad de energía asociada al campo magnético

$$\mathcal{U}_B(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\kappa} |\vec{B}(\vec{r})|^2. \quad (10.103)$$

De manera formal y precisa obtener este resultado debe tener en cuenta que la conformación de un sistema con campos magnéticos implica ir encendiendolo

paulatinamente corrientes, o sea ir más allá del caso estático que estamos trabajando. Aun así el resultado es completamente general, al menos para el caso en el vacío.

Ejercicio 10.18. *6.20 Berkeley 2da ed.*

Capítulo 11

Materiales Magnetizables

11.1. Momento magnético

De manera análoga como en la discusión de los medios materiales eléctricos giraba en torno al dipolo eléctrico acá será el dipolo magnético quien tomará este rol. Así que será importante tener una noción física de qué sistema físico juega este papel en este contexto.

Para iniciar utilizaremos las ideas exploradas en la sección 7.2 pero ahora aplicadas a distribuciones de corriente. Como ya vimos la solución general para el potencial vectorial está dada por (10.68) donde, si parados fuera de la distribución es posible utilizar la expansión (7.11) del término $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$, donde nos centraremos sólo en los dos primeros términos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{\kappa}{2} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') + \frac{\kappa}{2} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int dV' \vec{r}' \vec{J}(\vec{r}'). \quad (11.1)$$

Análogamente a lo sucedido en el sección 7.2 cada uno de estos términos estará asociado a características geométricas de la distribución y representarán los momentos multipolares, en este caso magnéticos, de la distribución.

El término monopolar, $\int dV' \vec{J}(\vec{r}')$, puede mostrarse que es nulo para toda distribución de corriente localizada estática, lo cual concuerda con nuestra discusión alrededor de la ley de Gauss y la ausencia de monopolos fundamentales magnéticos. Ahora bien; para la presente es de interés el término dipolar, que en el caso magnético usualmente se nombra simplemente como

Momento magnético, definido como¹

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{J} dV, \quad (11.2)$$

de modo que la contribución dipolar al potencial queda

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{m}. \quad (11.3)$$

Veamos que efectivamente reproduce el segundo término de la expresión (11.1): remplazando la definición de momento magnético tenemos un doble producto cruz, pero utilizando la identidad vectorial $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B}$ se reduce a

$$\vec{r} \times \vec{r}' \times \vec{J} = (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} - (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r}'. \quad (11.4)$$

Veamos que estos dos términos de hecho son el mismo pero con signos opuestos. Primero notamos que el gradiente de una componente del vector posición es el vector unitario en la componente respectiva. O sea, si $\vec{r} = \sum_i r_i \hat{e}_i$, con el \hat{e}_i los vectores unitarios, entonces $\vec{\nabla} r_i = \hat{e}_i$. Segundo, utilizamos la propiedad del operador diferencial nabla actuando sobre el producto de una función escalar con una vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot (a(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r})) = \vec{\nabla} a(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) + a(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (11.5)$$

En esta última tomamos la función escalar el producto $r_i r_j$ para obtener

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (r_i r_j \vec{J}(\vec{r})) &= r_j \vec{\nabla} r_i \cdot \vec{J}(\vec{r}) + r_i \vec{\nabla} r_j \cdot \vec{J}(\vec{r}) + r_i r_j \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}), \\ &= r_j \hat{e}_i \cdot \vec{J}(\vec{r}) + r_i \hat{e}_j \cdot \vec{J}(\vec{r}), \\ &= r_j J_i(\vec{r}) + r_i J_j(\vec{r}), \end{aligned} \quad (11.6)$$

donde hemos utilizado la condición de estacionariedad $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ para pasar de la primera a la segunda línea. Retomando las coordenadas primadas e integrando sobre todo el espacio, entonces, se sigue que

$$\int dV' r'_j J_i(\vec{r}') = - \int dV' r'_i J_j(\vec{r}') + \int dV' \vec{\nabla}' \cdot (r'_i r'_j \vec{J}(\vec{r}')). \quad (11.7)$$

¹Debo advertir que en este capítulo será prácticamente imposible mantener generalidad en la notación sin unidades. Esto debido a que las definiciones mismas dependerán del sistema que se utilice. Así, por ejemplo, en el sistema *cgs* o Gaussiano el momento se define con un factor extra de $1/c$. El apéndice D de la tercera edición del libro de Purcell hace un paralelo entre las definiciones estándar en cada sistema.

El segundo término de la derecha, sin embargo, por el teorema de la divergencia se puede escribir como

$$\int dV' \vec{\nabla}' \cdot (r'_i r'_j \vec{J}(\vec{r}')) = \oint d\vec{S}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') r'_i r'_j = 0, \quad (11.8)$$

pues suponemos que la distribución de corriente está localizada y, por tanto, en infinito, donde está la superficie, \vec{J} es nula. Demostramos, entonces, que

$$\begin{aligned} \int dV' \left[(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} - (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r}' \right] &= \sum_i r_i \int dV' \left[r'_i \vec{J} - J_i \vec{r}' \right], \\ &= \sum_i r_i \int dV' \sum_j [r'_i J_j - J_i r'_j] \hat{e}_j, \\ &= \sum_i r_i \int dV' 2r'_i \sum_j J_j \hat{e}_j, \\ &= \sum_i r_i \int dV' 2r'_i \vec{J}, \\ &= \int dV' 2(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

que demuestra que efectivamente

$$\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{m} = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int dV' \vec{r}' \vec{J}(\vec{r}'). \quad (11.10)$$

Ejemplo 11.1.1. Momento de una espira con corriente

Aunque en términos generales, en cuanto al campo magnético respecta, el momento dipolar magnético es completamente análogo al momento dipolar eléctrico para el campo eléctrico. Aun así, para tener una noción más clara de cómo entenderlo físicamente es conveniente que lo evaluemos en un caso particular, que de hecho será el sistema ejemplar para el momento magnético, la espira con corriente.

Para esto utilizamos primero la relación $Id\vec{l} = \vec{J}dV$ que ya hemos usado previamente, así que para un circuito arbitrario el momento magnético queda expresado como

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint \vec{r} \times d\vec{l}. \quad (11.11)$$

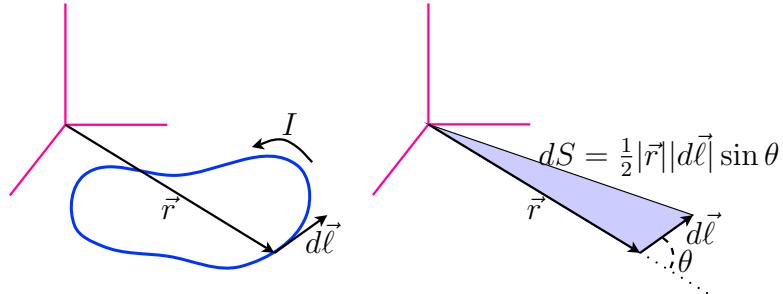


Figura 11.1: Espira con corriente a la izquierda y visualización de la magnitud del producto cruz que puede, como es usual, asociarse a un área.

Sin embargo, para efectos de visualizar el momento magnético consideraremos que el circuito es una espira plana. Ahora bien; para facilitar los siguientes argumentos escogemos el origen de coordenadas en este mismo plano. Lo que se sigue es que el producto cruz al interior de la integral (11.11) es, en magnitud, el área barrida por el radio vector al trasladarse un $d\vec{\ell}$, i.e.,

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r}||d\vec{\ell}| \sin \theta = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{\ell}|. \quad (11.12)$$

Por otro lado, la dirección del vector resultante, por como hemos tomado el origen es siempre normal al plano en el que está contenida la espira. En el extremo lejano de la espira esta es recorrida en el sentido antihorario, mientras que en el extremo cercano el radio vector se desplaza en el sentido horario, lo implica una resta que deja como resultado neto sólo el área de la espira, tanto en magnitud como dirección.

