

VERSUCHSBERICHT ZU

M3 – ELASTIZITÄT

Gruppe 10 Mi

Alex Oster (E-Mail: a_oste16@uni-muenster.de)
Jonathan Sigrist (E-Mail: j_sigr01@uni-muenster.de)

durchgeführt am 06.12.2017

betreut von
Christian THIEDE

12. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Kurzfassung	2
2	Kurzfassung	2
3	Untersuchung der Elastizität von Metallstäben	2
3.1	Methoden	2
3.2	Messung	4
3.3	Diskussion	7
3.4	Schlussfolgerung	8
4	Torsionspendel	9
4.1	Methoden	9
4.2	Datenauswertung	9
4.3	Schlussfolgerung	10
5	Anhang	12

1 Kurzfassung

Bericht geht über Rückstellkräfte durch elastische Biegung und Torsion.

Ziel/Motivation: Welches Material?

2 Kurzfassung

Der erste Versuch beschäftigt sich mit der Elastizität von Stäben verschiedener Materialien. Das Ziel dieses Versuchs sind Elastizitätsmoduln¹ für die verwendeten Materialien, welche mit den Literaturwerten übereinstimmen. Dazu werden an die eingespannten Stäbe Gewichte gehangen und die Auslenkung gemessen. Daraus und den Maßen der Stäbe wird dann der Elastizitätsmodul des jeweiligen Materials ermittelt. Die Ergebnisse dieses Versuchs entsprechen den Erwartungen, also den Literaturwerten, jedoch nicht und es lässt sich keine genaue Aussage über die Materialien der Stäbe darlegen.

3 Untersuchung der Elastizität von Metallstäben

Dieser Versuch beschäftigt sich mit der reversiblen Elastizität von Metallstäben. Diese wird durch den Elastizitätsmodul beschrieben. Jedes Material nimmt dafür unterschiedliche Werte an. Es wird angenommen, dass die Literaturwerte für den Elastizitätsmodul der untersuchten Metalle der Realität entsprechen. Zur Überprüfung dieser Hypothese dient der folgende Versuch, in dem der Elastizitätsmodul für verschiedene Materialien ermittelt wird. Da nicht gegeben ist, aus welchen Materialien die Stäbe bestehen wird vermutet, dass es sich bei diesen aufgrund der Farbe und des Gewichts um Stäbe aus Messing, Stahl und Aluminium handelt.

3.1 Methoden

Aufbau

Der Aufbau des Versuches ist in abb:Versuchsskizze1 dargestellt. Hierbei werden Stäbe aus verschiedenen Materialien eingespannt und deren Auslenkung beim Anhängen eines Gewichtes gemessen². Es werden Stäbe verschiedener Form untersucht. Dabei handelt es sich bei den runden Stäben vermutlich um welche aus Messing, Stahl und Aluminium. Zusätzlich wird

