Gleich- und Wechselstrom
Einführung

Das Ohmsche Gesetz, d.h. die Proportionalität zwischen Strom und Spannung, ist ein fundamentales Gesetz der Elektrizitätslehre. Führt man bei Verwendung von Wechselströmen für Spannungen, Ströme und Widerstände eine komplexe Darstellung ein, so lässt sich das Ohmsche Gesetz auch auf Wechselstromkreise übertragen.

Für die Analyse von verzweigten Leitungssystemen benötigt man die Kirchhoffschen Gesetze. Dabei ist in jedem Fall zu prüfen, ob der Widerstand (Innenwiderstand) verwendeter Messinstrumente berücksichtigt werden muss und ob die Klemmenspannung durch die Beschaltung beeinflusst wird.

1 Ohmsches Gesetz, Widerstand

Metalle haben die Eigenschaft, elektrische Ladungen gut zu transportieren und werden deshalb als elektrische Leiter bezeichnet. Für eine Vielzahl solcher Leiter ist der Strom der angelegten Spannung proportional. Ist diese Proportionalität streng erfüllt, also

$$I \sim U \tag{1}$$

dann sagt man, es gilt das Ohmsche Gesetz. Der Quotient U/I heißt elektrischer Widerstand R. Nur wenn Spannung und Strom streng proportional sind, hat R einen konstanten Wert und heißt dann ohmscher Widerstand. Metalle sind in der Regel ohmsche Widerstände, sofern ihre Temperatur konstant gehalten wird.

Die leitende Verbindung selbst, das Bauteil, bezeichnet man auch als Widerstand. Handelsübliche Widerstände sind außer durch eine Angabe über den Zahlenwert des Widerstandes noch durch eine Leistungsangabe spezifiziert (z.B. 0,5 W). Das ist die maximale Leistung, die dem Widerstand zugeführt werden darf, ohne dass er Schaden nimmt.

2 Kirchhoffsche Gesetze (K.G.)

Von elektrischen Netzwerken sind in der Regel die Spannungen und die Widerstände bekannt; gesucht sind die Stromstärken. Sie lassen sich mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze berechnen.

Es gibt folgende Übereinkünfte über Vorzeichen und Richtungen von Strömen und Spannungen: eine Stromrichtung heißt positiv, wenn sie mit der Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger übereinstimmt (konventionelle Stromrichtung).

\+ ——————▷—————— − positive Stromrichtung

Der Spannung wird ebenfalls eine ’Richtung’ zugeordnet, d.h. sie ist im Sinne eines vorher definierten Umlaufs (s.u.) positiv oder negativ zu zählen. Die positive Richtung entspricht der Richtung des zwischen den Polen herrschenden elektrischen Feldes. Entsprechend definiert man die ’Richtung’ eines Spannungsabfalls als positiv, wenn er mit der Stromrichtung übereinstimmt.

\+ ———[R]———▷——— − Strom durch Widerstand

\+ ——————RI———▷——— − pos. Richtung des Spannungsabfalls

2.1 Erstes Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel)

Die Summe aller Ströme in einem Verzweigungspunkt ist Null.

$$\sum_k I_k = 0 \tag{2}$$

Dabei erhalten die Ströme, die zum Verzweigungspunkt (Knoten) hingerichtet sind, ein Vorzeichen und die Ströme, die vom Verzweigungspunkt weggerichtet sind, das andere. Das erste K.G. drückt die Erhaltung der Ladung aus.

2.2 Zweites Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel)

Längs einer beliebigen geschlossenen Schleife eines Netzwerkes (Leitermasche) ist die Summe der Quellenspannungen U_i plus die Summe der Spannungsabfälle $R_j I_j$ an den Widerständen gleich Null.

$$\sum_i U_i + \sum_j R_j I_j = 0 \tag{3}$$

Die Richtung, in der die Schleife umlaufen wird, ist beliebig wählbar. Alle Spannungsgrößen, deren Richtungen mit dem gewählten Umlaufsinn übereinstimmen, werden positiv gezählt, sonst negativ. Das zweite Kirchhoffsche Gesetz drückt die Erhaltung der Energie aus.

