

VERSUCHSBERICHT ZU

M2 – GEKOPPELTE PENDEL

Gruppe 10 Mi

Alex Oster (E-Mail: a\_oste16@uni-muenster.de)  
Jonathan Sigrist (E-Mail: j\_sigr01@uni-muenster.de)

durchgeführt am 29.11.2017  
betreut von  
Martin KÖRSGEN

6. Dezember 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurzfassung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Gekoppelte Fadenpendel</b>	<b>2</b>
2.1	Methoden . . . . .	2
2.2	Eigenschwingung eines ungekoppelten Pendels . . . . .	4
2.3	Messung mit Kupferfeder als Kopplung . . . . .	5
2.3.1	Statische Ermittlung des Kopplungsgrades . . . . .	5
2.3.2	Gleich-gesinnte Schwingung . . . . .	5
2.3.3	Gegen-gesinnte Schwingung . . . . .	5
2.3.4	Schwebung . . . . .	6
2.3.5	Relative Frequenzaufspaltung . . . . .	6
2.4	Messung mit Stahlfeder als Kopplung . . . . .	6
2.4.1	Statische Ermittlung des Kopplungsgrades . . . . .	6
2.4.2	Gleich-gesinnte Schwingung . . . . .	7
2.4.3	Gegen-gesinnte Schwingung . . . . .	7
2.4.4	Schwebung . . . . .	7
2.4.5	Relative Frequenzaufspaltung . . . . .	7
2.5	Ergebnisse . . . . .	7
2.6	Schlussfolgerung . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Doppelpendel</b>	<b>9</b>
3.1	Aufbau und Funktionsweise . . . . .	9
3.2	Beobachtung bei Auslenkung . . . . .	9

# 1 Kurzfassung

Dieser Bericht beschäftigt sich mit der Betrachtung von gekoppelten Pendeln. Dazu werden das gekoppelte Fadenpendel und das Doppelpendel herangezogen und die verschiedenen Schwingungstypen untersucht.

An zwei Fadenpendeln wird eine Reihe von Messungen durchgeführt, bei denen die Kopplung durch zwei verschiedene Federn realisiert wird. Für diese werden unterschiedliche Schwingungstypen separat untersucht. Die verschiedenen erhaltenen Schwingungsdauern werden dann miteinander verglichen und die Kopplungsgrade  $k$  des Systems statisch und dynamisch bestimmt. Zudem wird die Bewegung des Doppelpendels beschrieben und kurz mit der Bewegung der gekoppelten Fadenpendel in Verbindung gebracht.

## 2 Gekoppelte Fadenpendel

### 2.1 Methoden

Der Aufbau für den Versuch zu gekoppelten Fadenpendel ist in Abb. 1 dargestellt. Hier besitzen beide Pendel die gleiche Länge  $l$ , hier bei ca. 159 cm (von dem Aufhängepunkt zum Schwerpunkt der Pendel), und Gewichte der Masse  $m$ . Des Weiteren werden die Stangen („Fäden“) für die Berechnung als masselos angenommen. Zur Kopplung der beiden Fadenpendel dienen hierbei zwei verschiedene Federn, welche bei ungefähr  $z = d = 113$  cm zwischen den Pendeln angebracht werden. Bei diesen handelt es sich um eine Kupfer- und um eine Stahlfeder.

Die Auslenkung des Pendels wird mit Hilfe eines Ultraschall-Entfernungssensors gemessen. Diese wird gegen die Zeit aufgetragen, um die Schwingungsdauer  $T$  bzw. die Frequenz  $\omega$  zu ermitteln. Der Sensor misst mit 50 Hz. Die Messung wird für die Schwingungsdauer ohne Kopplung, für gleich- und gegen-gesinnte Bewegungen sowie für den Fall der Schwebung für beide Federn durchgeführt. Zur statischen Bestimmung des Kopplungsgrades wird die Auslenkung mit einem Maßstab gemessen.