Este resultado es, de hecho, independiente de donde se tome el origen de coordenadas², así que

$$\frac{1}{2} \oint_{\text{Espira}} \vec{r} \times d\vec{\ell} = \int_{\text{Sector encerrado}} d\vec{S} = \vec{S}_{\text{Área encerrada}}. \quad (11.13)$$

De esto se sigue que

$$\vec{m} = I \vec{S}_{\text{Área encerrada}}. \quad (11.14)$$

Leemos de esta, que el momento dipolar es un vector normal al plano de la espira, más precisamente apuntando según la regla de la mano derecha

²Para una ilustración de este hecho mirar la sección 11.3 de Purcell 2ed., o 5.4.3 de Griffiths

con la mano cerrandose en la dirección de la corriente, y con magnitud un medio del producto de la corrienteárea con el área encerrada por esta. Esto dos hechos nos permitiran pronto entender la interacción de un dipolo con el campo magnético.

Ejercicio 11.1. 11.7 *Berkeley 2da ed.*

11.1.1. Campo de un dipolo puntual

De la expresión para el potencial vectorial para el dipolo puntual podemos encontrar la expresión para el campo magnético. Para esto tomaremos el momento en el eje z , $\vec{m} = m\hat{k}$, encontrando:

$$\vec{A} = \frac{\kappa m}{2r^3} \left(-y\hat{i} + x\hat{j} \right). \quad (11.15)$$

De este, evaluando su rotacional

$$\vec{B} = \frac{\kappa m}{2r^5} \left[3xz\hat{i} + 3yz\hat{j} + (3z^2 - r^2)\hat{k} \right]. \quad (11.16)$$

Para dibujar las líneas de campo conviene tomar uno de los planos y coordenadas polares. En el plano yz esto queda

$$\vec{B} = \frac{\kappa m}{2r^3} \left[3\sin\theta\cos\theta\hat{i} + (3\cos^2\theta - 1)\hat{k} \right]. \quad (11.17)$$

Algo interesante para notar es que tiene exactamente la misma forma del campo para el dipolo eléctrico puntual, ecuación (7.7). Esto implica que el campo magnético de medios magnetizados serán idénticos al campo eléctrico generado por una distribución de materia polarizada eléctricamente equivalente. Por ejemplo, el ejemplo 7.4.1 determina el campo de una esfera polarizada uniformemente, mostrando que en el interior es un campo uniforme y en el exterior resulta como el de un dipolo puntual situado en el centro de la esfera. Resolvimos así, entonces, simultáneamente el campo generado por una esfera uniformemente magnetizada, imán permanente, con forma esférica.

Esto también implica que para medios con magnetización permanente debe ser posible aplicar técnicas que involucren un potencial escalar magnético, pero esto es algo fuera de los objetivos de este curso.

Ejercicio 11.2. 11.4 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 11.3. 11.5 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 11.4. 11.23 *Berkeley 2da ed.*

11.1.2. Interacción entre el campo y un dipolo magnético

De nuevo el resultado será equivalente que con los dipolos eléctricos y el campo eléctrico. Sin embargo, será interesante ver cómo esto surge teniendo el modelo de la espira con corriente.

Para ilustrar el resultado general supondremos un caso particular: Consideraremos una espira circular en el plano xy con una corriente I , sumergida en un campo magnético no uniforme que disminuye en magnitud a medida que aumenta la altura pero con una simetría axial. El eje de la espira coincide con el eje de simetría del campo, como se muestra en la figura 11.2,. Pensando en el campo como la superposición de dos campos, uno vertical y otro radial, vemos que el primero no contribuye a fuerza neta alguna sobre el anillo, pues sobre cada elemento de este genera una fuerza radial que finalmente se cancela. Por el otro lado, la componente radial genera sobre cada elemento

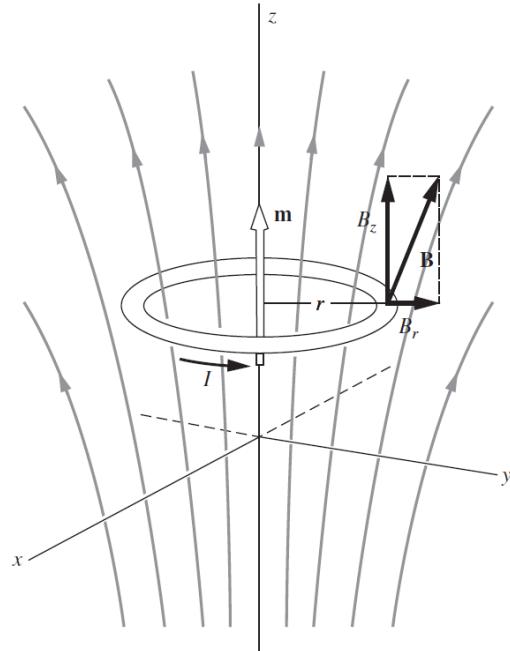


Figura 11.2: Espira circular con corriente en un campo no uniforme pero con una simetría axial. La espira está centrada en el eje de simetría.

del anillo una fuerza dirigida hacia abajo. Suponiendo que el eje de simetría del anillo y del campo coinciden, es decir que el campo sobre todo el anillo

es el mismo, se sigue que la fuerza sobre cada elemento del anillo es igual y la fuerza total, que resulta de la integral, resulta de multiplicar la fuerza por unidad de longitud por la longitud total del anillo. La fuerza por unidad de longitud está dada por,

$$\frac{dF}{d\ell} = IB_r, \quad (11.18)$$

donde hemos considerado que la corriente es perpendicular al campo y consideramos unidade MKS³, y la fuerza total sobre el anillo da

$$\vec{F} = -2\pi aIB_r \hat{k}. \quad (11.19)$$

Lo interesante aparece al entender que la componente radial del campo puede asociarse directamente a la variación del campo. Tomando un cilindro de

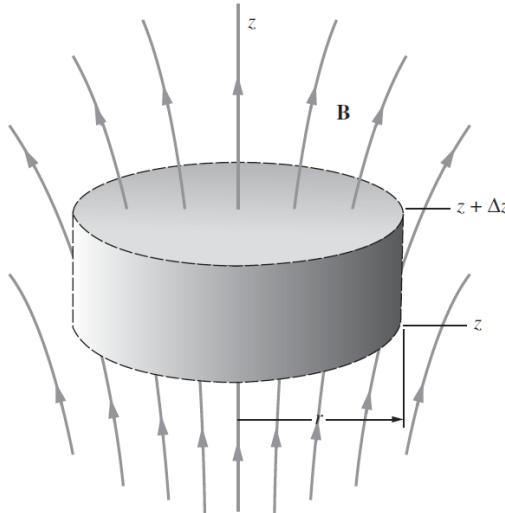


Figura 11.3: Superficie gaussiana cilíndrica con eje de simetría coincidiendo con el eje de simetría del campo no uniforme.

altura diferencial Δz y radio r centrado en el eje de simetría del anillo, tenemos que el flujo a través de la superficie del cilindro está dado por

$$\Phi = 2\pi r \Delta z B_r(r) + \pi r^2 [B_z(z + \Delta z) - B_z(z)], \quad (11.20)$$

pero de la ley de Gauss este debe ser nulo, o sea

$$B_r(r) = -\frac{r}{2} \frac{B_z(z + \Delta z) - B_z(z)}{\Delta z}. \quad (11.21)$$

³En cgs está el factor $1/c$.

Notamos, efectivamente, que el aparece la derivada al tomar $\Delta z \rightarrow 0$, así

$$B_r(r) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (11.22)$$

De este resultado podemos escribir la fuerza sobre el anillo como

$$F = \pi a^2 I \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (11.23)$$

Pero reconocemos la magnitud del momento magnético de la espira $\vec{m} = \pi a^2 I \hat{k}$, de modo que

$$F = m \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (11.24)$$

Concluimos que se presenta una fuerza sólo si el campo es no uniforme y esta fuerza es proporcional a la magnitud del momento magnético. En términos del dipolo eléctrico esto se entendería por el hecho que un campo eléctrico uniforme atrae con igual intensidad la parte positiva y la negativa, pero en direcciones opuestas de modo que la fuerza neta es cero. Además, la fuerza se dirige en la dirección en que aumenta el campo si el momento magnético es paralelo al campo, pensando en la dirección del campo en el eje del anillo⁴, y en sentido opuesto a este si son antiparalelo. Esto nos indica que, en general, debe aparecer un producto punto entre el campo y el momento magnético, lo que entregaría para nuestro caso

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (\vec{m} \cdot \vec{B}), \quad (11.25)$$

donde hemos incluido explícitamente la componente encontrada para la fuerza. Con estos indicios tenemos razones para generalizar lo encontrado a

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (11.26)$$

Esta expresión nos muestra cómo, aun si el campo magnético no puede realizar trabajo sobre corrientes, puede hacerlo sobre elementos con momentos magnéticos constantes, como es el caso de los imanes.

