Datum: 21.06.2018, Münster
Jonathan Max Sigrist <441760>

Einführung in das wissenschaftliche Programmieren - Physik
Do, 14:00-16:00; Raum ACP W410

Übung 7 – Numerische Differentiation und Integration

Aufgabe 1

a) Der Nutzer gibt die x-Position an, an der die Ableitung berechnet werden soll. Die Schrittweite wird wie in der Vorlesung beschrieben mit `h_opt = sqrt(eps_M)` angenommen.

x	f'(x)	Fehler
0	0.000316	3.162e-04
1	2.000316	3.162e-04
5	10.000316	3.162e-04
13.68746	27.375236	3.162e-04
-4.26	-8.519683	3.162e-04

b) Der Nutzer kann nun zusätzlich eine Schrittweite angeben. Die Tabelle zeigt einige Werte für h und deren Fehler bei `x = 2`.

h	Fehler
0.01	1E-02
0.001	1E-03
1e-04	1E-04
1e-05	1E-05
1e-06	1.00009E-06
5e-07	4.99156E-07
1e-07	9.76996E-08
5e-08	5.32907E-08
1e-08	0.00000E+00
5e-09	0.00000E+00
1e-09	4.44089E-07

Der Minimalwert ist hier entgegen der Erwartung bei 1e-08 zu finden. Er ist so klein, dass er nicht mehr registriert wird.

Aufgabe 2

a) Im Skript ist in Gl. (66) der totale Fehler angegeben. Die Ableitung nach N wird nun gleich null gesetzt und nach N aufgelöst. Es folgt Gl. (67) wobei im Zähler nun $8(b-a)^5$ steht. Daraus ergibt sich die ideale Stützpunktzahl $N = 5$. Das berechnete Integral hat einen Wert von 0,10517.

b) Da $\int e^x = e^x$, kann der eigentliche Wert mit `e**b-e**a` errechnet werden. `e` ist dabei die Eulersche Zahl. Der Error ist die Differenz aus dem Wert der Näherung und dem analytischen Wert, also 3.81693E-08.

c) Der Fehler ist noch mal eine Größenordnung kleiner als der maximale angegebene Fehler in der Vorlesung.

d) Der in der Vorlesung angegebene totale Fehler Gl. (68) für die Trapezregel kann abgeleitet und gleich null gesetzt werden. Es ergibt sich erneut ein ähnlicher Wert zu Gl. (69). Hier steht nun im Zähler $4(b-a)^3$. Da $\int e^x = e^x$ folgt $\frac{f^{(2)}}{f} = 1$ und $N = 69{,}31 \approx 70$.

e) Setzt man $N = 70$ in Gl. (68) ein, so erhält man einen totalen Fehler von $\varepsilon^{tot} = 1{,}041 * 10^{-6}$

f) Vergleicht man beide Verfahren miteinander, so ist die Simpson Methode deutlich effizienter und genauer. Es braucht weniger Stützpunkte und der Fehler liegt unter dem des Trapezverfahrens.