

VERSUCHSBERICHT ZU

M4 – STOSSGESETZE

Gruppe 10 Mi

Alex Oster (E-Mail: a_oste16@uni-muenster.de)
Jonathan Sigrist (E-Mail: j_sigr01@uni-muenster.de)

durchgeführt am 13.12.2017
betreut von
Semir VRANA

22. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Kurzfassung	2
2 Stoßprozess bei zwei Pendeln	2
2.1 Methoden	2
2.1.1 Aufbau	2
2.1.2 Unsicherheiten	3
2.2 Messung	4
2.2.1 Aufnahme der Messwerte	4
2.2.2 Datenanalyse	4
2.3 Diskussion	5
2.4 Schlussfolgerung	6
3 Stoßprozesse mit einer durch eine Fallrinne beschleunigten Kugel	8
3.1 Methoden	8
3.2 Messung	9
3.3 Datenanalyse	9
3.4 Schlussfolgerung	11
4 Anhang	12

1 Kurzfassung

Dieser Bericht befasst sich mit den Stoßgesetzen. Dazu werden zwei Versuche betrachtet, die Übereinstimmungen zwischen den aufgenommenen Werten und den durch die Stoßgesetze ermittelten Werte zeigen sollen.

Bei dem ersten Versuch wird ein ballistischer zentraler Stoß zweier Metallkugeln betrachtet. Dazu werden zwei solcher Metallkugeln unterschiedlicher Masse an Pendeln aufgehängt. Der Stoßvorgang wird durch Auslenkung eines der Pendel in Gang gesetzt und dann wird die Auslenkung der gestoßenen Kugel gemessen. Ziel dieses Versuches ist, dass das Messergebnis für das Massenverhältnis mit dem bestimmten Wert dafür übereinstimmt. Diese Übereinstimmung wird durch die Ergebnisse gezeigt.

2 Stoßprozess bei zwei Pendeln

Dieser Versuch dient zur Betrachtung der Stoßgesetze. Dazu wird ein ballistischer zentraler Stoß mit Hilfe von zwei aufgehängten Massen untersucht. Es stellt sich die Frage, wie genau die Stoßgesetze für das Verhältnis der Massen mit den gemessenen Werten übereinstimmen. Das Ergebnis dieser Messung zeigt die Übereinstimmung von Theorie und den ermittelten Werten.

2.1 Methoden

2.1.1 Aufbau

Zum Messen wird der im Folgenden dargestellte Aufbau verwendet. Hierbei handelt es sich um zwei Pendel an denen Kugeln mit unterschiedlicher Masse angehängt sind. Hierbei besitzt die kleinere Kugel die Masse m_1 und die Größere folglich m_2 . Die Schwerpunkte dieser Kugeln liegen auf einer Geraden, sodass ein ballistischer zentraler Stoß durch das Auslenken eines Pendels möglich ist. Für die Pendel werden die Fäden so aufgehängt, dass deren Enden jeweils auf gleicher Höhe befestigt sind. Die Massen werden dann mittig, jeweils auf einen Faden, gehängt, sodass die Auslenkungen in einer Ebene stattfinden können. In Abbildung 1 ist der Aufbau skizziert. In Ruhelage berühren sich die Kugeln an dem Punkt a_0 . Des weiteren sind die Positionen a_1 und a_2 die Punkte von denen aus die Auslenkungen bestimmt werden. Diese unterscheiden sich um den Durchmesser der jeweiligen Kugel von a_0 . Dies wird so gewählt, damit das Messen leichter fällt. Für die Messung der Auslenkungen werden Schiebeblöcke verwendet (vgl. Abb. 6),

