

VERSUCHSBERICHT ZU

M3 – ELASTIZITÄT

Gruppe 10 Mi

Alex Oster (E-Mail: a_oste16@uni-muenster.de)
Jonathan Sigrist (E-Mail: j_sigr01@uni-muenster.de)

durchgeführt am 06.12.2017

betreut von
Christian THIEDE

12. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Kurzfassung	2
2	Kurzfassung	2
3	Methoden	2
4	Messung	3
5	Diskussion	4
6	Torsionspendel	4
6.1	Methoden	4
6.2	Datenauswertung	5
6.3	Schlussfolgerung	6
7	Anhang	7

1 Kurzfassung

Bericht geht über Rückstellkräfte durch elastische Biegung und Torsion.

Ziel/Motivation: Welches Material?

2 Kurzfassung

Der erste Versuch beschäftigt sich mit der Elastizität von Stäben verschiedener Materialien. Das Ziel dieses Versuchs sind Elastizitätsmoduln¹ für die verwendeten Materialien, welche mit den Literaturwerten übereinstimmen. Dazu werden an die eingespannten Stäbe Gewichte gehangen und die Auslenkung gemessen. Daraus und den Maßen der Stäbe wird dann der Elastizitätsmodul des jeweiligen Materials ermittelt. Die Ergebnisse dieses Versuchs

drüber

Es wird angenommen, dass die Literaturwerte für den Elastizitätsmodul stimmen. Zur Überprüfung dieser Hypothese dient der folgende Versuch.

3 Methoden

Aufbau

Der Aufbau dieses Versuches ist in Abb. 1 dargestellt. Hierbei werden Stäbe aus verschiedenen Materialien eingespannt und deren Auslenkung beim Anhängen eines Gewichtes gemessen. Die verwendeten Materialien wurden durch ihre Farbe und ihr Gewicht bestimmt. Es handelt sich um runde Stäbe aus Messing, Stahl und Aluminium. Zusätzlich wird ein quaderförmiger Stab aus Messing untersucht, um zu betrachten, wie sich dieser hoch- bzw. flachkant eingespannt verhält.

Mit Hilfe eines Maßbandes werden die Längen der Stäbe gemessen und mit einer Mikrometerschraube deren Breiten. Um zu prüfen, ob die Stäbe an jeder Stelle die gleiche Breite besitzen, wird die Breitenmessung an fünf Stellen jeweils drei mal durchgeführt, da die Mikrometerschraube verschiedene Werte misst, je nachdem wie stark geschraubt wird. Für die Messung werden pro Stab jeweils fünf verschiedene Gewichte angehängt und die Auslenkung dabei an einem Maß auf einem Spiegel parallaxenfrei abgelesen.

¹Plural von „der Elastizitätsmodul“ nach Duden

Zur Bestimmung dieser Auslenkung, wird der Wert für die Ruhelage (bei $m = 0\text{ g}$) gemessen und von dem gemessenen Wert bei angehängter Masse unterschieden. Für jedes neue Gewicht wird der Wert für die Ruhelage neu bestimmt, um mögliche Ungenauigkeiten, wie durch leichte Verbiegungen des Stabes, zu vermeiden.

Unsicherheiten

Für die Unsicherheiten bei den Längenmessungen werden Dreiecksverteilungen verwendet. Bei der Mikrometerschraube lassen sich die Werte auf $0,01\text{ mm}$ genau ablesen, dies wird für die Verteilung verwendet. Für das Maßband und das Maß auf dem Spiegel ergibt sich dieselbe Unsicherheit, da bei beiden das Ablesen auf 1 mm genau möglich war. Die Massen waren gegeben und werden als absolut angesehen. Hier treten demnach keine Unsicherheiten auf.

4 Messung

Die Messung der Länge der Stäbe ergab die in Tab. 1 gelisteten Werte. Hierbei wurde bei allen Stäben der Einspann von $(2,000 \pm 0,122)\text{ cm}$ abgezogen und die Unsicherheiten kombiniert.

Tabelle 1: Länge der Stäbe

Material	Länge
Messing (eckig)	$(29,200 \pm 0,173)\text{ cm}$
Messing (rund)	$(29,200 \pm 0,173)\text{ cm}$
Stahl	$(28,900 \pm 0,173)\text{ cm}$
Aluminium	$(28,600 \pm 0,173)\text{ cm}$

Für die Breite der Stäbe sind die gemittelten Werte für die verschiedenen Messpunkte in Tab. 2 angegeben. Auch hier ergibt sich eine kombinierte Unsicherheit.