Zur Berechnung des Kopplungsgrades wird folgende Formel für den statischen Fall verwendet:

$$k = \frac{x_2}{x_1}. \quad (1)$$

Für den dynamischen Fall werden die gemessenen Schwingungsdauern für

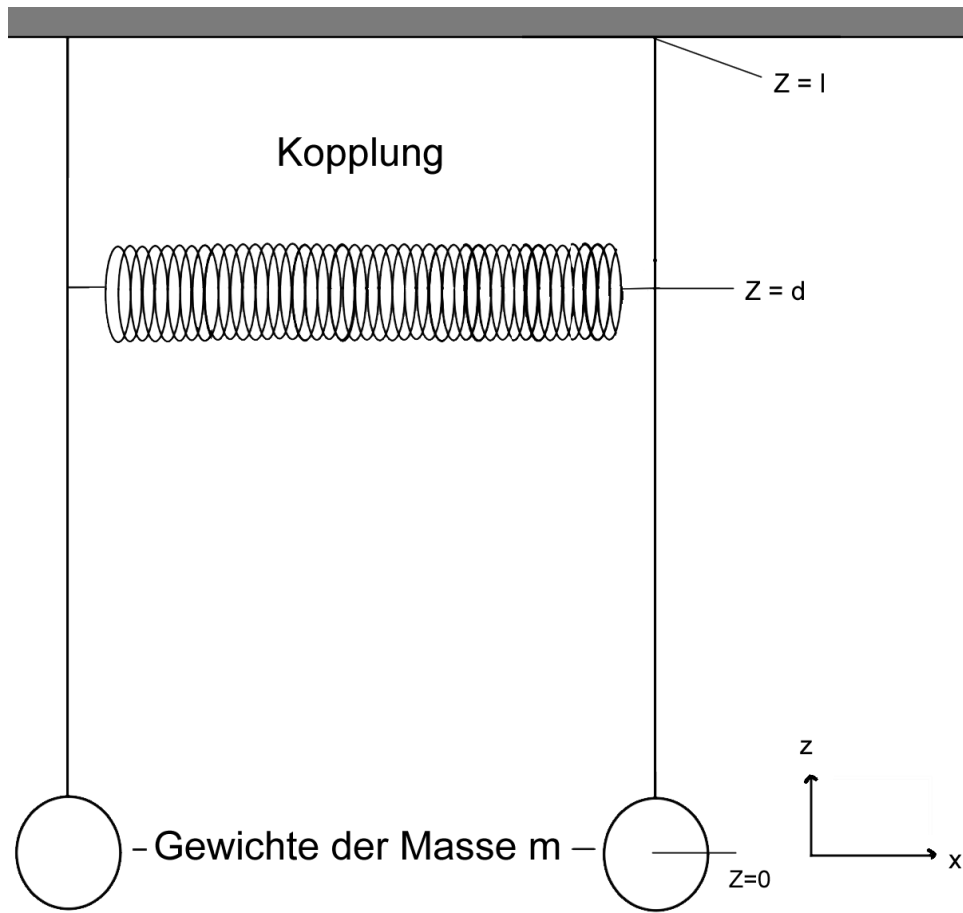


Abbildung 1: gekoppelte Fadenpendel

die gleich- und gegen-gesinnte Bewegung verwendet:

$$k = \frac{T_{\text{gl}}^2 - T_{\text{geg}}^2}{T_{\text{gl}}^2 + T_{\text{geg}}^2}. \quad (2)$$

bzw. für die Frequenz: 
$$k = \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2}. \quad (3)$$

Zuletzt wird die relative Frequenzaufspaltung  $\Delta\omega/\omega_0$  mit Hilfe der ermittelten Schwingungsdauern berechnet, dazu:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}}}{\omega_{\text{gl}}} = 2 \frac{T_{\text{gl}}}{T_{\text{S}}}. \quad (4)$$

