Themen

- LTI-System
- Faltung
- Fouriertransformation
- räumliche Fouriertransformation
- Tiefpass
- erzwungene Schwingung
- RLC-Schwingkreis
- Amplitudenmodulation
- Frequenzmodulation
- Demodulation
- Multiplexing
- p-n-Übergang
- Diode
- Feldeffekt-Transistor
- Kanal-MOS-FET
- Bipolartransistor
- Transistorschaltungen
- Operationsverstärker
- OP-Schaltungen
  - Impedanzwandler
  - Verstärker
  - math. Operatoren
- Regelung/Steuerung
- Stabilität
- Digitaltechnik
- Logikgatter
- Multivibratoren
  - bistabile Multivibratoren
- Digital-Analog-Wandler
- Analog-Digital-Wandler
  - Abtast-Halte-Schaltung
  - Rampenverfahren
  - Wägeverfahren
  - Parallelverfahren
- Abtastung
- Wellen auf Kabeln
  - Koaxialkabel
  - Glasfaser
- Halbleiterdatenspeicherung
- Flash-Memory
- magnetische Datenspeicherung
- optische Datenspeicherung
- Korrelation
  - Kohärenz
  - Rauschen

Linearität:

Superposition $L\{u_1(t)+u_2(t)\} = L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$

Verstärkung $L\{\alpha \cdot u(t)\} = \alpha \cdot L\{u(t)\}$

LTI-System:

linear, zeitinvariant

Systembeschreibung: gewöhnl. Dgl. mit konst. Koeff.

Lösung: Exponentialansatz

erzwungene Schwingung:

Schwingung mit Erregerfrequenz

frequenzabhängige Phase u. Amplitude

$u(t) = u_0(\omega) \cos(\omega t + \alpha(\omega))$

gedämpfte:

Kriechfall ($\omega_0 < \delta$): langsamer exponentieller Abfall

$\omega_0 \hat{=}$ Eigenfrequenz

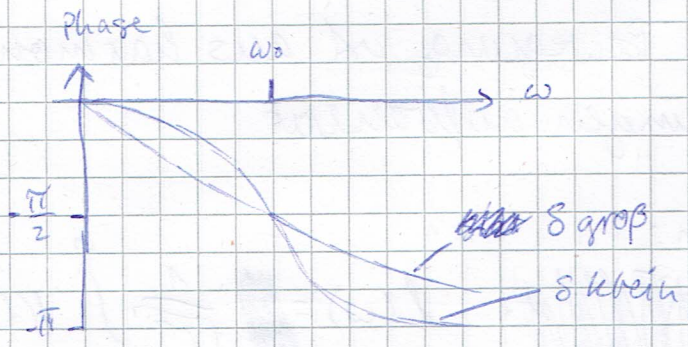
$\delta \hat{=}$ Dämpfung

Aperiodischer Grenzfall ($\omega_0 = \delta$): optimale Dämpfung

Schwingfall ($\omega_0 > \delta$):

Schwingung mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$u(t) = u_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha)$



Faltung:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow y(t) = g(t) * u(t)$$

$$g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

$$g(t) * \delta(t) = g(t)$$

$\Rightarrow$ Impulsfunktion $\delta(t)$ liefert als Stoßantwort Gewichtsfunktion $g(t)$

$$g(t) * \sigma(t) = h(t)$$

$$= \sigma(t) * g(t) = \int_0^t \underbrace{\sigma(t-\tau)}_{=1 \text{ für } 0 \le \tau \le t} g(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow h(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{d}{dt}\left[h(t)\right]$$

$\Rightarrow$ Sprungfunktion $\sigma(t)$ liefert als Sprungantwort Übertragungsfunktion $h(t)$

Fourier-Theorem:

