Versuchsbericht zu

M5 – Jo-Jo und Kreisel

Gruppe 10 Mi

Alex Oster (E-Mail: a_oste16@uni–muenster.de)
Jonathan Sigrist (E-Mail: j_sigr01@uni–muenster.de)

durchgeführt am 21.12.2017
betreut von
Lukas Britt

9. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Kurzfassung

Dieser Bericht beschäftigt sich mit der Untersuchung der Trägheit. Dazu werden zwei Versuche herangeführt, welche diese auf verschiedene Weisen darstellen. Der erste Versuch zu dem Fallrad zeigt ein Verhalten, welches einem Jo-Jo ähnelt. Ein langsames Abrollen und darauffolgendes Aufrollen. Hierbei wird jedoch das Abrollen genauer betrachtet. Es werden die Fallbeschleunigung und das Trägheitsmoment bestimmt und mit theoretischen Zusammenhängen, wie z. B. mit dem Abrollradius in Verbindung gebracht und die Theorie mit übereinstimmenden Werten bestätigt.

2 Fallbeschleunigung und Trägheitsmoment eines Fallrades

Das Fallrad verhält sich wie das Jo-Jo Spielzeug. Lässt man das aufgewickelte Fallrad fallen, bei festgehaltener Schnur, so fällt es langsamer und und wickelt sich nach Abwickeln der Schnur von selbst wieder auf. In diesem Versuch werden die Fallbeschleunigung und das Trägheitsmoment eines Fallrades bestimmt und überprüft, ob die gemessenen und bestimmten Werte mit den aus der Theorie berechneten Werten übereinstimmen. Dazu wird angenommen, dass die aus der Theorie bekannten Formeln den Sachverhalt korrekt beschreiben. Das Ergebnis dieses Versuches stimmt mit diesen überein.

2.1 Methoden

2.1.1 Aufbau

Es wird der in Abb. 1 dargestellte Aufbau betrachtet. Das Fallrad besteht aus einem Ring, in dessen Mittelpunkt sich die Achse befindet, um welche die Bewegung durchgeführt wird. Mit Hilfe von vier Speichen ist der Ring mit der Achse verbunden. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass es sich hierbei um zwei senkrecht zueinander liegende Zylinder handelt, die in ihren Mittelpunkten mit der Achse verbunden sind. Die Achse liegt mittig in dem Ring, sodass die Schnur auf beiden Seiten mit dem gleichen Abstand von dem Ring angebracht werden kann (vgl. 2). In der Ruhelage liegen keine Wicklungen der Schnur auf der Achse vor. Die Größe h gibt die Höhe des Fallrades, als Abstand von der Ruhelage, an.

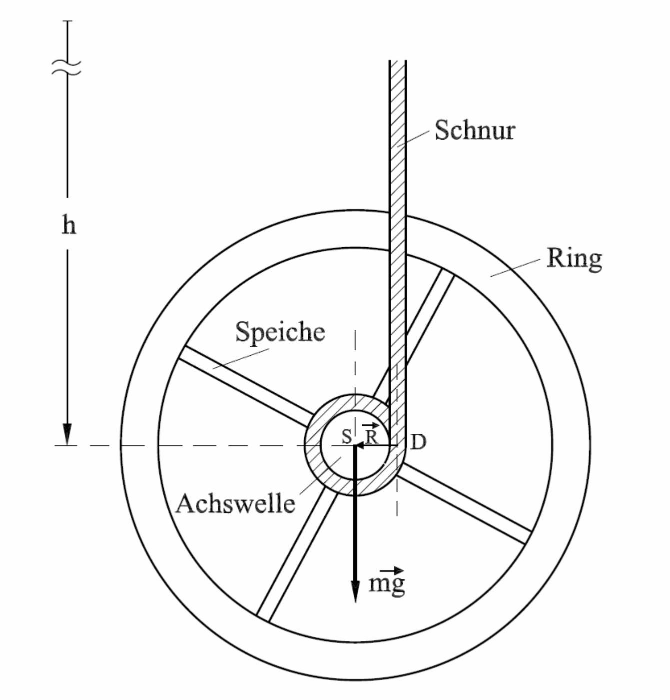

Abbildung 1: Die Versuchsskizze zeigt den Aufbau des Fallrades aus der Seitenansicht.

