

VERSUCHSBERICHT ZU

W2 – ADIABATENEXPONENT  $c_p/c_v$  VON  
GASEN

Gruppe Mi 11

Alex Oster(a\_oste16@uni-muenster.de)  
Jonathan Sigrist(j\_sigr01@uni-muenster.de)

durchgeführt am 16.05.2018  
betreut von Pascal Grenz

30. Mai 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurzfassung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bestimmung von <math>\kappa</math> nach Rüchardt-Flammersfeld</b>	<b>1</b>
2.1	Methoden . . . . .	1
2.1.1	Aufbau . . . . .	1
2.1.2	Funktionsweise . . . . .	2
2.2	Durchführung . . . . .	3
2.3	Datenanalyse . . . . .	4
2.4	Diskussion . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Bestimmung von <math>\kappa</math> nach Clément-Desormes</b>	<b>6</b>
3.1	Methoden . . . . .	6
3.1.1	Aufbau . . . . .	6
3.1.2	Funktionsweise . . . . .	6
3.2	Durchführung . . . . .	7
3.3	Datenanalyse . . . . .	8
3.4	Diskussion . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>10</b>
5.1	Unsicherheiten . . . . .	10
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

## 1 Kurzfassung

Dieser Bericht beschäftigt sich mit der Untersuchung des Adiabatenexponent  $\kappa$  von Gasen. Zur Bestimmung dieses Exponenten werden im Folgenden zwei verschiedene Methoden betrachtet. Zum einen die Bestimmung von  $\kappa$  nach der Methode von Rüchardt-Flammersfeld und zum anderen nach der von Clément-Desormes.

Ziel der Untersuchung sind Ergebnisse für  $\kappa$  die in guter Näherung mit den Literaturwerten übereinstimmen. Die bei der Auswertung dieses Versuchs auftretenden Ergebnisse beliefen sich auf  $\kappa = 1,426 \pm 0,017$  für Luft  $\kappa = 1,633 \pm 0,017$  für Argon und  $\kappa = 1,289 \pm 0,014$  für Kohlenstoffdioxid nach der Methode von Rüchardt-Flammersfeld, sowie  $\kappa = 1,3907 \pm 0,005$  für Luft bei der Methode nach Clément-Desormes. Keiner dieser Werte weicht mehr als 3,5% von dem Erwartungswert, weswegen die Ziele dieser Untersuchung somit erreicht wurden.

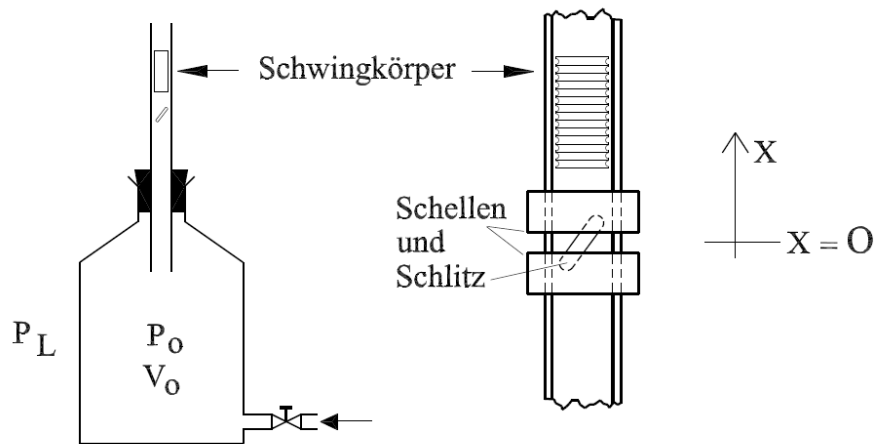
## 2 Bestimmung von $\kappa$ nach Rüchardt-Flammersfeld

### 2.1 Methoden

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Aufbau und der Funktionsweise des Teilversuches zur Bestimmung von  $\kappa$  nach Rüchardt-Flammersfeld.

