Stoßgesetze
Einführung

Der zentrale Stoß einer Stahlkugel auf eine andere lässt sich bequem experimentell untersuchen, wenn man die Kugeln an Fäden aufhängt. Die durch den Stoß erzielte Auslenkung eines solchen Fadenpendels ist ein Maß für den auf die gestoßene Kugel übertragenen Impuls (ballistisches Pendel) und damit bei bekannter Kugelmasse für die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß.

Theorie des Stoßes

Die gemeinsame Normale auf die Oberflächen der zusammenstoßenden Körper in ihrem Berührungspunkt wird als Stoßgerade bezeichnet. Wir sprechen von einem geraden Stoß, wenn die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte der zusammenstoßenden Körper vor dem Stoß parallel zur Stoßgeraden sind. Andernfalls sprechen wir von einem schiefen Stoß. Ein Stoß erfolgt zentral, wenn beim Zusammenstoß die Schwerpunkte der beteiligten Körper auf der Stoßgeraden liegen. Die Bewegung beider Stoßpartner nach dem Stoß hängt davon ab, wie viel der vor dem Stoß vorhandenen kinetischen Energie beim Stoß zur Anregung innerer Energie (z.B. Wärme, plastische Deformation) verbraucht wird. Im folgenden werden die Stoßprozesse zunächst möglichst allgemein formuliert.

1 Einführung von Schwerpunktskoordinaten

Die beiden Kugeln K_1 und K_2 mit den Massen m_1 und m_2 mögen bezüglich eines Koordinatensystems, das starr mit dem Labor verbunden ist (Laborsystem), folgende die Bewegung charakterisierende Größen besitzen:

	vor dem Stoß	nach dem Stoß
Geschwindigkeit, Impuls, Energie von K_1:	$\vec{v}_1$, $\vec{p}_1$, E_1	$\vec{v}_1'$, $\vec{p}_1'$, E_1'
Geschwindigkeit, Impuls, Energie von K_2:	$\vec{v}_2$, $\vec{p}_2$, E_2	$\vec{v}_2'$, $\vec{p}_2'$, E_2'
Schwerpunktsgeschwindigkeit	$\vec{v}_s$	$\vec{v}_s'$
Relativgeschwindigkeit	$\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$	$\vec{v}_r' = \vec{v}_1' - \vec{v}_2'$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt

$$E_1 + E_2 + Q \quad = \quad E_1' + E_2' + Q'. \tag{1}$$

Q und Q' bedeuten dabei die inneren Energien des Systems vor und nach dem Stoß. Die Differenz $\Delta Q = Q' - Q$ gibt den Teil der kinetischen Energie an, der beim Stoß in innere Energie umgesetzt wird. Damit lautet der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 \;+\; \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \;=\; \frac{1}{2}m_1 {v'_1}^2 \;+\; \frac{1}{2}m_2 {v'_2}^2 \;+\; \Delta Q. \tag{2}$$

Wir spalten jetzt die Schwerpunktsgeschwindigkeit ab:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_s + \widehat{\vec{v}_1} & \qquad \vec{v}_2 &= \vec{v}_s + \widehat{\vec{v}_2} \\ \vec{v}'_1 &= \vec{v}'_s + \widehat{\vec{v}'_1} & \qquad \vec{v}'_2 &= \vec{v}'_s + \widehat{\vec{v}'_2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Der Energiesatz lautet dann in den neuen Größen (warum fallen die gemischten Terme weg?):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_s^2 \;+\; \frac{1}{2}m_1\, \widehat{v_1}^2 \;+\; \frac{1}{2}m_2\, \widehat{v_2}^2 \\ &\quad= \; \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, {v'_s}^2 \;+\; \frac{1}{2}m_1\, \widehat{v'_1}^2 \;+\; \frac{1}{2}m_2\, \widehat{v'_2}^2 \;+\; \Delta Q. \end{aligned} \tag{4}$$

Es ist aber (warum?)

$$\vec{v}_s \;=\; \vec{v}'_s, \tag{5}$$

so dass beim Stoß der erste Term beider Seiten von (4) unverändert bleibt und nur die anderen Energieterme zum eigentlichen Stoßprozess beitragen.

Man beschreibt deshalb den Stoß in einem Koordinatensystem, in dem $\vec{v}_s = 0$ ist. Ein solches System ist das Schwerpunktsystem (S-System) mit dem Ursprung im Schwerpunkt, das sich gegenüber dem Laborsystem (L-System) mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\vec{v}_s$ bewegt.