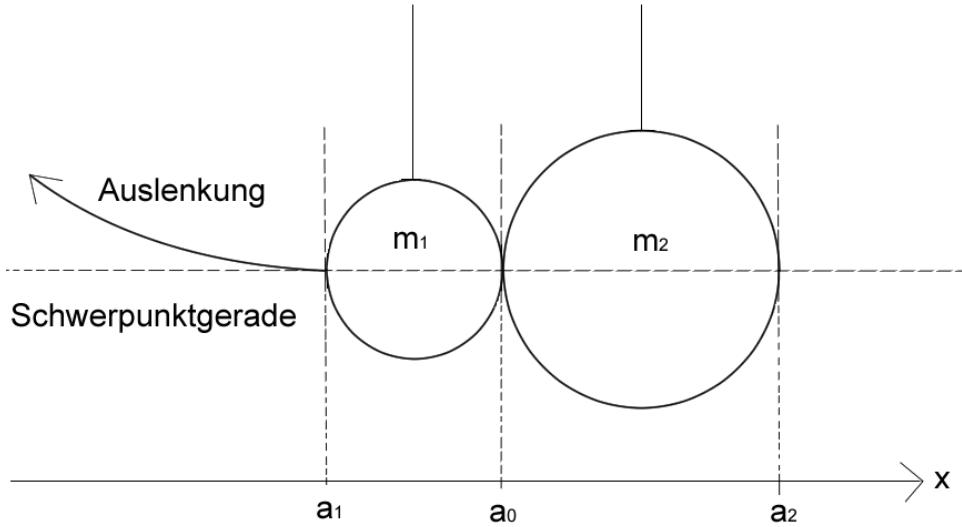


Abbildung 1: Skizzierung des Versuchsaufbaus

welche sich auf einem Maß frei bewegen lassen. Damit sind a'_1 und a'_2 nach dem initialen Stoß in guter Näherung zu bestimmen. Die gestrichenen Variablen sollen hierbei die Auslenkungen nach dem Stoß beschreiben. Zur Bestimmung dieser wird die Differenz zwischen den mit den Schiebeblöcken bestimmten Werte und der Position in Ruhelage gebildet.

Es werden bei dem Versuch die Auslenkungen a'_1 und a'_2 für fünf verschiedene Startauslenkungen von a_1 und a_2 jeweils fünf mal gemessen, wobei die fünf Messwerte für dieselben Auslenkungen gemittelt werden. Zudem werden die Pendellänge und Masse der Kugeln bei beiden Pendeln gemessen. Ersteres mit Hilfe eines Maßbands und letzteres über eine Waage. Mit Hilfe der Theorie hinter dem ballistischen zentralen Stoß wird das Massenverhältnis durch die gemessenen Werte bestimmt und dann mit dem Verhältnis der gemessenen Massen verglichen.

2.1.2 Unsicherheiten

Zur Berechnung der Unsicherheiten für die gemessenen und ermittelten Werte dient folgende Formel:

$$u(s) = \pm \sqrt{\sum_{k=0}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}.$$

Für die von dem Maß(band) abgelesenen Werte werden Unsicherheiten über eine Dreiecksverteilung und für die von der Waage gemessenen Werte eine Rechteckverteilung verwendet.

2.2 Messung

2.2.1 Aufnahme der Messwerte

Für die Pendellängen wurden die Abstände zwischen den Schwerpunkten und den Befestigungshöhen gemessen. Um die Radien der kugelförmigen Massen zu bestimmen, wurde der Umfang dieser gemessen. Die Werte der Pendellängen, der Radien, der gewogenen Massen und Startpunkte sind in Tabelle 1 dargestellt. Die Unsicherheit für die Radien steht in direktem Zusammenhang mit der Unsicherheit der Umfänge, also der des Maßbandes.

Tabelle 1: Messwerte der Pendellänge, Masse und der Radien

	Pendel 1	Pendel 2
Pendellänge	$L_1 = (185,0 \pm 0,2) \text{ cm}$	$L_2 = (189,0 \pm 0,2) \text{ cm}$
Kugelmasse	$m_1 = (191,470 \pm 0,003) \text{ g}$	$m_2 = (510,210 \pm 0,003) \text{ g}$
Kugelradien	$r_1 = (1,830 \pm 0,003) \text{ cm}$	$r_2 = (2,550 \pm 0,003) \text{ cm}$