#### 2.1.1 Aufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 graphisch dargestellt. Zu erkennen ist, dass der Aufbau im Wesentlichen aus einer großen Flasche, in dessen langen Flaschenhals sich ein Schwingkörper befindet, besteht. Zusätzlich ist an dem Flaschenhals eine schlitzförmige Öffnung, dessen Größe sich durch die anliegenden Schellen beliebig anpassen lässt. Dieser Flaschenhals erweitert sich wie eine Röhre bis zum Flaschenboden, sodass der Schwingkörper nicht unten herausfallen kann, jedoch so, dass der Druck in dem Rohr unterhalb des Schlitzes dem Druck in der Flasche entspricht. Bei diesem Druck handelt es sich um  $P_0$ , wie in der Abbildung verzeichnet. Der Luftdruck definiert sich hier



**Abbildung 1:** Aufbau zur Bestimmung von  $\kappa$  nach Rüchardt-Flammersfeld.[1]

durch  $P_L$ . Unten, nahe dem Flaschenboden lässt sich ein Gas in diese einführen, sodass der Druck  $P_0$  variiert werden kann. Die Flasche samt Rohr besitzt das Volumen  $V_0$ , wobei der Querschnitt des Flaschenhalses im Folgenden als  $A$  bezeichnet wird. Auch der Schwingkörper besitzt eine Querschnittsfläche von  $A$ , sodass das Gas in der Flasche nicht einfach entweichen kann.

### 2.1.2 Funktionsweise

Ist der Druck  $P_0$  nach dem Einführen eines Gases größer als der Luftdruck  $P_L$ , so beginnt der Schwingkörper aufwärts zu treiben. Steigt er über den Schlitz hinaus, entweicht Gas aus der Flasche und der Druck verringert sich wieder. Dies führt zu dem Fallen des Schwingkörpers. Bei konstanter Einführung eines Gases führt dies zu einer kontinuierlichen Erhöhung des Drucks  $P_0$ , welcher bei dem Erreichen des Schlitzes wieder abfällt und daraufhin erneut steigt. Aus dieser Bewegung stammt der Name des Schwingkörpers. Hierbei handelt es sich um eine ungedämpfte Druck- und Volumenschwingung des Gases. Dieser Vorgang verläuft adiabatisch, da die Änderungen von Druck und Volumen schnell genug erfolgen, dass ein Temperatúrausgleich mit der Umgebung nicht stattfinden kann. Reibungsverluste werden über die konstante Zufuhr an Energie an den Schwingkörper durch eine schwache Gaszufuhr kompensiert.

Ist der Schwingkörper in seiner Gleichgewichtslage, so gilt:

$$P_0 = P_L + \frac{m \cdot g}{A}, \quad (2.1)$$

wobei  $m$  der Masse des Schwingkörpers ist und der Bruch den Druck beschreibt, den der Schwingkörper auf die Flasche (und deren Inhalt) auswirkt.

Aus den Poissonschen Gleichungen für adiabatische Zustandsänderungen,  $\Delta V = Ax$  mit  $x$  als Position des Schwingkörpers lässt sich über das Aufstellen einer Bewegungsgleichung für einen linearen harmonischen Oszillator der Adiabatenexponent  $\kappa$  bestimmen:

$$\kappa = \frac{4\pi^2 m V_0}{P_0 A^2 T^2}, \quad (2.2)$$

dabei ist  $T$  die Zeit für eine Schwingungsdauer, welche aus der Gleichung für den harmonischen Oszillator stammt.

Somit lässt sich der Adiabatenexponent  $\kappa$  für verschiedene Gase bestimmen, indem konstant Gas zugeführt wird und die Schwingungsdauer  $T$  gemessen wird.

