Jo-Jo und Kreisel
Einführung

Das Jo-Jo ist als Spielzeug sicher jedem bekannt. Nach dem gleichen Prinzip funktioniert das Maxwellsche Fallrad. Es ist eine an einer dünnen Achse aufgehängte Schwungscheibe, die beim Abrollen eine kombinierte Fall- und Drehbewegung ausführt. Das Fallrad eignet sich gut zum Studium sowohl der Drehbewegung als auch der verlangsamten Fallbewegung.

Kreiselbewegungen faszinieren jeden Beobachter, und darum werden Kreisel so gerne als Spielzeug benutzt. Darüber hinaus sind die Anwendungen von Kreiseln in der Technik nicht mehr fortzudenken, etwa als Stabilisatoren im Schiffsbau oder beim Kreiselkompass. In der modernen Luft- und Raumfahrt finden Kreisel Anwendung als künstlicher Horizont und beim Autopiloten.

1 Maxwellsches Fallrad (Jo-Jo)

Abbildung 1 zeigt das Maxwellsche Fallrad von der Seite gesehen. Die einzelnen Wicklungen der Schnur liegen auf der Achse nebeneinander. Wenn man die Schnur um die Achse des Rades wickelt, das Schnurende festhält und das Rad los lässt, dann rollt es sich von der Schnur ab. Dabei verläuft die momentane Drehachse parallel zur Symmetrieachse durch einen Punkt D, der etwa in der Mitte des Fadens liegt.

Durch die Schwerkraft erfährt das Rad der Masse m ein Drehmoment M

$$M = R\,m\,g, \tag{1}$$

wobei R der Abrollradius ist. Nach der Newtonschen Bewegungsgleichung ist das äußere Drehmoment gleich dem Produkt aus dem Trägheitsmoment J bezüglich der momentanen Drehachse und der Winkelbeschleunigung $d\omega/dt$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist:

$$M = J\,\frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

Das Trägheitsmoment J ist nach dem Steinerschen Satz (siehe Versuch M3, (39)) gleich der Summe aus J_S (Trägheitsmoment bezüglich der durch den Schwerpunkt des Rades gehenden Achse) und mR^2, so dass man erhält:

$$\frac{d\omega}{dt}\,(J_S + mR^2) = R\,m\,g. \tag{3}$$

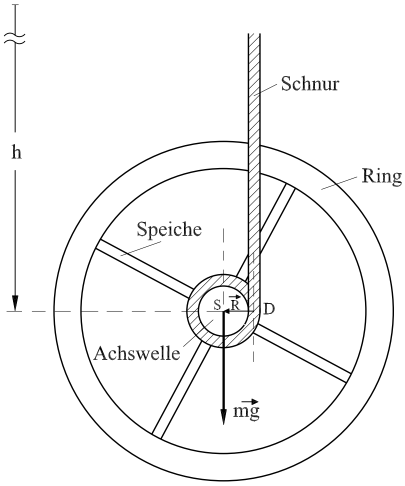

Abbildung 1: Maxwellsches Fallrad

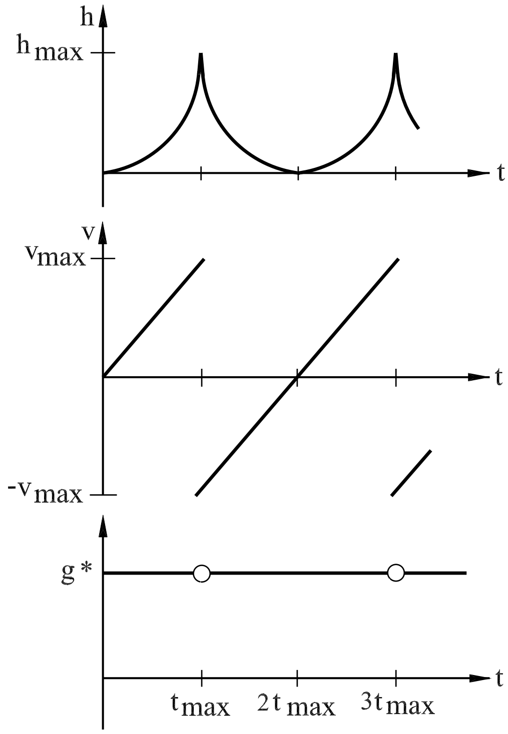

Abbildung 2: Fallweg h, Fallgeschwindigkeit v und Fallbeschleunigung g^* in Abhängigkeit von der Zeit t

