

VERSUCHSBERICHT ZU

M2 – GEKOPPELTE PENDEL

Gruppe 10 Mi

Alex Oster (E-Mail: a_oste16@uni-muenster.de)
Jonathan Sigrist (E-Mail: j_sigr01@uni-muenster.de)

durchgeführt am 29.11.2017
betreut von
Martin KÖRSGEN

5. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Kurzfassung	2
2	Gekoppelte Fadenpendel	2
2.1	Methoden	2
2.2	Messung ohne Kopplung	4
2.3	Messung mit Kupferfeder als Kopplung	4
2.3.1	Statische Ermittlung des Kopplungsgrades	4
2.3.2	Gleich-gesinnte Schwingung	4
2.3.3	Gegen-gesinnte Schwingung	4
2.3.4	Schwebung	4
2.3.5	Relative Frequenzaufspaltung	4
2.4	Messung mit Stahlfeder als Kopplung	4
2.4.1	Statische Ermittlung des Kopplungsgrades	4
2.4.2	Gleich-gesinnte Schwingung	5
2.4.3	Gegen-gesinnte Schwingung	5
2.4.4	Schwebung	5
2.4.5	Relative Frequenzaufspaltung	5
2.5	Ergebnisse und Diskussion	5
2.6	Schlussfolgerung	5
3	Doppelpendel	5
3.1	Aufbau und Funktionsweise	5
3.2	Beobachtung bei Auslenkung	6

1 Kurzfassung

Dieser Bericht beschäftigt sich mit der Betrachtung von gekoppelten Pendeln. Dazu wird auf zwei verschiedene Arten solcher Pendel genauer eingegangen. Dabei handelt es sich einerseits um gekoppelte Fadenpendel und andererseits um das sogenannte Doppelpendel.

Zu den gekoppelten Fadenpendeln wird eine Reihe von Messungen durchgeführt. Bei diesen variieren die Kopplungen und Anfangsauslenkungen. Die verschiedenen erhaltenen Schwingungsdauern werden miteinander verglichen und die Kopplungsgrade k des Systems statisch und dynamisch bestimmt. Zudem wird die Bewegung des Doppelpendels beschrieben und kurz mit der Bewegung der gekoppelten Fadenpendel verglichen.

2 Gekoppelte Fadenpendel

2.1 Methoden

Der Aufbau für den Versuch zu gekoppelten Fadenpendel ist in Abb. 1 dargestellt. Hier besitzen beide Pendel die gleiche Länge l , hier bei ca. 159 cm (von dem Aufhängepunkt zum Schwerpunkt der Pendel), und Gewichte der Masse m . Des Weiteren werden die Fäden für die Berechnung als masselos angenommen. Zur Kopplung der beiden Fadenpendel dienen hierbei zwei verschiedene Federn, welche bei ungefähr $z = d = 113$ cm zwischen den Pendeln angebracht werden. Bei diesen handelt es sich um eine Kupfer- und um eine Stahlfeder.

Gemessen wird die Auslenkung des Pendels mit Hilfe eines Ultraschall-Entfernungssensors. Diese wird gegen die Zeit aufgetragen, um die Schwingungsdauer T bzw. die Frequenz ω zu ermitteln. Der Sensor misst mit 50 Hz. Die Messung wird für die Schwingungsdauer ohne Kopplung, für gleich- und gegen-gesinnte Bewegungen sowie für den Fall der Schwebung bei beiden Federn. Zudem wird die Auslenkung beider Pendel zur statischen Bestimmung des Kopplungsgrades mit einem Maßband gemessen.

Zur Berechnung des Kopplungsgrades wird folgende Formel für den statischen Fall verwendet:

$$k = \frac{x_1}{x_2}. \quad (1)$$

Für den dynamischen Fall werden die gemessenen Schwingungsdauern für die gleich- und gegen-gesinnte Bewegung verwendet:

$$k = \frac{T_{\text{gl}}^2 - T_{\text{geg}}^2}{T_{\text{gl}}^2 + T_{\text{geg}}^2}. \quad (2)$$

$$\text{bzw. für die Frequenz: } k = \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2}. \quad (3)$$