## 2.2 Durchführung

Zur Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten  $\kappa$  für die Gase/Gasverbindungen Luft, Argon und Kohlenstoffdioxid wurden die Schwingungsdauern  $T$  für 100 Schwingungen pro Gas, bei Spaltbreiten von 0,5 mm bis 3 mm in Abständen von 0,5 mm, verzeichnet. Da die Schwingungen auch bei schwacher Gaszufuhr schnell verliefen, lag die Schwierigkeit an diesem Versuch daran, die Zeit bei der verwendeten Stoppuhr nach genau 100 Schwingungen zu stoppen. Der Gasstrom wurde so gewählt, dass die Schwingung symmetrisch zu dem Schlitz erfolgte. Nach jeder Messung wurden Rohr und Schwingkörper durch Putzen von störenden elektrischen Aufladungen befreit.

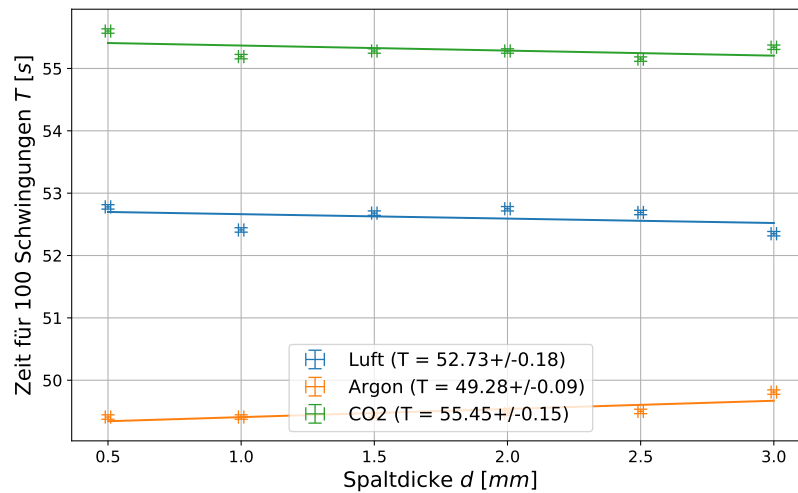
Das Gewicht des Schwingkörpers wurde mit einer Waage auf  $m = (7,10 \pm 0,03)$  g bestimmt. Der Luftdruck  $P_L$  befand sich während des Versuches bei  $P_L = (1008,7 \pm 0,1)$  mbar. Und für die Querschnittsfläche wurde über den gemessenen Durchmesser des Flaschenhalses eine Fläche von  $A = (1,986 \pm 0,005)$  cm<sup>2</sup> bestimmt. Das Volumen der Flasche war auf dieser angegeben:  $V_{\text{Flasche}} = 5450$  cm<sup>3</sup> und das des Rohres entspricht obigem  $\Delta V$ .  $V_0$  ergibt sich aus der Summe der beiden Volumina.

**Tabelle 1:** In dieser Tabelle sind die Mittelwerte für die Schwingungsdauern  $\bar{T}$  bei den verschiedenen verwendeten Gasen verzeichnet, sowie die zugehörigen Werte für die Adiabatenexponenten  $\kappa$

	Luft	Argon	Kohlenstoffdioxid
$\bar{T}$	$(52,73 \pm 0,18) \text{ s}$	$(49,28 \pm 0,09) \text{ s}$	$(55,45 \pm 0,15) \text{ s}$
$\kappa$	$1,426 \pm 0,017$	$1,633 \pm 0,017$	$1,289 \pm 0,014$

## 2.3 Datenanalyse

Die Tabelle mit den aufgezeichneten Schwingungsdauern ist dem Laborbuch zu entnehmen. Da diese sich für verschiedene Größen des Schlitzes bei gleichem Gas jedoch nur minimal voneinander unterscheiden und keine Proportionalität zu erkennen ist (vgl. Abb. 2), sind nur die Mittelwerte in Tabelle 1 aufgeführt. In dieser Tabelle sind zudem die



**Abbildung 2:** Graphische Darstellung der Schwingungsdauern für verschiedene Spaltbreiten.

aus Gleichung 2.2 berechneten Adiabatenexponenten  $\kappa$  für die jeweiligen Gase eingetragen. Da  $\kappa$  gerade dem Verhältnis von spezifischer isobaren und spezifischer isochoren Wärmekapazität  $c_p/c_V$  entspricht und diese in molarer Größe in direkter Verbindung mit

dem Freiheitsgrad der Gase stehen folgt:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}. \quad (2.3)$$

Hierbei entspricht  $f$  dem Freiheitsgrad des Gases. Die Betrachtung der Unsicherheiten erfolgt vollständig im Anhang.