Wie in Abb. 1 eingezeichnet, beschreiben a_0 , a_1 und a_2 die Positionen zu Beginn der Messung. Im Laborbuch sind nur die Positionen über dem Maß nach der Auslenkung notiert, jedoch nicht die Auslenkungen selber. Zur Bestimmung dieser für beide Massen wird die Differenz zwischen den Startwerten und den gemittelten Messwerten gebildet. Die dadurch ermittelten Werte sind in Tabelle 2 zu finden. Dabei ergeben sich die Unsicherheiten durch die der Startwerte, beim differenzieren, sowie der bei dem Mitteln entstandenen kombinierten Unsicherheit, welche sich aus fünf mal der Unsicherheit des Maßes, sowie einer zusätzlichen Unsicherheit für das nach Augenmaß durchgeführte Schieben der Blöcke von 0,05 cm ergibt. Für die Auslenkungen in der Tabelle bezeichnen $a_{1/2}^*$ die Startauslenkungen und $a'_{1/2}$ die Auslenkungen nach dem Stoß. Für die Auswertung sind hierbei jedoch nur die Startauslenkung der stoßenden Kugel und die Auslenkung der gestoßenen Kugel relevant.

2.2.2 Datenanalyse

Ist die kleinere Kugel mit der Masse m_1 die Stoßende, so gilt nach den Gesetzen der Impuls- und Energieerhaltung für den Stoß der folgende Zusammenhang zwischen den Auslenkungen der beiden Kugeln:

$$a'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot a_1^{*1}. \quad (1)$$

Aus der Gleichung folgt ein linearer Zusammenhang zwischen a'_2 und a_1^* mit dem Faktor $\frac{2m_1}{m_1 + m_2}$. Dieser wird im Folgenden als m_i bezeichnet, wohingegen

¹Umgekehrt lassen sich die Indizes tauschen, um den Fall für die große Kugel abzudecken.

Tabelle 2: Auslenkungen nach Stoß

a_1^*	\bar{a}_1'	\bar{a}_2'
(17,14 ± 0,03) cm	(6,66 ± 0,06) cm	(8,82 ± 0,06) cm
(13,14 ± 0,03) cm	(5,60 ± 0,06) cm	(6,40 ± 0,06) cm
(11,14 ± 0,03) cm	(4,76 ± 0,06) cm	(5,62 ± 0,06) cm
(9,14 ± 0,03) cm	(3,78 ± 0,06) cm	(4,40 ± 0,06) cm
(5,14 ± 0,03) cm	(2,30 ± 0,06) cm	(2,32 ± 0,06) cm
a_2^*	\bar{a}_1'	\bar{a}_2'
(10,10 ± 0,03) cm	(14,62 ± 0,06) cm	(4,98 ± 0,06) cm
(8,10 ± 0,03) cm	(11,74 ± 0,06) cm	(4,14 ± 0,06) cm
(6,10 ± 0,03) cm	(9,04 ± 0,06) cm	(3,22 ± 0,06) cm
(4,10 ± 0,03) cm	(6,04 ± 0,06) cm	(2,32 ± 0,06) cm
(2,10 ± 0,03) cm	(3,36 ± 0,06) cm	(1,40 ± 0,06) cm

m_{ii} durch den Faktor bei dem zweiten Fall, dass die große Kugel stößt, definiert wird. Aus den Messungen lassen sich also durch Auftragen von a_2' gegen a_1^* die Größen m_i bzw. m_{ii} für den zweiten Fall bestimmen. Diese sind in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt². Addieren von m_i und m_{ii} liefert:

$$m_i + m_{ii} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_2 + m_1} = \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = 2 \quad (2)$$

Demnach sollte das Addieren der Steigungen ebenfalls 2 ergeben. Für den ersten Fall ergab sich beim Auftragen der Werte eine Steigung von $0,538 \pm 0,007$ und zusammen mit der Steigung aus dem zweiten Fall von $1,411 \pm 0,009$ ergibt sich durch Addition ein Wert von $1,949 \pm 0,011 \approx 2$.

Durch Division von m_i und m_{ii} lässt sich das Massenverhältnis durch die Steigungen bestimmen:

$$\frac{m_i}{m_{ii}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_2 + m_1}{2m_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad (3)$$

Aus den Steigungen der Graphen folgt durch einsetzen in die Gleichung 3 ein Massenverhältnis von $0,381 \pm 0,006$ und bei dem dividieren der durch Wiegen gemessenen Massen, welche in Tab. 1 vorzufinden sind, ein Verhältnis von 0,375 mit einer vernachlässigbar kleinen Unsicherheit.