Un resultado extra que se puede inferir de este, es una energía asociada a

⁴Recordemos que el momento dipolar es sólo la primera aproximación de una serie y que se torna exacta sólo en el límite de una espira de tamaño puntual.

la interacción. Pensando en $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, tenemos una energía de interacción dada por

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}, \quad (11.27)$$

que nos indica, análogo a lo sucedido con los dipolos eléctricos, que estos se linearán al campo buscando minimizar la energía.

Es importante notar, sin embargo, que en gran variedad de casos el momento magnético no es independiente del campo. Por ejemplo, una carga en movimiento, al entrar en una región con campo magnético experimentará una fuerza que producirá una movimiento circular tal que, independiente del signo de la carga, genera un momento magnético antiparalelo al campo. Esto implica que la partícula finalmente experimente una fuerza dirigida hacia regiones donde el campo magnético sea menos intenso, pues $U \propto |\vec{B}|^2$. Este truco se aprovecha en las denominadas trampas magnéticas.

Ejercicio 11.5. 11.9 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 11.6. 11.12 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 11.7. 11.15 *Berkeley 2da ed.*

Ejercicio 11.8. 11.16 *Berkeley 2da ed.* Hay que tener presente un error en el enunciado corregido en versiones más recientes. La magnetización es, de hecho, $M = 7,5 \times 10^5 \text{ A/m}$

Ejercicio 11.9. 11.18 *Berkeley 2da ed.*

11.2. Magnetización

El análogo para la polarización en el caso de los medios magnéticos es la magnetización. En este caso tenemos que se define como una densidad de momentos dipolares magnéticos por unidad de volumen, la cual se debe entender como un promedio sobre un volumen pequeño, pero suficientemente grande como para tomar el promedio:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{d\vec{m}}{dV} = \sum_i N_i \langle \vec{m}_i \rangle, \quad (11.28)$$

con N_i una densidad de partículas del tipo i con momento promedio $\langle \vec{m}_i \rangle$ en el volumen de estudio. Como se ilustra en la figura 11.4 se consideran ahora

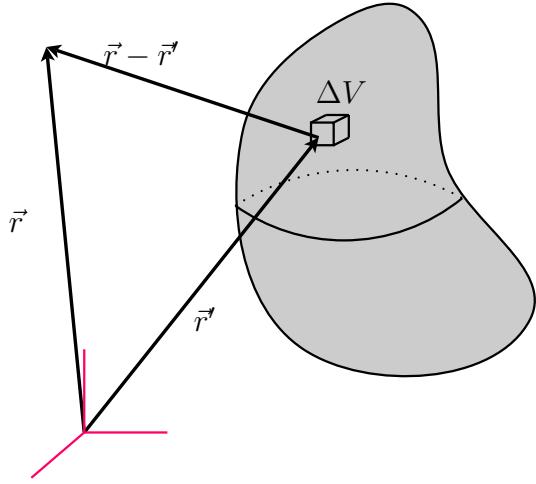


Figura 11.4: Una distribución de carga continua es dividida en contribuciones infinitesimales de carga, con posiciones dadas por el vector \vec{r}' . Cada elemento ΔV se considera suficientemente pequeño para que su contribución sea el de un dipolo puntual.

elementos volumétricos suficientemente pequeños para considerar contribución como la de un dipolo puntual de magnitud $d\vec{m}$, y la cual conocemos. Esta, se puede escribir en términos de la magnetización como sigue:

$$d\vec{A} = \frac{\kappa}{2} \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \kappa \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (11.29)$$

El potencial vectorial total, como ya debe ser usual, es la superposición lineal de las contribuciones individuales,

$$\vec{A} = \frac{\kappa}{2} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (11.30)$$

11.3. Corrientes de Magnetización

Como concluimos en el capítulo anterior los campos magnéticos son generados por corrientes. Siguiendo esta idea reescribamos las ecuaciones hasta ahora desarrolladas e identifiquemos el análogo de las cargas ligadas para los materiales eléctricos. Nuevamente partiendo de

$$\vec{\nabla}' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (11.31)$$

y las identidades vectoriales

$$\vec{a} \times \vec{\nabla}' b = -\vec{\nabla}' \times (b\vec{a}) + b\vec{\nabla}' \times \vec{a}, \quad (11.32)$$

y

$$\int_V \vec{\nabla}' \times \vec{a} dV = \oint_{\partial V} d\vec{S} \times \vec{a}, \quad (11.33)$$

se sigue el potencial vectorial generado por un medio magnetizado, ecuación (11.30), puede escribirse como

$$\vec{A} = \frac{\kappa}{2} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\kappa}{2} \int \frac{\vec{M} \times \hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{S}. \quad (11.34)$$

Vemos, entonces, que podemos interpretar los integrando como debidos a unas densidades de corriente volumétricas y superficiales, definidas por:

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla}' \times \vec{M}, \quad (11.35)$$

$$\vec{\lambda}_M = \vec{M} \times \hat{n}, \quad (11.36)$$

que denominaremos densidades de corriente ligada.

11.4. Ecuaciones de Campo

De la ley de Ampere con el hecho que las corrientes son fuente del campo magnético \vec{B} , incluimos las corrientes ligadas, distinguiéndola de la libre \vec{J}_{Libre} sobre la que tenemos en principio completo control:

$$\vec{\nabla}' \times \vec{B} = 2\pi\kappa \left(\vec{J}_{\text{Libre}} + \vec{J}_{\text{Lig}} \right), \quad (11.37)$$

$$= 2\pi\kappa \left(\vec{J}_{\text{Libre}} + \vec{\nabla}' \times \vec{M} \right), \quad (11.38)$$

donde hemos utilizado la definición (11.35). Ahora bien; la magnetización es en sí dependiente de la densidad de corriente libre, por lo que conviene dejar todo expresado como una función de esta. Como tenemos dos campos por solucionar, \vec{B} y \vec{M} , podemos simplemente definir el campo intensidad magnética:⁵

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{2\pi\kappa} \vec{B} - \vec{M}, \quad (11.39)$$

tal que:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{Libre}}}, \quad (11.40)$$

que es la ley de Ampere en presencia de medios magnéticos e indica que las fuentes de campo intensidad magnéticas son las corrientes libres. Tal y como sucedía con el campo vector desplazamiento el campo \vec{H} generado por una corriente libre en presencia de un medio magnético es como el campo \vec{B} que resultaría si no estuviera el medio.

Ley de Ampere, o en su forma integral:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{Libre Enc. por } \Gamma}. \quad (11.41)$$

Como en el caso de medios eléctricos necesitamos una relación entre \vec{B} y \vec{H} para solucionar. La siguiente tabla resume las ecuaciones para electro y magnetostática en presencia de medios materiales.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi k\rho_e$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 2\pi\kappa\vec{J}_e$

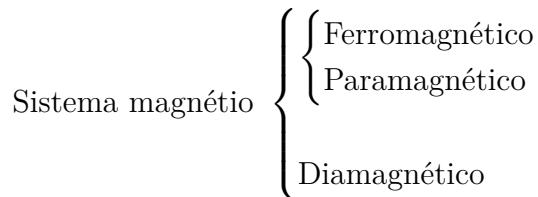
Cuadro 11.1: Ecuaciones estáticas de Maxwell en presencia de medios materiales en forma diferencial. $k = 1$ y $\kappa = 2/c$ en *cgs*, mientras $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ y $\kappa = \mu_0/(2\pi)$ en *MKS*.

