

VERSUCHSBERICHT ZU

E3 – ELEKTRISCHE RESONANZ

Gruppe Mi 10

Alex Oster(a\_oste16@uni-muenster.de)  
Jonathan Sigrist(j\_sigr01@uni-muenster.de)

durchgeführt am 24.01.2018  
betreut von  
Wladislaw Hartmann

2. Februar 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurzfassung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Methoden</b>	<b>1</b>
2.1	Aufbau . . . . .	1
2.1.1	Serienresonanzkreis . . . . .	1
2.1.2	Parallelresonanzkreis . . . . .	2
2.2	Unsicherheiten . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Durchführung und Datenanalyse</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>11</b>
6.1	Unsicherheitsrechnung . . . . .	11
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

## 1 Kurzfassung

Dieser Bericht befasst sich mit der Betrachtung von elektrischer Resonanz bei Schwingkreisen. Dazu werden zwei verschiedene Schwingkreise betrachtet. Hierbei handelt es sich um eine Serien- und um eine Parallelschaltung von Kondensator und Spule. Über die vorliegenden Widerstände und der gemessenen Spannung wird die Stromstärke ermittelt und in Abhängigkeit der Frequenz über die Kapazität des Kondensators, welche regulierbar ist, aufgetragen. Aus diesen Resonanzkurven, die für verschiedene Widerstände aufgenommen werden, lassen sich die Induktivitäten der verwendeten Spulen bestimmen. Ziel der Messung ist die Aufnahme von Resonanzkurven sowie auch Ermittlung von Induktivitäten, die der Theorie entsprechen. Demnach sind Lorentzkurven für die Resonanzkurven und eine größere Induktivität bei der größeren Spule als bei der kleineren zu erwarten. Die Ergebnisse der Messung stimmen mit Induktivitäten von ca. 2,4 H für die große Spule und ca. 0,068 H für die kleinere mit den Erwartungen überein. Auch die Resonanzkurven besitzen die erwartete Form.

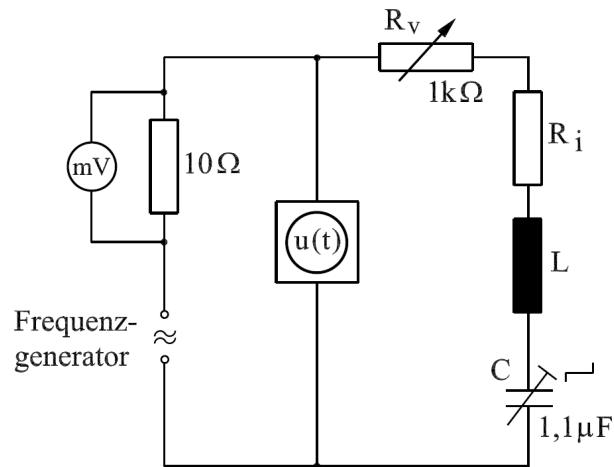
## 2 Methoden

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Aufbau der beiden Schaltkreise, sowie auch den Unsicherheiten welche bei der Messung auftreten.

### 2.1 Aufbau

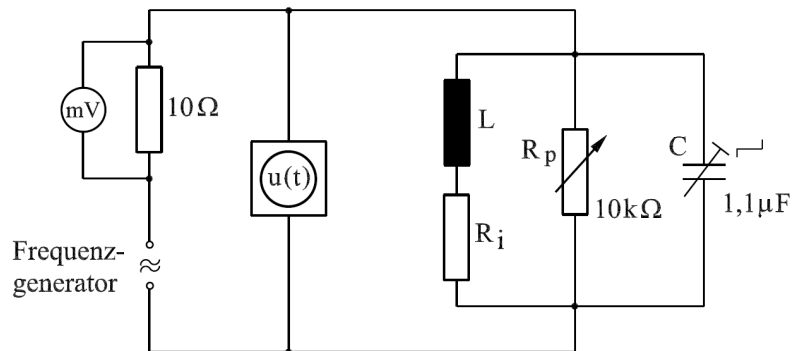
#### 2.1.1 Serienresonanzkreis

Für den Serienresonanzkreis wird der in Abb. 1 dargestellte Aufbau verwendet. Zu erkennen sind ein Frequenzgenerator, ein  $10\ \Omega$  Widerstand, an dem ein Multimeter zur Messung der Spannung anliegt, ein Oszilloskop  $u(t)$ , welches parallel zu der Reihenschaltung von Kondensator  $C$ , Spule  $L$  mit Innenwiderstand  $R_i$  und einem bis zu  $1\ \text{k}\Omega$  regulierbaren Widerstand  $R_v$  geschaltet ist. Der Frequenzgenerator dient als Wechselstromquelle, welcher auf eine feste Frequenz und Spannung eingestellt werden soll.