## 2.4 Diskussion

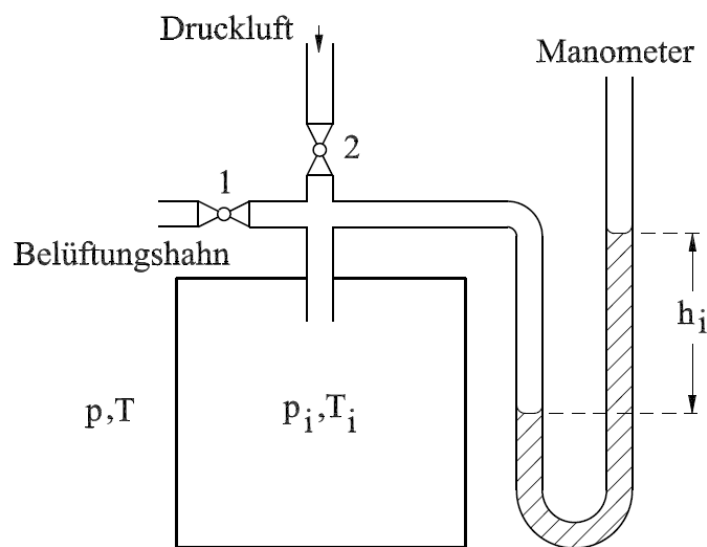
Nun stellt sich die Frage, ob die Ziele der Untersuchung erreicht wurden. Dazu werden aus den Freiheitsgraden für die verschiedenen Gase die entsprechenden Adiabatenexponenten bestimmt. Für das einatomige Argon gehen nur die Freiheitsgrade der Translation, also drei ein. Zu erwarten wäre nach Gleichung 2.3 also ein  $\kappa = 5/3 \approx 1,67$ . Der berechnete Wert von  $1,633 \pm 0,017$  weicht also nur um 2,02% von der Erwartung ab. Der Erwartungswert liegt zwar nicht innerhalb der Unsicherheiten, ist mit der geringen Abweichung jedoch noch sehr nah an dem berechneten Wert. Bei Luft, welches im Wesentlichen aus den zweiatomigen Molekülen  $N_2$  und  $O_2$  besteht gehen zudem zwei zusätzliche Freiheitsgrade der Rotation ein. Hierfür folgt aus der Gleichung mit  $f = 5$  also, dass  $\kappa = 7/5 \approx 1,4$  sein sollte. Mit  $1,426 \pm 0,017$  weicht dieser Wert nur um 1,86% von dem Erwartungswert ab, welcher bei diesem Wert noch näher als bei dem Argon liegt und in der doppelten Unsicherheit liegt. Für das dreiatomige und nicht gestreckte Kohlenstoffdioxid verläuft die Betrachtung ähnlich, hier ist der Freiheitsgrad  $f = 6$  und der Erwartungswert für  $\kappa = 8/6 \approx 1,33$ . Bei diesem Erwartungswert weichen die berechneten  $1,289 \pm 0,014$  um 3,32% ab. Diese Abweichung liegt zumindest unter 5% und ist somit ebenfalls nicht weit entfernt. Somit sind alle ermittelten Adiabatenexponenten  $\kappa$  nah an den Erwartungen und die Ergebnisse dieses Teilversuches genügen den Zielen der Untersuchung.

### 3 Bestimmung von $\kappa$ nach Clément-Desormes

#### 3.1 Methoden

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Aufbau und der Funktionsweise des Teilversuches zur Bestimmung von  $\kappa$  nach Clément-Desormes.