¹Plural von „der Elastizitätsmodul“ nach Duden

²Alle gemessenen Werte sind dem Laborbuch zu entnehmen

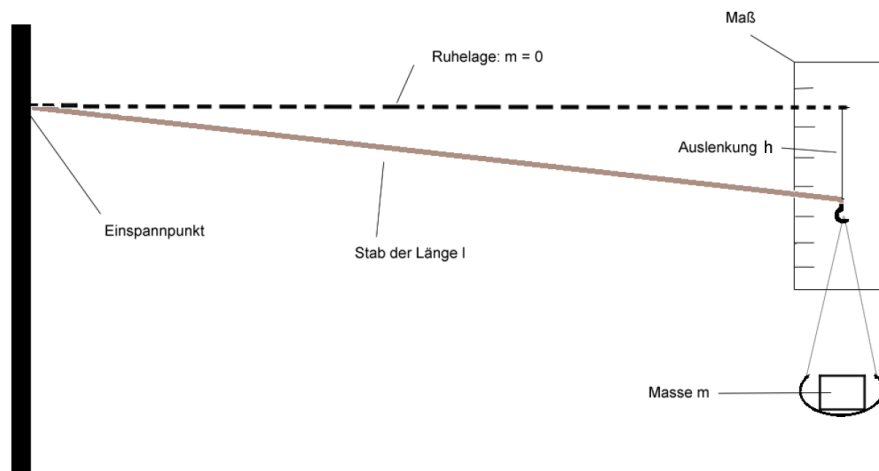


Abbildung 1: Skizzierung des Versuchsaufbaus

ein quaderförmiger Stab, vermutlich ebenfalls aus Messing, untersucht, um zu betrachten, wie sich dieser hoch- bzw. flachkant eingespannt verhält. Die Stäbe werden im Folgenden der Hypothese nach, nach ihrem Material, bezeichnet.

Mit Hilfe eines Maßbandes werden die Längen der Stäbe gemessen, die Breiten hingegen mit einer Mikrometerschraube. Um zu prüfen, ob die Stäbe an jeder Stelle die gleiche Breite besitzen, wird die Breitenmessung an fünf Stellen jeweils drei mal durchgeführt, da die Mikrometerschraube verschiedene Werte misst, je nachdem wie stark geschraubt bzw. wie fest angezogen wird. Für die Messung werden pro Stab jeweils fünf verschiedene Gewichte angehängt und die Auslenkung dabei an einem Maß auf einem Spiegel paralaxenfrei abgelesen. Zur Bestimmung dieser Auslenkung, wird der Wert für die Ruhelage (bei $m = 0\text{ g}$) gemessen und von dem gemessenen Wert bei angehängter Masse unterschieden. Für jedes neue Gewicht wird der Wert für die Ruhelage neu bestimmt, um mögliche Ungenauigkeiten, wie durch inelastische Deformierung des Stabes, zu vermeiden.

Unsicherheiten

Für die Unsicherheiten bei den Längenmessungen werden Dreiecksverteilungen verwendet. Bei der Mikrometerschraube lassen sich die Werte auf $0,01\text{ mm}$ genau ablesen, zudem war eine Unsicherheit von $10\mu\text{m}$ vom Hersteller gegeben, dies wird für die Bestimmung der Unsicherheit der Mikrometerschraube verwendet. Für das Maßband und das Maß auf dem Spiegel ergibt sich dieselbe Unsicherheit, da bei beiden das Ablesen auf 1 mm genau möglich war. Die Massen waren gegeben und werden als absolut angesehen. Hier treten demnach keine Unsicherheiten auf. Für kombinierte Unsicher-

heiten wird

$$u(s) = \pm \sqrt{\sum_{k=0}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (1)$$

verwendet.

3.2 Messung

Die Messung der Länge der Stäbe ergab die in tab:Stablängen gelisteten Werte. Hierbei wurde bei allen Stäben der Einspann von $(2,00 \pm 0,20)$ cm abgezogen und die Unsicherheiten kombiniert.

Tabelle 1: Länge der Stäbe

Material	Länge l (in cm)
Messing (eckig)	$29,2 \pm 0,029$
Messing (rund)	$29,2 \pm 0,029$
Stahl	$28,9 \pm 0,029$
Aluminium	$28,6 \pm 0,029$

Für die Breite der Stäbe sind die gemittelten Werte für die verschiedenen Messpunkte in tab:Stabbreiten angegeben. Auch hier ergibt sich eine kombinierte Unsicherheit.

Tabelle 2: Breite der Stäbe

Material	Breite (in mm)	Material	Breite (in mm)
Messing (hochkant)	5,403	Stahl	3,383
	5,397		3,377
	5,407		3,380
	5,410		3,367
	5,387		3,387
Messing (flachkant)	2,390	Aluminium	3,393
	2,367		3,390
	2,363		3,380
	2,357		3,373
	2,403		3,337
Messing (rund)	3,370	Unsicherheit für die Werte	$\pm 0,011$ mm
	3,377		
	3,400		
	3,357		
	3,403		

