

Beugung am Spalt, Doppelspalt und Gitter

Einführung

In der Optik versteht man unter Beugung die Abweichung der Lichtausbreitung von den Gesetzen der geometrischen Optik. Ganz allgemein ist Beugung nichts anderes als Streuung plus Interferenz. Für die Lichtausbreitung spielt Beugung immer dann eine Rolle, wenn die Ausdehnung streuender Elemente im Strahlengang von ähnlicher Größenordnung ist wie die Wellenlänge der Strahlung.

Das Prinzip von Huygens-Fresnel

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Raum wird durch das Prinzip von Huygens-Fresnel beschrieben: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer neuen Kugelwelle¹ (mit gleicher Frequenz wie die Primärwelle) betrachtet werden. Die Amplitude des Lichtfeldes an einem beliebigen Punkt in Ausbreitungsrichtung ergibt sich dann aus der Überlagerung aller dieser Elementarwellen unter Berücksichtigung ihrer Amplituden und relativen Phasen.

Fraunhofer- und Fresnel-Beugung

In der Nähe eines Beugungselements (z.B. eines Spalts) können Randeffekte eine wichtige Rolle spielen und man beobachtet Abweichungen vom Huygens-Fresnelschen Prinzip. Sind diese Abweichungen nicht vernachlässigbar, spricht man von Fresnel- oder Nahfeldbeugung. In diesem Bereich ändert sich z.B. das Bild des Spalts stark mit der Entfernung vom Spalt.

In großer Entfernung vom Beugungselement, bzw. wenn einfallende und ausgehende Welle (nahezu) eben sind, ändert sich die Form des Beugungsbildes nicht mehr, nur noch die Größe. In diesem Fall spricht man von Fraunhofer- oder Fernfeldbeugung. Im Folgenden werden wir uns ausschließlich mit Fraunhoferbeugung beschäftigen.

¹Man spricht von einer Kugelwelle, wenn die Flächen gleicher Phase (in einer Momentaufnahme z.B. die Wellenberge) Kugelflächen sind. Die Feldstärke einer Kugelwelle ist proportional zu $e^{i(kr-\omega t)}/r$.

Beugung am Spalt

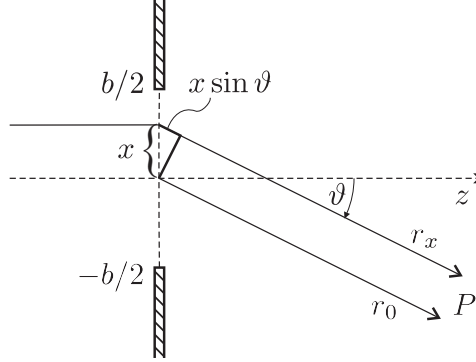


Abbildung 1: Spaltbeugung. Von links fällt eine ebene Lichtwelle parallel zur z -Achse auf den Spalt der Breite b . Der Punkt P erscheint vom Spalt aus unter dem Winkel ϑ .

Wir betrachten Abbildung 1. In der (x, y) -Ebene des Koordinatensystems befindet sich ein lichtundurchlässiger Schirm mit einem Spalt der Breite b . Der Spalt ist parallel zur y -Achse orientiert und seine Ränder liegen bei $x = \pm b/2$. Der Spalt wird von links mit ebenen Lichtwellen beleuchtet². Wie groß ist die Lichtintensität weit rechts vom Spalt in einem Punkt P , der vom Spalt aus unter dem Winkel ϑ gesehen wird? Jeder Punkt x in dem Spalt ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle. Die Summierung über alle Punkte im Spalt kann als Integration von $x = -b/2$ bis $x = b/2$ durchgeführt werden. Die Entfernung r_x zwischen den Punkten x und P können wir durch $r_x = r_0 + x \sin \vartheta$ ausdrücken. Für die Feldstärke $E(P)$ im Punkt P folgt dann³

$$E(P) \propto \int_{-b/2}^{b/2} \frac{e^{ik(r_0 + x \sin \vartheta)}}{r_0 + x \sin \vartheta} dx. \quad (1)$$