Ist h der Fallweg, wobei als Nullpunkt der obere Ruhepunkt gewählt sei, dann lässt sich die Winkelgeschwindigkeit ω durch die Fallgeschwindigkeit $v = dh/dt$ ausdrücken. Da die Fallgeschwindigkeit des Rades gleich der Bahngeschwindigkeit eines Punktes im Abstand R von der momentanen Drehachse ist, folgt:

$$\frac{dh}{dt} = \omega R. \tag{4}$$

Für die Bewegungsgleichung des Fallrades erhält man so

$$\frac{d^2h}{dt^2} = g \frac{m R^2}{J_S + m R^2} = g^* = \text{const.} \tag{5}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $h(0) = 0$ und $\frac{dh}{dt}(0) = 0$ folgt durch zweimalige Integration:

$$h(t) = \frac{1}{2} g \frac{m R^2}{J_S + m R^2} t^2 = \frac{1}{2} g^* t^2. \tag{6}$$

In Abb. 2 sind Fallweg h, -geschwindigkeit v und -beschleunigung g^* des Maxwellschen Fallrades in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Ist t_{max} die Zeit, die zum

Durchlaufen des maximalen Fallweges h_{max} erforderlich ist, dann treten für ungerade Vielfache von t_{max} Unstetigkeiten in h, v und g^* auf.

Das Trägheitsmoment J_S des Maxwellschen Rades setzt sich additiv zusammen aus denjenigen von Ring, Speichen, Buchse und Achswelle. Dabei kann die Buchse bei der Rechnung vernachlässigt werden. Die Bestandteile des Rades sind Hohl- und Vollzylinder, deren Trägheitsmomente bezüglich Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen, wie folgt zu berechnen sind:

1. Hohlzylinder bezüglich seiner Symmetrieachse:

$$J = \frac{1}{2}\pi H \varrho (R_a^4 - R_i^4). \tag{7}$$

2. Hohlzylinder bezüglich der Achse senkrecht zur Symmetrieachse:

$$J = \pi H \varrho \left\{ \frac{1}{12} H^2 (R_a^2 - R_i^2) + \frac{1}{4}(R_a^4 - R_i^4) \right\}. \tag{8}$$

Dabei sind ϱ die Dichte, H die Höhe, R_a der Außendurchmesser, und R_i der Innendurchmesser. ϱ lässt sich aus Masse und Gesamtvolumen des Rades bestimmen.

2 Theorie der Kreiselbewegungen

Rotationsbewegungen, bei denen sowohl die äußere Halterung der Drehachse als auch die Festlegung einer bestimmten Achsenrichtung im starren Körper fehlt, heißen Kreiselbewegungen. Kreiselbewegungen werden durch folgende, im allgemeinen nicht zusammenfallende Achsen beschrieben.

1. **Figurenachse** (bei symmetrischen Kreiseln): geometrisch ausgezeichnete Symmetrieachse des Körpers.

2. **momentane Drehachse**: Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

3. **Drehimpulsachse**: Richtung des Drehimpulses $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$; Man erhält $\vec{L}$ durch skalare Multiplikation des Tensors J mit dem Vektor $\vec{\omega}$. Damit sind i.a. die Richtungen von $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ verschieden. Liegt $\vec{\omega}$ jedoch in einer Hauptträgheitsachse, dann ist J ein Skalar und $\vec{L}$ hat die gleiche Richtung wie $\vec{\omega}$.

Während die Figurenachse aus der Symmetrie des Kreisels sofort erkennbar ist, ist das Auffinden der momentanen Drehachse und der Drehimpulsachse schwieriger.

Wirkt auf einen Kreisel ein Drehmoment $\vec{M}$, so hat das eine Änderung des Drehimpulses zur Folge:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{9}$$

Die Theorie der Kreiselbewegungen behandelt die Integration dieser Bewegungsgleichung.

2.1 Kräftefreier Kreisel

Wird der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt, dann bewirkt die Erdanziehung kein Drehmoment $\vec{M}$, und es liegt ein kräftefreier Kreisel vor. Dann folgt aus (9)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \vec{L} = \text{const.} \tag{10}$$

Beim kräftefreien Kreisel ist der Drehimpuls nach Betrag und Richtung konstant.