Cabe mencionar que al igual que con el campo magnético la interacción se sigue dando es con el campo magnético \vec{B} , no con \vec{H} , así que la fuerza de Lorentz, ecuación (10.11), sigue siendo válida en medios materiales. De hecho es la definición de los campos eléctricos y magnéticos.

⁵Debo advertir que distintos sistemas de unidades e incluso distintos textos definen el campo intensidad magnética con distintos factores numéricos.

11.5. Medios magnéticos

Existen tres evidencias experimentales de interés para comprender la naturaleza de los materiales magnéticos. La primera es que, contrario a lo que sucede con los materiales eléctricos, hay dos comportamientos completamente opuestos: atracción y repulsión. Los materiales que se ven repelidos se conocen como diamagnetos, mientras que los que se ven atraídos entran en dos categorías: los paramagnétos y los ferromagnéticos. La segunda observación es la intensidad con la que decrece dicha interacción: por un lado se observan materiales sobre los cuales la fuerza decrece como el gradiente del módulo al cuadrado del campo magnético, mientras que en otros sólo como la variación del campo; en estos últimos, los ferromagnetos, además, la intensidad de la interacción es mucho mayor fácilmente evidenciable, mientras que para los paramagnetos y diamagnetos la interacción en general es extremadamente débil. Este último detalle explica el por qué la repulsión magnética, que de hecho es más común, sólo se vino a descubrir a mediados del siglo XIX, como era de esperarse, por Faraday.⁶ Para un pequeño recuento histórico ver el capítulo ocho del libro [Michael Faraday: un genio de la física experimental](#) del fondo de la cultura económica 2003, y en más detalle en [John Tyndall and the Early History of Diamagnetism](#) por Roland Jackson, *Annals of Science*, Vol. 72, 2015. Hemos, entonces, dividido los materiales de la siguiente forma



Todas estas características se entienden fenomenológicamente por medio de cómo se induce una magnetización en los materiales.

Diamagnetismo

En este tipo de materiales la magnetización inducida es opuesta al campo magnético externo. Además, cómo formalizaremos matemáticamente más

⁶Se sabe, que tal efecto se había notado en algunos materiales. Dependiendo de la fuente se indica que fue primero, en el año 1778, el holandes Anton Brugmans quién reportó repulsión magnética en el bismuto. Mientras que otras reportan a su hijo Sebald Justinus Brugmans, quien en 1793 lo hiciera para el bismuto y el antimonio.

adelante, la magnitud esta magnetización es proporcional al campo, por tanto, $\vec{M} \propto -\vec{B}$ y

$$\vec{M} \cdot \vec{B} \propto -|\vec{B}|^2. \quad (11.42)$$

De la expresión (11.26), considerando la magnetización como el efecto conjunto de los momento magnéticos tenemos que en este caso la fuerza será en la dirección opuesta e igual en magnitud al gradiente de $-|\vec{B}|^2$.

Aunque por el momento no tenemos las herramientas necesarias para comprender el siguiente hecho es posible mostrar que el comportamiento diamagnético es universal en la materia.⁷ De modo que si un material se dice para o ferromagnético es debido a que en estos casos específicos estos efectos son superiores. Incluso ya en la época de Faraday se sabía que a las propiedades para y ferromagnéticas se podían perder luego de cierta temperatura, momento en el que se revela el diamagnetismo.

Como referencia se listan algunos materiales diamagnéticos en la tabla 11.2. De esta debe ser claro que se debe, de una vez por todas, evitar el pensamiento común que los metales necesariamente son atraídos por los imanes. En particular tenemos que los cuatro primeros elementos reportados corresponden a metales diamagnéticos. También el hecho que un mismo elemento puede variar su comportamiento magnético dependiendo de cómo se arreglen sus átomos, como se observa con el carbono. Finalmente, el hecho que el agua sea diamagnética, explica porque todos los seres vivos también lo somos.

Un dato importante para cerrar es el hecho que los materiales que presentan un diamagnetismo prácticamente perfecto son los materiales superconductores, con los que se logran maravillas como la **levitación magnética** con campos magnéticos relativamente pequeños.

11.5.1. Paramagnetismo

El comportamiento paramagnético aunque más cercano al sentido común tampoco corresponde a lo que usualmente experimentamos como la atracción magnética. En este caso la magnetización es proporcional al campo magnético $\vec{M} \propto \vec{B}$ y

$$\vec{M} \cdot \vec{B} \propto |\vec{B}|^2, \quad (11.43)$$

de donde se sigue que este tipo de materiales experimentan una fuerza en la dirección en que el campo aumenta, pero al igual que con el diamagnetismo

⁷Entender este hecho requiere utilizar la ley de Faraday que exploraremos en el siguiente capítulo.

Material	Susceptibilidad magnética volumétrica $\times 10^{-5}$
Bismuto	-16,6
Mercurio	-2,9
Plata	-2,6
Cobre	-1,0
Carbón (grafito)	-1,6
Carbón (diamante)	-2,1
Carbón politrópico	-40,9
Agua	-0,91

Cuadro 11.2: Algunos materiales diamagnéticos y su susceptibilidad magnética a temperatura de 20°C fuente [Wikipedia](#). Información más completa e interactiva en www.schoolmykids.com. Una tabla bastante completa, ahora para la susceptibilidad molar, la encuentran en [este documento](#).

disminuye rápidamente con la distancia.

En este caso las propiedades magnéticas se deben principalmente a que cada electrón en sí se comporta como un dipolo puntual magnético.⁸ Sin embargo, en general, estos se arreglan en los orbitales atómicos en pares con momentos opuestos que se cancelan. Pero en caso que el último orbital presente electrones sin aparear esto se refleja como un momento magnético total para el átomo o material en cuestión. El efecto neto en el material entonces dependerá de cómo estos momentos individuales se alineen para generar una magnetización neta, lo cual dependerá fuertemente de la temperatura. Así, para temperaturas bajas es posible incluso que se presente una magnetización espontánea, o sea en ausencia de campo externo. Este es un excelente ejemplo de lo que se conoce como transición de fase: en este caso el material pasa de una fase en orden a una en desorden luego de una temperatura característica, tal como lo hace el agua en sus temperaturas de fusión y evaporación.

La tabla 11.3 muestra algunos elementos químicos paramagnéticos entre los

⁸De manera precisa resulta que también los protones, e ¡incluso los neutrones!, pero no serán de importancia para nuestra discusión.

Material	Susceptibilidad magnética volumétrica $\times 10^{-5}$ (MKS)
Sodio	0,72
Magnesio	1,2
Litio	1,4
Aluminio	2,2
Cesio	5,1
Tugsteno	6,8

Cuadro 11.3: Algunos materiales parasimpático y su susceptibilidad magnética a temperadura de 20°C fuente [Wikipedia](#). Información más completa e interactiva en www.schoolmykids.com. Una tabla bastante completa, ahora para la susceptibilidad molar, la encuentran en [este documento](#).

que se encuentra el aluminio, que difícilmente refleja alguna interacción con un imán. Esto muestra cómo la magnitud de interacción es equivalente a la de los materiales diamagnéticos.