Diese Werte lassen darauf schließen, dass die Breite der Stäbe sich entlang dieser nicht merklich ändert, da alle gemessenen Werte in Bereichen

innerhalb von zwei Standardunsicherheiten voneinander liegen. Zur Berechnung des Flächenträgheitsmoment werden die runden Stäbe deswegen als zylinderförmig angenommen. Dieses ergibt sich für Stäbe unterschiedlicher Querschnittsfläche wie folgt:

$$I_{\text{Rechteck}} = \frac{ab^3}{12}$$

$$\text{bzw. } I_{\text{Kreis}} = \frac{\pi d^4}{64},$$

wobei die Seite a im Falle einer rechteckigen Querschnittsfläche orthogonal zu der Biegungsebene verläuft. Die Größe d entspricht dem Durchmesser bei einem kreisförmigen Querschnitt. Für a , b und d werden die oben gelisteten Breiten gemittelt. Der Durchmesser d entspricht hierbei der Breite der runden Stäbe.

Es ergeben sich für die Stäbe die in tab:Trägheitsmomente aufgeführten Flächenträgheitsmomente. Hier sind die Unsicherheiten für den rechteckigen Querschnitt durch die Ableitungen von I nach a bzw. b und deren Unsicherheiten bestimmt (vgl. eq:kombUnsicherheit). Dasselbe gilt für die runden Stäbe, wobei hier nach d abgeleitet und mit dessen Unsicherheit kombiniert wird. Das Flächenträgheitsmoment wird benötigt um den Elastizitätsmodul

Tabelle 3: Trägheitsmomente der Stäbe

Material	Trägheitsmoment I (in mm ⁴)
Messing (hochkant)	$6,037 \pm 0,153$
Messing (flachkant)	$31,19 \pm 0,85$
Messing (rund)	$6,417 \pm 0,190$
Stahl	$6,398 \pm 0,189$
Aluminium	$6,366 \pm 0,189$

zu bestimmen. Der genaue Zusammenhang ergibt sich aus der folgenden Formel für die maximale Auslenkung h am Ende eines Stabes:

$$h = \frac{Fl^3}{3EI} \quad (2)$$

F ist hierbei die Gewichtskraft, welche auf das Ende des Stabes wirkt. Im Folgenden wird das Eigengewicht der Stäbe bezüglich F vernachlässigt. Da die Gewichtskraft $F = mg$ entspricht, ergibt sich ein lineares Verhältnis zwischen Auslenkung und Masse:

$$h = \frac{gl^3}{3EI} \cdot m. \quad (3)$$

Der Faktor vor m entspricht also der Steigung, die man erhält, wenn man die Auslenkung der Stäbe gegen die angehängte Masse aufträgt. Die bei

der dazu durchgeführten Messung erhaltenen Daten sind in `abb:linearerFit` veranschaulicht. Dabei weisen die gemessenen Punkte ein lineares Verhältnis auf. Da sich dieses bereits aus der `eq:Auslenkung` ergab, wurden die Punkte für die verschiedenen Stäbe durch einen linearen Fit verbunden³. Die sich durch den Fit ergebenen Steigungen sind in `tab:Steigungen` aufgetragen.