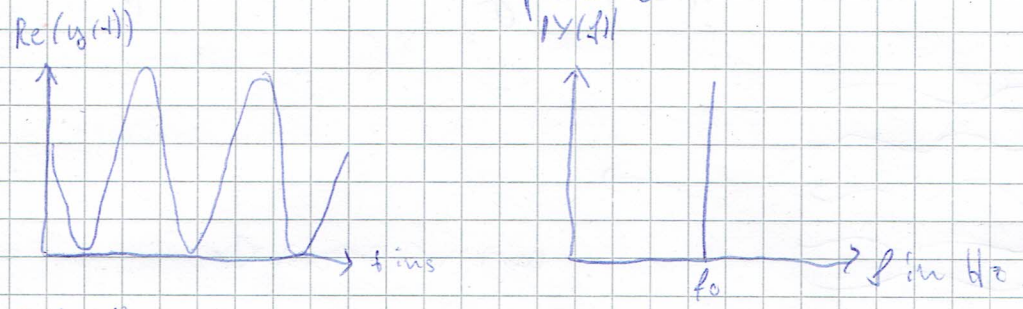
Jede periodische Bewegung ist aus harmonischen Schwingungen aufbaubar

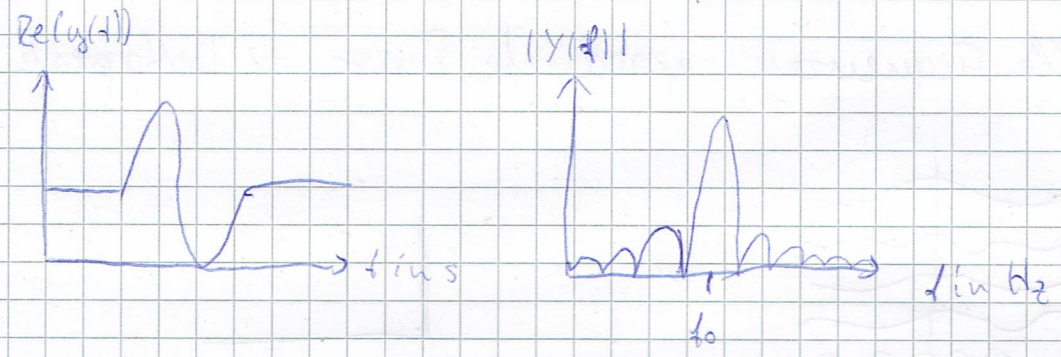
Fouriertransformation:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Endlichkeit vom Messprozess





Laplace Transformation:

berücksichtigt Endlichkeit vom Messprozess

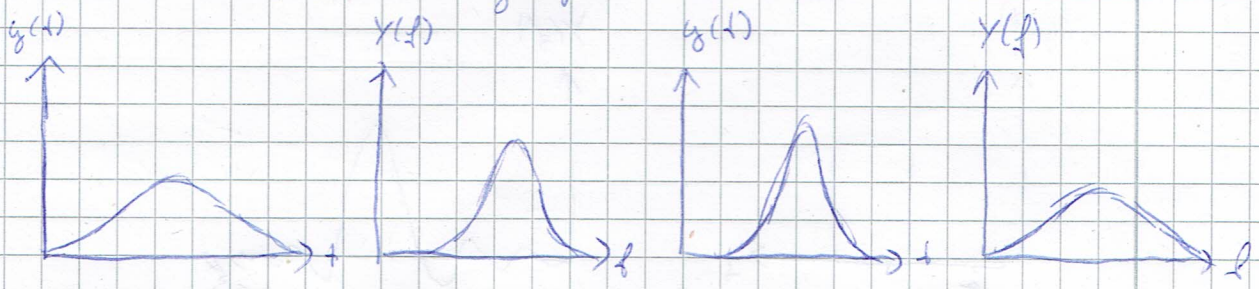
→ Signale müssen für $t \to \infty$ nicht abklingen, dürfen sogar exponentiell wachsen