**Abbildung 1:** Schaltskizze für den Aufbau des Serienresonanzkreises.[2]

### 2.1.2 Parallelresonanzkreis



**Abbildung 2:** Schaltskizze für den Aufbau des Parallelresonanzkreises.[2]

Der in Abb. 2 dargestellte Schaltkreis für den Parallelresonanzkreis unterscheidet sich von dem Serienschaltkreis lediglich um die Parallelschaltung von (einer kleineren) Spule  $L$  mit Innenwiderstand  $R_i$ , Kondensator  $C$  und einem bis zu  $10\text{ k}\Omega$  regulierbaren Widerstand  $R_p$ . Dieser Block ist wie auch zuvor parallel zu dem Oszilloskop geschaltet. Hier wird die selbe Frequenz, wie auch für den Serienresonanzkreis verwendet, jedoch eine höhere Spannung.

## 2.2 Unsicherheiten

Die bei diesem Versuch auftretenden Unsicherheiten setzen sich aus der Unsicherheit für den Kondensator  $u_c$ , für die digitale Anzeige des Multimeters und des Oszilloskops  $u_{\text{digital}}$ , sowie der Unsicherheit des  $10\,\Omega$  Widerstandes von  $0,5\%$  (nach den angegebenen Farbcodes[1]). Weitere Angaben, wie die Maße der großen Spule<sup>1</sup>, bei denen keine Unsicherheit angegeben war, werden als absolut angenommen. Die Berechnung der kombinierten Unsicherheiten erfolgt nach GUM und ist im Anhang aufgeführt.