Im Nenner darf man $x \sin \vartheta$ gegen $r_0 \gg |x \sin \vartheta|$ (Fraunhoferbeugung) vernachlässigen. Lässt man dann noch den konstanten Faktor e^{ikr_0}/r_0 weg, so erhält man

$$E(P) \propto \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx \sin \vartheta} dx. \quad (2)$$

Die Integration lässt sich leicht durchführen und ergibt

$$E(P) \propto b \frac{\sin[(kb \sin \vartheta)/2]}{(kb \sin \vartheta)/2}. \quad (3)$$

²Das lässt sich durch eine sehr weit entfernte Lichtquelle, eine (punktförmige) Lichtquelle im Fokus einer Sammellinse, oder, wie in unserem Fall, durch einen Laser realisieren.

³Da wir später an der Intensität der Strahlung $I = E^2$ interessiert sind, und optische Strahlungsmessgeräte den Zeitmittelwert anzeigen, kann der Zeitfaktor $e^{i\omega t}$ weggelassen werden.

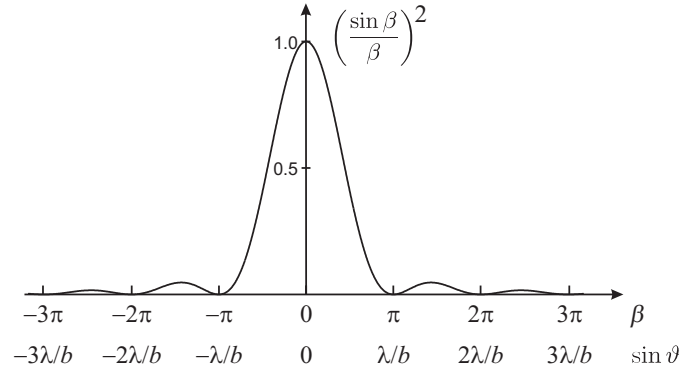


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Funktion $(\sin \beta / \beta)^2$, die für die Lichtintensität hinter einem Beugungsspalt charakteristisch ist.

Die Intensität des Lichtes im Punkt P , gewinnt man wegen $I(P) = E^2(P)$ durch Quadrieren von (3). Wir erinnern uns, dass der Punkt P hinter dem Spalt unter dem Winkel ϑ gesehen wird. Folglich beobachtet man weit hinter einem Spalt der Breite b , der von ebenen Lichtwellen der Wellenlänge λ beleuchtet wird, die Intensitätsverteilung

$$I(\vartheta) \propto b^2 \left\{ \frac{\sin[(kb \sin \vartheta)/2]}{(kb \sin \vartheta)/2} \right\}^2. \quad (4)$$

Kürzt man noch das Argument der Sinusfunktion mit

$$\beta = \frac{kb \sin \vartheta}{2} = \pi \frac{b}{\lambda} \sin \vartheta \quad (5)$$

ab, sieht man, dass die für $I(\vartheta)$ entscheidende Funktion $(\sin \beta / \beta)^2$ ist. Diese Funktion ist in Abbildung 2 dargestellt. Bei $\beta = 0$ nimmt sie den Wert 1 an. Ihre Nullstellen liegen bei $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Ein weit hinter dem Spalt aufgestellter Schirm bleibt also unter den Winkeln ϑ mit

$$\sin \vartheta = m \frac{\lambda}{b} \quad \text{mit} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

dunkel. Die Punkte zwischen diesen Minima werden beleuchtet. Obwohl die Primärwelle parallel zur z -Achse nur mit dem Einfallswinkel $\vartheta = 0$ ankommt, wird das Licht durch den Spalt in die verschiedenen Richtungen $\vartheta \neq 0$ gebeugt.