Ebenso lässt sich die Frequenzaufspaltung auch mit der Näherung über die Reihenentwicklung von  $\sqrt{1 \pm k}$  bis zur 3. Ordnung bestimmen. Mit Umfor-

men von Gl. (2) und Näherung folgt:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1 = k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2}. \quad (5)$$

## Unsicherheiten

Die Unsicherheiten wurden wie folgt festgelegt:

- Messgerät: Aus der Messrate von 50 Hz folgt  $u_C(T) = \frac{0,02\text{ s}}{2\sqrt{3}}$ . Zudem ist die Ausgabe der gemessenen Werte auf zwei Nachkommastellen bzw. auf 1 cm genau. Daraus folgt  $u_C(x) = \frac{0,01\text{ m}}{2\sqrt{3}}$ .
- Maßstab: Von diesem ließ sich mit einer Ungenauigkeit von 0,5 mm ablesen. Demnach ist  $u(x) = \frac{0,0005\text{ m}}{2\sqrt{6}}$ .
- Messung über mehrere Perioden: Der Mittelwert ist gegeben durch  $T = \frac{T_j - T_i}{j - i}$ . Da  $T_i$  und  $T_j$  jeweils einzelne Messpunkte sind, gilt  $u(T_i) = u(T_j) = u(T)$ , somit folgt:

$$u(T) = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial T_i} u(T)\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_j} u(T)\right)^2} = \frac{u(T)}{j - i}. \quad (6)$$

- Schwebung: Da sich das Pendel bei der Schwebung an den Knoten über längere Zeit nicht bewegt, ist eine entsprechend große Unsicherheit für einen einzelnen Schwingungsbauch zu wählen (gemäß der Breite des Intervalls der nahezu gleichen Werte). Die gemittelte Zeit ist gegeben durch  $T_S = 2 \frac{T_j - T_i}{j - i}$ . Der Faktor 2 stammt daher, dass eine Periode jeweils zwei Schwingungsbäuche umfasst. Mit der Formel für kombinierte Unsicherheiten ergibt sich:

$$u(T_S) = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial T_i} u(T_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_j} u(T_j)\right)^2} = \frac{2}{j - i} \sqrt{u^2(T_i) + u^2(T_j)}. \quad (7)$$

$T_i$  beschreibt hierbei die Zeit bei dem  $i$ -ten Knotenpunkt.

## 2.2 Eigenschwingung eines ungekoppelten Pendels

Die Messung ergab für den ungekoppelten Fall, dass die Schwingungsdauer  $T_0 = (2,4833 \pm 0,0001)\text{ s}$  bzw. die Frequenz  $\omega_0 = (2,5301 \pm 0,0005)\text{ s}^{-1}$  entspricht. Hierzu wurden die Differenzen der Nullstellen bei der Messung gebildet und gemittelt.

## 2.3 Messung mit Kupferfeder als Kopplung

### 2.3.1 Statische Ermittlung des Kopplungsgrades

Der Kopplungsgrad wird durch Einsetzen in Gl. (1) statisch bestimmt. Dies liefert einen Wert von  $k = 0,025\,528 \pm 0,000\,315$ . Hierfür wurden acht Wertepaare verwendet. Zum Vergleich dient Abbildung 2.