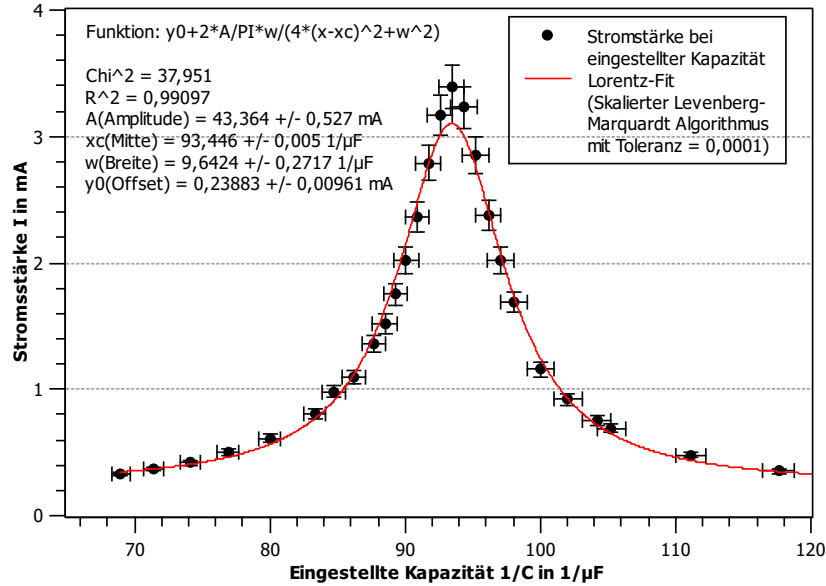
## 3 Durchführung und Datenanalyse

Zur Bestimmung der Resonanzkurve  $I(f)$ , wird die Stromstärke  $I$  in den Schaltkreisen über die gemessenen Spannung  $U$  und dem  $10\,\Omega$  Widerstand ermittelt. Dazu dient  $I = U/R$ . Die verwendete Frequenz der Wechselstromquelle für beide Schwingkreise betrug  $1000\,\text{Hz}$ . Für die Eingangsspannungen wurden für den Serienresonanzkreis  $2\,\text{V}$  und  $5\,\text{V}$  für den Parallelresonanzkreis verwendet. Es wurden für verschiedene Widerstände  $R_v$  (Serie, mit  $0\,\Omega$ ,  $200\,\Omega$  und  $500\,\Omega$ ) und  $R_p$  (parallel, mit  $\infty\,\Omega$ ,  $2\,\text{k}\Omega$  und  $10\,\text{k}\Omega$ ) Messungen in Abhängigkeit der Kapazität des Kondensators  $C$  durchgeführt. Dabei sind die aufgelisteten Widerstände solche, für die eine Messung durchgeführt werden sollte. Die eigentlichen Widerstände welche für diesen Versuch verwendet wurden waren, nach der Messung mit dem Multimeter,  $0,3\,\Omega$ ,  $200,1\,\Omega$  und  $500,3\,\Omega$  für den Serienresonanzkreis und  $\infty\,\Omega$ ,  $2,001\,\text{k}\Omega$  und  $9,88\,\text{k}\Omega$  für den Parallelresonanzkreis. Aus der Messreihe ergaben sich die in den Abb. 3 bis 8 dargestellten Resonanzkurven<sup>2</sup> in Abhängigkeit der Kapazität  $C$  (Serie) bzw. deren Kehrwert (Parallel). Durch diese Diagramme lassen sich die Induktivitäten der verwendeten Spulen bestimmen. Dazu dient folgender Zusammenhang,

---

<sup>1</sup>Diese sind dem Laborbuch zu entnehmen

<sup>2</sup>Die Fits wurden von dem Programm SciDavis berechnet, dazu wurden die Unsicherheiten der Auslenkung und die Methode der kleinsten Quadrate herangezogen



**Abbildung 3:** Dieses Diagramm stellt die Resonanzkurve bei einem Serienresonanzkreis in Abhängigkeit des Kehrwerts der Kapazität bei einem Widerstand  $R_v$  von 0,3Ω dar. Es wurde aufgrund des Verlaufs ein Lorentz-Fit verwendet.

welcher aus der Impedanz  $Z$  folgt:

$$Z_{\text{Serie}} = R_i + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (3.1)$$

$$Z_{\text{Parallel}} = \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C \right)^{-1} \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C}. \quad (3.3)$$

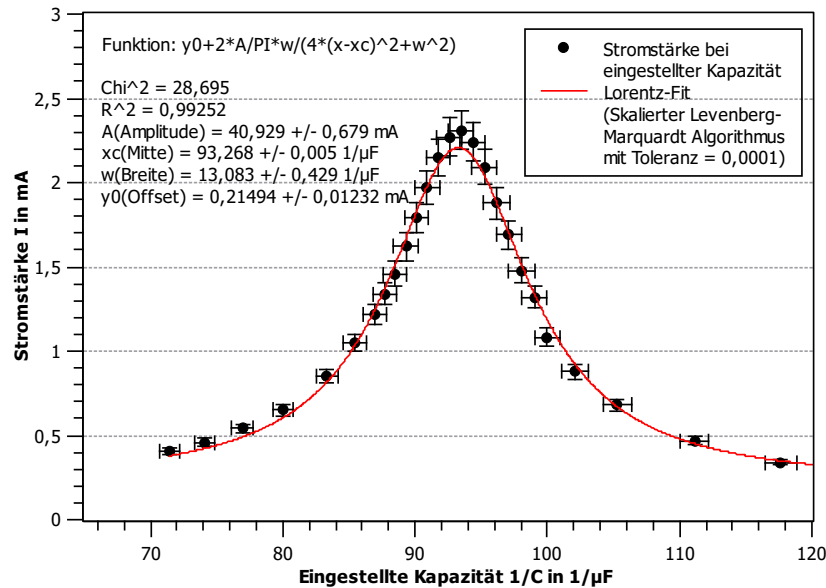
Dabei ist  $R_i$  der Innenwiderstand der Spule,  $L$  die Induktivität dieser und  $C$  die Kapazität des Kondensators. In Tab. 1 sind die berechneten Induktivitäten, wie auch die Kapazitäten bei denen die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  bei 1000 Hz bzw. der Kreisfrequenz  $6283,19 \text{ s}^{-1}$  liegt, dargestellt. Neben der Messung der Spannung wurde zudem der Spannungsabfall über das Oszilloskop an verschiedenen Stellen im Serienkreis bei der Resonanzfrequenz betrachtet. Diese Spannungsabfälle sind in Tab. 2 verzeichnet.