Beugung am Gitter

Ein Beugungsgitter besteht, ähnlich wie ein Lattenzaun, aus abwechselnd durchlässigen und undurchlässigen Streifen. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Streifen heißt Gitterkonstante g . Um das Beugungsbild hinter

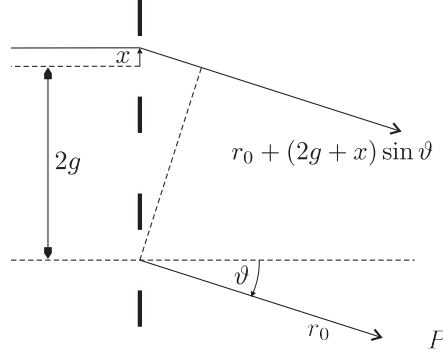


Abbildung 3: Gitterbeugung. Von links fällt eine ebene Lichtwelle auf ein Gitter mit der Gitterkonstanten g und Lücken (Spalte) der Breite b . Der Punkt P erscheint vom Gitter aus unter dem Winkel ϑ .

einem Gitter mit einer Lückenbreite b zu berechnen, nummerieren wir die N Gitterlücken mit $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ durch und wenden das Prinzip von Huygens-Fresnel an: Von jedem Punkt in jeder Gitterlücke geht eine Kugelwelle aus. Wir betrachten wieder die Wellen in Richtung Punkt P , der vom Gitter aus unter dem Winkel ϑ gesehen wird (vgl. Abb. 3). Der Abstand von der Mitte der nullten Gitterlücke zum Punkt P wird r_0 genannt. Dann muss die Kugelwelle, die vom Punkt x in der n -ten Gitterlücke ausgeht, zum Punkt P die Strecke $r = r_0 + (ng + x) \sin \vartheta$ zurücklegen. Die Summierung über alle Punkte in den Gitterlücken wird zur Summation über alle Lücken n von $n = 0$ bis $N - 1$ und zur Integration über x von $x = -b/2$ bis $b/2$. Damit ist

$$E(P) \propto \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ik(ng+x) \sin \vartheta} dx = E_G(P) \cdot E_S(P) \quad \text{mit} \quad (7)$$

$$E_G(P) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{inkg \sin \vartheta} \quad \text{und} \quad E_S(P) = \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx \sin \vartheta} dx.$$

Das Integral $E_S(P)$ kennen wir schon von der Spaltbeugung:

$$E_S(P) \propto \frac{\sin \beta}{\beta} \quad \text{mit} \quad \beta = \pi \frac{b}{\lambda} \sin \vartheta. \quad (8)$$

Die Gittersumme

$$E_G(P) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in2\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{kg \sin \vartheta}{2} = \pi \frac{g}{\lambda} \sin \vartheta \quad (9)$$

stellt eine geometrische Reihe dar, die man leicht aufsummieren kann:

$$E_G(P) = \frac{e^{i2N\gamma} - 1}{e^{i2\gamma} - 1} = \frac{e^{iN\gamma} \sin(N\gamma)}{e^{i\gamma} \sin \gamma}. \quad (10)$$

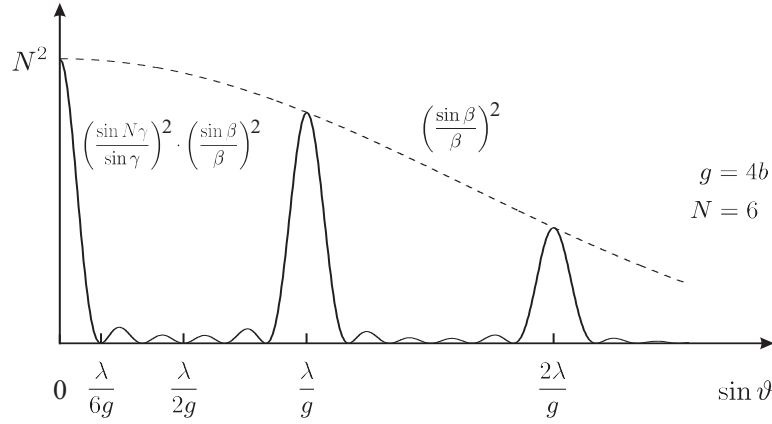


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Intensitätsverteilung, die für die Lichtintensität hinter einem Gitter mit $N = 6$ Spalten der Breite b und einer Gitterkonstanten $g = 4b$ charakteristisch ist. Die Einhüllende (gestrichelt) entspricht dem Beugungsmuster des Einzelspalts.