11.5.2. Ferromagnetismo

Si se tienen electrones sin aparear, como en el paramagnetismo, pero la interacción entre los electrones es más intensa se presenta el fenómeno de ferromagnetismo. En este tipo de materiales se presentan regiones, denominadas dominios, donde existe una magnetización neta espontánea, pero a nivel global en general la dirección de las magnetizaciones de distintos dominios es aleatoria y por tanto no hay un efecto neto total. Cualquier campo externo, sin embargo, genera orden y efectos dramáticos. En este caso no hay una razón de proporcionalidad entre la magnetización y el campo, e incluso se presenta el fenómeno de un remanente en la magnetización una vez el campo se hace nulo de nuevo. También, una saturación: luego de cierto valor del campo la magnetización deja de aumentar. Esto se ve reflejado en la denominada curva de histeresis (del grigo retrazo), ilustrada en la figura 11.5. Aun entre los ferromagnéticos es posible hacer una subdivisión en lo que se denominan como los ferromagnéticos duros, que de manera común se co-

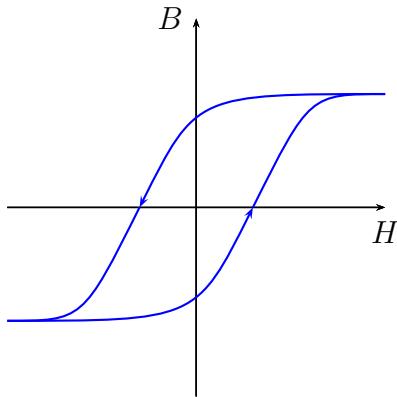


Figura 11.5: Curva de histéresis.

nocen como los imanes permanentes. En estos últimos la magnetización es prácticamente independiente a las condiciones externas, aunque para temperaturas superiores a la denominada temperatura de Curie, característica de cada material, la magnetización se pierde.

Algunos materiales ferromagnéticos son: Cobalto, Hierro, Níquel, Gadolinio, Disprosio, Aleaciones de hierro, Algunos óxidos. Para estos no se asocia una susceptibilidad magnética, como quedará más claro en la siguiente sección. Similar al ferromagnetismo se tienen los materiales ferrimagnéticos y antiferromagnetismo, presentadas, por ejemplo, por óxidos y aleaciones del hierro, pero de las cuales no se discutirá.

11.5.3. Materiales lineales

Aunque en la sección anterior relacionábamos la magnetización inducida con el campo magnético resulta estándar hacerlo en términos de la intensidad de campo magnético, en parte debido a que este prácticamente es ajeno a la presencia del material magnético. Con materiales lineales, entonces, nos referimos a medios para los cuales la magnetización resulta como una función lineal de la intensidad de campo magnético, y esta relación está dictada por la susceptibilidad magnética χ_m :

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}, \quad (11.44)$$

de una manera análoga a la relación $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$, y de donde se sigue una discusión equivalente a la dada para susceptibilidad eléctrica. Definimos también

la permeabilidad magnética, μ y la permeabilidad relativa μ_r :

$$\mu \equiv (1 + \chi_m)4\pi\kappa = (1 + \chi_m)\mu_0 = \mu_r\mu_0, \quad (11.45)$$

tal que:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}. \quad (11.46)$$

Con estas definiciones podemos precisar en la definición de los materiales diamagnéticos y paramagnéticos:

Diamagnetismo	$\mu < \mu_0$	$\chi_m < 0$	$\vec{M} \sim -\vec{H}$
Paramagnetismo	$\mu > \mu_0$	$\chi_m > 0$	$\vec{M} \sim \vec{H}$

O sea, en los materiales diamagnéticos la magnetización es opuesta al campo intensidad magnética en dicho punto, mientras que para los paramagnétos apunta en la misma dirección. Notemos que aunque la susceptibilidad magnética puede ser negativa no puede tomar arbitrarios. De hecho el mínimo valor que puede tomar la permeabilidad magnética es cero. Este caso extremo corresponde a un diamagnéto perfecto, como es el caso de los superconductores, estado en el cual el campo magnético interno es nulo $\vec{B} = 0$. Se tiene, en general, que los diamagnetos expulsan las líneas de campo magnético, debilitandolo en su interior, mientras que los paramagnetos las intensifican en su interior.

En general la relación $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ es compleja, como lo revela la figura de histéresis para los ferromagnetos 11.5. Aun así, al menos para variaciones pequeñas de los campos, es posible identificar puntos alrededor de los cuales la relación sea lineal aproximadamente. Por ejemplo campos pequeños en el caso de la histeresis, y definir $\mu(H) = \frac{dB}{dH}$, permeabilidad incremental, asumiendo \vec{B} y \vec{H} paralelos.

Ejercicio 11.10. 11.3 *Berkeley 2da ed.* **Nota:** Utilizar unidades internacionales para el cálculo.

11.6. Condiciones de interfaz

De manera análoga a como hicimos con los campos eléctricos alrededor de una interfaz tomamos un pequeño cilindro y un camino cerrado para evaluar el flujo y la circulación que dependerán de los campos a ambos lados

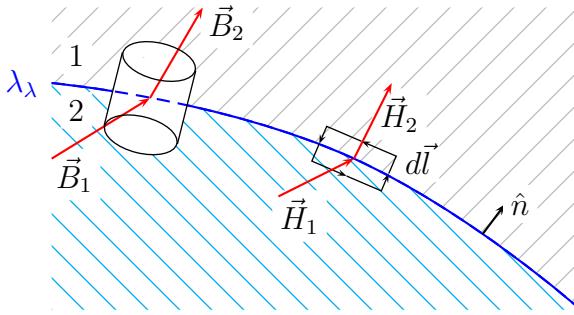


Figura 11.6: En la interfaz entre los medios 1 y 2, caracterizada por el vector normal \hat{n} , imaginamos un cilindro pequeño y con sus tapas prácticamente pegadas a la interfaz, y un circuito pequeño y con secciones tangenciales a la interfaz. Por la interfaz circula una corriente superficial libre λ_ℓ .

y dictan una relación entre estos. Para el cilindro, 11.6, de la ley de Gauss, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, tomando una superficie con tapas pegada a la superficie y suficientemente pequeñas para considerar la sección de interfaz plana y el campo prácticamente constante:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} \Big|_S = 0, \quad (11.47)$$

pues, al ser la pared de tamaño nulo las componentes tangenciales a la interfaz no contribuyen al flujo, y por tanto la componente normal de \vec{B} es continua. De Ampere $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{E.n.c.por \Gamma}$, tomando el circuito de la figura 11.6, como las secciones de las trayectorias normales a la interfaz son prácticamente nulas sólo contribuyen la parte tangencial, que al ser pequeña también puede considerar los campos constantes:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot d\vec{l} = i_{\ell.Enc}, \quad (11.48)$$

que se puede expresar de manera vectorial como:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\lambda}_\ell. \quad (11.49)$$

Esta dice que la componente tangencial de \vec{H} es discontinua en la dirección perpendicular a la corriente superficial. Escrito de manera más clara:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_{||} = \lambda_\ell, \quad (11.50)$$

en la dirección perpendicular a $\vec{\lambda}_\ell$.

En el caso particular en que tenemos una interfaz entre materiales lineales y en ausencia de corrientes libres se sigue:

$$\mu_1 \vec{H}_{1\perp} = \mu_2 \vec{H}_{2\perp} \quad \text{y} \quad \vec{H}_{1\parallel} = \vec{H}_{2\parallel}. \quad (11.51)$$

De modo que si $\mu_1 \gg \mu_2$ el campo en la región μ_2 es casi totalmente normal, como se ilustra en la figura 11.7.

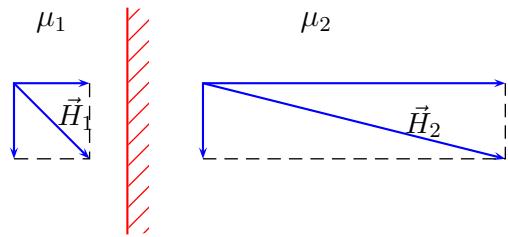


Figura 11.7: Interfaz entre los materiales con $\mu_1 \gg \mu_2$ en ausencia de corrientes. La componente tangencial es continua mientras que la normal se ve aumentada en la región 2.

Para una diamagneto perfecto, $\mu = 0$, el campo \vec{H} exterior es tangencial a la superficie.

Para paramagneto perfecto $\mu \rightarrow \infty$ es el interior en el que \vec{H} resulta tangencial.