Bei der praktischen Anwendung ist in der Regel die Polarität der Quellen bekannt, die Richtungen der Ströme jedoch häufig nicht. Ist eine Stromrichtung zweifelhaft oder unbekannt, dann trifft man für die Anwendung der K.G. eine beliebige Festlegung. Ergibt die Rechnung für diesen Strom einen negativen Wert, dann bedeutet das nur, dass die tatsächliche Stromrichtung der beliebigen Festlegung entgegengesetzt ist.

3 Serien- und Parallelschaltung von Widerständen.

Aus der Definition des Widerstandes und den K.G. kann man die Gesamtwiderstände von Widerstandskombinationen berechnen.

- Hintereinandergeschaltete Widerstände R_1 und R_2 addieren sich zum Gesamtwiderstand R:

$$R = R_1 + R_2 \tag{4}$$

- Bei parallelgeschalteten Widerständen addieren sich die Kehrwerte der Widerstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{5}$$

  In diesem Fall ist der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste der Teilwiderstände.

4 Innenwiderstand von Spannungsquellen, Leistungsanpassung.

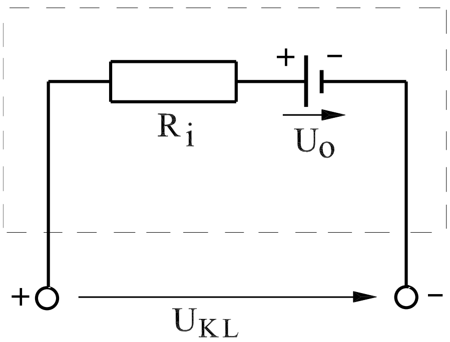

Abbildung 1: Modell einer Spannungsquelle

Eine ideale Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung U_0 unabhängig von der Belastung. Diese Anforderung kann nicht realisiert werden, denn es würde eine unendlich große Energiequelle bedeuten:

$$P = U_0 \, I_0 = \frac{U_0^2}{R} \xrightarrow{R \to 0} \infty \tag{6}$$

Das Verhalten realer Spannungsquellen (Batterien, spannungsstabilisierter Netzgeräte) kann mit dem Modell des Innenwiderstandes beschrieben werden. Dies besagt, dass eine reale Spannungsquelle als eine Reihenschaltung von idealer Spannungsquelle (Leerlaufspannung U_0) und Widerstand (Innenwiderstand R_i) betrachtet werden kann (Siehe Abb. 1). Dem Verbraucher steht nur die tatsächlich an den Klemmen anliegende Spannung U_{Kl} zur Verfügung. Ist die Quelle unbelastet, wird ihr also kein Strom entnommen, dann ist die Klemmenspannung gleich der Leerlaufspannung.

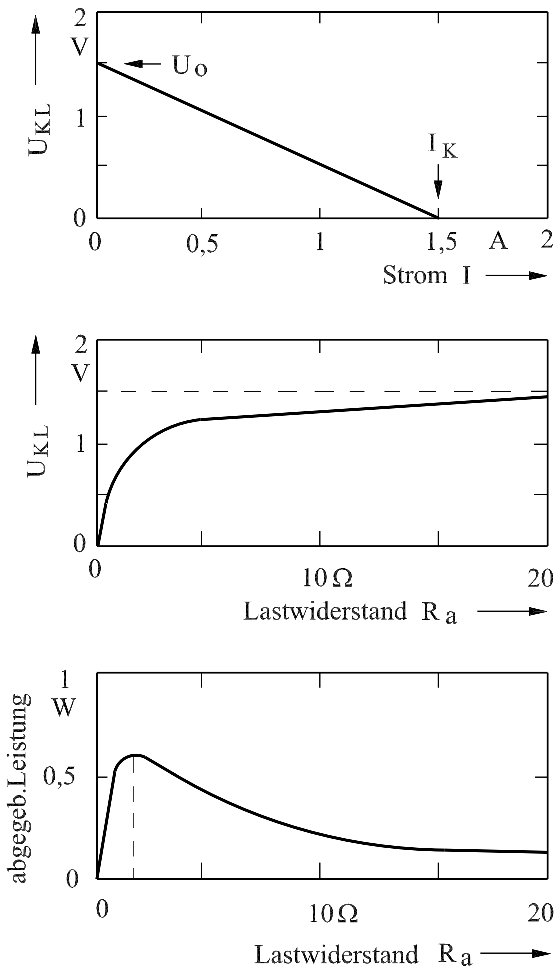

Abbildung 2: Klemmenspannung als Funktion des Stromes (oben) und des Lastwiderstandes (mitte). Abgegebene Leistung als Funktion des Lastwiderstandes (unten).

