Elektrische Resonanz
Einführung

Ein aus Selbstinduktion, Kapazität und ohmschem Widerstand bestehender Stromkreis bildet ein schwingungsfähiges System mit einer bestimmten Eigenfrequenz. Von einer angelegten Wechselspannung kann solch ein Kreis zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Stimmt die Frequenz der anregenden Wechselspannung mit der Eigenfrequenz überein, so kommt es zur elektrischen Resonanz.

Resonanzkreise

1 Serienresonanzkreis

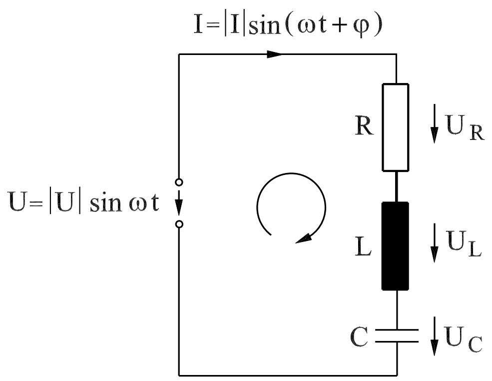

Abbildung 1: Serienresonanzkreis

Abb. 1 zeigt die Schaltung eines Serienresonanzkreises, bei dem Induktivität L, Kapazität C und ohmscher Widerstand R in Serie an einer Spannungsquelle liegen. Zur Beschreibung des Kreises benutzt man zweckmäßigerweise die in Versuch E 1 beschriebene komplexe Darstellung von Strom, Spannung und Widerstand. Anwendung der Maschenregel auf den Serienkreis ergibt:

$$U = U_R + U_L + U_C \tag{1}$$

$$U = (R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C})\, I = Z\, I \tag{2}$$

Der Strom I in (2) ist in allen drei Bauelementen des Serienresonanzkreises Spule, ohmscher Widerstand und Kondensator gleich groß. Aus (2) ergibt sich:

$$|U| \quad = \quad \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot |I| \quad = \quad |Z| \cdot |I| \tag{3}$$

bzw.

$$|I| \quad = \quad \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{4}$$

Dabei könnten anstelle der Beträge auch die Effektivwerte von Spannung und Strom geschrieben werden.

(4) hat die Form des Ohmschen Gesetzes, wobei der Wurzelterm den Scheinwiderstand $|Z|$ (Betrag der Impedanz Z) der Reihenschaltung der Blindwiderstände L und C und des ohmschen Widerstandes R darstellt.

$$|Z(\omega)| \quad = \quad \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{5}$$

Für die Resonanzfrequenz ω_0, die durch die Thomsonsche Schwingungsformel

$$\omega_0^2 \quad = \quad \frac{1}{LC} \qquad \text{bzw.} \qquad \omega_0 \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6}$$

gegeben ist, hat $|Z|$ den kleinsten, rein ohmschen Wert

$$|Z(\omega_0)| \quad = \quad |Z|_{min} \quad = \quad R \tag{7}$$

und damit $|I|$ den maximalen Wert (Stromresonanz)

$$|I(\omega_0)| \quad = \quad |I|_{max} \quad = \quad \frac{|U|}{R} \tag{8}$$

Für (4) ist vorausgesetzt, dass U von einer Konstantspannungsquelle geliefert wird, deren Klemmenspannung sich durch erhöhte Strombelastung bei Resonanz nicht ändert. In Abb. 2 sind $|Z|$ und $|I|$ als Funktion der Frequenz aufgetragen.

Die Güte Q des Reihenresonanzkreises ist definiert als die Resonanzüberhöhung der Ladungsamplitude. Daraus ergibt sich unter der Voraussetzung kleiner Dämpfung (auf den Nachweis der Gültigkeit von (9) und (10) wird hier aus Platzgründen verzichtet):

$$Q \quad = \quad \frac{\omega_0 L}{R} \quad = \quad \frac{1}{\omega_0 C R} \tag{9}$$

Die Güte bestimmt auch die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ (siehe Abb. 2) der Resonanzkurve. Näherungsweise ergibt sich für $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega \quad = \quad \frac{R}{L} \quad = \quad \omega_0^2 C R \tag{10}$$

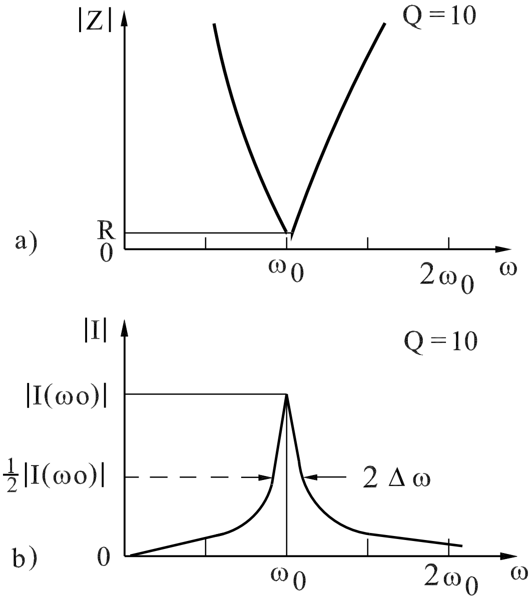

Abbildung 2: Frequenzabhängigkeit a) des Scheinwiderstandes $|Z|$ und b) des Stromes $|I|$ beim Serienresonanzkreis