Zur Unterscheidung von den Größen im L-System erhalten die entsprechenden Größen im S-Sytem ein Dach ($\widehat{\ }$). Die Transformationsgleichungen zwischen den Koordinatensystemen sind durch (3) gegeben.

Im S-System lauten Energie- und Impulssatz

$$\widehat{E_1} + \widehat{E_2} \;=\; \widehat{E'_1} + \widehat{E'_2} + \Delta Q, \tag{6}$$

$$\widehat{\vec{p}_1} \;=\; -\,\widehat{\vec{p}_2} \qquad \text{und} \qquad \widehat{\vec{p}'_1} \;=\; -\,\widehat{\vec{p}'_2}. \tag{7}$$

2 Einführung des Stoßkoeffizienten

Wir bezeichnen die Summe der kinetischen Energien im S-System vor und nach einem zentralen Stoß mit E_{ges} bzw. E'_{ges} und setzen

$$\widehat{E'}_{ges} \;=\; \sigma^2 \widehat{E}_{ges}. \tag{8}$$

Wegen $0 \leq \widehat{E}'_{ges} \leq \widehat{E}_{ges}$ folgt $\qquad 0 \leq \sigma \leq 1.$

Wir nennen σ den Stoßkoeffizienten. σ ist keine Konstante, sondern hängt von der Art der Stoßpartner und deren Impulsen ab. Wegen (6) und (8) bedeutet:

$$\begin{array}{rcl}
\sigma = 1: & \Delta Q = 0 & \text{der Stoß ist vollkommen elastisch,} \\
\sigma = 0: & \Delta Q = \widehat{E}_{ges} & \text{der Stoß ist vollkommen unelastisch,} \\
0 < \sigma < 1: & 0 < \Delta Q < \widehat{E}_{ges} & \text{der Stoß ist teilweise elastisch.}
\end{array}$$

Insbesondere ist im S-System beim vollkommen unelastischen Stoß die gesamte kinetische Energie nach dem Stoß null.

3 Die Stoßgesetze

Aus (6) – (8) folgt für die Impulse beim geraden zentralen Stoß im S-System:

$$\widehat{\vec{p}_1'} \;=\; -\,\sigma\widehat{\vec{p}_1} \qquad \text{und} \qquad \widehat{\vec{p}_2'} \;=\; -\,\sigma\widehat{\vec{p}_2}. \tag{9}$$

Umgerechnet auf das L-System erhält man aus (9) und (3) für die Relativgeschwindigkeiten:

$$\vec{v}_1' - \vec{v}_2' \;=\; -\,\sigma(\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \tag{10}$$

Der zentrale Stoß wird somit vollständig durch die nachfolgenden Gleichungen beschrieben:

$$\vec{v}_s' \;=\; \vec{v}_s, \qquad \vec{v}_r' \;=\; -\,\sigma\vec{v}_r, \qquad 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{11}$$

Für einen geraden zentralen Stoß erhält man aus (3) und (9) für die Geschwindigkeiten der Massen nach dem Stoß:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1' &= \vec{v}_s + \widehat{\vec{v}_1'} \;=\; \vec{v}_s - \sigma\widehat{\vec{v}_1} \;=\; \vec{v}_s - \sigma\,(\vec{v}_1 - \vec{v}_s) \\
&= (1+\sigma)\,\vec{v}_s - \sigma\vec{v}_1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Analoges folgt für $\vec{v}_2'$. Insgesamt gilt also für den geraden zentralen Stoß:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1' &= (1+\sigma)\vec{v}_s - \sigma\vec{v}_1 \\
\vec{v}_2' &= (1+\sigma)\vec{v}_s - \sigma\vec{v}_2 \\
\text{mit:} & \\
\vec{v}_s &= \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

4 Gerader zentraler Stoß beim ballistischen Pendel

Der Stoßvorgang, wie er im Praktikum realisiert ist, lässt sich in guter Näherung als vollkommen elastischer, gerader zentraler Stoß beschreiben. Es ist also $\sigma = 1$. Da die zweite Kugel beim Stoß ruht, gilt ferner $\vec{v}_2 = 0$. Unter diesen speziellen Voraussetzungen geht (13) über in

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_1 \qquad \text{und} \qquad \vec{v}_2' = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_1. \tag{14}$$