11.7. Sobre las unidades

Reparando brevemente en las dimensiones notamos que el momento magnético tiene unidades de corriente por área y, por tanto, la magnetización tendrá unidades de corriente por unidad de longitud:

$$[\vec{M}] = \frac{A}{m} (\text{MKS}) = \frac{\text{StatAmpere}}{cm} (\text{esu}), \quad (11.52)$$

que además, de la relación (11.39), son las mismas unidades para la intensidad magnética. En cgs resulta que se introducen nuevas unidades (de $\kappa = 2/c$)

$$[\vec{M}] = [\vec{H}] = \frac{cm \cdot \text{Gauss}}{s} \equiv \text{Oersted (Oe)}. \quad (11.53)$$

La susceptibilidad magnética no tiene unidades en ninguno de los casos según nuestra definición, aunque en ocasiones se suele encontrar su valor por unidad de masa o molar y no sólo volumétrica como en nuestro caso. La permeabilidad magnética coincide en unidades con la permeabilidad del vacío. Para más información consultar el apéndice del libro *Classical electrodynamics* de John David Jackson, los apéndices C y D de la tercera edición del libro de electricidad y magnetismo de Purcell o la infografía en el siguiente [enlace](#).

Apéndice A

Guía práctica para abordar un problema

Tal vez el mayor error de la mayoría de los estudiantes es su forma de estudiar y la forma como atacan los problemas prácticos, aunque simplificados, que son propuestos en el curso. Esto no es culpa únicamente del estudiantes sino del profesor y del sistema lineal de nuestra educación, que para empezar tiene un límite de tiempo corto que además es el mismo para todos. Tal vez sea para preparar a los próximos profesionales a un sistema igual de salvaje como lo es el laboral donde la situación funciona de la misma forma, pero no propende en potenciar su capacidad creativa y científica. La ciencia, aunque sumergida en este mismo sistema, cuando realmente funciona no tiene un trasfondo competitivo ni temporal. La creación funciona mejor en ambientes donde la imaginación se siente realmente libre de crear y descubrir.

Sin embargo, es útil que todo estudiante que haya optado por seguir este tipo de educación sepa hacerlo de la forma más cómoda posible para su mente y cuerpo. Estas son una serie de ideas que estoy recopilando tratando de guiar a algunos, seguramente no todos, en el desarrollo de ejercicios. Digo que no a todos pues cada uno tiene su forma de estudiar, y entre más rápido encuentre esa forma que no es copiada de ningún otro mejor funcionará el cerebro.

A.1. Equipo de trabajo

Para empezar algo que creo es fundamental al momento de trabajar es un equipo. Un buen equipo de trabajo no sólo combina las fortalezas de cada uno de sus miembros sino que ayuda en la autocorrección. En efecto es mucho más fácil engañarse a uno mismo con argumentos falsos que a otro con los mismos argumentos. Son las discusiones de equipo las que enriquecen y pulen las ideas, además la revisión de un resultado final a entregar (en lo que se conoce como proofreading) asegura una presentación más clara y sólida. Cuando me refiero a un equipo es precisamente eso, NO a un grupo con presidente (el más pilo), ayudante (mejor amigo del pilo y que se encarga de hablar con el resto), secretario (el que sólo toma apuntes), el de letra bonita (que se encarga de pasar a limpio para entregar). En este tipo de grupos todos creen que le deben la vida al tipo que hace rápido los ejercicios y este cree que los demás son un estorbo. En un equipo se entiende que cada uno de los miembros tiene algo que aportar en cada una de las etapas del trabajo. Es cierto que hay gente que logra entender más rápido los ejercicios y otro que lo hacen más rápido. Pero recordemos que la cuestión no es hacerlo rápidos sino bien, e incluso, si se encuentra una forma alternativa de hacerlo mucho mejor. Por esto recomiendo una discusión constante entre los miembros del grupo. Por eficiencia a veces es conveniente dividir el trabajo, pero esto no implica que cada parte delegada sea hecha en aislamiento y sin ayuda. Cada miembro debe valorar los comentarios del otro y buscar estos comentarios. Recuerden que al final su trabajo aparece acreditado por todos los miembros del grupo, así que cualquier error en este es un error colectivo, no individual.

Las discusiones en grupo no sólo permiten mejorar el trabajo a presentar sino que pulen las ideas generales alrededor del problema. Un ejercicio esencial en las ciencias es el de comunicar y sólo cuando uno es capaz de comunicar una idea de forma clara y comprensible puede estar seguro que domina la idea, y que tal vez además sepa aplicarla. Aprovechen además las discusiones en grupo cerrado para ser corregido, algo mucho más cómodo entre amigos que en un examen o prueba.

A.2. Lea bien y comprenda el problema

Lamentablemente algo que se valora poco entre los estudiantes de carreras en ciencias e ingeniería es la lectura. Los niveles de compresión de lectura son en general bajos y reflejan un problema más en la enseñanza de las ciencias en la escuela media. Allí lo importante es un resultado y no el proceso para obtenerlo. Tampoco se valora la comprensión de este resultado que implica una capacidad extra que es la de comunicación, de la cual hablaré más adelante.

Es necio tratar de solucionar un sistema que aun no se ha comprendido. Por esto, antes de hacer cualquier cosa lea atentamente de tal forma que se pueda hacer una imagen mental del sistema. Cualquier cosa extraña que definitivamente no comprenda no dude en pedir clarificación. Muchas veces los textos planteando ejercicios y siempre en los sistemas físicos reales, traen información redundante o innecesaria. Uno de los deberes del físico es evidenciar qué de lo que le están dando es útil para resolver el problema dado, qué cosas sobran y qué cosas hacen falta. Esto último es usual en el mundo real donde no toda la información está dada y se deben hacer estimaciones, aproximaciones o, si es el caso, medir experimentalmente ese pedazo de información faltante.

Nótese que este proceso implica varias lecturas del problema, pues para evidenciar la información útil es necesario tener claro qué se está pidiendo del sistema en cuestión.

A.3. Plantee claramente el camino de solución

Simultáneamente a la lectura se debe hacer una contextualización del sistema. Durante un curso esto es sencillo pues en general los ejercicios propuesto están justo enmarcados en un tema que se está discutiendo en clase. En la vida real esto no es así, e incluso en general esta contextualización es tan importante como difícil para el principiante.

Un esfuerzo que pido en mis estudiantes es que no piensen en ecuaciones, las cuales al final puede resolver un computador y mucho mejor que un humano, sino que realmente piensen en la física del sistema. Esto por ejemplo implica relacionar la información dada con leyes físicas y aproximaciones a hacer. Las leyes físicas están acompañadas de ecuaciones, que ayudan a ver

sus implicaciones, pero no son las ecuaciones, recuerdalo.

Una recomendación grande para todos, trabajen en un buen espacio y escriban en hojas grandes que les permita escribir y dibujar claramente. Donde además pueden observar los pasos previos sin dificultad.

Ya que se tiene una imagen mental hacer un dibujo ayuda a poner estas ideas en un sólo marco. Recuerde que puede escoger los ejes y sistema de coordenadas como lo deseé, estos no son parte del sistema físico, pero colocarlos convenientemente puede ahorrarle mucho trabajo. En el dibujo deben quedar claras las características que permiten entender luego el procedimiento. Ahora sí comience a plantear las ecuaciones que, posiblemente, le servirán para solucionar el problema.

A.4. Presentación

Cuando esté escribiendo la solución tenga en mente que esta va a ser leída por otra persona, luego procure ser claro en su explicación. Además procure ser pulcro. Esto ayuda a evidenciar mejor posibles errores que en un trabajo desordenado y sucio son muy difíciles de ver, además que molesta para el que lo lee.

Buscar la claridad además le ayudará a encontrar nuevas formas de entender lo que trata de explicar, e incluso darse cuenta que no lo está entendiendo. Un ejercicio sano de hacer antes de pasarle el escrito a cualquier persona, incluso si es para correcciones, es leer lo que se acaba de escribir unas tres veces. Sea crítico con lo que escribe y recuerde que es muy fácil engañarse a uno mismo. Si encuentra algún punto que no parece fluido, o tal vez parece contradecir algo anterior, se casi seguro que o no está bien escrito o definitivamente se está diciendo algo erróneo.