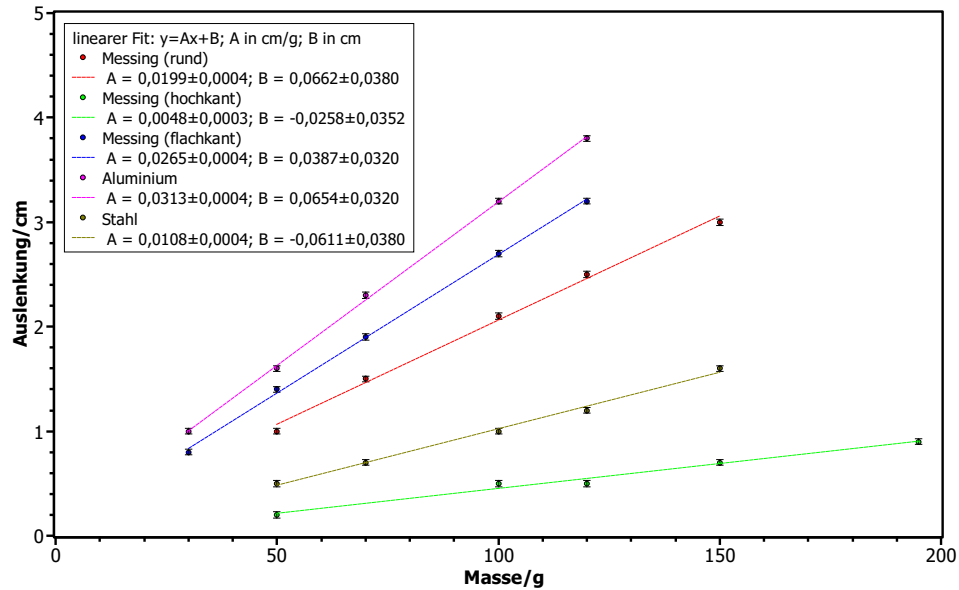


Abbildung 2: Auslenkung der Stäbe in Abhängigkeit der angehängten Masse

Tabelle 4: Durch linearen Fit ermittelte Steigungen

Material	Steigung A (in cm/g)	Y-Achsenabschnitt B (in cm)
Messing (hochkant)	$0,0199 \pm 0,0004$	$0,0662 \pm 0,0380$
Messing (flachkant)	$0,0048 \pm 0,0003$	$-0,0258 \pm 0,0352$
Messing (rund)	$0,0265 \pm 0,0004$	$0,0387 \pm 0,0320$
Stahl	$0,0313 \pm 0,0004$	$0,0654 \pm 0,0320$
Aluminium	$0,0108 \pm 0,0004$	$-0,0611 \pm 0,0380$

Um nun den Elastizitätsmodul E zu berechnen, wird der Vorfaktor von m aus `eq:Auslenkung`, welcher der Steigung A entspricht, nach E umgeformt:

$$E = \frac{gl^3}{3AI}. \quad (4)$$

Einsetzen der Länge l , der Steigung A und des Trägheitsmomentes I ergeben sich für die verschiedenen Stäbe, unter Berücksichtigung der sich

³Der Fit wurde von dem Programm SciDavis berechnet, dazu wurden die Unsicherheiten der Auslenkung und die Methode der kleinsten Quadrate herangezogen

dabei kombinierenden Unsicherheiten, die Elastizitätsmoduln der verschiedenen Materialien. Diese sind in tab:Elastizitätsmoduln neben den Literaturwerten aufgeführt.

Tabelle 5: Ermittelte Elastizitätsmoduln und Literaturwerte

Material	Elastizitätsmodul E (in Pa)	Literaturwerte (in Pa)
Messing (hochkant)	$(6,777 \pm 0,173) \cdot 10^{10}$	$7,8 \cdot 10^{10}$ bis $12,3 \cdot 10^{10}$
Messing (flachkant)	$(5,438 \pm 0,016) \cdot 10^{10}$	$7,8 \cdot 10^{10}$ bis $12,3 \cdot 10^{10}$
Messing (rund)	$(4,734 \pm 0,142) \cdot 10^{10}$	$7,8 \cdot 10^{10}$ bis $12,3 \cdot 10^{10}$
Stahl	$(3,941 \pm 0,117) \cdot 10^{10}$	$9,0 \cdot 10^{10}$ bis $14,5 \cdot 10^{10}$
Aluminium	$(1,113 \pm 0,332) \cdot 10^{11}$	$7,0 \cdot 10^{10}$