2.3 Diskussion

Betrachtet man zunächst den linearen Fit für die beiden Messungen, so fällt auf, dass der Y-Achsenabschnitt bei beiden um ungefähr 0,4 von 0 abweicht,

²Der Fit wurde von dem Programm SciDavis berechnet, dazu wurden die Unsicherheiten der Auslenkung und die Methode der kleinsten Quadrate herangezogen

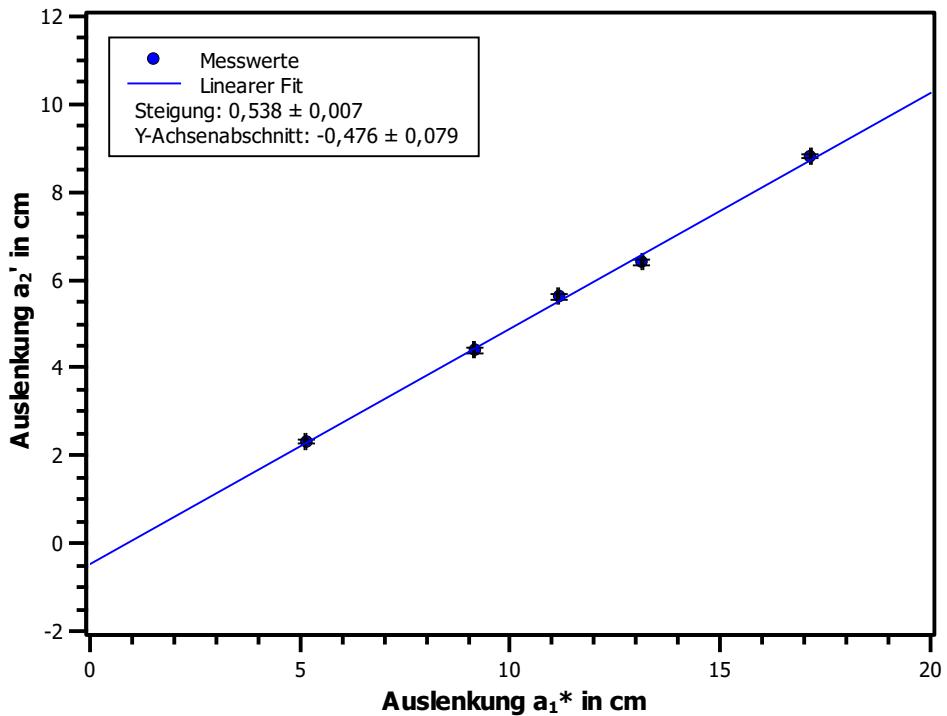


Abbildung 2: Auslenkung nach Stoß von m_1 auf m_2

was gemäß Gleichung 1 nicht sein sollte. Eine Erklärung dafür wäre, dass bei dieser Messung einige der Startauslenkungen zu groß gewählt wurden und sich der Stoß somit nicht exakt durch die Gleichung 1 beschreiben lässt, da es sich hierbei nicht um einen ballistischen und zentralen Stoß gehandelt haben könnte. Ebenso kann realistisch gesehen kein vollständig elastischer Stoß vorgelegen haben, da Reibung eine Rolle spielt und auch geringfügige Verformung der Metallkugeln zwar vernachlässigbar sind, jedoch auch Einfluss haben könnten. Für das durch die Steigungen bestimmte Massenverhältnis ergab sich lediglich eine Abweichung von 1,6% und bei der Addition nur eine Abweichung von 2,55% von 2 aus Gleichung 2. Beide Abweichungen sind nahe genug an den zu erwartenden Werten, um die Stoßgesetze mit dieser Messung zu stützen.

2.4 Schlussfolgerung

Im Großen und Ganzen wurde das Ziel dieses Versuches, zu zeigen, dass die Ergebnisse mit der Theorie übereinstimmen, erreicht. Eine Wiederholung des Versuches könnte jedoch zumindest zu besseren Y-Achsenabschnitten für die linearen Fits führen. Hierzu sollten dann weniger starke Auslenkungen gewählt werden und die Messung der Auslenkung, insofern möglich, digitalisiert werden, da das Messen nach Augenmaß mit den Schiebeblöcken