Bei Belastung der Quelle durch einen äußeren Widerstand R_a fließt der Strom I. Aus dem zweiten K.G. folgt:

$$U_0 = R_i\, I + R_a\, I \tag{7}$$

Bei Belastung liegt an den Anschlussklemmen der Quelle nicht mehr die Leerlaufspannung an, vielmehr ist jetzt die Klemmenspannung U_{Kl} gleich der um den Spannungsabfall am Innenwiderstand verminderten Leerlaufspannung:

$$U_{Kl} = U_0 - R_i I \tag{8}$$

$$U_{Kl} = R_a I \tag{9}$$

Im Falle eines Kurzschlusses ($R_a = 0$) ist der Strom maximal aber endlich (Kurzschlussstrom I_k). Für eine fiktive Spannungsquelle der Leerlaufspannung 1,5V und einem - als konstant angenommenen - Innenwiderstand von 1Ω ist in Abb. 2 die Klemmenspannung in Abhängigkeit von der Last dargestellt.

Die Klemmenspannung U_{Kl} als Funktion des Stromes $I = I(R_a)$ ergibt eine fallende Gerade, deren Steigung dem Innenwiderstand entspricht. Bedingt durch den Innenwiderstand durchläuft die Leistungsabgabe an den Verbraucher ein Maximum bei $R_a = R_i$. Ist der Verbraucherwiderstand gleich dem Innenwiderstand der Spannungsquelle, dann ist die Leistungsabgabe der Quelle maximal und es liegt Leistungsanpassung vor. Die von der Quelle abgegebene Leistung beträgt

$$P = U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2} \tag{10}$$

Leiten Sie daraus die Bedingung für Leistungsanpassung her.

Die hier für eine fiktive Spannungsquelle beschriebenen Zusammenhänge sind in der Wirklichkeit komplizierter; insbesondere ist der Innenwiderstand realer Quellen nicht konstant.

5 Wechselstrom

Bei der Beschreibung zeitlich veränderlicher Spannungen und Ströme beschränken wir uns auf diejenigen, welche ein periodisches Zeitverhalten aufweisen. Da sich wiederum periodisches Verhalten nach dem Satz von Fourier durch eine Summe von Sinusfunktionen beschreiben lässt, ist es wesentlich, Systeme zu verstehen, deren Zeitverhalten sinusförmig ist.

Sinusförmige Wechselspannungen lassen sich auf einfache Weise erzeugen, z.B. durch Drehen einer Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einem konstanten Magnetfeld. Das Zeitverhalten einer sinusförmigen Wechselspannung, beschrieben durch die Funktion $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi_U)$, ist durch die drei Bestimmungsstücke Amplitude U_0, Kreisfrequenz ω und Nullphasenwinkel φ_U festgelegt. Der Nullphasenwinkel hängt von der Wahl des jeweiligen Zeitnullpunktes ab, der frei bestimmbar ist. Geeignete Festlegungen wie $\varphi_U = 0^0$ oder $\varphi_U = 90^0$ ergeben die Ausdrücke

$$U = U_0 \sin \omega t \qquad \text{oder} \qquad U = U_0 \cos \omega t \tag{11}$$

Für die Berechnung von Stromkreisen geht man von den Kirchhoffschen Regeln, die sich im Wechselstromfall auf die Momentanwerte von Strom und Spannung beziehen, und den Strom-Spannungsbeziehungen für die Grundzweipole (Bauelemente) aus. Letztere lauten

$$\text{ohmscher Widerstand } R \qquad U_R = R\,I \tag{12}$$

$$\text{Spule, Induktivität } L \qquad U_L = L\,\frac{dI}{dt} \tag{13}$$

$$\text{Kondensator, Kapazität } C \qquad U_C = \frac{1}{C}\int I\,dt \tag{14}$$

Die Anwendung der K.G. auf Wechselstromnetze unter Berücksichtigung von (12), (13) und (14) ergibt ein System von Differentialgleichungen. Zur Lösung der Differentialgleichungen sind drei Methoden gebräuchlich:

1. die direkte Lösung d.h. Rechnung im Reellen
2. die grafische Lösung d.h. Zeigerdarstellung
3. die komplexe Lösung d.h. Übergang ins Komplexe.