3.3 Diskussion

Vergleicht man die ermittelten Elastizitätsmoduln mit den Literaturwerten, so fällt auf, dass diese weit voneinander entfernt liegen. Zu erwarten wäre, dass der Elastizitätsmodul für das gleiche Material denselben Wert annimmt. Die Messergebnisse für die Messingstäbe liegen jedoch nicht nur weit von dem Literaturwert [1] für Messing, sondern auch voneinander. Dass die Werte, trotz geringer Unsicherheit streuen könnte bedeuten, dass es sich bei dem runden und dem eckigen Stab um verschiedene Materialien handelt, was aufgrund der Ähnlichkeit dieser bezüglich Farbe und Gewicht jedoch eher auszuschließen ist. Zumindest liegen die Werte in derselben Größenordnung und der „beste“ Wert, von dem hochkant eingespannten Messingstab, liegt nur 13,2% von dem Literaturwert entfernt. Demnach ist nicht auszuschließen, dass es sich hierbei tatsächlich um einen Messingstab handelt. Besonders irritierend an den Messergebnissen ist, dass der Elastizitätsmodul, welcher der Literatur nach am größten sein sollte, hier am geringsten ist und umgekehrt. Bezogen auf die Stäbe, welche vermutlich aus Stahl [2] und Aluminium [3] bestehen. Beide Elastizitätsmoduln weichen über 50% von den Literaturwerten ab. Für den Literaturwert zum Stahl, wurde der Elastizitätsmodul von Gusseisen verwendet. Dass es sich bei dem betrachteten Stab auch um Gusseisen handelt, ist jedoch fraglich. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass hierbei auch weitere Stoffe unter gemischt sind, deren Elastizitätsmodul von dem von Gusseisen abweicht. Für den Stab aus Aluminium lässt es sich jedoch nicht so argumentieren, da sein besonders leichtes Gewicht und silbrige Farbe, sowie die starke Auslenkung beim Anhängen der Gewichte deutlich auf Aluminium als Stoff weisen. Die Unsicherheiten sind bei allen ermittelten Elastizitätsmoduln zu klein, als dass man mit diesen näher an die Literaturwerte käme, was bei solch großen Abweichungen hilfreich wäre.

3.4 Schlussfolgerung

Aus der Ergebnisdiskussion lässt sich schließen, dass es sinnvoll wäre den Versuch zu wiederholen, da die Ergebnisse den Literaturwerten nicht entsprechen und sich demnach auch nicht erschließen ließ, ob die Stäbe aus den vermuteten Materialien bestehen. Kleinere Ungenauigkeiten könnten durch mehr Messungen vernachlässigbar werden, seien es zum Beispiel mehr Messpunkte für die Auslenkung der Stäbe oder weitere Messungen zur Breite der Stäbe mit der Mikrometerschraube. Die Ziele dieses Versuchs wurden nicht erreicht und inwieweit die Ergebnisse stimmen ist äußerst fraglich.

4 Torsionspendel

In dem zweiten Versuch wurde mit einem Torsionspendel der Schubmodul sowie die Rückstellkraft des Drahtes berechnet. Im Abgleich mit Literaturwerten wird dann die Behauptung gestützt, dass der Draht aus Stahl besteht. Zur Messung werden eine rotierende Scheibe, sowie eine Hantel mit verstellbaren Gewichten genutzt.

4.1 Methoden

Das Torsionspendel bestand aus einem dünnen Draht, welches fest an einer Halterung angebracht war. Am unteren Ende des Drahtes konnten durch einen Schraubmechanismus eine massive Metallscheibe und eine Hantel mit abnehmbaren und auf der Achse verschiebbaren Gewichtsscheiben angebracht werden. Dabei dienten Kerben in der Achse dazu, die Gewichte in festen Abständen vom Mittelpunkt zu fixieren. Zudem konnten die Gewichte komplett von der Hantelachse entfernt werden. Es wurden nun die Zeiten über jeweils mehrere Schwingungsperioden gemessen.

Für die analoge Zeitmessung wird eine Unsicherheit von $u(T) = \frac{0,1\text{ s}}{2\sqrt{6}} \approx 20\text{ ms}$ angenommen. Da die Scheibe eine kleine Markierung hatte, konnte die Zeit gut anhand der Ruhelage abgeschätzt werden. Dabei wurde die Ruhelage durch einen Stab hinter der Scheibe bzw. der Hantel markiert.

Der Draht hatte eine Länge von 181 cm. Da das Maßband sich ein wenig gebogen hat, kann hier eine Unsicherheit von $u(L) = \frac{5\text{ mm}}{2\sqrt{6}} \approx 1,0\text{ mm}$ angenommen werden. Für alle weiteren Längenmessungen mit dem Maßband kann der Wert besser abgelesen werden und es sei $u(R_z) = \frac{1\text{ mm}}{2\sqrt{6}}$.