2.1.2 Durchführung

Mit einer Stoppuhr wird die Zeit gemessen, die das Fallrad benötigt bis keine Wicklung des Fadens auf der Achse vorliegt. Dies wird für verschiedene Starthöhen durchgeführt um die Fallbeschleunigung g^* zu bestimmen. Dafür ist es wichtig darauf zu achten, dass die Schnur sich bei dem Aufwickeln nicht auf sich selber, sondern nur auf der Achse wickelt, damit sich der Abrollradius nicht verändert. Die Höhe wird von einem Maß abgelesen, wobei das Fallrad in Ruhelage (bzw. wenn keine Wicklung des Fadens auf der Achse vorliegt) bei genau 0 cm an dem Maß liegt.

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments werden die Maße des Fallrads mit Hilfe einer Schiebelehre gemessen und die Masse gewägt.

2.1.3 Unsicherheiten

Im Allgemeinen dient zur Berechnung der Unsicherheiten für die gemessenen und ermittelten Werte folgende Formel:

$$u(s) = \pm \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}.$$

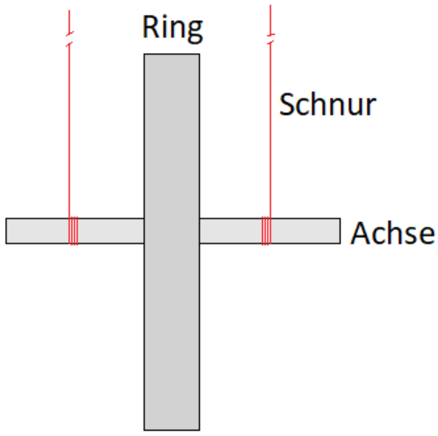

Abbildung 2: Die Versuchsskizze zeigt die Frontalansicht des Aufbaus. Hierbei ist die Achse zu erkennen, auf der sich der Faden auf-/abrollt.

Für die Messunsicherheit der Stoppuhr wird aufgrund der Digitalanzeige eine Rechtecksverteilung verwendet und diese dann mit der Unsicherheit für die Reaktionszeit[1] kombiniert. Die Schiebelehre besitzt eine Messgenauigkeit von 0,02 mm, da sich so genau jedoch nicht ablesen lässt, wird eine Dreicksverteilung über 0,04 mm verwendet. Für das Maß wird ebenfalls eine Dreiecksverteilung gewählt, hierbei über 1 mm. Die Berechnung der Unsicherheiten liegt im Anhang (4) vor, da diese für einige Größen umfangreicher ist.

2.2 Messung

2.2.1 Messwerte

Die in Tab. 1 dargestellten Werte sind die (gemittelten) Messwerte, welche aufgenommen wurden. Dabei ist die Berechnung der verwendeten kombinierten Unsicherheiten, für z. B. die gemittelten Werte, dem Anhang zu entnehmen.

2.2.2 Messergebnisse

In dem Ersten der drei folgenden Diagrammen (Abb. 3) ist die Fallhöhe h gegen die Fallzeit t aufgetragen. Aufgrund des leicht gekrümmten Verlaufs und der Formel zur Berechnung der Fallhöhe

$$h(t) = \frac{1}{2} g \frac{mR^2}{J_S + mR^2} t^2 = \frac{1}{2} g^* t^2 \tag{1}$$

[1] hierzu werden 0,1 s dreiecksverteilt verwendet

Tabelle 1: In dieser Tabelle sind die gemessenen Werte verzeichnet. Die Größen welche mehrmals gemessen wurden, sind hier gemittelt.