A.5. Metacognición

El trabajo de un ejercicio no acaba cuando se termina de escribir y se entrega. De hecho es usual que un ejercicio le deje a uno algún truco nuevo, que se descubra así sea algo muy pequeño pero que seguro vale la pena tener presente. Así que piense qué fue eso que le pareció más difícil del ejercicio y cómo lo solucionó. ¿Será que existe otra forma de hacerlo? Discutan con otros grupos, ¡tal vez existan muchas formas!. Imaginen que tienen una máquina

del tiempo que les permitiría hablar con usted mismo una semana antes, cuando apenas encontró este problema que le costó tanto trabajo. ¿Qué truco o pista le daría a este yo del pasado?

Otra cosa que deben estar continuamente evaluando es cómo fue su proceso y desempeño durante este periodo y cómo pueden mejorarlo. Es algo que se conoce como metacognición y que permite planear, monitorear y evaluar nuestra comprensión y desempeño. Sea crítico y honesto, no sólo con su modo de aprender sino también con su modo de pensar.

Identificar con precisión sus puntos débiles, que usualmente son debidos a una mala cultura de estudio o de interacción con los compañeros y el docente, permiten abordarlos y desarrollarlos de manera más consiente y efectiva. Estos puntos débiles incluyen su participación en el curso e interacción con los demás miembros que lo conforman.

Trate de hacer consiente los puntos más confusos que se han tratado y se están tratado en el curso.

Piense en qué ha cambiado su entendimiento del tema antes y después del ejercicio.

Piense en cosas que volvería a hacer igual y cosas que definitivamente cambiaría.

Evalué cómo es su proceso de aprendizaje y cómo lo cambiaría o mantendría. Algo muy bonito para pensar en retrospectiva es pensar en cómo uno le explicaría este ejercicio a un niño.

Apéndice B

Transformaciones de Lorentz

La construcción de la teoría de la relatividad, publicada por Einstein en 1905, parte de observar que la teoría electromagnética compilada y refinada por Maxwell unos cuarenta años atrás es compatible con un postulado que se añade al de relatividad de Galileo. De estos se desprenden unas reglas de transformación entre las coordenadas que miden distintos observadores en movimiento relativo constante distintas a las de la relatividad Galileana. Nosotros utilizaremos estos postulados para encontrar las consecuencias en nuestra teoría electromagnética y no viceversa como haría Einstein.
Los postulados de la relatividad especial son

1. La Física para todos los sistemas inerciales es la misma.
2. La velocidad de la luz en el vacío medida por cualquier observador es la misma. A esta la denotaremos como c y tiene un valor numérico aproximado de $3 \times 10^8 m/s$.

El primer postulado es exactamente el mismo de la relatividad Galileana y puede extenderse de manera más amplia al hecho que la Física en todo el universo es la misma e independiente del observador y su estado de movimiento.

El segundo postulado entra en conflicto con el teorema de adición de velocidades de Galileo

$$v'_x = v_x + u,$$

para un movimiento relativo en el eje x . En efecto este teorema permite que las velocidades se sumen arbitrariamente y en particular la velocidad

de un rayo de luz tenga medidas distintas en dos marcos de referencia en movimiento relativo.

B.1. Transformaciones relativistas de coordenadas

Para conciliar esta última observación se debe abandonar la transformación Galileana para el tiempo $t' = t$ que indica que los relojes en cualquier marco de referencia corren a la misma velocidad. Veamos como deben modificarse estas transformaciones. Supondremos que las coordenadas x están relacionadas de manera lineal de la siguiente manera

$$x = ax' - bt', \quad x' = ax + bt. \quad (\text{B.1})$$

La idea es obtener a y b que sean consistentes con el segundo postulado. Por el momento la única restricción es $b/a = v$ la velocidad relativa tal y como en el caso galileano.

Si consideramos a x como la coordenada de posición para un rayo de luz que sale del origen se sigue $x = ct$ y como en el otro sistema se debe observar la misma velocidad también $x' = ct'$. De esto tenemos

$$ct = a(c - v)t', \quad ct' = a(c + v)t. \quad (\text{B.2})$$

Despejando a t de la primera y remplazando en la segunda

$$ct' = a^2(c^2 - v^2)t'/c. \quad (\text{B.3})$$

De donde obtenemos

$$a = \pm \frac{1}{1 - v^2/c^2}. \quad (\text{B.4})$$

Por razones que quedan claras más adelante tomaremos el signo positivo y, definiendo

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (\text{B.5})$$

tenemos

$$x = \gamma(v)(x' - vt'), \quad x' = \gamma(v)(x + vt). \quad (\text{B.6})$$

Utilizando la segunda para remplazar a x' en la primera tenemos

$$x = \gamma(v)(\gamma(v)(x + vt) - vt'). \quad (\text{B.7})$$

Despejando t'

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{v\gamma(v)} [(\gamma^2(v) - 1)x + v\gamma(v)t] , \\ &= \frac{1}{v\gamma(v)} \left[\gamma^2(v) \left(\frac{v}{c} \right)^2 x + v\gamma^2(v)t \right] , \\ &= \gamma(v) \left(t + \frac{v}{c^2}x \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Para las direcciones perpendiculares las coordenadas coinciden en ambos sistemas. Así, las transformaciones de Lorentz para un *Boost* en x , i.e., para un sistema que se mueve relativamente en la dirección x están dadas por

$$t' = \gamma(u) \left(t + \frac{u}{c^2}x \right) , \quad x' = \gamma(u)(x + ut) , \quad y' = y , \quad z' = z , \quad (\text{B.9})$$

donde por conveniencia denotamos la velocidad relativa entre los sistemas como u . En este punto debe ser clara la necesidad de haber tomado el signo positivo para la solución tomada para a (B.4), pues el signo negativo indicaría que el tiempo en el otro marco de referencia corre en sentido opuesto. Notemos que todas estas se reducen a las conocidas Galileanas en el caso en que $v \ll c$.

La anteriores transformaciones implican en particular que las velocidades medidas por el observados con coordenadas primadas están dadas por

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} , \\ &= \frac{dx'}{dt} / \frac{dt'}{dt} , \\ &= \frac{d(\gamma(u)(x + ut))}{dt} / \frac{\gamma(u)(t + \frac{u}{c^2}x)}{dt} , \\ &= \frac{v_x + u}{1 + uv_x/c^2} , \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

con $v_x = \frac{dx}{dt}$. Analogamente para las otras velocidades

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(u)(1 + uv_x/c^2)} , \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(u)(1 + uv_x/c^2)} . \quad (\text{B.11})$$

Estas tres remplazan el teorema de adición de velocidades de Galileo y, como advertido anteriormente, son consistentes con el hecho que cualquier observador mida c independiente de su estado de movimiento, como puede probar

personalmente el lector. Algo igualmente relevante es el hecho que no es posible para ningún observador tener velocidades superiores a c . En la práctica los objetos sólo pueden tener una velocidad c si su masa es nula, y las partículas de masa nula siempre tienen velocidad c .

B.1.1. Contracción de la longitud

Supongamos que deseamos medir la longitud de un objeto en movimiento con velocidad constante $\vec{u} = u\hat{i}$. Para efectos de ilustrar el efecto tomamos la longitud del objeto en la misma dirección de su movimiento, que tomamos como paralelo al eje x .

Podemos pararnos en un sistema \mathcal{S}' que se mueve junto con el objeto, de modo que para este se encuentra en reposo. Medidos desde este sistema los extremos del objeto tienen coordenadas x'_2 y x'_1 y su longitud es entonces

$$L_o = x'_2 - x'_1. \quad (\text{B.12})$$

Esta longitud L_o es denominada longitud propia e indica la longitud de un cuerpo medida desde un marco de referencia que se encuentra en reposo respecto al objeto. De las transformaciones (B.9) se sigue que en el marco de referencia original \mathcal{S} los extremos del objeto se observan en las coordenadas

$$x'_1 = \gamma(u)(x_1 + ut_1), \quad x'_2 = \gamma(u)(x_2 + ut_2). \quad (\text{B.13})$$

Ahora bien, al contrario que en el marco de referencia en que el objeto se encuentra en reposo, cuando se desea realizar una medida para las dimensiones de un cuerpo que se mueve se debe garantizar que la posición de sus extremos se mida simultáneamente.¹ De modo que si x_1 y x_2 son tomados para medir el tamaño se sigue que $t_1 = t_2$ y la longitud medida en \mathcal{S} está dada por

$$L = x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)/\gamma(u) = \sqrt{1 - v^2/c^2} L_o. \quad (\text{B.14})$$

Como se indicó anterior anteriormente $v < c$ y por tanto $0 < \sqrt{1 - v^2/c^2} \leq 1$ y tenemos

$$L < L_o. \quad (\text{B.15})$$

Se dice, entonces, que la longitud de un objeto medidas por un observador en movimiento relativo es menor a la propia.