Tabelle 2: Breite der Stäbe

Material	Länge
Messing (eckig)	$(29,200 \pm 0,173)\text{ cm}$
Messing (rund)	$(29,200 \pm 0,173)\text{ cm}$
Stahl	$(28,900 \pm 0,173)\text{ cm}$
Aluminium	$(28,600 \pm 0,173)\text{ cm}$

5 Diskussion

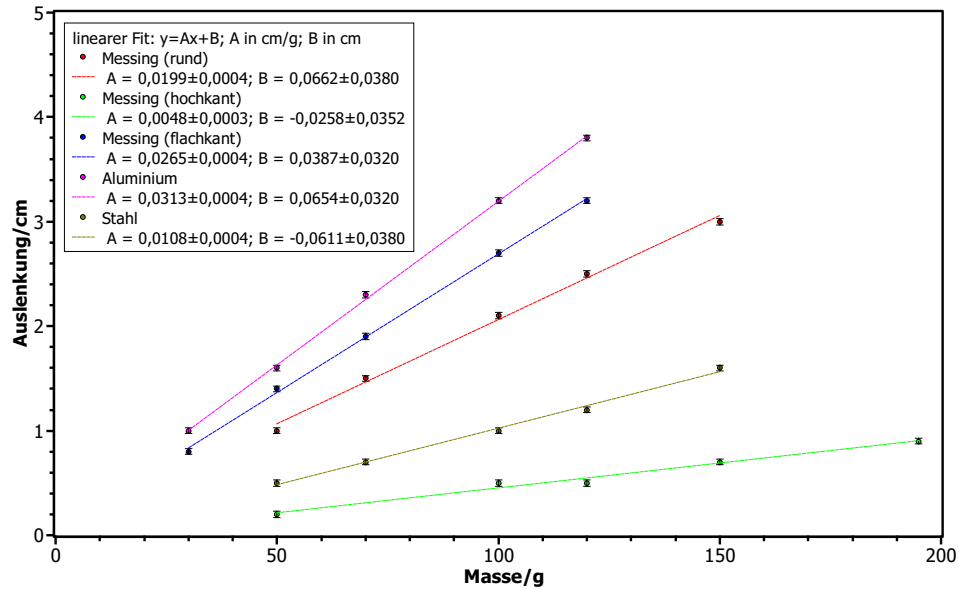


Abbildung 1: Auslenkung der Stäbe in Abhängigkeit der angehängten Masse

6 Torsionspendel

In dem zweiten Versuch wurde mit einem Torsionspendel der Schubmodul sowie die Rückstellkraft des Drahtes berechnet. Im Abgleich mit Literaturwerten wird dann die Behauptung gestützt, dass der Draht aus Stahl besteht. Zur Messung werden eine rotierende Scheibe, sowie eine Hantel mit verstellbaren Gewichten genutzt.

6.1 Methoden

Das Torsionspendel bestand aus einem dünnen Draht, welches fest an einer Halterung angebracht war. Am unteren Ende des Drahtes konnten durch einen Schraubmechanismus eine massive Metallscheibe und eine Hantel mit abnehmbaren und auf der Achse verschiebbaren Gewichtsscheiben angebracht werden. Dabei dienten Kerben in der Achse dazu, die Gewichte in festen Abständen vom Mittelpunkt zu fixieren. Zudem konnten die Gewichte komplett von der Hantelachse entfernt werden. Es wurden nun die Zeiten über jeweils mehrere Schwingungsperioden gemessen.

Für die analoge Zeitmessung wird eine Unsicherheit von $u(T) = \frac{0,1\text{ s}}{2\sqrt{6}} \approx 20\text{ ms}$ angenommen. Da die Scheibe eine kleine Markierung hatte, konnte die Zeit gut anhand der Ruhelage abgeschätzt werden. Dabei wurde die Ruhelage durch einen Stab hinter der Scheibe bzw. der Hantel markiert.