	Größe	Wert
Maße des Fallrads	Dicke H des Rings	$(11{,}68 \pm 0{,}03)\,\mathrm{mm}$
	Außenradius R_a des Rings	$(90{,}08 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}$
	Innenradius R_i des Rings	$(77{,}59 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}$
	Speichenradius R_S	$(3{,}490 \pm 0{,}006)\,\mathrm{mm}$
	Achsenradius R_A	$(4{,}090 \pm 0{,}006)\,\mathrm{mm}$
	Achsenlänge L_A	$(200{,}30 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}$
	Masse m	$(768{,}16 \pm 0{,}01)\,\mathrm{g}$
	Fadendicke d	$(1{,}027 \pm 0{,}028)\,\mathrm{mm}$

	Fallhöhe h	Fallzeit t
Fallhöhe und Fallzeit	$(200{,}00 \pm 0{,}29)\,\mathrm{mm}$	$(3{,}402 \pm 0{,}046)\,\mathrm{s}$
	$(350{,}00 \pm 0{,}29)\,\mathrm{mm}$	$(4{,}488 \pm 0{,}046)\,\mathrm{s}$
	$(500{,}00 \pm 0{,}29)\,\mathrm{mm}$	$(5{,}286 \pm 0{,}046)\,\mathrm{s}$
	$(650{,}00 \pm 0{,}29)\,\mathrm{mm}$	$(6{,}122 \pm 0{,}046)\,\mathrm{s}$
	$(800{,}00 \pm 0{,}29)\,\mathrm{mm}$	$(6{,}782 \pm 0{,}046)\,\mathrm{s}$

wurde ein polynomialer Fit[2] für das Diagramm gewählt. Der Fit besitzt folgende Form:

$$h(t) = [(-67,81 \pm 2,70) + (28,76 \pm 1,10)t \cdot \mathrm{s}^{-1} + (14,59 \pm 0,11)t^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}]\mathrm{mm}.$$

Da im zweiten Diagramm die Fallhöhe h gegen die quadrierte Fallzeit t^2 aufgetragen ist, sollte sich hierbei nach obiger Gleichung ein linearer Zusammenhang zeigen. Aus diesem Grund wurde für dieses Diagramm ein linearer Fit gewählt. Hierbei sollte die Steigung nach Gl. 1 gerade gleich der halben Fallbeschleunigung g^* entsprechen. Folgende Formel beschreibt den Fit:

$$h(t) = [(2,15 \pm 0,33) + (17,39 \pm 0,01)t^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}]\mathrm{mm}.$$

Da diese Steigung nicht von der Zeit abhängt, ist wie in dem letzten Diagramm näherungsweise zu sehen $\frac{h}{t^2}$ konstant. Auch hier wurde aufgrund dieses Verhaltens ein linearer Fit gewählt. Da die ermittelten Punkte auf einer Horizontalen liegen zu scheinen ist die Steigung demnach ≈ 0. Aufgrund der Unsicherheit, welche merklich von null entfernt ist, wird dies jedoch nicht ganz gestützt. Der Fit sieht wie folgt aus:

$$\frac{h}{t^2} = [(17,30 \pm 6,40) + (0,03 \pm 1,20)t \cdot \mathrm{s}^{-1}]\mathrm{mm}.$$

[2] Dieser Fit und seine Unsicherheit, wie auch die der nächsten beiden, wurde von dem Programm SciDavis berechnet, dazu wurden die Unsicherheiten (welche im Anhang zu finden sind) und die Methode der kleinsten Quadrate herangezogen