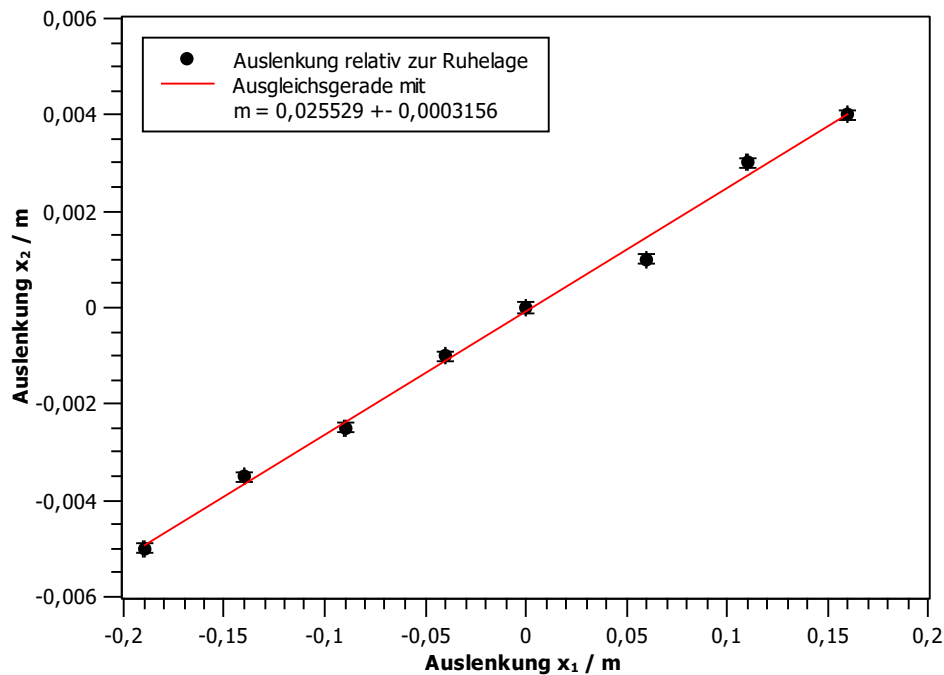


Abbildung 2: Kopplungsgerade für die Kupferfeder

### 2.3.2 Gleich-gesinnte Schwingung

Für die gleich-gesinnte Bewegung bei der Kupferfeder ergab sich, dass die Schwingungsdauer  $T_{\text{gl}} = (2,4736 \pm 0,0001) \text{ s}$  bzw. die Frequenz  $\omega_{\text{gl}} = (2,5401 \pm 0,0001) \text{ s}^{-1}$  entspricht. Hierzu wurden die Differenzen der Nullstellen bei der Messung gebildet und gemittelt.

### 2.3.3 Gegen-gesinnte Schwingung

Bei der gegen-gesinnten Bewegung der Kupferfeder ergab sich, dass die Schwingungsdauer  $T_{\text{geg}} = (2,4157 \pm 0,0001) \text{ s}$  bzw. die Frequenz  $\omega_{\text{geg}} = (2,6010 \pm 0,0001) \text{ s}^{-1}$  entspricht. Hierzu wurden die Differenzen der Nullstellen bei der Messung gebildet und gemittelt.

### 2.3.4 Schwebung

Die Messung ergab, dass die Schwingungsdauer  $T_S = (206,03 \pm 0,68) \text{ s}$  im Falle der Schwebung entspricht. Da die Periodenzahl bei der Schwebung sehr gering war, wurden für die Bestimmung der Periodendauer die Differenzen der Nullstellen und der Minima gebildet und gemittelt.

### 2.3.5 Relative Frequenzaufspaltung

Einsetzen in Gl. (4) liefert eine relative Frequenzaufspaltung von  $\Delta\omega/\omega_0 = 0,024\,010 \pm 0,000\,080$  über die ermittelten Schwingungsdauern. Über die Näherung aus Gl. (5) erhält man hierbei eine Aufspaltung von  $\Delta\omega/\omega_0 = 0,025\,863 \pm 0,000\,324$ .

## 2.4 Messung mit Stahlfeder als Kopplung

### 2.4.1 Statische Ermittlung des Kopplungsgrades

Der Kopplungsgrad wird durch Einsetzen in Gl. (1) statisch bestimmt. Dies liefert einen Wert von  $k = 0,041\,683 \pm 0,000\,315$ . Hierfür wurden neun Wertepaare verwendet. Zum Vergleich dient Abbildung 3.