und damit

$$Q \quad = \quad \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{11}$$

Im Resonanzfall erhält man mit

$$|Z_L| \;=\; \omega L \qquad \text{und} \qquad |Z_C| \;=\; \frac{1}{\omega C} \tag{12}$$

für die Spannungen an der Spule bzw. am Kondensator

$$|U_L| \quad = \quad |Z_L| \cdot |I(\omega_0)| \quad = \quad \frac{\omega_0 L}{R}\,|U| \quad = \quad Q\,|U| \tag{13}$$

$$|U_C| \quad = \quad |Z_C| \cdot |I(\omega_0)| \quad = \quad \frac{1}{\omega_0 C R}\,|U| \quad = \quad Q\,|U| \tag{14}$$

Die Spitzenspannungen an Spule und Kondensator sind daher im Resonanzfall gleich groß und übersteigen die insgesamt an die Reihenschaltung angelegte Spannungsamplitude $|U|$ um den Gütefaktor Q. Dass die Gesamtspannung U im Resonanzfall dennoch nur dem Spannungsabfall U_R am ohmschen Widerstand entspricht, liegt daran, dass U_L und U_C gegenüber dem gemeinsamen Strom I um $\pi/2$ bzw. $-\pi/2$, also gegeneinander um π phasenverschoben sind, und sich daher gegenseitig kompensieren.

Da sich Frequenzen mit der für Resonanzuntersuchungen erforderlichen Auflösung experimentell nicht so leicht realisieren lassen, wird im Versuch

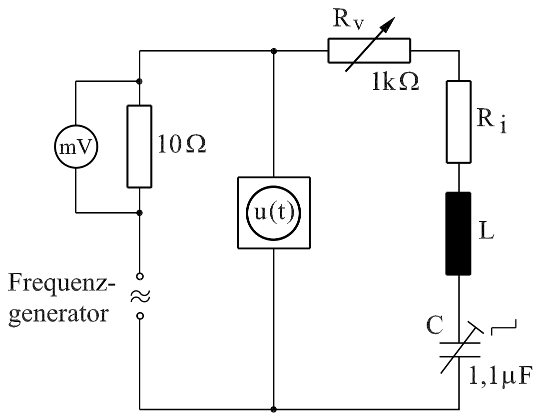

Abbildung 3: Serienresonanzkreis, experimenteller Aufbau

(siehe Abb. 3) die Resonanz nicht durch Variation von ω sondern bei festem ω durch Variation der Kapazität C durchgeführt. Die Resonanzkurve wird also in der Form $|I| = f(1/C)$ gemessen. Weiter ist beim Verlustwiderstand R des Kreises der ohmsche Widerstand der Spule R_i zu berücksichtigen (der Beitrag des $10\,\Omega$-Widerstandes bleibt zunächst unberücksichtigt), so dass sich ergibt:

$$R \quad = \quad R_v + R_i \tag{15}$$

Sind C_1 und C_2 diejenigen Kapazitätswerte, für die der Strom das $(1/\sqrt{2})$-fache des Maximums beträgt, so hängt die dadurch definierte Breite der Resonanzkurve mit dem Verlustwiderstand R des Kreises auf folgende Weise zusammen:

$$R \quad = \quad \frac{1}{2\omega_0}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) \tag{16}$$

2 Parallelresonanzkreis

Auch eine Parallelschaltung von Kapazität C, Widerstand R und Induktivität L (Parallelschwingkreis, Abb. 4) zeigt Resonanzverhalten.

Der Parallelschaltung werde der amplitudenkonstante Strom I zugeführt. Anwendung der Knotenregel ergibt:

$$I \quad = \quad I_R + I_L + I_C \tag{17}$$

$$I \quad = \quad \frac{1}{R}U + \frac{1}{i\omega L}U + i\omega C\,U \quad = \quad Y\,U \tag{18}$$

U ist die an Widerstand, Spule und Kondensator anliegende Spannnung. Sie ist wegen der Parallelschaltung für alle drei gleich. Weiter ist in (18) der Scheinleitwert Y (Admittanz) eingeführt worden, da bei Parallelschaltungen bequemer mit Leitwerten als mit Widerständen gerechnet werden kann.