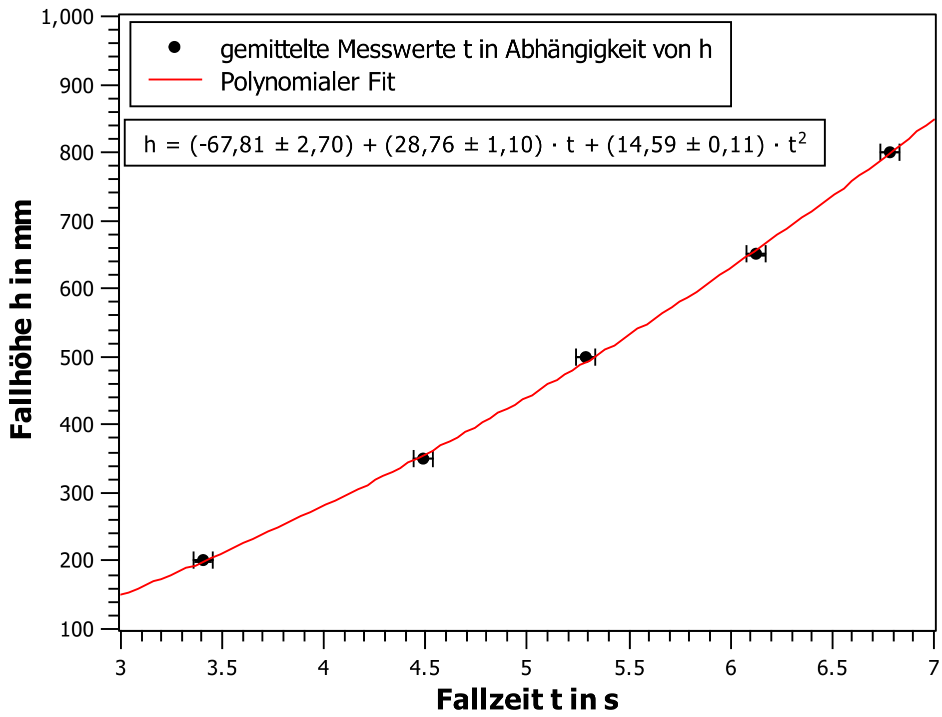

Abbildung 3: Graphische Darstellung der Fallhöhe h in Abhängigkeit der Fallzeit t.

Wählt man die Steigung gleich null und multipliziert man das Ergebnis mit zwei, so ergibt sich für $g^* = (34{,}6 \pm 12{,}8)\,\mathrm{m/s^2}$.

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments J_S des Fallrads werden die Trägheitsmomente der Bestandteile addiert. Diese lassen sich durch Zylinderträgheitsmomente bestimmen. Für den Ring wird die Formel für einen Hohlzylinder verwendet, welcher parallel zur Drehachse liegt:

$$J_{parallel} = \frac{1}{2}\pi H \rho (R_a^4 - R_i^4). \tag{2}$$

Ebenso lässt sich das Trägheitsmoment der Achse bestimmen, da es sich hierbei jedoch um einen Vollzylinder handelt wird der Innenradius in der Formel gleich null gesetzt. Für die vier Speichen wird vereinfacht, so dass nur zwei Zylinder senkrecht zur Drehachse betrachtet werden. Dieses bestimmt sich wie folgt:

$$J_{senkrecht} = \pi H \rho \left[\frac{1}{12} H^2 R^2 + \frac{1}{4} R^4\right]. \tag{3}$$

Zur Bestimmung der Dichte muss das Volumen bestimmt werden und die gemessene Masse dadurch geteilt werden. Das Volumen setzt sich wie auch