Diese Verfahren werden später anhand des letzten Versuchsaufbaus (Reihenschaltung von R, L, C) erläutert.

6 Leistung, Effektivwerte

Ein ohmscher Widerstand, der von einem Wechselstrom durchflossen ist, verbraucht die Leistung

$$\begin{aligned} P &= U\,I \\ &= U_0 \cos\omega t\, I_0 \cos\omega t \\ &= U_0\, I_0\, \cos^2 \omega t \end{aligned} \tag{15}$$

Sie ist zeitabhängig. Im allgemeinen ist jedoch nur die mittlere Leistung $\overline{P}$ von Interesse. Den zeitlichen Mittelwert der Leistung erhält man durch Zeitintegration über eine Periode und Division durch die Periodendauer.

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T U_0\, I_0\, \cos^2 \omega t\, dt \\ &= \frac{1}{2} U_0\, I_0 \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{16}$$

Man bezeichnet das $(1/\sqrt{2})$-fache der Spannungs- bzw. Stromamplitude als Effektivspannung bzw. Effektivstrom.

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

Ein Gleichstrom mit diesen Werten bewirkt in dem ohmschen Widerstand effektiv den gleichen Leistungsverbrauch. Es ist üblich, bei der Spezifikation von Wechselspannungen den Effektivwert anzugeben. Eine an den Steckdosen anliegende Wechselspannung von 220V hat eine Amplitude von $220\text{V}\cdot\sqrt{2} = 311\text{V}$.

Für den allgemeineren Fall mit einem Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung ergibt sich für die mittlere Leistung:

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T [U_0\, \cos\omega t]\, [I_0\, \cos(\omega t + \varphi)]\, dt \\ &= U_{eff}\, I_{eff}\, \cos\varphi \end{aligned} \tag{18}$$

Die Größen $\overline{P}$, U_{eff} und I_{eff} sind unabhängig messbar. Es ist somit möglich, den Phasenwinkel φ bis auf sein Vorzeichen zu bestimmen.

7 Messung von Wechselgrößen

Bei den Zeigerinstrumenten wird die Anzeige durch die Wirkung des Stroms im Messwerk hervorgerufen. Der Zeigerausschlag ist unmittelbar ein Maß für den Strom. Durch Kenntnis des Widerstandes der Messspule wird er auch zu einem Maß für die Spannung. Einige Messsysteme berücksichtigen die Richtung des Stromes und erfordern die richtige Polung beim Anschluss. Um diese Geräte für Wechselgrößen benutzen zu können, müssen sie über einen um Null symmetrischen Anzeigebereich verfügen. Die Trägheit des beweglichen Systems entscheidet, ob die Anzeige in der Lage ist, den Wechselgrößen schnell genug zu folgen. Die meisten Geräte sind zu träge; sie zeigen bei hinreichender Dämpfung nur den linearen Mittelwert an:

$$\text{linearer Mittelwert} \qquad A = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\,dt \tag{19}$$

Für sinusförmige Spannungen ist der Mittelwert Null, d.h. obige Messinstrumente ergeben keinen Ausschlag.

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, verwendet man als Kenngrößen für Wechselstrom und -spannung die zeitlich konstanten Effektivwerte. Für die Effektivwertbestimmung benutzt man zwei Methoden, zum einen die Bildung des linearen Mittelwertes des Betrages und zum anderen die Bildung des Mittelwertes des Quadrates.

$$\begin{array}{c} \text{linearer Mittelwert des Betrages} \\ \text{(Gleichrichtwert)} \end{array} \qquad A_{=} = \frac{1}{T}\int_0^T |A(t)|\,dt \tag{20}$$

$$\begin{array}{c} \text{linearer Mittelwert des Quadrates} \\ \text{(Effektivwert)} \end{array} \qquad A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A^2(t)\,dt} \tag{21}$$

Berechnen Sie diese Werte für sinusförmigen Wechselstrom.

Die erste Methode lässt sich realisieren durch Zweiweggleichrichtung der zu messenden Größe und Registrierung durch ein träges Galvanometer. Da sich der Gleichrichtwert nur um einen konstanten Faktor vom Effektivwert unterscheidet, ergibt der Ausschlag des Galvanometers bei entsprechender Eichung der Skala den gewünschten Effektivwert.