**Tabelle 1:** Diese Tabelle stellt die ermittelten Induktivitäten für die große Spule bei dem Serienresonanzkreis und der kleineren beim Parallelresonanzkreis in Abhängigkeit von der Kapazität  $C$  (Serie) des Kondensators bzw. ihrem Kehrwert (Parallel).

$R_v$	$1/C$	Induktivität $L$
$0,3\,\Omega$	$(93,446 \pm 0,005)\,\mu\text{F}$	$(2,3670 \pm 0,0001)\,\text{H}$
$200,1\,\Omega$	$(93,268 \pm 0,005)\,\mu\text{F}$	$(2,3625 \pm 0,0001)\,\text{H}$
$500,3\,\Omega$	$(99,088 \pm 0,005)\,\mu\text{F}$	$(2,5099 \pm 0,0001)\,\text{H}$
$R_p$	$C$	Induktivität $L$
$\infty\,\Omega$	$(0,375 \pm 0,002)\,\mu\text{F}$	$(0,0675 \pm 0,0003)\,\text{H}$
$2,001\,\text{k}\Omega$	$(0,375 \pm 0,003)\,\mu\text{F}$	$(0,0676 \pm 0,0005)\,\text{H}$
$9,88\,\text{k}\Omega$	$(0,374 \pm 0,004)\,\mu\text{F}$	$(0,0678 \pm 0,0006)\,\text{H}$

**Tabelle 2:** In dieser Tabelle sind die gemessenen Spannungsabfälle so wie auch die ermittelten gegenüber gestellt. Zusätzlich wurden die Spannungsabfälle an dem Widerstand  $R_v$  gemessen, diese sind jedoch nicht vergleichbar.

Spannung	bei $0,3\,\Omega$	bei $200,1\,\Omega$	bei $500,3\,\Omega$
$U_C$ (gemessen)	$(21,40 \pm 0,02)\,\text{V}$	$(32,06 \pm 0,02)\,\text{V}$	$(52,00 \pm 0,02)\,\text{V}$
$U_C$ (ermittelt)	$(33,338 \pm 0,508)\,\text{V}$	$(26,377 \pm 0,455)\,\text{V}$	$(20,071 \pm 0,344)\,\text{V}$
$U_L$ (gemessen)	$(25,20 \pm 0,02)\,\text{V}$	$(32,10 \pm 0,02)\,\text{V}$	$(51,20 \pm 0,02)\,\text{V}$
$U_L$ (ermittelt)	$(33,338 \pm 0,237)\,\text{V}$	$(26,377 \pm 0,184)\,\text{V}$	$(20,071 \pm 0,136)\,\text{V}$