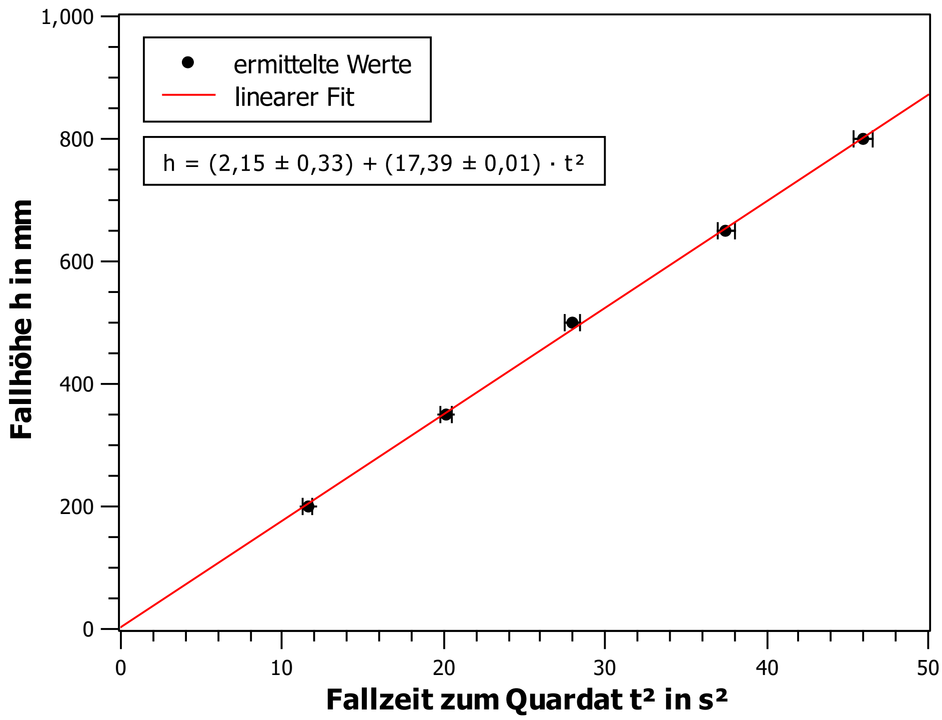

Abbildung 4: Graphische Darstellung der Fallhöhe h in Abhängigkeit der quadrierten Fallzeit t^2.

das Trägheitsmomenten aus den Einzelteilen zusammen:

$$V = V_{Ring} + 2 \cdot V_{Speiche} + V_{Achse} = H \cdot (\pi R_a^2 - \pi R_i^2) + 2(2\pi R_S \cdot 2R_i) + 2\pi R_A \cdot L_A. \tag{4}$$

Dabei bezeichnet $V_{Speiche}$ das Volumen von zwei der vier Speichen, welches durch einen Zylinder mit Radius R_S und Höhe R_i zusammengesetzt ist. Dies ist eine Näherung da hierbei das Volumen im Mittelpunkt des Fallrades drei mal, durch die zwei Speichenzylinder und die Achse, in der Rechnung auftaucht, jedoch auch das Volumen des Befestigungspunktes dieser Teile vernachlässigt wird. Mit der Masse $m =$ und dem Volumen $V =$ ergibt sich eine Dichte $\rho =$. Auch hier wurden die verwendeten Unsicherheiten in dem Anhang hergeleitet. Durch die Summe der Trägheitsmomente ergibt sich somit:

$$J_S = J_{Ring} + 2 \cdot J_{Speiche} + J_{Achse} = (4\,726\,135{,}09 \pm 344\,402{,}84)\,\mathrm{gmm}^2. \tag{5}$$

Aus dem ermittelten Trägheitsmoment und der Fallbeschleunigung lässt sich nun der Abrollradius durch Umformen von Gl. 1 bestimmen.

$$R = \sqrt{\frac{J_S \cdot g^*}{m(g - g^*)}} = (4{,}679 \pm 0{,}303)\,\mathrm{mm}. \tag{6}$$