1. Nur bei einem **kräftefreien Kugelkreisel** (ein Kugelkreisel ist ein Körper, dessen Trägheitsellipsoid kugelförmig ist) folgt aus der Konstanz von $\vec{L}$ wegen $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ auch die Konstanz des Vektors ω, da das Trägheitsmoment bei einem Kugelkreisel nur ein skalarer Faktor ist. Wird ein Kugelkreisel um eine Achse in Rotation versetzt, so ist diese Achse zugleich auch die Drehimpulsachse. Alle durch den Massenmittelpunkt gehenden Achsen sind gleichberechtigt.

2. Beim **kräftefreien symmetrischen Kreisel** sind die Verhältnisse komplizierter. Unter einem symmetrischen Kreisel versteht man einen Körper, dessen Trägheitsellipsoid rotationssymmetrisch ist.

   Nach der Eulerschen Theorie des kräftefreien symmetrischen Kreisels ist die Drehimpulsachse raumfest und sowohl die Figurenachse als auch die momentane Drehachse können auf Kegelmänteln um die Drehimpulsachse rotieren. Diese Bewegung heißt 'Nutation' (Sehr häufig findet man in der Literatur den schon von Euler geprägten Begriff 'reguläre Präzession' für diese Bewegung des kräftefreien Kreisels).

   Eine solche Bewegung sollte auch die Erde ausführen. Nimmt man an, dass das Trägheitsmoment bezüglich der Nord-Süd-Achse um etwa 0,3% größer ist als das bezüglich einer Achse durch die Äquatorebene, dann sollte die momentane Drehachse mit einer Periode von 10 Monaten um die Figurenachse präzedieren. Der Radius des Kreises, auf dem die momentane Drehachse den Erdmantel durchstößt, sollte etwa 6 m betragen.

   Tatsächlich werden Bewegungen der momentanen Drehachse um den geometrischen Nordpol (Durchstoßpunkt der Figurenachse) beobachtet, die der Eulerschen Theorie entsprechen, jedoch sind die wirklichen Verhältnisse sehr viel komplizierter.

   Die Abmessungen der Bewegung der Figurenachse um die Drehimpulsachse sind sehr viel geringer und bis heute nicht nachgewiesen.

3. Die Beschreibung der allgemeinen Bewegung des **kräftefreien unsymmetrischen Kreisels** ist nicht mehr elementar möglich, wohl aber Drehungen um jede der drei Hauptachsen. Auf die Diskussion der Bewegung für diesen Fall wird verzichtet.

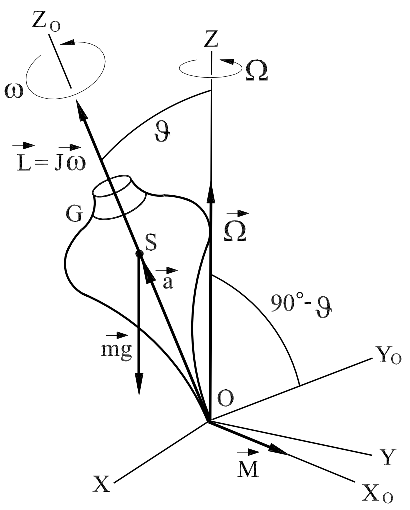

Abbildung 3: Kreisel unter dem Einfluss eines äußeren Drehmoments

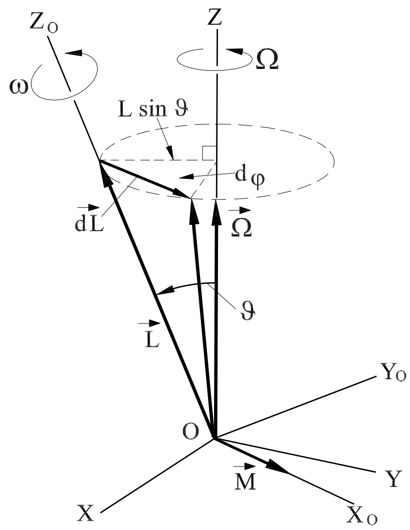

Abbildung 4: Präzession eines schweren Kreisels

2.2 Schwerer Kreisel

Ein **schwerer symmetrischer Kreisel** (der Kugelkreisel wird nicht gesondert besprochen) wird gewöhnlich in einem festen Punkt O unterstützt, der nicht mit seinem Schwerpunkt S zusammenfällt; der Schwerpunkt liegt auf der Figurenachse. Ein Spielzeugkreisel mag als Beispiel dienen. Auf den Kreisel wirkt im Schwerefeld der Erde ein Drehmoment