Die zweite Methode ist bei Weicheiseninstrumenten sowie bei elektrodynamischen Messwerken realisiert. Bei diesen Instrumenten ist der Ausschlag proportional zum Quadrat der Messgröße und damit auch unabhängig von der Stromrichtung. Elektrodynamische Messwerke sind ähnlich gebaut wie Galvanometer (siehe Versuch E2), nur dass sie anstelle des Permanentmagneten eine feststehende Spule zur Erzeugung des Magnetfeldes besitzen. Die Proportionalität zum Quadrat des Stromes bzw. der Spannung wird durch die interne Hintereinanderschaltung der beiden Spulen erreicht. Man kann diese Geräte auch als Leistungsmesser einsetzen. Dann werden sie so geschaltet, dass ein stromproportionaler Strom durch die Drehspule und ein spannungsproportionaler Strom durch die feste Spule fließt. Der Ausschlag ist proportional zum Produkt aus Strom und Spannung und damit auch proportional zu $\cos\varphi$; man erhält die Wirkleistung.

8 Stromkreisberechnung am Beispiel einer Reihenschaltung

Es sei ein ohmscher Widerstand R, eine Induktivität L und eine Kapazität C in Serie an eine Wechselspannung U angeschlossen. Die Anwendung der Kirchhoffschen Maschenregel führt auf die Beziehung

$$U = U_R + U_L + U_C \tag{22}$$

Berücksichtigt man die Strom-Spannungsbeziehungen der Bauteile, so folgt

$$U = R\,I + L\,\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\,dt \tag{23}$$

Aus (23) lässt sich ersehen, dass bei vorgegebener sinusförmiger Wechselspannung der Frequenz $f = \omega/2\pi$ der Strom ebenfalls sinusförmig sein und die gleiche Frequenz aufweisen muss. Man kann also für den Strom den Lösungsansatz machen:

$$I = I_0\,\sin(\omega t + \varphi) \tag{24}$$

Die unbekannte Amplitude I_0 des Stromes und seine Phasenlage relativ zur Spannung erhält man aus der Lösung der Differentialgleichung.

8.1 Lösung im Reellen

Durch Differenzieren und Integrieren des Lösungsansatzes entsprechend (23) ergeben sich jeweils um $\pm 90^0$ verschobene Spannungsabfälle. Die Addition der drei Terme erfolgt mühsam mittels der Additionstheoreme. Die Faktorisierung von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ und die Tatsache, dass es keine Linearkombination dieser beiden Funktionen gibt, die für alle Zeiten Null ist, führt auf zwei Gleichungen, die die gesuchten Unbekannten liefern.

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{25}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{26}$$

8.2 Grafische Lösung (Methode der ruhenden Zeiger)

Für die grafische Lösung werden die mathematischen Operationen von (15) in grafische Konstruktionsvorschriften umgesetzt:

- Die Spannungen und Ströme sind Vektoren (Zeiger) in einer Ebene, wobei deren Länge den Wert der Amplitude darstellt.
- Die Abszisse ist die Bezugsachse. Der Winkel eines Zeigers zur Bezugsachse entspricht dem Nullphasenwinkel.

- Multiplikation eines Stromes mit einem konstanten Faktor (Widerstand) heißt: der Ergebniszeiger hat die gleiche Winkellage und eine um den Faktor R veränderte Länge.
- Differentiation bedeutet Drehung um $+90^0$ und Längenänderung um den Faktor ω
- Integration bedeutet Drehung um -90^0 und Längenänderung um den Faktor $1/\omega$
- Die Addition der Teilergebnisse erfolgt vektoriell.

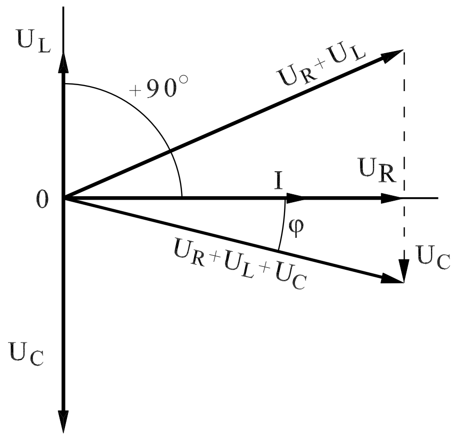

Abbildung 3: Zeigerdiagramm

Man geht zunächst von einem willkürlich angenommenen Strom aus, berechnet U_R, legt diesen Zeiger in die Bezugsrichtung, berechnet U_L und U_C und bildet schließlich U. Damit hat man die Lagen der Zeiger richtig ermittelt, insbesondere den Phasenwinkel. Die absoluten Längen erhält man durch Anpassung an die vorgegebene Spannung U.