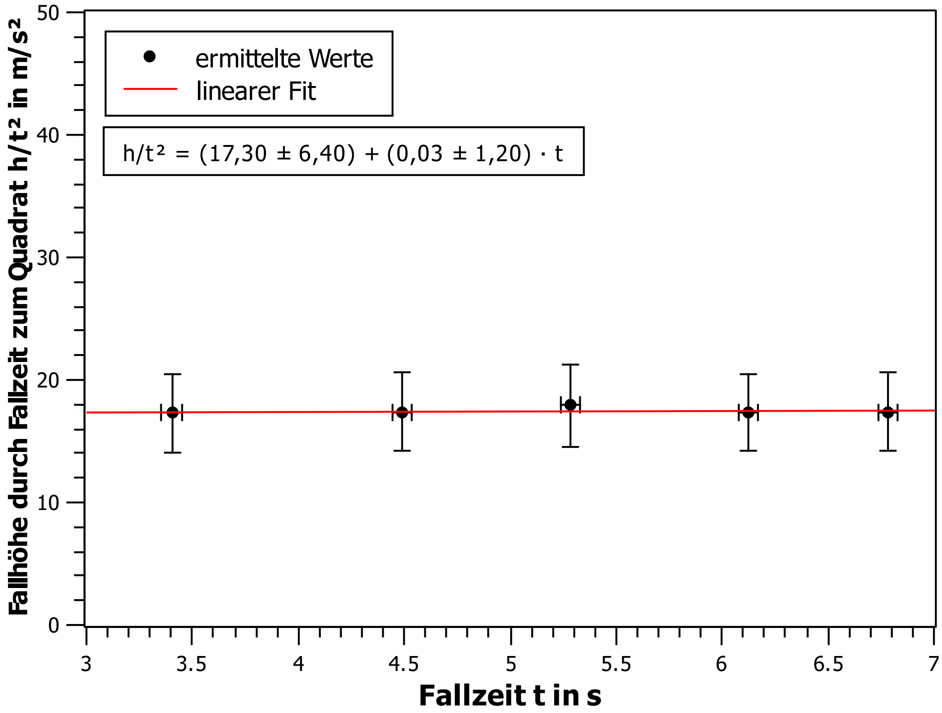

Abbildung 5: Graphische Darstellung der Fallhöhe geteilt durch die quadrierte Fallzeit $\frac{h}{t^2}$ in Abhängigkeit der Fallzeit t.

Durch den Radius der Achse und dem des Fadens ergibt sich für den Abrollradius $R = (4{,}604 \pm 0{,}015)\,\mathrm{mm}$.

2.3 Diskussion

Die in diesem Versuch ermittelten Größen entsprechend weitgehend den Erwartungen. Dass die Größe g^*, wenn man sie dem dritten Diagramm entnimmt eine äußerst Große Unsicherheit besitzt, muss an der kombinierten Unsicherheit für $\frac{h}{t^2}$ liegen, da sich g^* auch als Steigung des zweiten Diagramms entnehmen lässt und die von dem Fit-Programm berechnete Unsicherheit dort äußerst gering ist. Dass das Trägheitsmoment des Rings den größten Anteil von J_S ausmacht liegt daran, dass das Trägheitsmoment quadratisch mit dem Abstand von der Rotationsachse zunimmt und seine ganze Masse am weitesten von der Achse entfernt liegt. Die Näherung des Abrollradius über das Trägheitsmoment und der Fallbeschleunigung des Fallrades liefert einen Wert welcher sehr nahe an dem gemessenen liegt. Er unterscheidet sich lediglich um 1,6% von diesem. Somit lässt sich die Korrektheit der Formeln aus der Theorie bestätigen.

2.4 Schlussfolgerung

Die Messergebnisse stimmen mit der Theorie überein. Da dies der Fall ist, ist eine Wiederholung des Versuches nicht nötig. Lediglich die Berechnung der Unsicherheiten in diesem Versuch ist aufgrund des großen Umfangs äußerst fehleranfällig und sollte ggf. erneut überprüft werden.

3 Kreisel

3.1 Methoden

3.1.1 Aufbau

3.1.2 Unsicherheiten

Zur Berechnung der Unsicherheiten für die gemessenen und ermittelten Werte dient folgende Formel:

$$u(s) = \pm \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}.$$

3.2 Messung

3.2.1 Aufnahme der Messwerte

3.2.2 Datenanalyse

3.3 Diskussion

3.4 Schlussfolgerung

4 Anhang

4.1 Unsicherheiten Fallrad

Tabelle 2: einfache Unsicherheiten für die Werte bei der Berechnung für das Fallrad. Alle Unsicherheiten für Mittelwerte über fünf Werte (außer bei der Fadendicke, hier wurden sechs Werte aufgenommen). Da zur Vereinfachung der Messung Durchmesser und nicht Radien gemessen wurden, sind die Unsicherheiten in 1 um den Faktor 0.5 verschieden.