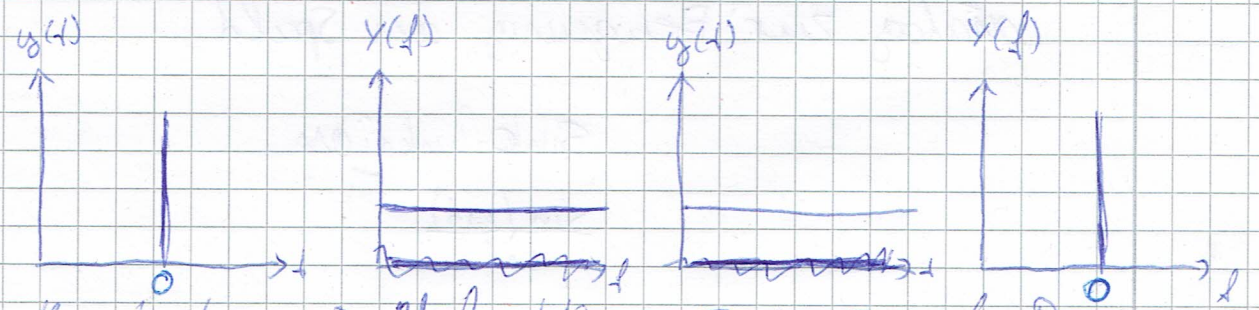
fordert, dass links von $t=0$ nichts stattfindet

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad , s = \sigma + i\omega \, , \sigma > 0 \, , t \geq 0$$

Gaußfunktion selbstähnlich

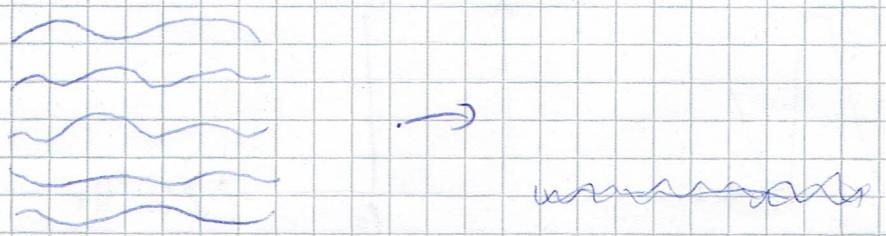
→ FT (Gauß) = a · Gauß





Konstante u. Deltafunktion: Fourier-Transf.-Paar

Alle Frequenzen, zufällige Phase → weißes Rauschen

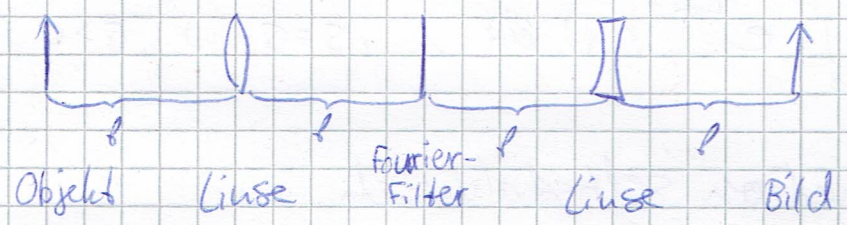


Alle Frequenzen, geordnete Phase → Deltapeak

räumliche Fouriertransformation:

- durch Linse

4-f-Aufbau

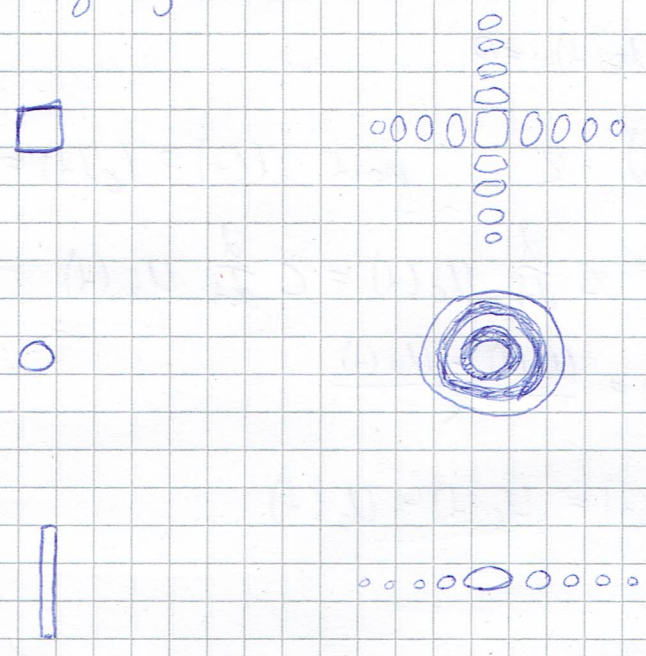


analog zur Beugung am Spalt

Sinc-funktion

$\frac{\sin(\omega t)}{\omega t}$

Beugungsbilder



Faltung und Fourier:

$\cancel{g(t) = h(t) * g(t)}$

$\cancel{U(f) = H(f) \cdot G(f)}$

$h(t) = u(t) * g(t)$

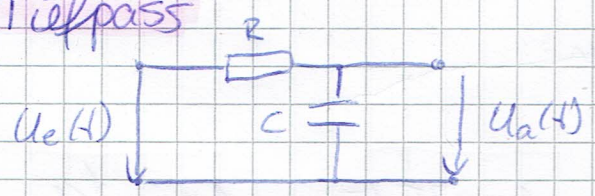
$H(f) = U(f) \cdot G(f)$

$u(t) = e^{i2\pi f t}$

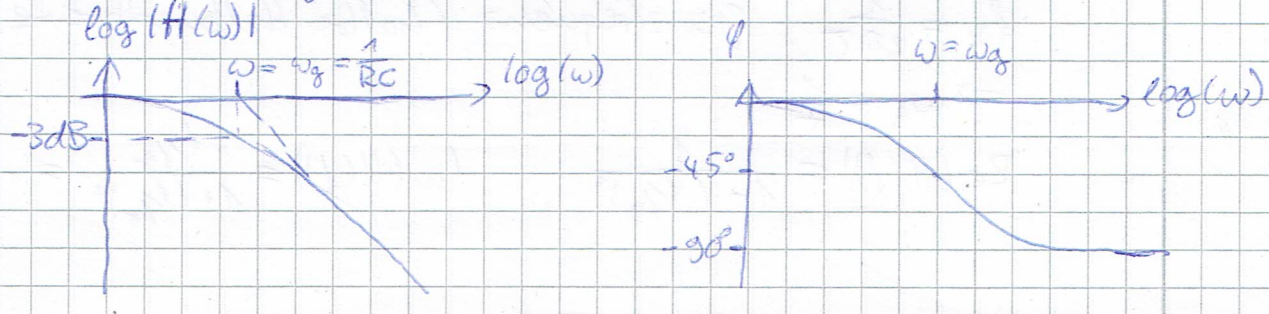
$\Rightarrow h(t) = e^{i2\pi f t} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-i2\pi f \tau}\, d\tau$

$\Rightarrow G(f) = FT(g(t))$

Tiefpass



Bode-Diagramm



DGL Tiefpass:

Maschenregel:

$$U_e(t) - U_a(t) - U_R(t) = 0$$

mit $U_R(t) = I(t) \cdot R$ mit $I(t) = I_C(t) = I_R(t)$

$$I(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = C \frac{d}{dt} U_C(t) = C \frac{d}{dt} U_a(t)$$

mit $I(t) = I_R(t) = \frac{U_e(t) - U_a(t)}{R}$

$$\Rightarrow RC \frac{d}{dt} U_a(t) = U_e(t) - U_a(t)$$

mit $\tau = RC$

$$\Rightarrow \tau \frac{d}{dt} U_a(t) + U_a(t) = U_e(t)$$

Lösung:

$$U_a(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t'}{\tau}} \cdot U_e(t')\, dt'$$