##### 3.1.1 Aufbau



**Abbildung 3:** Aufbau zur Bestimmung von  $\kappa$  nach Clément-Desormes.[1]

Abbildung 3 stellt den Aufbau graphisch dar. Zu erkennen ist ein großes Glasgefäß, welches mit Luft gefüllt ist und der Temperatur  $T_i$  und dem Druck  $P_i$  unterliegt. Dieses Gefäß ist mit einem Manometer verbunden, welches an der rechten oberen Seite offen ist. Die beiden Ventile dienen zur Regulierung des Drucks in dem System. Bei geschlossenem Ventil 1 lässt sich Druckluft über Ventil 2 in das System einführen und umgekehrt kann der Druck gesenkt werden, wenn die Belüftungsbahn, an Ventil 1, geöffnet wird.

##### 3.1.2 Funktionsweise

Entspricht der Druck im Inneren des Systems  $P_i$  gerade gleich dem äußeren Luftdruck  $P_L$ , wie es z. B. bei geöffnetem Ventil 2 der Fall ist, so befindet sich das Manometer in Ruhelage



mit einer Höhendifferenz von  $h_i = 0$ . Hierbei ist ebenso  $T_i = T_L$ , wobei es sich um die Temperatur der Außenluft  $T_L$  handelt. Ist jedoch  $P_i > P_L$ , so ist der Flüssigkeitsstand auf der rechten Seite höher als auf der linken. Dies führt zu  $h_i > 0$ . Damit auch hier ein adiabatischer Vorgang stattfinden kann, muss der Druck sich schnell genug ändern, dass kein Temperatúrausgleich mit der Umgebung möglich ist. Dazu wird zunächst der Druck über Ventil 2 erhöht und nach dem Einstellen des Temperaturgleichgewichts in dem System das Ventil 1 mit einer vollständigen Umdrehung geöffnet und wieder geschlossen. Dies muss mit der richtigen Geschwindigkeit erfolgen, damit der Druck auf den Außendruck abfallen kann, die Temperatur sich in dem System jedoch nicht ändert.

Seien nun  $(P_1, T_1)$ ,  $(P_2, T_2)$  und  $(P_3, T_3)$  die Wertepaare direkt nach dem Zuführen der Druckluft ( $\rightarrow T_1 = T_L$  zunächst unverändert), direkt nach dem Temperatúrausgleich und dem Drehen von Ventil 1 ( $\rightarrow P_2 = P_L$  auf Außendruck abgefallen), sowie nach dem erneuten Ausgleich der Temperatur ( $\rightarrow T_3 = T_L$  Aufnahme von Wärme aus der Umgebung bis die Temperatur gleich der Außentemperatur ist). Dann gilt für den Druck  $P_i$  in dem System:

$$P_i = P_L + \rho \cdot g \cdot h_i, \quad (3.1)$$

wobei  $\rho$  die Dichte der Luft ist. Aus dem konstanten Quotient  $p/T$  folgt für den isochoren Prozess damit und einigen weiteren Äquivalenzschritten der Adiabatenexponent  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3}, \quad (3.2)$$

dabei ist  $h_1$  die Höhendifferenz, die sich nach dem ersten Temperatúrausgleich und vor dem Öffnen von Ventil 1 einstellt und  $h_3$  nach dem zweiten Temperatúrausgleich.

## 3.2 Durchführung

Die Durchführung dieses Teilversuches bestand im Wesentlichen aus dem Notieren der Höhendifferenzen, die sich nach den Temperatúrausgleichen nach dem Einführen von Druckluft über Ventil 2 bzw. nach dem kurzen Öffnen von Ventil 1 eingestellt haben. Da die richtige Drehgeschwindigkeit für die ersten Messungen nicht getroffen wurde, fand kein Ausgleich von Innen- mit Außendruck statt. Dies führte zu Ergebnissen, bei denen  $\kappa$  zwischen 2 und 3 lag. Aus Zeitgründen wurden statt fünf Messungen jeweils drei Messungen an zwei mal dem gleichen Aufbau durchgeführt. Dabei unterscheiden sich nur

die abgelesenen Werte für den Stand am Manometer für  $h_i = 0$ . Aus doppelten Abstand von dem Stand auf der rechten Seite dazu wurden dann  $h_1$  und  $h_3$  bestimmt.