8.3 Lösung im Komplexen

Dieser Weg erfordert einige Grundkenntnisse der Funktionentheorie (komplexe Zahlen, Betrag, Eulersche Formel, Polardarstellung ...). Man transformiert die Funktionen $U(t)$ und $I(t)$, die im Reellen definiert sind, in Bildfunktionen mit komplexem Geltungsbereich. Im Komplexen lassen sich die erforderlichen Rechnungen einfacher durchführen, bedingt durch die Struktur der komplexen Zahlen. Anschließend erfolgt eine Rücktransformation auf reelle Lösungen. Die Transformationsvorschrift auf die Bildfunktion lautet:

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi_U) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{U} = U_0 \exp\{i(\omega t + \varphi_U)\} \tag{27}$$
$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_I) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{I} = I_0 \exp\{i(\omega t + \varphi_I)\} \tag{28}$$

Es kann gezeigt werden, dass die in der DGL vorkommenden Rechenoperationen sich auf die Bildfunktionen übertragen lassen. (Vorsicht, die Multiplikation zweier komplexer

Funktionen, wie sie für die Leistungsberechnung nötig wäre, führt zu falschen Ergebnissen!) Setzt man die Bildfunktionen in (23) ein und führt Differentiation und Integration aus, so ergibt sich folgende Gleichung einfacher Struktur:

$$\tilde{U} = R\,\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} \tag{29}$$

Durch Einführung der komplexen Widerstände (Impedanzen)

$$Z_R = R \tag{30}$$
$$Z_L = i\omega L \tag{31}$$
$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \tag{32}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= Z_R\,\tilde{I} + Z_L\,\tilde{I} + Z_C\,\tilde{I} \\ &= (Z_R + Z_L + Z_C)\,\tilde{I} \\ &= Z\,\tilde{I} \end{aligned} \tag{33}$$

Dabei ist Z die Gesamtimpedanz. In dieser Reihenschaltung addieren sich die komplexen Widerstände der Bauteile zum komplexen Gesamtwiderstand. In ihm steckt die Information über die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung. Dies wird z.B. deutlich, wenn man die Impedanz in Polardarstellung schreibt

$$\tilde{U} = |Z|\exp(i\varphi)\,\tilde{I} \tag{34}$$

Darin heißt $|Z|$ Scheinwiderstand. Für das Beispiel der Reihenschaltung von R, L und C gilt

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{35}$$

Was hier an einem Beispiel gezeigt wurde, lässt sich ganz allgemein formulieren: Für die komplexen Ströme und Spannungen und die komplexen Widerstände gelten in völliger formaler Analogie zu den reellen Größen im Gleichstromfall Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze u.a.

Nachdem ein Wechselstromnetzwerk im Komplexen berechnet wurde, erhält man die messbaren Größen erst nach erfolgter Rücktransformation ins Reelle. Die Vorschrift dafür lautet

$$\tilde{U} = U_0\exp\{i(\omega t + \varphi_U)\} \quad\Longrightarrow\quad U = U_0\,\sin(\omega t + \varphi_U) \tag{36}$$
$$\tilde{I} = I_0\exp\{i(\omega t + \varphi_I)\} \quad\Longrightarrow\quad I = I_0\,\sin(\omega t + \varphi_I) \tag{37}$$

und liefert die reelle Beziehung

$$U_0\,\sin(\omega t + \varphi_U) = |Z|\,I_0\,\sin(\omega t + \varphi_I + \varphi) \tag{38}$$

Weil (38) für alle t gilt, folgt

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I \tag{39}$$

$$|Z| = \frac{U_0}{I_0} \tag{40}$$

Da sich die Amplituden und die Effektivwerte nur um den Faktor $\sqrt{2}$ unterscheiden (siehe (17)), kann man den Betrag des Widerstandes auch aus den Effektivwerten erhalten:

$$|Z| = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \tag{41}$$