$$\vec{M} \quad = \quad \vec{a} \times m\,\vec{g}. \tag{11}$$

Dabei ist m die Kreiselmasse und $\vec{a}$ der Vektor $\vec{\mathrm{OS}}$. Die Richtung von $\vec{M}$ ist senkrecht zur Vertikalen und senkrecht zur Figurenachse (Abb. 3). Die allgemeine Bewegungsgleichung (9) lässt sich nicht mehr – wie im kräftefreien Fall – ohne weiteres integrieren. Vielmehr ändert sich der Drehimpuls dauernd nach dem Gesetz

$$d\vec{L} \quad = \quad \vec{M}\,dt. \tag{12}$$

Zu dem jeweiligen Drehimpulsvektor $\vec{L}$ ist der infinitesimale Vektor $\vec{M}\,dt$ zu addieren (Abb. 4).

Die Drehimpulsachse wird unter der Wirkung der äußeren Kraft nicht nach unten kippen, sondern ihr senkrecht ausweichen. Dadurch umläuft die Drehimpulsachse einen Kegelmantel um die Vertikale mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Dieses Phänomen ist die Präzessionsbewegung des schweren Kreisels. Es fasziniert seit jeher jeden Betrachter.

Ω ist nach Definition (siehe Abb. 4)

$$\Omega \quad = \quad \frac{d\varphi}{dt}. \tag{13}$$

Dabei gilt für $d\varphi$

$$d\varphi = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|\,\sin\vartheta}. \tag{14}$$

Setzt man dies in (13) ein, so ergibt sich:

$$\Omega = \frac{|d\vec{L}/dt|}{|\vec{L}|\sin\vartheta}. \tag{15}$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von (9):

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|\,\sin\vartheta}. \tag{16}$$

(16) lässt sich elegant anders formulieren, wenn man die Richtungen von $\vec{\Omega}$, $\vec{L}$ und $\vec{M}$ berücksichtigt:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M} \tag{17}$$

Setzt man das bekannte Drehmoment $|\vec{M}| = amg\sin\vartheta$ (siehe (10)) ein, dann ergibt sich aus (16):

$$\Omega = \frac{a\,m\,g}{|\vec{L}|} \tag{18}$$

oder

$$\Omega = \frac{a\,m\,g}{J\,\omega}. \tag{19}$$

J ist das Trägheitsmoment und ω die Eigenkreisfrequenz des Kreisels. Nach (19) ist die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung Ω unabhängig vom Neigungswinkel ϑ der Figurenachse im Schwerefeld. Ω ist proportional zum Abstand a des Schwerpunktes vom Unterstützungspunkt und umgekehrt proportional zu ω.

Die 'reguläre Präzession' (oder einfach 'Präzession') des schweren symmetrischen Kreisels ist ein Grenzfall seiner allgemeinen Bewegungsform. Sie ist dann zu beobachten, wenn ω groß ist gegen Ω. Andernfalls hat die resultierende Winkelgeschwindigkeit nicht mehr die Richtung der Symmetrieachse und damit $\vec{L}$ nicht mehr die Richtung von ω.

Wird ω zu klein, so wird die Präzessionsbewegung instabil.

Für die allgemeine Bewegungsform des schweren symmetrischen Kreisels ist der Umlauf der momentanen Drehachse und der Figurenachse um die Drehimpulsachse, wie beim kräftefreien Kreisel beschrieben, zu dem oben diskutierten hinzuzunehmen. Da die Drehimpulsachse beim schweren Kreisel nicht raumfest ist, werden die Bewegungen der Achsen sehr verwickelt. Die Figurenachse oszilliert zwischen zwei festen Werten für den Winkel ϑ. Diese oszillatorische Bewegung der Figurenachse heißt 'Nutation'.

Bahndrehimpulse von Atomen und Eigendrehimpulse von Atomkernen und Elementarteilchen sind oft mit einem magnetischen Moment verknüpft. Ist das der Fall, dann erfahren die Atome (Atomkerne, Elementarteilchen) in einem Magnetfeld ein Drehmoment. Wegen der Kopplung des magnetischen Moments mit dem Drehimpuls im Atom, ruft das Drehmoment – in klassischer Betrachtung – Präzessionsbewegungen des Atoms um die Magnetfeldachse hervor. Die Kreisfrequenz dieser Präzessionsbewegungen heißt Larmorfrequenz Ω_L.

Eine Theorie der Bewegung des **schweren unsymmetrischen Kreisels** ist – mit Ausnahme von Spezialfällen – bis heute nicht gelungen.