### 3.3 Datenanalyse

Aus den sechs relevanten Messungen ließ sich  $\kappa$  über Gleichung 3.2 einfach bestimmen. Der über die Messungen gemittelte Wert entspricht für die beiden Messreihen:  $\kappa = 1,3694 \pm 0,0035$  und  $\kappa = 1,412 \pm 0,004$ . Erneute Mittelung über beide Adiabatenexponenten liefert  $\kappa = 1,3907 \pm 0,005$ . Die Betrachtung der Unsicherheiten erfolgt vollständig im Anhang.

### 3.4 Diskussion

Auch hier stellt sich nun die Frage, ob die Ziele der Untersuchung erreicht wurden. Wie in dem vorigen Teilversuch wird über Gleichung 2.3 der zu erwartende Adiabatenexponent  $\kappa$  aus dem Freiheitsgrad des verwendeten Gases berechnet. Bei Luft, welches hier verwendet wurde und im Wesentlichen aus den zweiatomigen Molekülen  $N_2$  und  $O_2$  besteht, treten drei Freiheitsgrade der Translation und zwei der Rotation auf. Es folgt die Erwartung, dass  $\kappa = 7/5 \approx 1,4$  entsprechen sollte. Der Erwartungswert liegt zwar nicht innerhalb der Unsicherheit des ermittelten Wertes von  $\kappa = 1,3907 \pm 0,005$ , ist mit einer Abweichung von nur 0,66% jedoch nahe genug an dem Erwartungswert, sodass die Übereinstimmung mit der Erwartung gegeben ist.

## 4 Schlussfolgerung

Abschließend lässt sich bestätigen, dass die Ziele der Untersuchung erreicht wurden. Die ermittelten Werte für den Adiabatenexponenten  $\kappa$  lagen alle für beide Methoden nahe den Erwartungen. Sie beliefen sich auf  $\kappa = 1,426 \pm 0,017$  für Luft  $\kappa = 1,633 \pm 0,017$  für Argon und  $\kappa = 1,289 \pm 0,014$  für Kohlenstoffdioxid nach der Methode von Rüchardt-Flammersfeld, sowie  $\kappa = 1,3907 \pm 0,005$  für Luft bei der Methode nach Clément-Desormes. Eine Abweichung von über 3,5% ist bei keinem Wert aufgetreten, weswegen eine Wiederholung des Versuches nicht nötig ist. Für eine Nachstellung der Methode nach Rüchardt-Flammersfeld, wäre eine Art „Tally counter“ zum Zählen der Schwingungen hilfreich, um dies nicht in Gedanken durchführen zu müssen.

## 5 Anhang

### 5.1 Unsicherheiten

Jegliche Unsicherheiten werden nach GUM bestimmt und berechnet. Die Gleichungen dazu finden sich in 4 und 5. Für die Unsicherheitsrechnungen wurde die Python Bibliothek „uncertainties“ herangezogen, welche den Richtlinien des GUM folgt. Alle konkreten Unsicherheitsformeln stehen weiter unten. Für Unsicherheiten in graphischen Fits wurden die  $y$ -Unsicherheiten beachtet und die Methode der kleinsten Quadrate angewandt. Dafür steht in der Bibliothek die Methode „`scipy.optimize.curve_fit()`“ zur Verfügung.

Für digitale Messungen wird eine Unsicherheit von  $u(X) = \frac{\Delta X}{2\sqrt{3}}$  angenommen, bei analogen eine von  $u(X) = \frac{\Delta X}{2\sqrt{6}}$ .

**Schieblehre** Die Schieblehre hatte eine angegebene analoge Unsicherheit von  $\Delta d = 0,05$  mm. Mit ihr wurde die Dicke der Separationsscheiben und somit die Spaltdicke sowie der Innendurchmesser des Glasröhrchens gemessen.