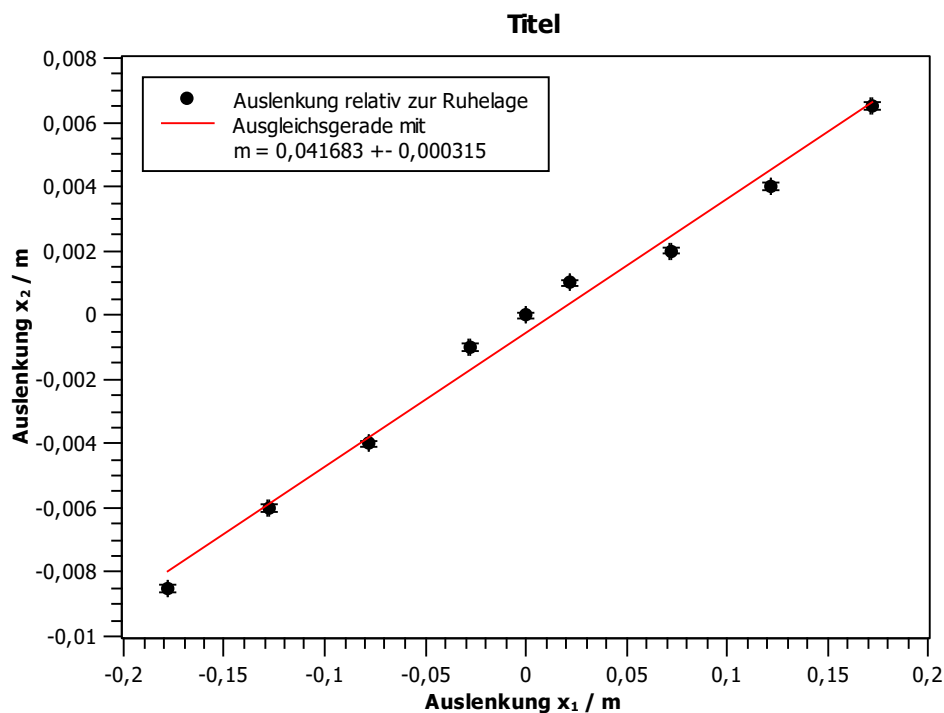


Abbildung 3: Kopplungsgerade für die Stahlfeder

### 2.4.2 Gleich-gesinnte Schwingung

Für die gleich-gesinnte Bewegung bei der Kupferfeder ergab sich, dass die Schwingungsdauer  $T_{\text{gl}} = (2,4697 \pm 0,0001) \text{ s}$  bzw. die Frequenz  $\omega_{\text{gl}} = (2,5441 \pm 0,0001) \text{ s}^{-1}$  entspricht. Hierzu wurden die Differenzen der Nullstellen bei der Messung gebildet und gemittelt.

### 2.4.3 Gegen-gesinnte Schwingung

Bei der gegen-gesinnten Bewegung der Kupferfeder ergab sich, dass die Schwingungsdauer  $T_{\text{geg}} = (2,3753 \pm 0,0001) \text{ s}$  bzw. die Frequenz  $\omega_{\text{geg}} = (2,6452 \pm 0,0001) \text{ s}^{-1}$  entspricht. Hierzu wurden die Differenzen der Nullstellen bei der Messung gebildet und gemittelt.

### 2.4.4 Schwebung

Die Messung ergab, dass die Schwingungsdauer  $T_{\text{S}} = (104,52 \pm 0,24) \text{ s}$  im Falle der Schwebung entspricht. Da die Periodenzahl bei der Schwebung sehr gering war, wurden für die Bestimmung der Periodendauer die Differenzen der Nullstellen und der Minima gebildet und gemittelt.

### 2.4.5 Relative Frequenzaufspaltung

Einsetzen in Gl. (4) liefert eine relative Frequenzaufspaltung von  $\Delta\omega/\omega_0 = 0,047\,260 \pm 0,000\,107$  über die ermittelten Schwingungsdauern. Über die Näherung aus Gl. (5) erhält man hierbei eine Aufspaltung von  $\Delta\omega/\omega_0 = 0,042\,587 \pm 0,000\,329$ .