Signalantworten:

$$U_e(t) = \delta(t) \Rightarrow U_a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, & t > 0 \end{cases}$$

$$U_e(t) = e^{i2\pi f t} \Rightarrow U_a(t) = \frac{e^{i2\pi f t}}{1 + i2\pi f \tau}$$

Übertragungsfunktion:

$$U_a(t) = H(f) \cdot U_e(t)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1}{1 + i2\pi f \tau} = \frac{1 - i2\pi f \tau}{1 + (2\pi f \tau)^2} = \frac{1 - i \cdot f/f_g}{1 + (f/f_g)^2}$$

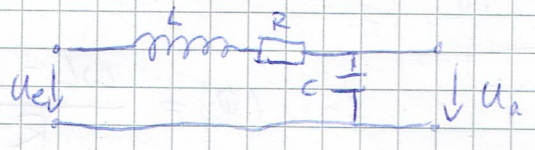
$f_g = \frac{1}{2\pi\tau}$ Grenzfrequenz (halbe Halbwertbreite)

$\Rightarrow \omega_g = \frac{1}{\tau}$

$$\mathrm{Re}(H(f)) = \frac{1}{1 + (f/f_g)^2} \qquad \mathrm{Im}(H(f)) = \frac{f/f_g}{1 + (f/f_g)^2} = -\frac{1}{f_g} \cdot \mathrm{Re}(H(f))$$

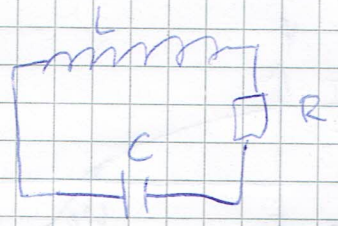
$$U_a(t) = \begin{cases} U_e(t) & , f \ll f_g \\ -i \cdot U_e(t) / (2\pi f \tau) & , f \gg f_g \end{cases}$$

Beispiel: Tiefpass 2. Ordnung



RLC-Schwingkreis

gedämpfter Schwingkreis



Maschenregel:

$$U_L + U_R + U_C = 0 \Leftrightarrow L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = 0$$

mit $I = \dot{Q}$, $\dot{I} = \ddot{Q}$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$$

Vergleich mechanische Schwingung:

$Q \hat{=}$ Auslenkung x

$L \hat{=}$ träge Masse m

$R \hat{=}$ Reibung $\left(\frac{R}{L} = 2\delta\right)$

$\frac{1}{C} \hat{=}$ Rückstellkonst. D oder k $\left(\frac{1}{LC} = \omega_0^2\right)$

$\Rightarrow$ Schwingfall ($\omega_0 > \delta$):

$$Q(t) = Q_0 \, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

erzwungene Schwingung

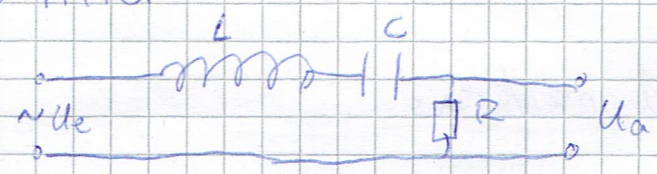
mit $U_\sim = U_0 \cos(\omega t)$ (Erreger)

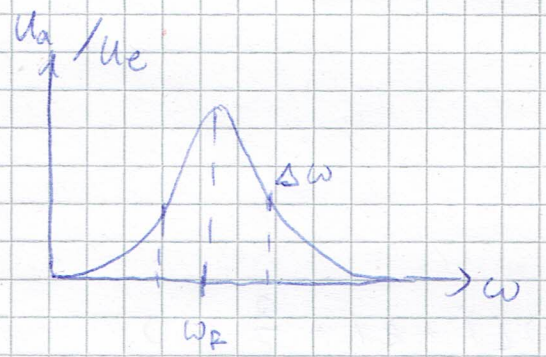
komplexer Widerstand $I_\sim = \frac{U_\sim}{Z}$