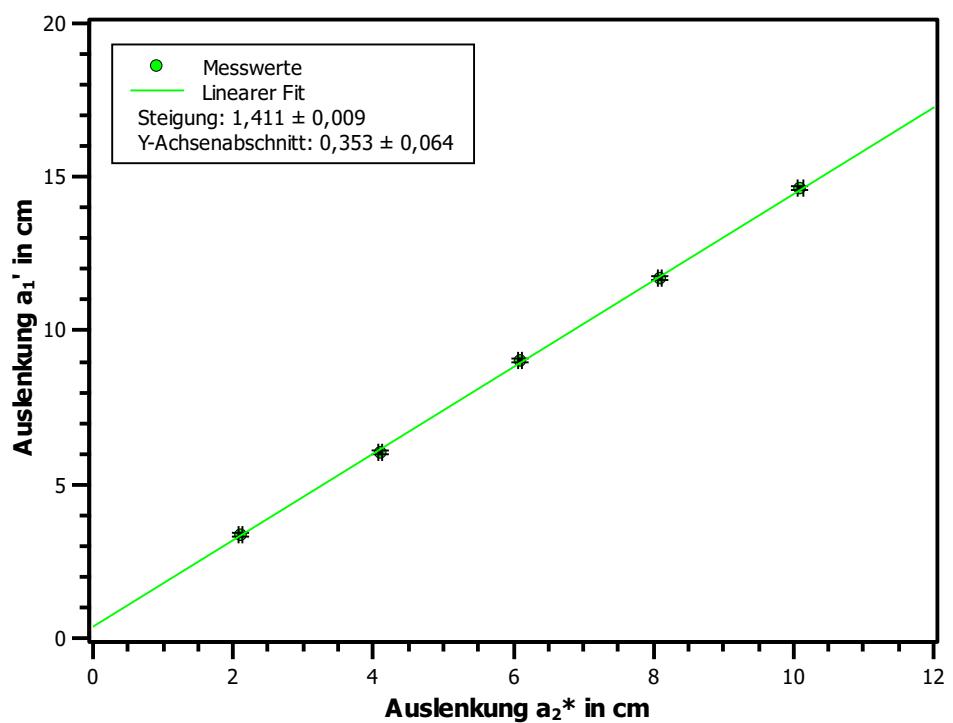


Abbildung 3: Auslenkung nach Stoß von m_2 auf m_1

als ungenau angenommen werden kann.

3 Stoßprozesse mit einer durch eine Fallrinne beschleunigten Kugel

Der Versuch stellt einen Zusammenhang zwischen der Höhenenergie einer kleinen Kugel und der Auslenkung eines Pendels nach einem Stoß her. Dabei wird die kleine Metallkugel in einer Fallrinne bei verschiedenen Positionen losgelassen und der Energieübertrag bei dem Stoß mit der Pendelkugel untersucht. Es wird der theoretische Anteil der kinetischen Energie mit $\varepsilon = \frac{5}{9}$ der Gesamtenergie überprüft und begründet, dass die Rollreibung des Systems diesen Anteil verfälscht.

3.1 Methoden

Die Fallrinne sei so justiert, dass die kleine Kugel der Rinne in einem geraden, zentralen Stoß auf die große Kugel des Pendels trifft. Die große Kugel ruht dabei vor dem Stoß direkt am Ende der Fallrinne. Die kinetische Energie der kleinen Kugel wird bei dem Stoß zu einem großen Teil an die große Kugel übertragen. Nach dem Stoß wird die Auslenkung der großen Kugel abgelesen.

In Abb. 4 kann man s als Abstand vom oberen Rand der Fallrinne identifizieren. Es werden nun für die Abstände s von 0 cm bis 50 cm, jeweils in 10 cm-Schritten mehrere Messungen zur maximalen Auslenkung der großen Kugel nach dem Stoß durchgeführt.

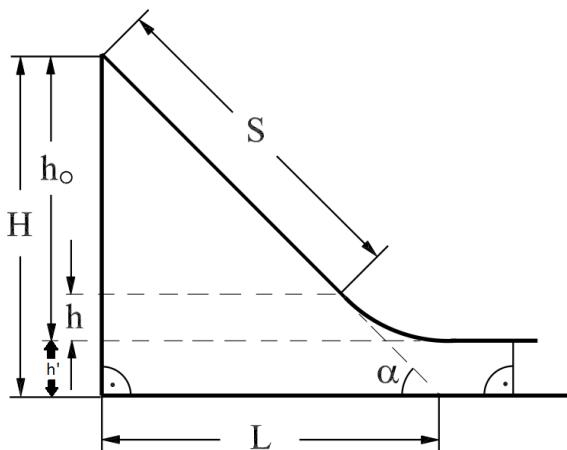


Abbildung 4: Skizze der Fallrinne.

