

# VERSUCHSBERICHT ZU

## S2 – EXPERIMENTIEREN, UND DANN?

Gruppe 10 Mi

Alex Oster (E-Mail: a\_oste16@uni-muenster.de)  
Jonathan Sigrist (E-Mail: j\_sigr01@uni-muenster.de )

durchgeführt am 25.10.2017

betreut von

Dr. Anke SCHMIDT

8. November 2017

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Methoden</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>3</b>
3.1	Messung . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>4</b>
4.1	Mathematisches Pendel . . . . .	4
4.2	Datenanalyse . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>7</b>

# 1 Einleitung

„Die Gravitationskonstante  $g$  besitzt in der Stadt Münster einen Wert von  $10.5 \text{ m/s}^2$  bis  $11 \text{ m/s}^2$ .“

Zu dieser Aussage führten die Ergebnisse einer Fallgeschwindigkeitsmessung an der WWU. Hierbei wurden die Geschwindigkeiten einer fallenden Metallkugel an zwei verschiedenen Punkten, mit Hilfe von Lichtschranken gemessen. Dadurch ließ sich die Fallbeschleunigung und damit die Gravitationskonstante bestimmen.

Dieser neu gemessene Wert steht in Konflikt mit dem aktuellen Wert der PTB von  $g = 9.813 \text{ m/s}^2$  und es steht nun zur Diskussion, ob die PTB ihren derzeitigen Wert ändern muss.

In diesem Bericht beschäftigen wir uns damit, diese Aussage zu widerlegen. Dazu messen wir die Zeit von Pendelschwingungen und berechnen aus Fadenlänge und gemessener Zeit die Gravitationskonstante. Um ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten, führen wir mehrere Messungen mit verschiedenen Fadenlängen durch.

# 2 Methoden

Die Gravitationskonstante  $g$  wurde durch das Modell des mathematisch idealisierten Pendels berechnet<sup>1</sup>. Für unsere Messung haben wir eine an einem Faden befestigte Metallkugel verwendet. Der Faden war dabei an einer starren Halterung angebracht und seine Länge  $L$  ließ sich beliebig einstellen.

Wie in Abb. 1 dargestellt, wurde die Kugel am Punkt  $x = a$  unter einer kleinen Auslenkung  $\varphi_0$  losgelassen. Wir haben die Zeit gemessen, welche die Metallkugel benötigt hat, um eine bestimmte Anzahl Schwingung zu durchlaufen, also bis die Metallkugel wieder bei ca.  $x = a$  angekommen ist. Das war gerade dann der Fall wenn die Kugel ihre Bewegungsrichtung gewechselt hat und somit leicht abzuschätzen. Wir haben jeweils mehrere Schwingungen in einer Messung zusammengefasst, um die Ungenauigkeiten von der Zeitmessung möglichst klein zu halten.

Die Zeit wurde mit einer handelsüblichen digitalen Stoppuhr gemessen, welche zwei Nachkommastellen anzeigt. Eine Ungenauigkeit der Uhr ist uns nicht bekannt. Zum Messen der Seillänge haben wir ein Maßband von zwei Metern Länge benutzt. Die Millimeterangaben konnten leicht abgelesen werden. Auch hier ist uns eine Ungenauigkeit des Maßstabes nicht bekannt. Die Kugel hatte einen Durchmesser von 3 cm.

Für zwei Fadenlängen wurden viele Schwingungen gemessen und für vier weitere weniger. Dadurch konnten zusätzliche Referenzwerte geliefert werden, welche ebenfalls gegen die Behauptung gehen.

---

<sup>1</sup>Weitere Erläuterungen in (4.1 Mathematisches Pendel).