## 2.5 Ergebnisse

Tab. 1 zeigt die Ergebnisse der Messungen für die verschiedenen Kopplungen, damit diese besser verglichen werden können. Hier ist ebenfalls der dynamisch bestimmte Kopplungsgrad aufgelistet, welcher sich durch Einsetzen in Gl. (2) berechnen ließ, sowie die durch:

$$T_{\text{S}} = \frac{4\pi}{\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}}} \quad (8)$$

berechneten Schwebungsdauern.

Vergleicht man die Schwingungsdauern für die Schwebung bei direkter Messung mit den berechneten, so ist zu erkennen, dass der Unterschied bei der Kupferfeder minimal ist 0,2%, bei der Stahlfeder jedoch mit 18,9% im Verhältnis zu der vorausgegangenen Feder stark abweicht.

Bei den Kopplungsgraden besteht bei der statistischen Berechnung ein 7,8% Unterschied zu den Dynamischen bei der Kupferfeder und 7,0% bei der Stahlfeder.



Tabelle 1: Ergebnisse der Versuchsreihe

	Methode	Ergebnis
<b>ohne Kopplung</b>		
$T_0$	gemessen	$(2,4833 \pm 0,0001) \text{ s}$
$\omega_0$	aus $T_0$	$(2,5301 \pm 0,0005) \text{ s}^{-1}$
<b>Kupferfeder</b>		
$T_{\text{gl}}$	gemessen	$(2,4736 \pm 0,0001) \text{ s}$
$\omega_{\text{gl}}$	aus $T_{\text{gl}}$	$(2,5401 \pm 0,0001) \text{ s}^{-1}$
$T_{\text{geg}}$	gemessen	$(2,4157 \pm 0,0001) \text{ s}$
$\omega_{\text{geg}}$	aus $T_{\text{geg}}$	$(2,6010 \pm 0,0001) \text{ s}^{-1}$
$T_{\text{S}}$	gemessen	$(206,03 \pm 0,68) \text{ s}$
$T_{\text{S}}$	berechnet	$(206,35 \pm 0,33) \text{ s}$
$k$	statisch	$0,025\,528 \pm 0,000\,315$
$k$	dynamisch	$0,023\,675 \pm 0,000\,031$
$\Delta\omega/\omega_0$	berechnet	$0,024\,010 \pm 0,000\,080$
$\Delta\omega/\omega_0$	genähert	$0,025\,863 \pm 0,000\,324$
<b>Stahlfeder</b>		
$T_{\text{gl}}$	gemessen	$(2,4697 \pm 0,0001) \text{ s}$
$\omega_{\text{gl}}$	aus $T_{\text{gl}}$	$(2,5441 \pm 0,0001) \text{ s}^{-1}$
$T_{\text{geg}}$	gemessen	$(2,3753 \pm 0,0001) \text{ s}$
$\omega_{\text{geg}}$	aus $T_{\text{geg}}$	$(2,6452 \pm 0,0001) \text{ s}^{-1}$
$T_{\text{S}}$	gemessen	$(104,52 \pm 0,24) \text{ s}$
$T_{\text{S}}$	berechnet	$(124,30 \pm 0,13) \text{ s}$
$k$	statisch	$0,041\,683 \pm 0,000\,315$
$k$	dynamisch	$0,038\,939 \pm 0,000\,026$
$\Delta\omega/\omega_0$	berechnet	$0,047\,260 \pm 0,000\,107$
$\Delta\omega/\omega_0$	genähert	$0,042\,587 \pm 0,000\,329$

Für die Näherung der relativen Frequenzaufspaltung weichen die Werte von den Berechneten um 7,7% für die Kupferfeder und um 9,9% für die Stahlfeder ab.