Unsicherheit u der/des ...	Berechnung	Ergebnis
Stoppuhr	$u_{\text{Uhr}} = \frac{0{,}01\,\text{s}}{2\sqrt{3}}$	2,89 ms
Reaktionszeit	$u_{\text{Reaktion}} = \frac{0{,}1\,\text{s}}{2\sqrt{6}}$	20,4 ms
Zeitmessung	$u_{\text{Zeit}} = \sqrt{(u_{\text{Uhr}})^2 + (u_{\text{Reaktion}})^2}$	20,6 ms
gemittelten Zeitmessung	$u_{\text{ZeitMitt}} = \sqrt{5 \cdot (u_{\text{Zeit}})^2}$	46,1 ms
Maßes	$u_{\text{Maß}} = \frac{1\,\text{mm}}{2\sqrt{3}}$	0,29 mm
Schiebelehre	$u_{\text{Schiebe}} = \frac{0{,}04\,\text{mm}}{2\sqrt{3}}$	0,012 mm
gemittelten Längenmessung	$u_{\text{LängeMitt}} = \sqrt{5 \cdot (u_{\text{Schiebe}})^2}$	0,026 mm
Fadendicke	$u_{\text{FadenDicke}} = \sqrt{6 \cdot (u_{\text{Schiebe}})^2}$	0,028 mm
Waage	$u_{\text{Waage}} = \frac{0{,}01\,\text{g}}{2\sqrt{6}}$	0,002 g

Für die Unsicherheit der Fallhöhe h wird die des Maßes $u_{\text{Maß}}$ und für die Fallzeit die Unsicherheit der gemittelten Zeitmessung u_{ZeitMitt} verwendet. Für die Fallzeit zum Quadrat ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$u(t^2) = \sqrt{\left(\frac{\partial t^2}{\partial t} \cdot u_{\text{ZeitMitt}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(2t \cdot u_{\text{ZeitMitt}})^2}.$$

Ähnlich gilt für $\frac{h}{t^2}$:

$$u\left(\frac{h}{t^2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{h}{t^2}}{\partial h} \cdot u_{\text{Maß}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{h}{t^2}}{\partial t} \cdot u_{\text{ZeitMitt}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{t^2} \cdot u_{\text{Maß}}\right)^2 + \left(-2\frac{h}{t^3} \cdot u_{\text{ZeitMitt}}\right)^2}.$$

Bei dem Trägheitsmoment sieht die Unsicherheitsberechnung komplizierter aus. Aus Gl. 2 folgt:

$$u(J_{\text{parallel}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{parallel}}}{\partial H}u(H)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{parallel}}}{\partial \rho}u(\rho)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{parallel}}}{\partial R_a}u(R_a)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{parallel}}}{\partial R_i}u(R_i)\right)^2}.$$

Beziehungsweise für das Trägheitsmoment für senkrecht zur Rotationsachse liegende Vollzylinder:

$$u(J_{\text{senkrecht}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{senkrecht}}}{\partial H}u(H)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{senkrecht}}}{\partial \rho}u(\rho)\right)^2 + + \left(\frac{\partial J_{\text{senkrecht}}}{\partial R}u(R)\right)^2}.$$