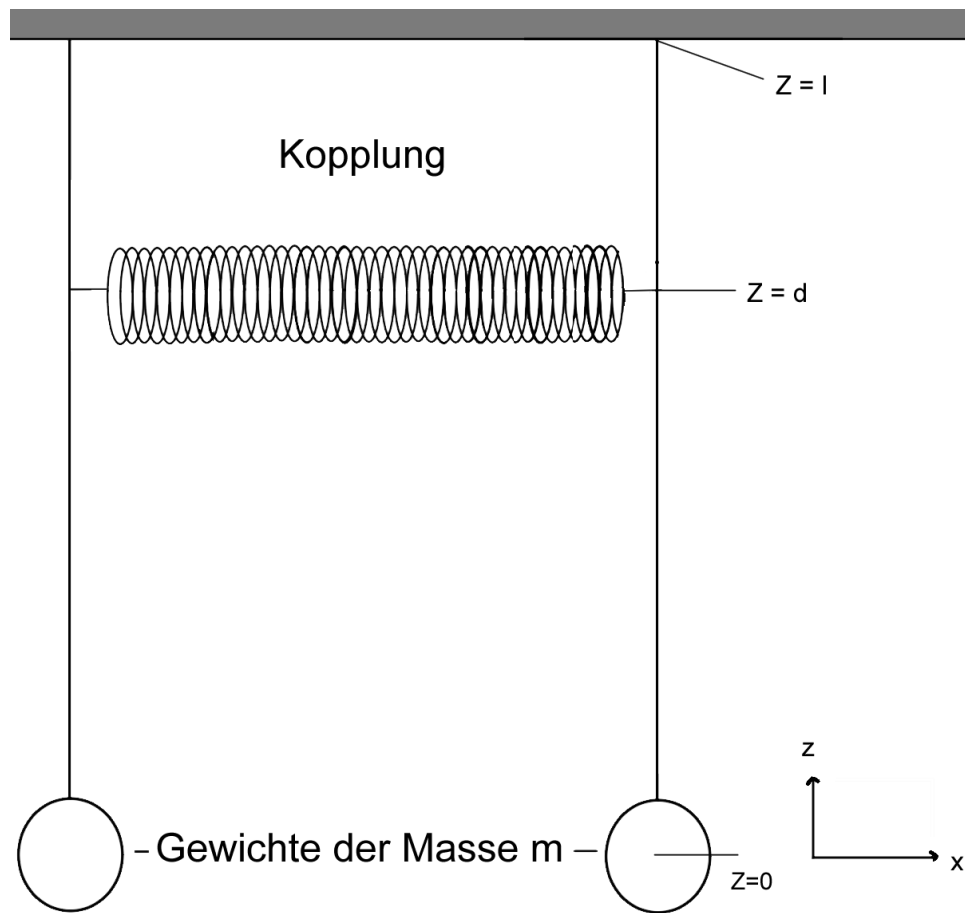


Abbildung 1: gekoppelte Fadenpendel

Zuletzt wird die relative Frequenzaufspaltung $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ mit Hilfe der ermittelten Schwingungsdauern berechnet, dazu:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}}}{\omega_{\text{gl}}} = 2 \frac{T_{\text{gl}}}{T_{\text{geg}}}. \quad (4)$$

Ebenso lässt sich die Frequenzaufspaltung auch mit der Näherung über die Reihenentwicklung von $\sqrt{1 \pm k}$ bis zur 3. Ordnung bestimmen. Umformen von Gl. (2) führt zu Folgendem:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1 = k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2}. \quad (5)$$

Unsicherheiten

Die Unsicherheiten wurden wie folgt festgelegt:

- 1 nice Unsicherheit

2.2 Messung ohne Kopplung

Die Messung ergab für den ungekoppelten Fall, dass die Schwingungsdauer $T_0 = 0 \text{ s}$ bzw. die Frequenz $\omega_0 = 0 \text{ s}^{-1}$ entspricht. Hierzu wurden die Nullstellen der in Abb. ?? aufgetragenen Messwerte genommen und gemittelt.

2.3 Messung mit Kupferfeder als Kopplung

2.3.1 Statische Ermittlung des Kopplungsgrades

Der Kopplungsgrad wird durch Einsetzen in Gl. (1) statisch bestimmt. Dies liefert einen Wert von $k =$. Hierfür wurden acht Wertepaare verwendet.

2.3.2 Gleich-gesinnte Schwingung

Für die gleich-gesinnte Bewegung bei der Kupferfeder ergab sich, dass die Schwingungsdauer $T_{\text{gl}} = 0 \text{ s}$ bzw. die Frequenz $\omega_{\text{gl}} = 0 \text{ s}^{-1}$ entspricht. Hierzu wurden die Nullstellen der in Abb. ?? aufgetragenen Messwerte genommen und gemittelt.

2.3.3 Gegen-gesinnte Schwingung

Bei der gegen-gesinnten Bewegung der Kupferfeder ergab sich, dass die Schwingungsdauer $T_{\text{geg}} = 0 \text{ s}$ bzw. die Frequenz $\omega_{\text{geg}} = 0 \text{ s}^{-1}$ entspricht. Hierzu wurden die Nullstellen der in Abb. ?? aufgetragenen Messwerte genommen und gemittelt.

2.3.4 Schwebung

Die Messung ergab, dass die Schwingungsdauer $T_{\text{S}} = 0 \text{ s}$ bzw. die Frequenz $\omega_{\text{S}} = 0 \text{ s}^{-1}$ im Falle der Schwebung entspricht. Hierzu wurden die Nullstellen der in Abb. ?? aufgetragenen Messwerte genommen und gemittelt.

2.3.5 Relative Frequenzaufspaltung

Einsetzen in Gl. (4) liefert eine relative Frequenzaufspaltung von $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$ über die ermittelten Schwingungsdauern. Über die Näherung aus Gl. (5) erhalten wir hierbei eine Aufspaltung von $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$.

2.4 Messung mit Stahlfeder als Kopplung

2.4.1 Statische Ermittlung des Kopplungsgrades

Der Kopplungsgrad wird durch Einsetzen in Gl. (1) statisch bestimmt. Dies liefert einen Wert von $k =$. Hierfür wurden neun Wertepaare verwendet.