**Messstab** Hier konnte der Wert mit einer Genauigkeit von  $\Delta h = 1$  mm analog abgelesen werden. Die Unsicherheit wurde bei der Höhe des Schlitzes über dem Flaschenrand und bei dem Wasserstand im Manometer verwendet.

**Waage** Die Digitalwaage konnte Gewichte auf  $\Delta m = 0,1$  g unterscheiden. Sie wurde zur Bestimmung des Schwingkörpergewichtes benutzt.

**Barometer** Hier ließen sich Werte analog bis auf  $\Delta p = 0,1$  mbar ablesen. Es wurde bei der Messung des statischen Außendrucks benötigt.

**Glasflasche** Das Volumen der Glasflasche war angegeben. Dabei wurde eine Unsicherheit von  $\Delta V = 10$  cm<sup>3</sup> angenommen.

**Stopuhr** Die Unsicherheit der Zeitmessung setzt sich aus der analogen Reaktionszeit mit  $\Delta t_R = 0,1$  s und der digitalen Anzeigegenauigkeit von  $\Delta t_{\text{Uhr}} = 0,01$  s nach 6 zusammen.

$$x = \sum_{i=1}^N x_i; \quad u(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u(x_i)^2}$$

**Abbildung 4:** Formel für kombinierte Unsicherheiten des selben Typs nach GUM.

$$f = f(x_1, \dots, x_N); \quad u(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}$$

**Abbildung 5:** Formel für sich fortpflanzende Unsicherheiten nach GUM.

$$u(t) = \sqrt{u^2(t_R) + u^2(t_{\text{Uhr}})}$$

**Abbildung 6:** Formel für Zeitmessungen nach GUM mit Unsicherheiten des selben Typs.

$$A = \frac{\pi}{4} d^2; \quad u(A) = \frac{\pi}{2} du(d)$$

**Abbildung 7:** Formel für die Fehlerfortpflanzung der Querschnittsfläche des Glasrohrs.

$$p_0 = p_L + \frac{mg}{A}; \quad u(p_0) = \sqrt{u^2(p_L) + \left( \frac{gu(m)}{A} \right)^2 + \left( \frac{mgu(A)}{A^2} \right)^2}$$

**Abbildung 8:** Fehlerfortpflanzung bei der Dichtekombination..

$$V_0 = V_F + A\Delta x; \quad u(V_0) = \sqrt{u^2(V_L) + u^2(A)(\Delta x)^2 + A^2 u^2(\Delta x)}$$

**Abbildung 9:** Formel für die Fehlerfortpflanzung des Volumens der Glasflasche.  $\Delta x$  ist die Höhe des Schlitzes über dem Flaschenhalz.

$$\kappa = \frac{4\pi^2 m V}{p_0 A^2 T^2} u(\kappa) = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{V}{p_0 A^2 T^2} u(m)\right)^2 + \left(\frac{m}{p_0 A^2 T^2} u(V)\right)^2 + \left(\frac{-m V}{p_0^2 A^2 T^2} u(p_0)\right)^2 + \left(\frac{-2m V}{p_0 A^3 T^2} u(A)\right)^2} -$$

**Abbildung 10:** Formel für die Fehlerfortpflanzung bei der Bestimmung von  $\kappa$  nach Rückhardt-Flammersfeld.

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3}$$

$$u(\kappa) = \sqrt{\left(-\frac{h_3 u(h_1)}{(h_1 - h_3)^2}\right)^2 + \left(\frac{h_1 u(h_3)}{(h_1 - h_3)^2}\right)^2} = \frac{1}{(h_1 - h_3)^2} \sqrt{h_3^2 u^2(h_1) + h_1^2 u^2(h_3)}$$

**Abbildung 11:** Formel für die Fehlerfortpflanzung bei der Bestimmung von  $\kappa$  nach Clément-Desormes.

## Literatur

- [1] WWU Münster. *W2 - Adiabatenexponent von Gasen*. URL: <https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/course/view.php?id=28561&section=27> (besucht am 29.05.2018).