Um sicher zu gehen, dass der Draht überall die gleiche Dicke aufweist, wurde dieser an fünf verschiedenen Stellen jeweils drei mal gemessen. Der erste gemessene Wert war hierbei stets größer als die nachfolgenden, was auf eine Deformation des Drahtes beim messen hindeutet. Aufgrund dieser erheblichen Deformation von bis zu 20% wird im folgenden nur der erste Wert jeder Messung betrachtet. Alle Werte der jeweils ersten Messung liegen nah beieinander und der Draht kann als gleichmäßig dick angesehen werden mit $R = (0,25 \pm 0,05)\text{ mm}$.

4.2 Datenauswertung

Rotationsscheibe

Es wurden neun Schwingungsperioden gemessen. Damit ergibt sich eine Schwingungsdauer von $(33,00 \pm 0,00)\text{ s}^4$. Die Scheibe hat einen Durchmesser

⁴Genauere Werte finden sich im Anhang in Tab. 6

von 15 cm und ein Gewicht von 2,648 kg. Nach Gl. (34)

$$G = \frac{4\pi L m_z R_z^2}{R^4 T^2} \quad (5)$$

ist der Schubmodul gegeben mit $G = (7,26 \pm 0,26) \text{ GPa}^5$.

Hantel

Es wurden für jede Konfiguration drei Schwingungsperioden gemessen. Trägt man wie in Abb. 3 dargestellt T^2 gegen $2 m_2 a^2$ auf, so kann man einen linearen Zusammenhang erkennen. Hierbei wurde die Konfiguration ohne Hantelscheiben noch nicht betrachtet. Durch einen linearen Fit⁶ kann die Steigung m ermittelt und nach Gl. (43)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} (J_1 + 2J_2 + 2m_2 a^2) \quad (6)$$

folgt $m = \frac{4\pi}{D^*}$. (Es sei zu bedenken, dass m von der Einheit $\text{s}^2/\text{kg m}^2 = 1/\text{N m}$ ist.) Daraus folgt ein rücktreibendes Direktionsmoment von

$$D^* = \frac{4\pi}{m} \approx (2,640 \pm 0,002) \text{ N m}. \quad (7)$$

Das Trägheitsmoment J_1 der Hantelachse kann im Spezialfall $m_2 = 0$ sowie $J_2 = 0$ mit Gl. (??) bestimmt werden. Es folgt $J_1 = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \approx (11,74 \pm 0,02) \text{ kg m}^2$.

Formt man Gl. (??) nach J_2 um, so ist für $a = 0$ und $T^2 = y_0$ aus Abb. 3 das Trägheitsmoment einer Hantelscheibe gegeben mit

$$J_2 = \frac{\frac{y_0 D^*}{4\pi^2} - J_1}{2} \approx (0,7176 \pm 0,0121) \text{ kg m}^2. \quad (8)$$

4.3 Schlussfolgerung

Durch die Messung eines Torsionspendels, konnte der Schubmodul für das Material des Drahtes auf $G = (7,26 \pm 0,26) \text{ GPa}$ ermittelt werden. Um den Literaturwert genau zu überprüfen, muss die Dicke des Draht deutlich genauer gemessen werden. Da der Schubmodul mit der vierten Potenz von dem Radius des Drahtes abhängt, muss eine Methode gefunden werden, welche die Mikrometerschraube stets mit der gleichen Kraft anzieht. Zusätzlich sollte diese Kraft möglichst klein gehalten werden, um den Draht nicht beim messen zu deformieren.