2.4.2 Gleich-gesinnte Schwingung

Für die gleich-gesinnte Bewegung bei der Kupferfeder ergab sich, dass die Schwingungsdauer $T_{\text{gl}} = 0 \text{ s}$ bzw. die Frequenz $\omega_{\text{gl}} = 0 \text{ s}^{-1}$ entspricht. Hierzu wurden die Nullstellen der in Abb. ?? aufgetragenen Messwerte genommen und gemittelt.

2.4.3 Gegen-gesinnte Schwingung

Bei der gegen-gesinnten Bewegung der Kupferfeder ergab sich, dass die Schwingungsdauer $T_{\text{geg}} = 0 \text{ s}$ bzw. die Frequenz $\omega_{\text{geg}} = 0 \text{ s}^{-1}$ entspricht. Hierzu wurden die Nullstellen der in Abb. ?? aufgetragenen Messwerte genommen und gemittelt.

2.4.4 Schwebung

Die Messung ergab, dass die Schwingungsdauer $T_{\text{S}} = 0 \text{ s}$ bzw. die Frequenz $\omega_{\text{S}} = 0 \text{ s}^{-1}$ im Falle der Schwebung entspricht. Hierzu wurden die Nullstellen der in Abb. ?? aufgetragenen Messwerte genommen und gemittelt.

2.4.5 Relative Frequenzaufspaltung

Einsetzen in Gl. (4) liefert eine relative Frequenzaufspaltung von $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$ über die ermittelten Schwingungsdauern. Über die Näherung aus Gl. (5) erhalten wir hierbei eine Aufspaltung von $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$.

2.5 Ergebnisse und Diskussion

Die folgende Tabelle Tab. ?? zeigt die Ergebnisse der Messungen für die verschiedenen Kopplungen. Hier ist ebenfalls der dynamisch bestimmte Kopplungsgrad aufgelistet, welcher sich durch Einsetzen in Gl. (2) berechnen ließ, sowie die durch:

$$T_{\text{S}} = \frac{4\pi}{\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}}} \quad (6)$$

berechneten Schwebungsdauern.

2.6 Schlussfolgerung

1 nice Messung

3 Doppelpendel

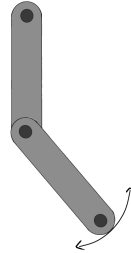
3.1 Aufbau und Funktionsweise

Das Doppelpendel besteht aus zwei gekoppelten Pendeln. Hierbei ist das obere Pendel an einem festen Aufhängepunkt angebracht. Das Untere hin-

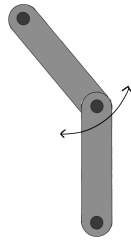
gegen ist an dem beweglichen Massepunkt des oberen Pendels befestigt. Die Abbildungen 2a) bis 2d) zeigen die Funktionsweise des Doppelpendels. Hier sind die verschiedenen Auslenkungsmöglichkeiten zu erkennen, wobei die Massepunkte der einzelnen Pendel sich jeweils auf Kreisbahnen um deren Aufhängepunkte bewegen können.



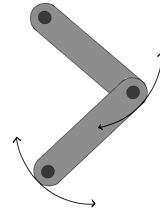
(a) Doppelpendel in Ruhelage



(b) Oberes Pendel in Ruhelage, Unteres ausgelenkt



(c) Unteres Pendel in Ruhelage, Oberes ausgelenkt



(d) Beide Pendel ausgelenkt

3.2 Beobachtung bei Auslenkung

Bei der Auslenkung des Doppelpendels lässt sich ein nichtlineares bzw. chaotisches Verhalten erkennen, da nach nur wenigen Schwingungen, bei nahezu gleichen Anfangsbedingungen, bereits stark unterschiedliche Bewegungen beobachtet wurden. Ein periodisches Verhalten ließ sich hierbei nicht erkennen.

Die Ausnahmen hierzu bilden die Schwingungen, bei Auslenkungen ähnlich zu den, wie sie in Abb. 2a) und Abb. 2d) dargestellt sind. Bei der ersten linearen Bewegung bewegt sich der Massepunkt des unteren Pendels auf einer Kreisbahn um den Aufhängepunkt des Oberen. Die beiden Pendel liegen bei dieser Bewegung parallel. Für den zweiten Fall einer linearen Bewegung

sind die beide Pendel um den gleichen Winkel, jedoch in entgegengesetzte Richtung ausgelenkt, wie es in Abb. 2d dargestellt ist (hier $\pm 45^\circ$). Hier bewegt sich der Massepunkt des unteren Pendels weder nach links noch nach rechts, sondern nur näher dem Aufhängepunkt des oberen Pendels. Dieser Effekt war jedoch nur bei einem Auslenkungswinkel von ca. $\pm 10^\circ$ zu beobachten. Bei größeren Auslenkungen traten erneut nichtlineare Bewegungen auf.

Diese linearen Bewegung ähneln der gleich- bzw. gegen-gesinnten Bewegung der gekoppelten Fadenpendel.