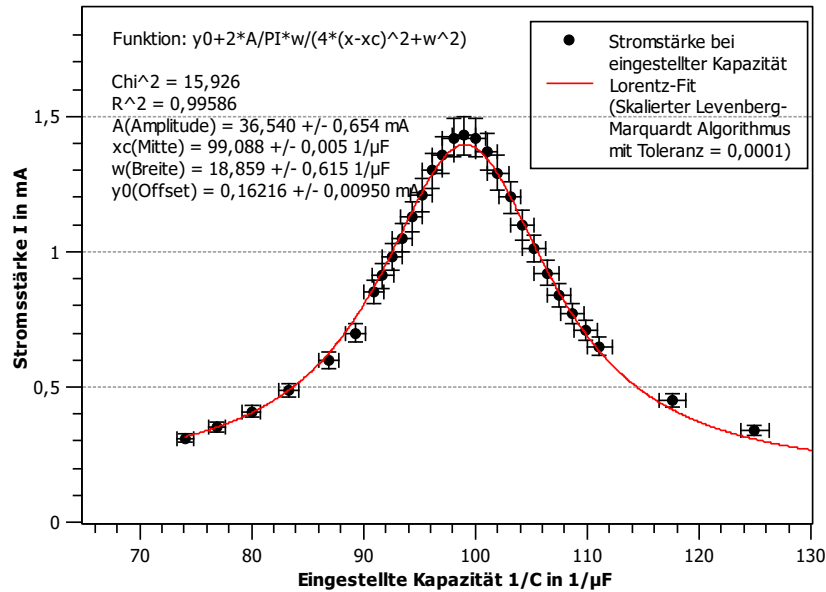


**Abbildung 4:** Dieses Diagramm stellt die Resonanzkurve bei einem Serienresonanzkreis in Abhängigkeit des Kehrwerts der Kapazität bei einem Widerstand  $R_v$  von  $200,1 \Omega$  dar. Es wurde aufgrund des Verlaufs ein Lorentz-Fit verwendet.

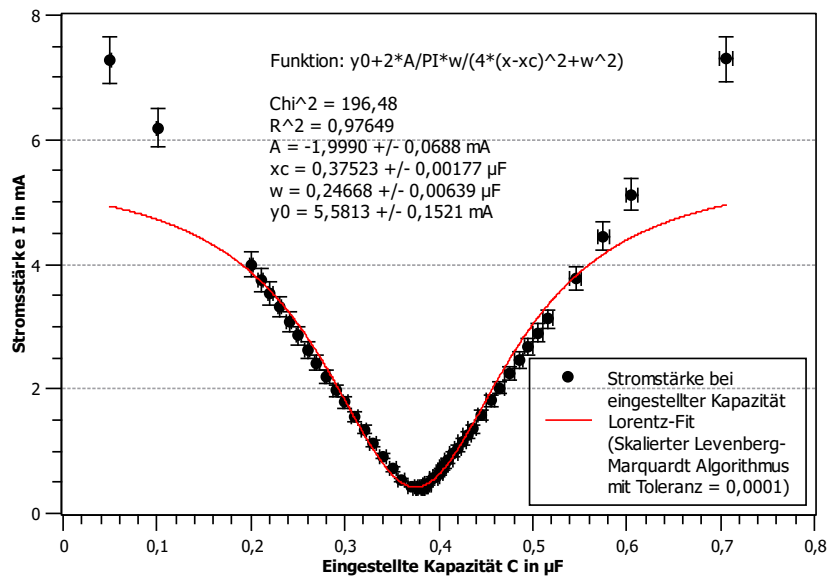
## 4 Diskussion

Um auf die Hypothese, dass die Resonanzkurven die Form einer Lorentzfunktion besitzen, zurückzugreifen, lässt sich dies eindeutig durch die Diagramme 3 bis 8 bestätigen. Abgesehen von den Randwerten liegen die Lorentz-Fits nämlich nahezu alle innerhalb von einer Standardunsicherheit der Messwerte. Die ermittelten Induktivitäten der beiden Spulen, welche über die einzelnen Resonanzkurven und dem Verlustwiderstand bestimmt wurden, wirken recht realistisch. Werte im Bereich von  $2 \text{ H}$  sind für Spulen recht groß, jedoch handelte es sich hierbei um eine Spule von großem Ausmaß, weswegen dieser Wert akzeptiert wird. Lediglich dass der Wert über die  $500 \Omega$ -Resonanzkurve ein wenig stärker von den anderen beiden ermittelten Induktivitäten für dieselbe Spule abweicht, geht gegen die Erwartung, dass die Induktivität für dieselbe Spule gleich bleibt. Für die kleinere Spule liegen alle Werte innerhalb von einer Standardunsicherheit voneinander. Bei den Spannungsabfällen muss aufgrund der deutlichen Abweichungen und dem antiproportionalen Verhalten von Mess- und ermittelten Werten ein Fehler aufgetreten sein, wo genau dieser liegt ist nicht ersichtlich.