H ist bei beiden Gleichungen die Höhe bzw. Dicke des Zylinders. Für den Ring ist $u(H) = u_{\text{LängeMitt}}$, für die Speichenzylinder ebenso, da deren Höhe R_i entspricht und auch diese Größe fünf mal gemessen wurde. Für die Achse ist $u(H) = u_{\text{Schiebe}}$. Zudem ist $u(R) = u_{\text{Schiebe}}$ für die Achse ($R_a = R, R_i = 0$ für diese), wie auch für die Speichenzylinder. Bei dem Ring ist $u(R_a) = u(R_i) = u(H) = u_{\text{LängeMitt}}$. Für alle Größen ist $u(\rho)$ gleich. Es setzt sich aus der Massenunsicherheit und der Volumenunsicherheit zusammen:

$$\begin{aligned} u(\rho) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{m}{V}}{\partial m}u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{m}{V}}{\partial V}u(V)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{V}u_{\text{Waage}}\right)^2 + \left(-\frac{m}{V^2}u(V)\right)^2}. \end{aligned}$$

Dabei setzt sich $u(V)$ wie folgt zusammen aus V zusammen:

$$V = H \cdot (\pi R_a^2 - \pi R_i^2) + 2(2\pi R_S \cdot 2R_i) + 2\pi R_A \cdot L_A.$$

$$\Rightarrow u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial H}u(H)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R_a}u(R_a)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R_i}u(R_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R_S}u(R_S)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R_A}u(R_A)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L_A}u(L_A)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left((\pi R_a^2 - \pi R_i^2)u(H)\right)^2 + ((2\pi H R_a)u(R_a))^2 + ((-2\pi H R_i + 8\pi R_S)u(R_i))^2 + ((8\pi R_i)u(R_S))^2 + ((2\pi)u(R_A))^2 + ((1)u(L_A))^2}$$

Dabei sind $u(H) = u(R_a) = u(r_i) = u_{\text{LängeMitt}}$ und $u(R_S) = u(R_A) = u(L_A) = u_{\text{Schiebe}}$. So ergeben sich für die drei verschiedenen Teile folgende

Unsicherheiten für die Trägheitsmomente:

$$
\begin{aligned}
u(J_{\text{Ring}}) = \sqrt{\Big((\frac{1}{2}\pi\rho(R_a^4 - R_i^4))u_{\text{LängeMitt}}\Big)^2 + \Big((\frac{1}{2}\pi H(R_a^4 - R_i^4))u(\rho)\Big)^2} \\
+ \Big((2\pi H\rho R_a^3)u_{\text{LängeMitt}}\Big)^2 + \Big((2\pi H\rho R_i^3)u_{\text{LängeMitt}}\Big)^2
\end{aligned}
$$

$$
u(J_{\text{Achse}}) = \sqrt{\Big((\frac{1}{2}\pi\rho R_S^4)u_{\text{Schiebe}}\Big)^2 + \Big((\frac{1}{2}\pi L_A R_S^4)u(\rho)\Big)^2 + \Big((2\pi L_A\rho R_S^3)u_{\text{Schiebe}}\Big)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
u(J_{\text{Speiche}}) = \sqrt{\Big((\frac{1}{4}\pi\rho R_i^2 R_S^2 + \frac{1}{4}\pi\rho R_S^4)u_{\text{LängeMitt}}\Big)^2 + \Big((\frac{1}{12}\pi R_i^3 R_S^2 + \frac{1}{4}\pi R_i R_S^4)u(\rho)\Big)^2} \\
+ \Big((\frac{1}{6}\pi\rho R_i^3 R_S + \pi\rho R_i R_S^3)u_{\text{LängeMitt}}\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Und somit schließlich für J_S:

$$
u(J_S) = \sqrt{u(J_{\text{Ring}})^2 + u(J_{\text{Achse}})^2 + u(J_{\text{Speiche}})^2}.
$$

Für die Unsicherheit des Abrollradius' ergibt sich:

$$
u(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial J_S}u(J_S)\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial g^*}u(g^*)\right)^2}
$$

$$
= \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{J_S g^* m(g-g^*)}}u(J_S)\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{J_S g^* m(g-g^*)}} + \frac{m\sqrt{J_S g^*}}{2\sqrt{m(g-g^*)}^3}u(g^*)\right)^2}.
$$

Literatur

[1] Abb. 1 wurde der Einführung des Versuches aus dem LearnWeb entnommen.