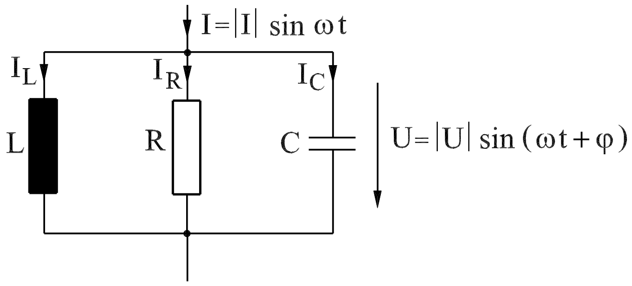

Abbildung 4: Parallelresonanzkreis

Für die Frequenzabhängigkeit der Spannungsamplitude ergibt sich aus (18)

$$|U| = \frac{|I|}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \tag{19}$$

worin der Wurzelterm den Scheinleitwert $|Y|$ (auch Betrag der Admittanz) der Parallelschaltung von R, L und C darstellt:

$$|Y| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \tag{20}$$

Hieraus folgt, daß der Parallelschwingkreis bei gleichem L und C die gleiche, durch die Thomsonsche Schwingungsformel gegebene Resonanzfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \text{bzw.} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{21}$$

wie der Reihenschwingkreis hat. Bei Resonanz hat der Scheinleitwert einen rein ohmschen Minimalwert

$$|Y(\omega_0)| = |Y|_{min} = \frac{1}{R} \tag{22}$$

und die Spannungsamplitude demzufolge ein Maximum (Spannungsresonanz)

$$|U(\omega_0)| = |U|_{max} = |I|\,R \tag{23}$$

Der Gütefaktor beim Parallelschwingkreis ergibt sich als Resonanzüberhöhung des Flusses Φ durch die Spule zu (ohne Beweis):

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = R\omega_0 C \tag{24}$$

Anders als beim Reihenresonanzkreis steigt also beim Parallelresonanzkreis die Güte mit dem Widerstand R.

Die Einzelströme I_L und I_C sind bei Resonanz aufgrund der Spannungsresonanz maximal und um den Gütefaktor höher als der Gesamtstrom $|I|$

$$|I_L(\omega_0)| \quad = \quad \frac{1}{\omega_0 L}\,|U| \quad = \quad \frac{R}{\omega_0 L}\,|I| \quad = \quad Q\,|I| \tag{25}$$

$$|I_C|(\omega_0)| \quad = \quad \omega_0 C\,|U| \quad = \quad R\omega_0 C\,|I| \quad = \quad Q\,|I| \tag{26}$$

Im Praktikum wird der Versuch so geführt, dass bei fester Spannung und fester Frequenz der Strom in Abhängigkeit von der Kapazität gemessen wird. Anstelle der Spannungsüberhöhung wird also ein Minimum des Stromes gemessen (siehe Abb. 5).

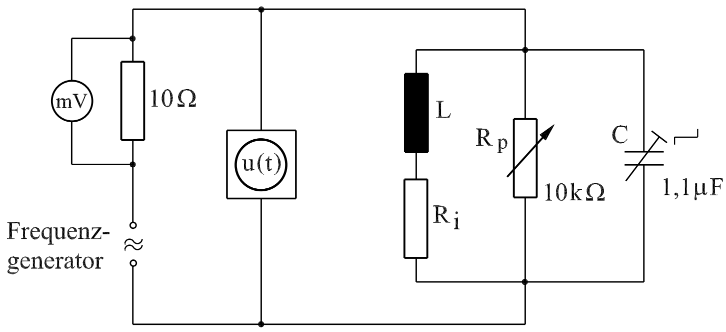

Abbildung 5: Parallelresonanzkreis, experimenteller Aufbau

Damit Abb. 4 und Abb. 5 verglichen werden können, betrachtet man den Innenwiderstand R_i der Spule als einen zur Induktivität L parallel geschalteten Ersatzwiderstand R'_p. Dann muss gelten:

$$i\omega L \,+\, R_i \quad = \quad \frac{i\omega L\, R'_p}{i\omega L \,+\, R'_p} \tag{27}$$

und daher

$$R'_p \quad = \quad \frac{\omega^2 L^2}{R_i} \,-\, i\omega L \tag{28}$$

Für die vorliegende Dimensionierung ist der Imaginärteil von R'_p klein gegen den Realteil, $i\omega L$ wird in erster Näherung gegen den Realteil vernachlässigt:

$$R'_p \quad = \quad \frac{\omega^2 L^2}{R_i} \tag{29}$$

Der gesamte Verlustwiderstand des Kreises beträgt:

$$R \quad = \quad \frac{R_p R'_p}{R_p \,+\, R'_p} \tag{30}$$

Speziell gilt im Falle $R_p = \infty$:

$$R = R'_p = \frac{\omega^2 L^2}{R_i} \tag{31}$$

Die Resonanzkurve wird in der Form $I = f(C)$ dargestellt. Der Verlustwiderstand R des Kreises lässt sich aus der Resonanzkurve ablesen. Ist ΔC die Differenz derjenigen Kapazitätswerte C_1 und C_2, für die der Strom das $\sqrt{2}$-fache des Minimums beträgt, so besteht zwischen dieser Breite ΔC und dem Verlustwiderstand des Kreises R des Kreises folgende Beziehung:

$$R = \frac{2}{\omega_0 \, \Delta C} \tag{32}$$