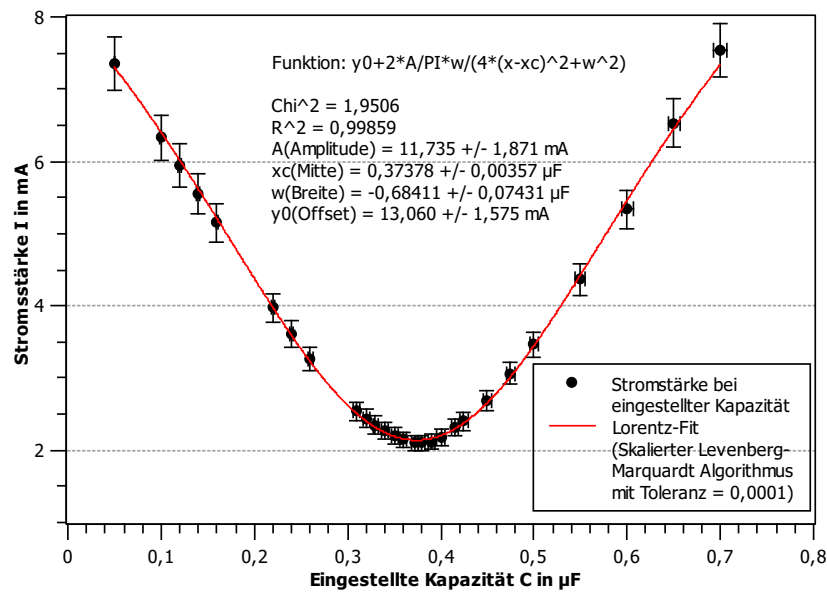




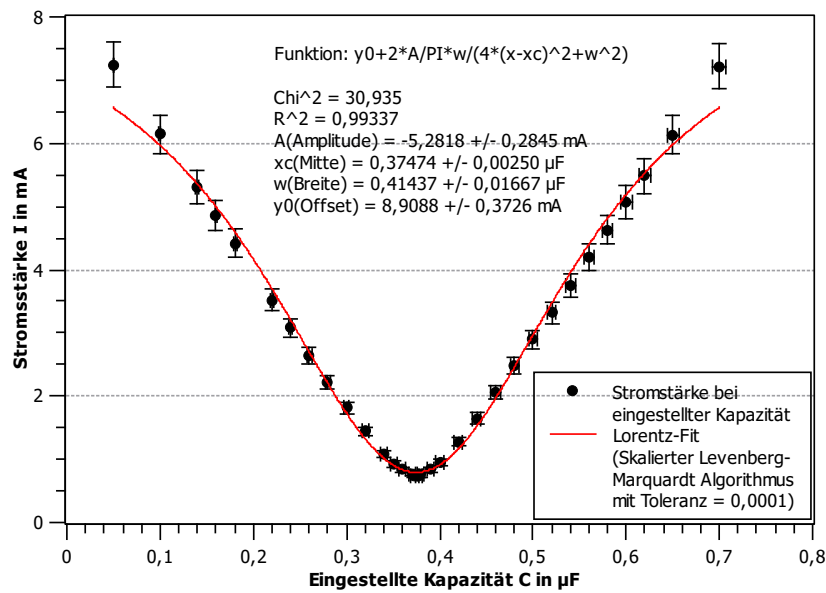
**Abbildung 5:** Dieses Diagramm stellt die Resonanzkurve bei einem Serienresonanzkreis in Abhängigkeit des Kehrwerts der Kapazität bei einem Widerstand  $R_v$  von  $500,3 \Omega$  dar. Es wurde aufgrund des Verlaufs ein Lorentz-Fit verwendet.



**Abbildung 6:** Dieses Diagramm stellt die Resonanzkurve bei einem Serienresonanzkreis in Abhängigkeit der Kapazität bei einem Widerstand  $R_p$  von  $\infty \Omega$  dar. Es wurde aufgrund des Verlaufs ein Lorentz-Fit verwendet.



**Abbildung 7:** Dieses Diagramm stellt die Resonanzkurve bei einem Serienresonanzkreis in Abhängigkeit der Kapazität bei einem Widerstand  $R_p$  von  $2,001 \text{ k}\Omega$  dar. Es wurde aufgrund des Verlaufs ein Lorentz-Fit verwendet.



**Abbildung 8:** Dieses Diagramm stellt die Resonanzkurve bei einem Serienresonanzkreis in Abhängigkeit der Kapazität bei einem Widerstand  $R_p$  von  $9,88 \text{ k}\Omega$  dar. Es wurde aufgrund des Verlaufs ein Lorentz-Fit verwendet.