Der Draht hatte eine Länge von 181 cm. Da das Maßband sich ein wenig

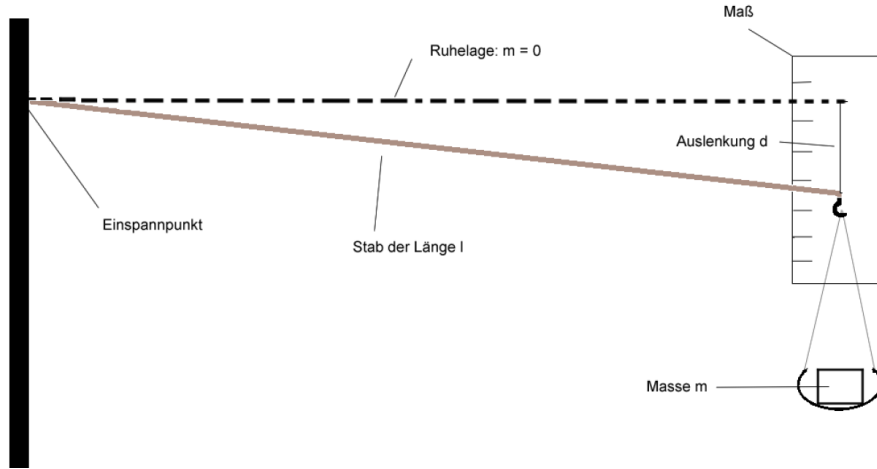


Abbildung 2: Auslenkung der Stäbe in Abhängigkeit der angehängten Masse

gebogen hat, kann hier eine Unsicherheit von $u(L) = \frac{5 \text{ mm}}{2\sqrt{6}} \approx 1,0 \text{ mm}$ angenommen werden. Für alle weiteren Längenmessungen mit dem Maßband kann der Wert besser abgelesen werden und es sei $u(R_z) = \frac{1 \text{ mm}}{2\sqrt{6}}$.

Um sicher zu gehen, dass der Draht überall die gleiche Dicke aufweist, wurde dieser an fünf verschiedenen Stellen jeweils drei mal gemessen. Der erste gemessene Wert war hierbei stets größer als die nachfolgenden, was auf eine Deformation des Drahtes beim messen hindeutet. Aufgrund dieser erheblichen Deformation von bis zu 20% wird im folgenden nur der erste Wert jeder Messung betrachtet. Alle Werte der jeweils ersten Messung liegen nah beieinander und der Draht kann als gleichmäßig dick angesehen werden mit $R = (0,25 \pm 0,05) \text{ mm}$.

6.2 Datenauswertung

Rotationsscheibe

Es wurden neun Schwingungsperioden gemessen. Damit ergibt sich eine Schwingungsdauer von $(33,00 \pm 0,00) \text{ s}^2$. Die Scheibe hat einen Durchmesser von 15 cm und ein Gewicht von 2,648 kg. Nach Gl. (34)

$$G = \frac{4\pi L m_z R_z^2}{R^4 T^2} \quad (1)$$

ist der Schubmodul gegeben mit $G = (7,26 \pm 0,26) \text{ GPa}^3$.

²Genauere Werte finden sich im Anhang in Tab. 3

³Für Unsicherheitsrechnungen siehe Anhang Gl. (6)

Hantel

Es wurden für jede Konfiguration drei Schwingungsperioden gemessen. Trägt man wie in Abb. 3 dargestellt T^2 gegen $2m_2a^2$ auf, so kann man einen linearen Zusammenhang erkennen. Hierbei wurde die Konfiguration ohne Hantelscheiben noch nicht betrachtet. Durch einen linearen Fit⁴ kann die Steigung m ermittelt und nach Gl. (43)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*}(J_1 + 2J_2 + 2m_2a^2) \quad (2)$$

folgt $m = \frac{4\pi}{D^*}$. (Es sei zu bedenken, dass m von der Einheit $\text{s}^2/\text{kg m}^2 = 1/\text{N m}$ ist.) Daraus folgt ein rücktreibendes Direktionsmoment von

$$D^* = \frac{4\pi}{m} \approx (2,640 \pm 0,002) \text{ N m}. \quad (3)$$

Das Trägheitsmoment J_1 der Hantelachse kann im Spezialfall $m_2 = 0$ sowie $J_2 = 0$ mit Gl. (2) bestimmt werden. Es folgt $J_1 = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \approx (11,74 \pm 0,02) \text{ kg m}^2$.

Formt man Gl. (2) nach J_2 um, so ist für $a = 0$ und $T^2 = y_0$ aus Abb. 3 das Trägheitsmoment einer Hantelscheibe gegeben mit

$$J_2 = \frac{\frac{y_0 D^*}{4\pi^2} - J_1}{2} \approx (0,7176 \pm 0,0121) \text{ kg m}^2. \quad (4)$$

6.3 Schlussfolgerung

Durch die Messung eines Torsionspendels, konnte der Schubmodul für das Material des Drahtes auf $G = (7,26 \pm 0,26) \text{ GPa}$ ermittelt werden. Um den Literaturwert genau zu überprüfen, muss die Dicke des Draht deutlich genauer gemessen werden. Da der Schubmodul mit der vierten Potenz von dem Radius des Drahtes abhängt, muss eine Methode gefunden werden, welche die Mikrometerschraube stets mit der gleichen Kraft anzieht. Zusätzlich sollte diese Kraft möglichst klein gehalten werden, um den Draht nicht beim messen zu deformieren.