⁵Für Unsicherheitsrechnungen siehe Anhang Gl. (7)

⁶Programm: SciDaVis; Algorithmus: kleinste Quadrate

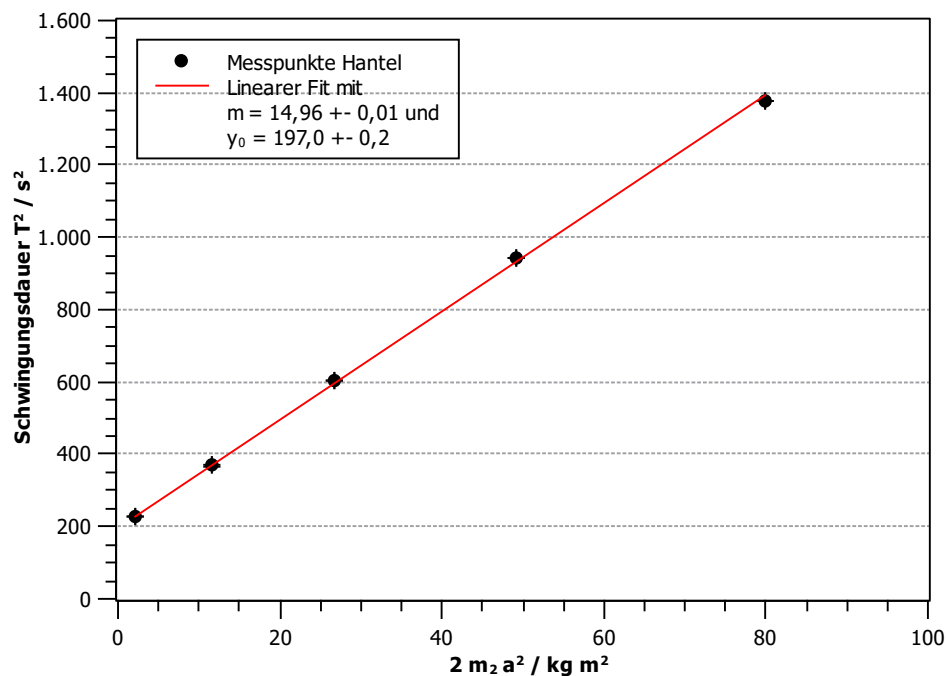


Abbildung 3: Ausgleichsgerade durch linearisierte Messwerte.

5 Anhang

Tabelle 6: Schwingungsdauer einer Periode. Bei der Hantel sind die Positionen der Gewichte von innen nach außen zu betrachten.

Scheibe	$(32,996\,667 \pm 0,002\,268) \text{ s}$
Hantel ohne Gewichte	$(13,250\,000 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 1. Position	$(15,053\,333 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 2. Position	$(19,190\,000 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 3. Position	$(24,573\,333 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 4. Position	$(30,686\,667 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 5. Position	$(37,136\,667 \pm 0,006\,804) \text{ s}$

Literatur

$$G = \frac{4\pi L m_z R_z^2}{R^4 T^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u(G) &= \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial T} u(T)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial L} u(L)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R_z} u(R_z)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R} u(R)\right)^2} \\ &= \frac{4\pi L m_z R_z^2}{R^4 T^2} \sqrt{\left(-\frac{2u(T)}{T}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{2u(R_z)}{R_z}\right)^2 + \left(-\frac{4u(R)}{R}\right)^2} \\ &\approx 13,015\,385 \text{ GPa} \end{aligned} \quad (10)$$

Abbildung 4: Unsicherheitsrechnung für den Schubmodul des Drahtes mit der Torsionsschwingung der Scheibe.

$$J_1 = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u(J_1) &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_1}{\partial T} u(T)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_1}{\partial D^*} u(D^*)\right)^2} \\ &= \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{2u(T)}{T}\right)^2 + \left(\frac{u(D^*)}{D^*}\right)^2} \\ &\approx 0,015\,290 \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Abbildung 5: Unsicherheitsrechnung für das Trägheitsmoment der Hantelachse ohne Gewichte.

$$J_2 = \frac{\frac{y_0 D^*}{4\pi^2} - J_1}{2} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u(J_2) &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_2}{\partial J_1} u(J_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_2}{\partial D^*} u(D^*)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_2}{\partial y_0} u(y_0)\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-u(J_1))^2 + \left(\frac{y_0}{4\pi^2} u(D^*)\right)^2 + \left(\frac{D^*}{4\pi^2} u(y_0)\right)^2} \\ &\approx 0,010\,932\,637\,370\,106 \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Abbildung 6: Unsicherheitsrechnung für das Trägheitsmoment der Hantelgewichte.