## 2.6 Schlussfolgerung

Da die Werte für die Schwebungsdauer der Stahlfeder stark voneinander abweichen, sollte die Messung zu dieser wiederholt werden. Für die Kopplungsgrade  $k$  und der relativen Frequenzaufspaltung  $\Delta\omega/\omega_0$  sind die Unsicherheiten sehr gering, was den hohen prozentualen Unterschied der verschiedenen Ergebnisse erklären könnte. Demnach müsste die Berechnung der Unsicherheiten hier erneut überprüft werden. Dass die Stangen, als masselos angenommen werden, hat ebenfalls Einfluss auf die Genauigkeit der Messung, jedoch nicht genug um die starken Abweichungen zu erklären.

## 3 Doppelpendel

### 3.1 Aufbau und Funktionsweise

Das Doppelpendel besteht aus zwei gekoppelten Pendeln. Hierbei ist das obere Pendel an einem festen Aufhängepunkt angebracht. Das Untere hingegen ist an dem beweglichen Massepunkt des oberen Pendels befestigt. Die Abbildungen 4a) bis 4d) zeigen die Funktionsweise des Doppelpendels. Hier sind die verschiedenen Auslenkungsmöglichkeiten zu erkennen, wobei die Massepunkte der einzelnen Pendel sich jeweils auf Kreisbahnen um deren Aufhängepunkte bewegen können.

### 3.2 Beobachtung bei Auslenkung

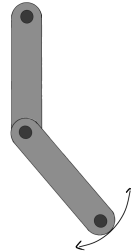
Bei der Auslenkung des Doppelpendels lässt sich ein nichtlineares bzw. chaotisches Verhalten erkennen, da nach nur wenigen Schwingungen, bei nahezu gleichen Anfangsbedingungen, bereits stark unterschiedliche Bewegungen beobachtet wurden. Ein periodisches Verhalten ließ sich hierbei nicht erkennen.

Die Ausnahmen hierzu bilden die Schwingungen, bei Auslenkungen ähnlich zu den, wie sie in Abb. 4e) und Abb. 4d) dargestellt sind. Bei der ersten linearen Bewegung bewegt sich der Massepunkt des unteren Pendels auf einer Kreisbahn um den Aufhängepunkt des Oberen. Die beiden Pendel liegen bei dieser Bewegung parallel. Für den zweiten Fall einer linearen Bewegung sind die beiden Pendel um den gleichen Winkel, jedoch in entgegengesetzte Richtung ausgelenkt, wie es in Abb. 4d dargestellt ist (hier  $\pm 45^\circ$ ). Hier bewegt sich der Massepunkt des unteren Pendels weder nach links noch nach rechts, sondern nur näher dem Aufhängepunkt des oberen Pendels. Dieser Effekt war jedoch nur bei einem Auslenkungswinkel von ca.  $\pm 10^\circ$  zu beobachten. Bei größeren Auslenkungen traten erneut nichtlineare Bewegungen auf.

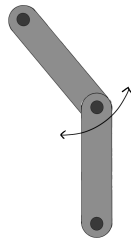
Diese linearen Bewegungen ähneln der gleich- (Abb. 4e) bzw. gegen-gesinnten Bewegung (Abb. 4d) der gekoppelten Fadenpendel.



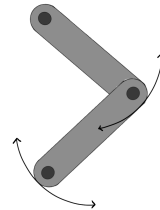
(a) Doppelpendel in Ruhelage



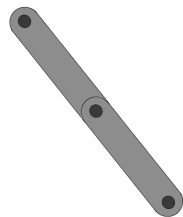
(b) Oberes Pendel in Ruhelage, Unteres ausgelenkt



(c) Unteres Pendel in Ruhelage, Oberes ausgelenkt



(d) Beide Pendel ausgelenkt



(e) Doppelpendel in stabiler Lage

Abbildung 4: Auslenkungsmöglichkeiten des Doppelpendels