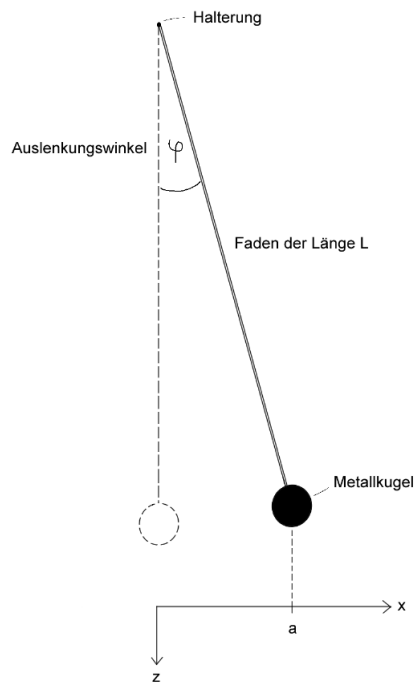


Abbildung 1: Versuchsskizze

### 3 Durchführung

#### 3.1 Messung

Es folgen durchschnittliche Zeiten für die Periodendauern, welche sich durch die durchgeführten Messungen für verschiedene Fadenlängen  $L$  ergeben:

**Fadenlänge 1:** ( $L = 111.6 \text{ cm}$ )

Für die erste Fadenlänge haben wir 110 Schwingungsdauern in 10er Schritten gemessen. (D.h. jeweils die Periodendauer für zehn Schwingungen auf einmal)

Die durchschnittliche Zeit für eine Pendelschwingung betrug hierbei: 2.134 s

**Fadenlänge 2:** ( $L = 104.5 \text{ cm}$ )

Bei dieser und der folgenden Messung haben wir nur 20 Perioden, in 5er Schritten, gemessen. Hier betrug die durchschnittliche Zeit für eine Pendelschwingung: 2.060 s

**Fadenlänge 3:** ( $L = 86.9 \text{ cm}$ )

Wie auch bei der vorherigen Messung wurden hier nur 20 Schwingungen betrachtet. Dabei ergab sich, für eine Pendelschwingung, die durchschnittliche Zeit: 1.879 s

**Fadenlänge 4:** ( $L = 65.8 \text{ cm}$ )

Diese Messung und die Folgende betrachten wir 25 Perioden, ebenfalls in 5er Schritten. Die durchschnittliche Zeit für eine Pendelschwingung betrug hierbei:  $1.876 \text{ s}$

**Fadenlänge 5:** ( $L = 116.3 \text{ cm}$ )

Hier erhalten wir für eine Pendelschwingung die durchschnittliche Zeit:  $2.174 \text{ s}$

**Fadenlänge 6:** ( $L = 92.6 \text{ cm}$ )

Da wir bei den letzten vier Messungen nicht viele Schwingungen betrachtet haben, haben wir für die sechste Fadenlänge noch einmal 100 Schwingungsdauern gemessen. Dabei haben wir eine Länge  $L$  gewählt, die circa  $20 \text{ cm}$  von der ersten abwich, um mehrere Werte für „deutlich“ unterschiedliche Längen  $L$  zu erhalten. Hierbei betrug die durchschnittliche Zeit für eine Pendelschwingung  $1.936 \text{ s}$ .

## 4 Diskussion

### 4.1 Mathematisches Pendel

Wir betrachten für die Auswertung unserer Messungen das Modell des mathematischen Pendels unter folgenden Annahmen:

1. Die gesamte Masse  $m$  ist im Schwerpunkt vereinigt (Massepunkt).
2. Der Massepunkt  $m$  ist durch einen masselosen Faden oder alternativ durch eine masselose starre Verbindung der Länge  $L$  mit dem Aufhängepunkt verbunden.
3. Die Bewegung erfolgt ohne Reibung.
4. Das Pendel wird nur leicht ausgelenkt

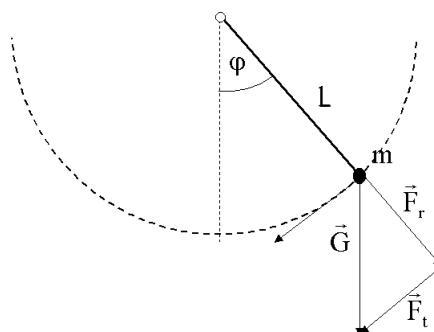


Abbildung 2: mathematisches Pendel

Auf den Massepunkt  $m$  wirkt die Schwerkraft  $\vec{F}_G$  (vgl. Abbildung 2)

$$\vec{F}_G = m\vec{g}.$$

Nur die Tangentialkomponente  $F_\varphi$  der angreifenden Kraft  $\vec{F}_G$  ist für die Bewegung des Massepunktes entlang des Kreisbogens verantwortlich.  $F_\varphi$  ist der Auslenkung  $\varphi$  entgegen gerichtet und wirkt rücktreibend auf den Massepunkt:

$$F_\varphi = -mg \sin \varphi.$$

Mit den Gleichungen

$$a = L\ddot{\varphi} \quad \text{und} \quad F = ma$$

ergibt sich die Bewegungsgleichung eines frei schwingenden Fadenpendels:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{L}\right) \sin \varphi = 0.$$