Unsicherheiten

Die direkt gemessenen Größen seien mit den folgenden Unsicherheiten gemessen.

Alle Längenmessungen wurden durch ein Maßstab oder -band gemacht, welches auf einen Millimeter genau abgelesen werden konnte. Soweit nicht weiter aufgeführt, sei hier eine Unsicherheit von $u_0(l) = \frac{0,1\text{ cm}}{2\sqrt{6}} \approx 0,02\text{ cm}$ anzunehmen.

Für die Pendellänge wird durch erschwerete Ablesbarkeit an der Halterung eine Unsicherheit von $u(l) = \frac{1\text{ cm}}{2\sqrt{6}} \approx 0,2\text{ cm}$ angenommen. Da die Halterungen für die beiden Seilenden des Pendels nicht optimal zentriert und auf leicht unterschiedlichen Höhen positioniert waren, konnte die Länge des Pendels von der Mitte der Halterung nicht Millimeter genau abgelesen werden.

Wie in Abb. 4 abgebildet, ist die Fallrinne zum Winkel α gerade weitgeführten worden, um einen Schnittpunkt mit der unteren Schiene zu bekommen. Durch diese Abschätzung ist die Unsicherheit für die Länge L der Konstruktion mit $u(L) = \frac{0,5\text{ cm}}{2\sqrt{6}} \approx 0,1\text{ cm}$ etwas höher gewählt.

Die Waage hatte eine Unsicherheit von $u(m_1) = u(m_2) = \frac{0,01\text{ g}}{2\sqrt{3}} \approx 0,003\text{ g}$.

3.2 Messung

Für die Abmessungen der Fallrinne wurde für $L = (32,7 \pm 0,1)\text{ cm}$ gemessen. In Tab. 1 sind die Höhen über der unteren Schiene der Fallrinne (vgl. Abb. 4, Länge L) angegeben. Wir haben leider erst in der Auswertung bemerkt, dass

Tabelle 3: Höhenmessungen über der unteren Schiene und gemittelte Auslenkung des Pendels nach dem Stoß für die einzelnen Kugelpositionen.

Abstand s	Höhe $H(s)$	Auslenkung a'_2
$(0,0 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(32,7 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(16,72 \pm 0,24)\text{ cm}$
$(10,0 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(27,2 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(15,30 \pm 0,35)\text{ cm}$
$(20,0 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(21,9 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(13,34 \pm 0,11)\text{ cm}$
$(30,0 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(16,7 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(11,52 \pm 0,16)\text{ cm}$
$(40,0 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(11,3 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(9,12 \pm 0,15)\text{ cm}$
$(50,0 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(5,7 \pm 0,1)\text{ cm}$	$(5,94 \pm 0,25)\text{ cm}$

wir die Grundhöhe der Rinne $H - h_0$ nicht gemessen haben. Deswegen muss diese Höhe dem y -Achsenabschnitt der Linearisierung entnommen werden. Aus diesem Grund wird die Analyse etwas anders durchgeführt.

Für die kleine Kugel wurde ein Gewicht von 63,69 g, für die große Kugel eines von 510,21 g gemessen.

3.3 Datenanalyse

Die Fallhöhe der kleinen Kugel kann mit Abb. 4 hergeleitet werden. Es wird schnell deutlich, dass $h = h_0 - s \sin \alpha$ ist. Die beiden Größen L und H hängen

mit $\tan \alpha = \frac{H}{L}$ zusammen. Stellt man diese etwas um, folgt

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{L^2}{H^2} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}}}. \quad (4)$$

Oben eingesetzt ergibt sich

$$h = h_0 - \frac{s}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}}}. \quad (5)$$

Nach Gl. (28) der Einführung ist die maximale Auslenkung der großen Kugel gegeben durch

$$a'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2\varepsilon lh} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{5}{9}. \quad (6)$$

Setzt man nun Gl. (5) in Gl. (6) ein und quadriert beide Seiten:

$$(a'_2)^2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 2\varepsilon lh = \varepsilon \gamma \left(h_0 - \frac{s}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}}} \right), \quad (7)$$

so ist h_0 von s separiert und tritt als y -Achsenabschnitt einer linearen Gleichung nach s auf³.