¹El concepto de simultaneidad en relatividad especial es mucho más rico que en el caso galileano pues depende del observador. Así, dos sucesos serán simultáneos para todos los observadores si ocurren en la misma posición en el espacio.

B.1.2. Dilatación temporal

De las transformaciones (B.9) podemos también comparar los intervalos temporales. Supongamos que vamos en un avión a velocidad $\vec{u} = u\hat{i}$. Tomamos el marco de referencia \mathcal{S}' el del avión que se mueve junto con nosotros. Observamos el reloj al iniciar el capítulo de un libro y vemos que marca t_1 y lo volvemos a mirar justo cuando terminamos y marca t_2 . Así, para cualquier persona en el avión hemos tardado

$$\Delta\tau = t_2 - t_1 , \quad (\text{B.16})$$

en leer este capítulo. Denotamos como τ el tiempo que se mide en un marco de referencia en reposo respecto a los eventos, o sea, cuando los eventos suceden todos en el mismo punto. Para alguien en la tierra se tiene de (B.9)

$$t'_1 = \gamma(u) \left(t_1 - \frac{u}{c^2} x_1 \right) , \quad t'_2 = \gamma(u) \left(t_2 - \frac{u}{c^2} x_2 \right) , \quad (\text{B.17})$$

donde hemos cambiado el signo que acompaña a u pues \mathcal{S}' se mueve respecto a nosotros en dirección $-x$. Esto, sin embargo, no afecta el resultado pues, como se dijo anteriormente, los eventos comenzar a leer y terminar de leer ocurrieron en el mismo punto, o sea $x_1 = x_2$, y el intervalo de tiempo medido por la persona en tierra es

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(u)\Delta\tau . \quad (\text{B.18})$$

Como $\gamma(u) \geq 1$ se tiene que

$$\Delta t \geq \Delta\tau , \quad (\text{B.19})$$

que indica que los intervalos de tiempo medidos por un observador en movimiento relativo son mayores que los intervalos de tiempo propio.

Apéndice C

Transformación general de los campos

En la sección 10.1.2 vimos cómo transforman los campos eléctricos bajo un cambio de sistema de referencia, encontrando las reglas (10.6). En el caso estudiado para el sistema de referencia original no se tenía campo magnético, pero en el sistema primado, al haber corrientes, debe existir este campo. Análogamente a cómo se halló para el campo electrostático veamos primero cómo transforman las corrientes. En el sistema primado ahora tenemos una densidad de corriente

$$\lambda'_J = \sigma' v_o = \gamma \sigma v_o, , \quad (C.1)$$

esta induce un campo magnético con componentes

$$B'_x = 0, \quad B'_z = \pi \kappa \lambda'_J = \pi \kappa \gamma \sigma v_o. \quad (C.2)$$

Podemos entonces expresar

$$B' = \frac{2\kappa}{k} \gamma v_o E, \quad (C.3)$$

con dirección perpendicular al movimiento del sistema de referencia y al campo \vec{E} .

En general si se tiene una corriente en el sistema en reposo tenemos un campo original dado por

$$B_z = \pi \kappa \lambda_J = \pi \kappa \sigma u, \quad (C.4)$$

donde hemos supuesto una velocidad para las cargas de magnitud u en la dirección \hat{i} . Para calcular la trasformación debemos ver cómo es vista la

velocidad de las cargas en el sistema primado, para esto utilizamos la regla de transformación de las velocidades

$$u' = \frac{u - v_o}{1 - uv_o/c^2}. \quad (\text{C.5})$$

En el sistema de referencia de las cargas, i.e., en el cual se encuentran en reposo, hay una densidad de carga σ_o , luego en el sistema primado, moviéndose a velocidad u' con respecto al sistema de referencia de las cargas, se tiene

$$\sigma' = \sigma_o \frac{1}{\sqrt{1 - (u')^2/c^2}}, \quad (\text{C.6})$$

pero así mismo con el sistema original

$$\sigma_o = \sigma \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (\text{C.7})$$

luego

$$\sigma' = \sigma \sqrt{\frac{1 - u^2/c^2}{1 - (u')^2/c^2}} = \sigma \gamma(1 - uv_o/c^2), \quad (\text{C.8})$$

y por tanto

$$\lambda'_J = \sigma' u' = \sigma \gamma(u - v_o). \quad (\text{C.9})$$

Tenemos entonces

$$E'_y = 2\pi k \sigma' = \gamma \left(E_y - 2 \frac{k}{\kappa} \frac{v_o}{c} B_z \right), \quad (\text{C.10})$$

$$B'_z = 2\pi \kappa \lambda'_J = \gamma \left(B_z - \frac{\kappa}{2k} v_o E_y \right). \quad (\text{C.11})$$

Las componentes x del campo magnético continúan siendo nulas. En general en *cgs* para sistemas en referencia en movimiento en el eje x ,

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

con $\beta = v_o/c$. En todo caso las transformaciones relativistas van a mezclar campo eléctricos con magnético y viceversa. Nótese, además, la simetría en las ecuaciones bajo la transformación $\vec{B} \leftrightarrow \vec{E}$ y $y \leftrightarrow z$, siendo un indicio para considerar que estos dos objetos, que en principio parecen no relacionados,

en realidad son uno mismo, cómo de hecho son tratados en un contexto relativista explícito. En MKS esta simetría no es tan evidente ya que las unidades de los campos son distintas, sin embargo, la conclusión sigue siendo cierta.

Otra forma de presentar estas transformaciones, descomponiendo los campos en componentes paralelas y perpendiculares al la dirección en que se realiza la transformación, $\vec{E} = E_{\parallel} + E_{\perp}$ y $\vec{B} = B_{\parallel} + B_{\perp}$,

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \alpha \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}_{\perp} \right), \quad (\text{C.13})$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{\alpha c} \vec{v} \times \vec{E}_{\perp} \right), \quad (\text{C.14})$$

con $\alpha = 1$ para *cgs* y $\alpha = c$ en MKS.

Ejemplo C.0.1. Lagrangiano electromagnético

Dadas las transformaciones de las cantidades físicas y la invariabilidad de la física para cualquier sistema físico es importante trabajar con cantidades invariantes, en este caso denominadas *invariantes relativistas*, las cuales independientemente del sistema de referencia que sean medidas entregan el mismo valor numérico. Tomando el caso de la placa con densidad de carga uniforme, sin corrientes, en unidades *cgs* tenemos que $E = 2\pi\sigma$ y $\kappa = 2/c$, y la cantidad

$$\frac{1}{8\pi^2} (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) = \frac{\sigma^2}{2}, \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2} (|\vec{E}'|^2 - |\vec{B}'|^2) &= \frac{\sigma^2}{2} \gamma^2 - \frac{\sigma^2}{2} \gamma^2 \frac{v_o^2}{c^2}, \\ &= \frac{\sigma^2}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

es invariante, donde se ha utilizado $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_o^2/c^2}$ con (10.6) y (C.3). Esta cantidad es de hecho la densidad Lagrangiana electromagnética, una cantidad que permite encontrar las ecuaciones de Maxwell a partir de un principio de mínima acción, cómo se verá en el curso de Mecánica Analítica. En unidades MKS la densidad Lagrangiana, que no es otra cosa sino la diferencia de densidades de energía eléctrica y la magnética, toma la forma,

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_o}{2} (|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2). \quad (\text{C.17})$$