⁴Programm: SciDaVis; Algorithmus: kleinste Quadrate

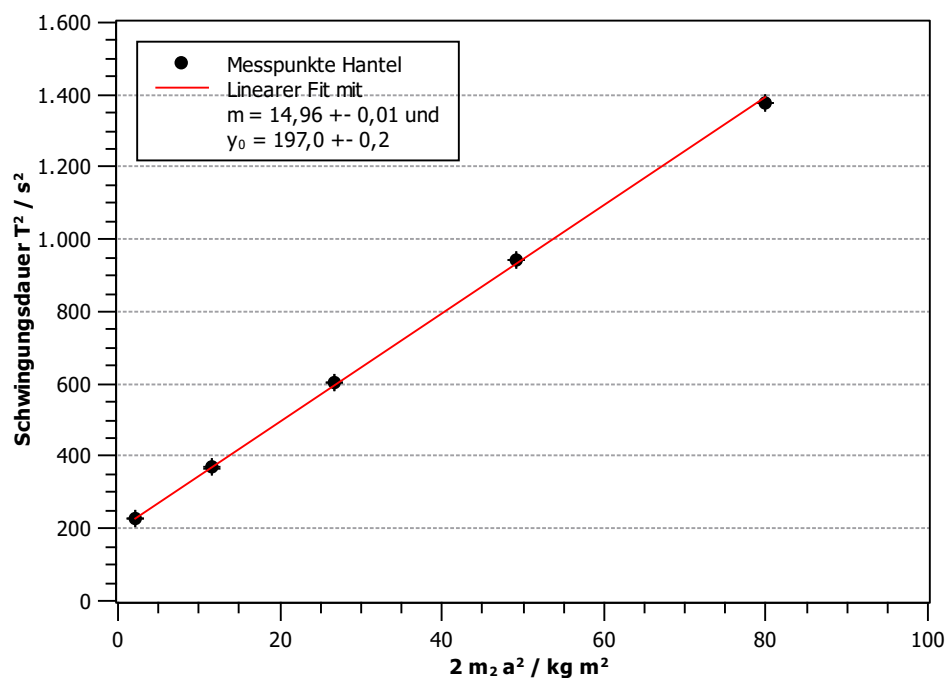


Abbildung 3: Ausgleichsgerade durch linearisierte Messwerte.

7 Anhang

Tabelle 3: Schwingungsdauer einer Periode. Bei der Hantel sind die Positionen der Gewichte von innen nach außen zu betrachten.

Scheibe	$(32,996\,667 \pm 0,002\,268) \text{ s}$
Hantel ohne Gewichte	$(13,250\,000 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 1. Position	$(15,053\,333 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 2. Position	$(19,190\,000 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 3. Position	$(24,573\,333 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 4. Position	$(30,686\,667 \pm 0,006\,804) \text{ s}$
Hantel 5. Position	$(37,136\,667 \pm 0,006\,804) \text{ s}$

Literatur

$$G = \frac{4\pi L m_z R_z^2}{R^4 T^2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u(G) &= \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial T} u(T)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial L} u(L)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R_z} u(R_z)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R} u(R)\right)^2} \\ &= \frac{4\pi L m_z R_z^2}{R^4 T^2} \sqrt{\left(-\frac{2u(T)}{T}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{2u(R_z)}{R_z}\right)^2 + \left(-\frac{4u(R)}{R}\right)^2} \\ &\approx 13,015\,385 \text{ GPa} \end{aligned} \quad (6)$$

Abbildung 4: Unsicherheitsrechnung für den Schubmodul des Drahtes mit der Torsionsschwingung der Scheibe.

$$J_1 = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u(J_1) &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_1}{\partial T} u(T)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_1}{\partial D^*} u(D^*)\right)^2} \\ &= \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{2u(T)}{T}\right)^2 + \left(\frac{u(D^*)}{D^*}\right)^2} \\ &\approx 0,015\,290 \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Abbildung 5: Unsicherheitsrechnung für das Trägheitsmoment der Hantelachse ohne Gewichte.

$$J_2 = \frac{\frac{y_0 D^*}{4\pi^2} - J_1}{2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u(J_2) &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_2}{\partial J_1} u(J_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_2}{\partial D^*} u(D^*)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_2}{\partial y_0} u(y_0)\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-u(J_1))^2 + \left(\frac{y_0}{4\pi^2} u(D^*)\right)^2 + \left(\frac{D^*}{4\pi^2} u(y_0)\right)^2} \\ &\approx 0,010\,932\,637\,370\,106 \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Abbildung 6: Unsicherheitsrechnung für das Trägheitsmoment der Hantelgewichte.