In Abb. 5 ist diese Linearisierung dargestellt. Nun wird der Anteil ε der dem Stoß zur Verfügung stehenden Energie berechnet. Dazu wird aus Gl. (7) die Steigung der Theorie mit der Steigung der Regressionsgeraden gleichgesetzt⁴:

$$m = -\frac{\varepsilon \gamma}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}}} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{m}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}} \approx 0,484 \pm 0,012. \quad (8)$$

Zudem kann nun die fehlende Messung überprüft werden. Dazu wird aus Gl. (7) für $s = 0$ der y -Achsenabschnitt der Ausgleichsgerade eingesetzt. Es folgt

$$\varepsilon \gamma h_0 = (a'_2)^2 = y_0 \Rightarrow h_0 = \frac{y_0}{\varepsilon \gamma} \approx (31,30 \pm 0,88) \text{ cm} \quad (9)$$

und somit für die nicht gemessene Größe

$$h' = H - h_0 \approx (1,40 \pm 0,89) \text{ cm}. \quad (10)$$

³In der Anleitung soll a'_2 gegen \sqrt{h} aufgetragen werden. Da wir einen Wert nicht mit aufgenommen hatten, ist die Linearisierung so deutlich einfacher und führt ebenso zum Ziel. Im späteren Verlauf wird der fehlende Wert aus der Linearisierung errechnet und auf Plausibilität geprüft.

⁴Unsicherheitsrechnung im Anhang Gl. (2.1.2) mit Gl. (12) bis Gl. (18).

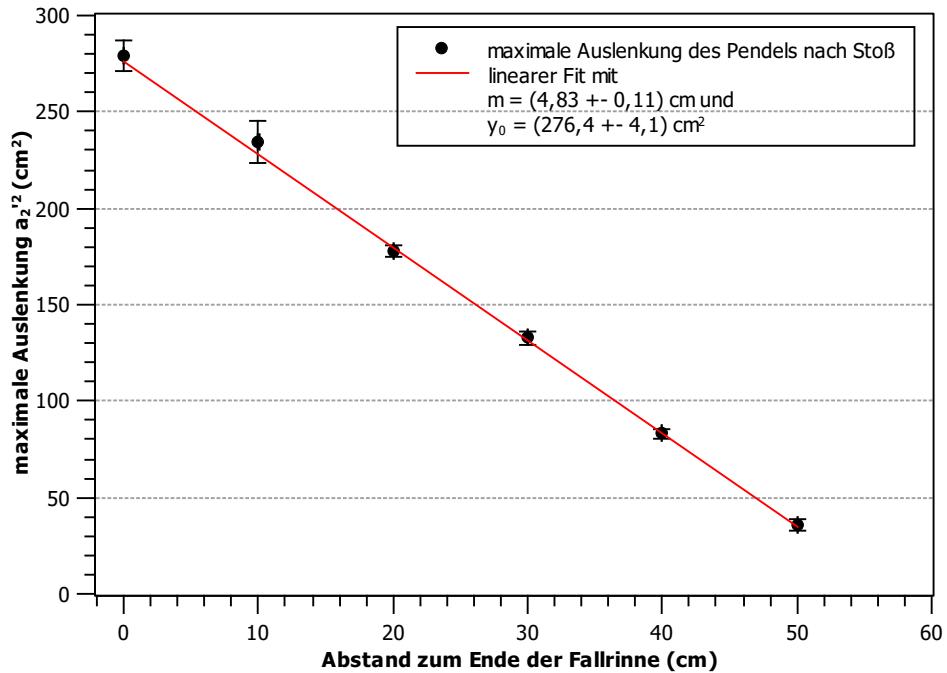


Abbildung 5: Maximale Auslenkung des Pendels bei unterschiedlichen Werten für s . Die Regressionsgerade zeigt den linearen Zusammenhang deutlich und liefert eine Steigung m , sowie einen y -Achsenabschnitt y_0 .