Folglich beträgt die Intensität $I(P) = E^2(P(\vartheta))$ des in ϑ -Richtung gebeugten Lichts

$$I(\vartheta) \propto \left[\frac{\sin(N\gamma)}{\sin \gamma} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2 \quad \text{mit} \quad (11)$$

$$\gamma = \pi \frac{g}{\lambda} \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \beta = \pi \frac{b}{\lambda} \sin \vartheta = \frac{b}{g} \gamma.$$

Die Intensitätsverteilung hinter einem Gitter (vgl. Abb. 4) ergibt sich also aus dem Interferenzmuster, das durch Zusammenwirken von N Spalten resultiert, moduliert von einer Einhüllenden, die dem Beugungsmuster des Einzelspalts entspricht.

Betrachten wir zunächst den ersten Faktor in Gleichung (11). Die sogenannten Hauptmaxima entstehen, wenn der Gitterfaktor $[\sin(N\gamma)/\sin \gamma]^2$ maximal ist, also wenn

$$\gamma = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots \quad (12)$$

oder entsprechend wenn

$$\sin \vartheta_m = m \frac{\lambda}{g} \quad \text{mit} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

Die Winkel ϑ_m , unter denen die Hauptmaxima m -ter Ordnung erscheinen, sind unabhängig von $N \geq 2$. In den Hauptmaxima ist der Gitterfaktor $[\sin(N\gamma)/\sin \gamma]^2 = N^2$, die Intensität in den Hauptmaxima wächst also quadratisch mit der Anzahl der Gitterlücken. Wenn $\lambda > g$ gibt es außer für $m = 0$ keine Lösungen für ϑ_m . Beugungsgitter beugen also nur dann, wenn ihre Gitterkonstante g größer als die Wellenlänge λ ist.

Minima entstehen, wenn $[\sin(N\gamma)/\sin\gamma]^2 = 0$ oder wenn

$$\gamma = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \dots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}, \pm \frac{(N+1)\pi}{N}, \dots \quad (14)$$

Zwischen zwei benachbarten Hauptmaxima befinden sich also $N-1$ Minima. Und natürlich befindet sich zwischen zwei Minima jeweils ein sogenanntes Nebenmaximum, insgesamt also jeweils $N-2$ zwischen zwei Hauptmaxima⁴. Nachdem der Gitterfaktor $[\sin(N\gamma)/\sin\gamma]^2$ einen schnell variierenden Zähler und einen langsam variierenden Nenner hat, kann man abschätzen, dass sich die Nebenmaxima ungefähr an den Punkten befinden, an denen $\sin(N\gamma)$ maximal ist, also

$$\gamma = \pm \frac{3\pi}{2N}, \pm \frac{5\pi}{2N}, \dots \quad (15)$$

Der zweite Faktor $[\sin\beta/\beta]^2$ in Gleichung (11) gibt die Beugungsfigur eines Spalts der Breite b wieder. Dieser Faktor bestimmt die Intensitäten der verschiedenen Beugungsordnungen. Im Maximum $\gamma = m\pi$ der m -ten Beugungsordnung nimmt β nach (11) den Wert $\gamma b/g = m\pi b/g$ an. Da der Gitterfaktor hier den von m unabhängigen Wert N^2 besitzt, ist die Intensität I_m der m -ten Beugungsordnung offenbar durch

$$I_m \propto \left[\frac{\sin(m\pi b/g)}{m\pi b/g} \right]^2 \quad (16)$$

gegeben. Man nennt I_m auch den Formfaktor. Der Formfaktor hängt von b/g und damit von der Struktur des Gitters ab. Man kann ihn durch Vermessen der Gitterbeugung bestimmen und daraus die Gitterstruktur ermitteln. Formfaktoren spielen überall dort eine Rolle, wo man durch Beugungsexperimente etwas über die Struktur des Beugenden Objekts zu erfahren versucht. Beispiele sind die Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen oder von Elektronenwellen an Atomenkernen.

⁴Im Falle des Doppelspalts ist $N = 2$ und zwischen den einzelnen Hauptmaxima liegt also genau ein Minimum. Nebenmaxima treten nicht auf.