Diese nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung vereinfachen wir mit der Kleinwinkelnäherung

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

Somit haben wir nun eine dem harmonischen Oszillator entsprechende DGL:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \varphi = 0$$

Die Frequenz lässt sich hierbei einfach bestimmen:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Damit ist die Periodendauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Die Schwingungsdauer ist also unabhängig von der Masse und unsere Gravitationskonstante  $g$  bestimmt sich wie folgt:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L \tag{1}$$

## 4.2 Datenanalyse

Unsere Messwerte angewandt auf die obige Gleichung für  $g$  (1) ergaben unter Berücksichtigung der Messungenauigkeiten die Werte in Tab. 1. Diese Werte deuten eindeutig darauf hin, dass die Gravitationskonstante nicht im Bereich von  $10.5 \text{ m s}^{-2}$  bis  $11 \text{ m s}^{-2}$  liegt, da alle Messwerte nahe dem Literaturwert liegen und die Streuung nicht bis  $10.5 \text{ m s}^{-2}$  reicht. Es stellt sich die Frage,

	Messung 1	Messung 2	Mehrfachmessung
$g$	9.807(190) m s <sup>-2</sup>	9.907(21) m s <sup>-2</sup>	9.720(102) m s <sup>-2</sup>

Tabelle 1: Ergebnisse der Messungen

Digitale Stoppuhr	Reaktionszeit	Zeitlich	Maßband
0.002 887 s	0.020 41 s	0.020 62 s	0.000 204 1 s

Tabelle 2: Unsicherheiten der Messinstrumente

welche Faktoren Einfluss auf die Lichtschrankenmessung hatten, so dass sich Werte von  $g$  ergaben, die so stark vom Literaturwert entfernt liegen.

Die Verteilungen der beiden genaueren Messungen sind in Abb. 3 dargestellt. Hierbei beschreiben „Messung 1/2“ die erste/zweite genauere Messung (Fadenlänge 1 bzw. 6). Auffällig ist, dass die Streuung bei Messung 2 deutlich geringer war.

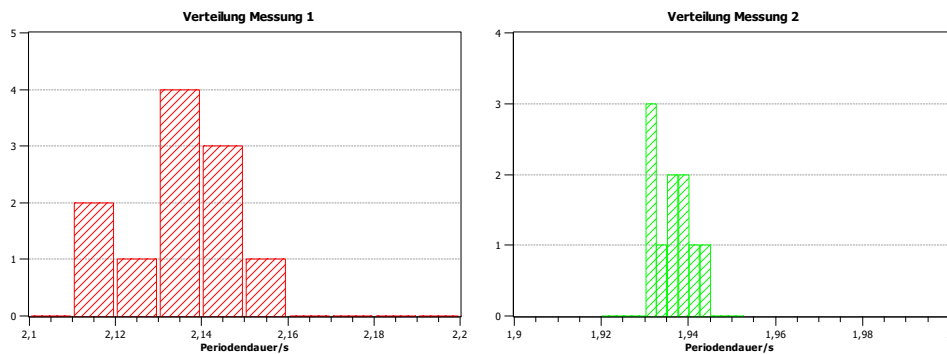


Abbildung 3: Messergebnisse bei konstanter Seillänge

Die Unsicherheit berechnet sich durch die kombinierte Standardunsicherheit  $u(g)$  mit

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial T} u(T)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L} u(L)\right)^2} = g \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(2 \frac{u(T)}{T}\right)^2}.$$

Mit  $T$  und  $L$  für die jeweilige Messung (siehe Tab. 2) ergeben sich die Werte in Tab. 1, diese stimmen in etwa mit den Werten aus dem Vortrag<sup>2</sup> überein.