## 5 Schlussfolgerung

Aufgrund der verfehlten Werte bei dem Spannungsabfall im Resonanzfall, sollte der Versuch an dieser Stelle wiederholt werden. Eine erneute Aufnahme der Resonanzkurven ist aufgrund deren eindeutiger Übereinstimmung mit dem Lorentzfit nicht nötig. Auch die Induktivitäten liegen den Erwartungen entsprechend nah aneinander und in einem realistischen Größenbereich.

## 6 Anhang

### 6.1 Unsicherheitsrechnung

$$x = \sum_{i=1}^N x_i; \quad u(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u(x_i)^2}$$

**Abbildung 9:** Formel für kombinierte Unsicherheiten des selben Typs nach GUM.

$$f = f(x_1, \dots, x_N); \quad u(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}$$

**Abbildung 10:** Formel für sich fortpflanzende Unsicherheiten nach GUM.

$$I = \frac{U}{R}; \quad u(I) = \sqrt{\left( \frac{u(U)}{R} \right)^2 + \left( -\frac{U}{R^2} u(R) \right)^2}$$

**Abbildung 11:** Unsicherheitsrechnung für den Strom an einem ohm'schen Widerstand.

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C}; \quad u(L) = \frac{u(C)}{\omega_0^2 C^2}$$

**Abbildung 12:** Unsicherheitsrechnung für die Induktivität eines Schwingkreises im Resonanzfall.

$$|U_L| = \frac{\omega_0 L}{R} |U|; \quad u(|U_L|) = \left[ \left( \frac{\omega_0 L}{R} u(|U|) \right)^2 + \left( \frac{\omega_0 |U|}{R} u(L) \right)^2 + \left( -\frac{\omega_0 L |U|}{R^2} u(R) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

**Abbildung 13:** Unsicherheitsrechnung für den Spannungsabfall über die Spule im Resonanzfall bei dem Serienschwingkreis. Dabei sei  $|U| = U_{\text{Pk-Pk}}$ .

$$|U_C| = \frac{1}{\omega_0 C R} |U|; \quad u(|U_C|) = \left[ \left( \frac{1}{\omega_0 C R} u(|U|) \right)^2 + \left( -\frac{|U|}{\omega_0 C^2 R} u(C) \right)^2 + \left( -\frac{|U|}{\omega_0 C R^2} u(R) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

**Abbildung 14:** Unsicherheitsrechnung für den Spannungsabfall über den Kondensator im Resonanzfall bei dem Serienschwingkreis.

$$|R| = \frac{1}{2\omega_0} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right); \quad u(R) = \frac{1}{2\omega_0} \left[ u\left(\frac{1}{C_2}\right)^2 + u\left(\frac{1}{C_1}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

**Abbildung 15:** Unsicherheitsrechnung für den Verlustwiderstand des gesamten Serienschwingkreises.

$$|R_i| = R - R_v; \quad u(R_i) = \sqrt{u(R)^2 + u(R_v)^2}$$

**Abbildung 16:** Unsicherheitsrechnung für den Innenwiderstand der Spule bei dem Serienschwingkreises.

$$|R'_p| = \frac{R_v \cdot R}{R_v - R}; \quad u(R'_p) = u(R) R_v \left( \frac{1}{R_v - R + \frac{R}{(R_v - R)^2}} \right)$$

**Abbildung 17:** Unsicherheitsrechnung für den Ersatzwiderstand  $R'_p$  bei dem Parallelschwingkreis. Dabei sei durch die kleine Unsicherheit des Messgerätes  $u(R_v) = 0$ .

$$|R_i| = \frac{\omega_0^2 L^2}{R'_p}; \quad u(R_i) = \omega_0^2 \left[ \left( \frac{2L}{R'_p} u(L) \right)^2 + \left( -\frac{L^2}{R_p'^2} u(R'_p) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

**Abbildung 18:** Unsicherheitsrechnung für den Innenwiderstand der Spule bei dem Parallelschwingkreis.

## Literatur

- [1] Elektronik Kompendium. *Widerstandsfarbcode*. URL: <https://www.elektronik-kompendium.de/sites/bau/1109051.htm> (besucht am 01.02.2018).
- [2] WWU Münster. *Elektrische Resonanz*. URL: <https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/mod/resource/view.php?id=883523> (besucht am 25.01.2018).