3.4 Schlussfolgerung

Der Versuch zeigt eine nicht unerhebliche Abweichung vom theoretisch hergeleiteten Faktor $\varepsilon = \frac{5}{9}$. Das könnte an der Reibung der Kugel auf der Fallrinne liegen, da die Kugel abgebremst wird und Energie verliert. Die Differenz von der potentiellen Höhenenergie am Anfang und bei maximaler Auslenkung ist also größer, als von der Theorieannahme und ε der nutzbaren Energie somit kleiner.

Die Nachrechnung der Höhe h' ist damit auch nicht mehr genau. Mit dem theoretischen Wert von $\varepsilon = \frac{5}{9}$, ist $h' \approx 5,4 \text{ cm}$ also deutlich näher an dem Realitätswert.

Man kann den Versuch noch einmal mit dem tatsächlichen gemessenen Wert für h' durchführen. Es würde jedoch wahrscheinlich auf ein ähnliches Ergebnis hinauslaufen.

4 Anhang

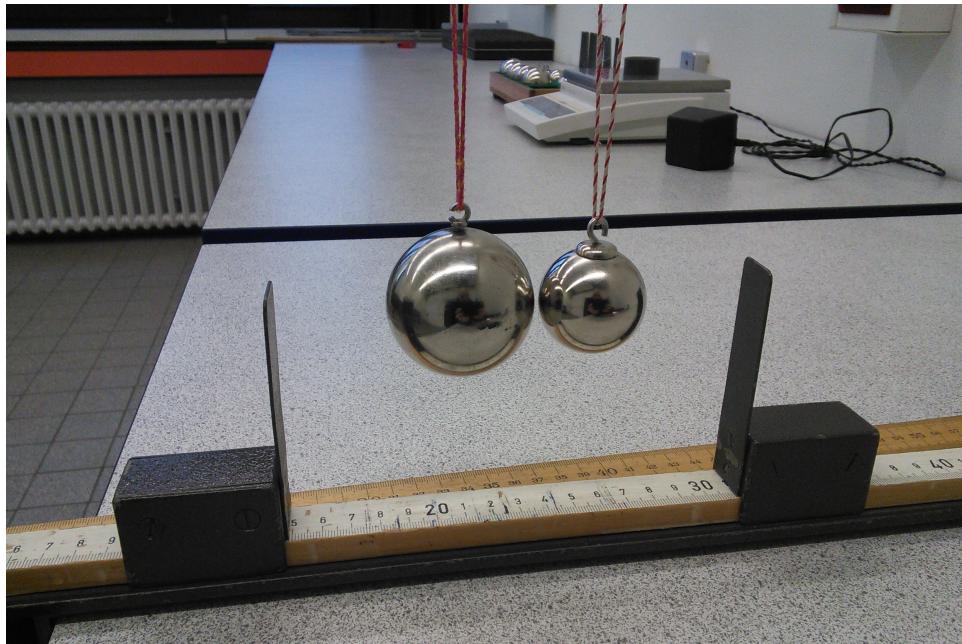


Abbildung 6: Versuchsaufbau^[1]

$$u(a^2) = \frac{\partial a^2}{\partial a} \cdot u(a) = 2a \cdot u(a) \quad (11)$$

$$\varepsilon = -\frac{m}{2l} \left(\frac{m_1 + m_2}{2m_1} \right)^2 \sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial m} = \frac{\varepsilon}{m} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial l} = -\frac{\varepsilon}{l} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial m_1} = +\frac{m}{4l} \sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{m_2}{m_1^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial m_2} = -\frac{m}{4l} \sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{1}{m_1} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial L} = -\frac{m}{2l} \left(\frac{m_1 + m_2}{2m_1} \right)^2 \frac{L}{H^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}}} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial H} = +\frac{m}{2l} \left(\frac{m_1 + m_2}{2m_1} \right)^2 \frac{L^2}{H^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}}} \quad (18)$$

Literatur

- [1] Abb. 6 stammt aus der Vorbereitung zu M4, welche im Learnweb zu finden ist.
- [2] Abb. 4 stammt aus der Vorbereitung zu M4, welche im Learnweb zu finden ist.