Die Abb. 4 stellt die linearisierte Funktion  $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$  (Gl. (1) nach  $T^2$  umgestellt) dar. Dabei sind die Mittelwerte für Periodendauer und Seillänge der Messungen unter Variation der Länge direkt gegeneinander aufgetragen. Es ergibt sich eine Steigung  $m = \frac{4\pi^2}{g}$  und somit folgt

$$g = \frac{4\pi^2}{m} \approx 9.720 \text{ m s}^{-2}. \quad (2)$$

<sup>2</sup>gemeint ist der Vortrag von Frau Dr. Anke Schmidt vom 25.10.

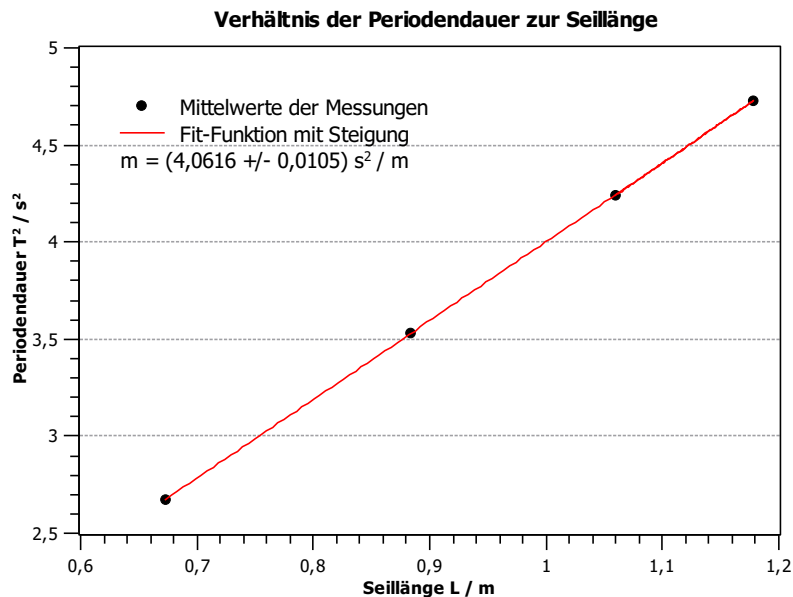


Abbildung 4: Datenpunkte der Multimessung mit Ausgleichsgerade

Analog zur Unsicherheit bei fester Seillänge sei  $u(g)$  beschrieben durch

$$u(g) = 4\pi^2 \frac{u(m)}{m^2}.$$

## 5 Zusammenfassung

Durch ein Pendelexperiment haben wir die Gravitationskonstante in Näherung ermittelt. Diese lag nahe dem Literaturwert. Als mathematische Grundlage diente hierzu das ideale Pendel. Zur weiteren Überprüfung haben wir mit zwei unterschiedlichen Messverfahren gearbeitet. Zum einen sei die Seillänge des Pendels für eine große Anzahl an Messungen gleich, zum anderen wurden mehrere kleinere Messreihen zu unterschiedlichen Seillängen durchgeführt. Dabei sind die Unsicherheiten weitgehend berücksichtigt worden.

## 6 Schlussfolgerung

Nach eingehenden Untersuchungen zur Gravitationskonstante durch ein Pendel sind wir zu dem Ergebnis gekommen, dass die von der WWU gemessenen Größen nicht realistisch sind. Die Gravitationskonstante in Münster unterliegt keiner Anomalie und einem dem Literaturwert entgegengesetzten Wertes können wir mit unseren Ergebnissen nicht zustimmen. Der Literaturwert



liegt meist innerhalb einer Standardabweichung und stets ist dieser näher am ermittelten Wert, als der von der WWU Gemessene.

Um das Problem der WWU-Messung zu finden, müsste man Nebeneffekte, wie z. B. die Luftreibung, genauer betrachten und diese berücksichtigen.

## Literatur

Abbildung 2: [http://people.physik.hu-berlin.de/~mitdank/dist/  
scriptenm/pendel-Dateien/image001.gif](http://people.physik.hu-berlin.de/~mitdank/dist/scriptenm/pendel-Dateien/image001.gif)