Behandelt man die beiden Kugeln als mathematische Pendel, so erhält man einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v beim Durchgang durch die Nullage (d.h. im Augenblick des Stoßes) und der Maximalauslenkung a. Nach dem Energiesatz gilt:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \text{const.} \tag{15}$$

Im Zustand maximaler Auslenkung a ist:

$$E_{kin} = 0 \qquad \text{und} \qquad E_{pot} = \frac{1}{2}Da^2 \qquad \text{mit} \qquad D = \frac{mg}{l}. \tag{16}$$

Beim Durchgang durch die Nullage ist dagegen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\,mv^2 \qquad \text{und} \qquad E_{pot} = 0. \tag{17}$$

Aus (15) – (17) ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,\frac{mg}{l}\,a^2 \qquad \text{und daher} \qquad v = \sqrt{g/l}\,a. \tag{18}$$

Die Maximalauslenkungen a der Kugeln sind also den Geschwindigkeiten v beim Durchgang durch die Nullage proportional, und man erhält aus (14) den entsprechenden Zusammenhang zwischen den Auslenkungen der gestoßenen und stoßenden Kugel:

$$a_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\,a_1. \tag{19}$$

5 Gerader zentraler Stoß einer rollenden Kugel

Rollt eine Kugel der Masse m und des Radius r eine schiefe Ebene aus der Höhe h hinunter, so wird die anfängliche potentielle Energie in kinetische Energie der Translation und der Rotation umgewandelt. Es gilt daher:

$$mgh = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,J\omega^2. \tag{20}$$

Für den Stoß nutzbar ist nur die kinetische Energie der Translation. Um den Anteil ε dieser nutzbaren Energie an der Gesamtenergie zu finden, setzen wir

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = \varepsilon\,mgh. \tag{21}$$

Zur Berechnung von ε bestimmen wir zunächst das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt. Es beträgt (Herleitung!)

$$J = \frac{2}{5}\,mr^2. \tag{22}$$

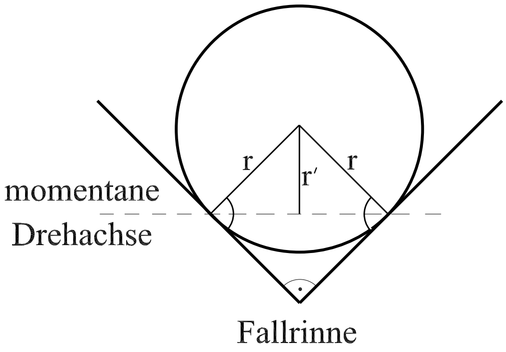

Abbildung 1: In einer rechtwinkligen Rinne abrollende Kugel

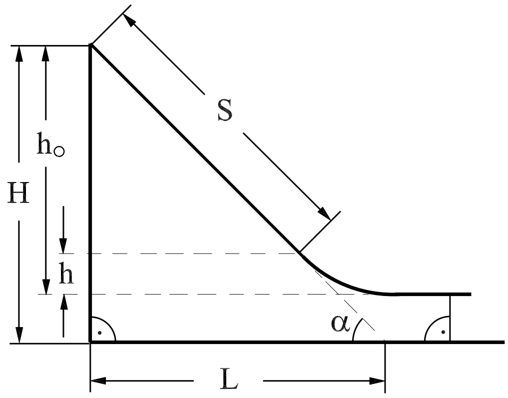

Abbildung 2: Skizze der Fallrinne

Im Experiment rollt die Kugel in einer Fallrinne (siehe Abb. 2) auf einem Radius $r' = r/\sqrt{2}$ ab; es ist daher:

$$\omega = \frac{v}{r'} = \sqrt{2}\,\frac{v}{r}. \tag{23}$$

Man erhält aus (20) durch Einsetzen von J und ω nach kurzer Zwischenrechnung

$$mgh = \frac{9}{10}mv^2 \tag{24}$$

und somit nach Definition

$$\varepsilon = \frac{5}{9}. \tag{25}$$

Die Endgeschwindigkeit der abrollenden Kugel beträgt:

$$v_1 = \sqrt{\varepsilon\, 2\, g\, h}. \tag{26}$$

Diese ist nach (18) äquivalent einem maximalen Pendelausschlag

$$a_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}v_1 = \sqrt{\varepsilon\, 2\, l\, h}. \tag{27}$$

Folglich ist die Auslenkung der gestoßenen Kugel nach (19):

$$a_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\varepsilon\, 2\, l\, h} \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon = \frac{5}{9}. \tag{28}$$