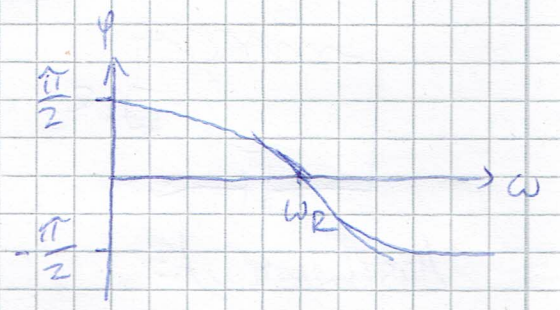
$I_\sim = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$, $I_0 = \frac{U_0}{|Z|}$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \tan(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

als Filter:

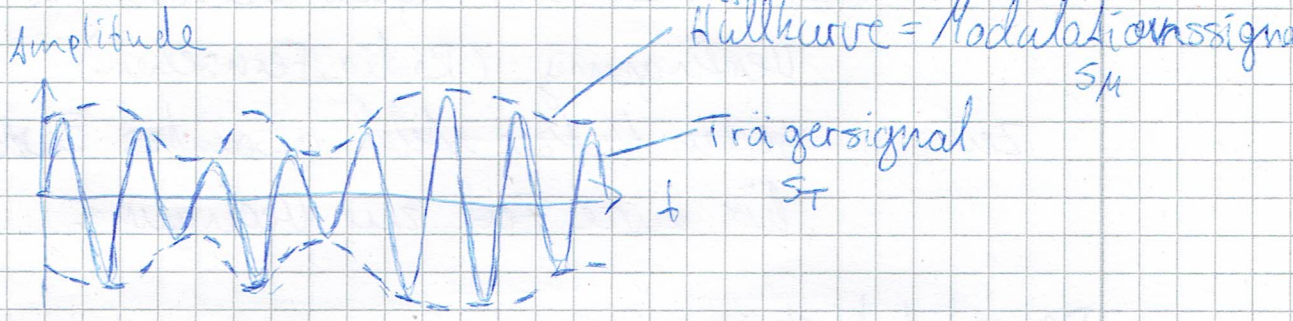






Modulation:

Amplitudenmodulation



$$s_T = S_T \cos(2\pi f_T t)$$

$$s_M = S_M \cos(2\pi f_M t)$$

$$s_{AM} = (S_T + S_M \cos(2\pi f_M t)) \cos(2\pi f_T t)$$

$$= S_T (1 + m \cos(2\pi f_M t)) \cos(2\pi f_T t)$$

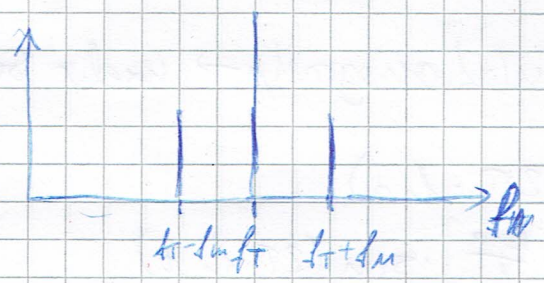
$$m = \frac{S_M}{S_T} \hat{=} \text{Modulationsgrad}$$

$$s_{AM} = S_T \Big[\cos(2\pi f_T t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi (f_T - f_M) t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi (f_T + f_M) t) \Big]$$

$\Rightarrow$ vorhandene Frequenzen:

f_T, $f_T - f_M$, $f_T + f_M$

$\Rightarrow$ 2 Seitenbänder



Bandbreite vom Kanal sollte größer sein als Bandbreite des Signals.

Multiplexing:

Frequenz: Jedem Nutzer steht ein Teilband der Breite Δf im Frequenzbereich zur Verfügung (Radio, Fernsehen)

Zeit: Jeden Nutzer steht gesamtes Band für kurze Zeit zur Verfügung

Demodulation:

für $m \ll 1$: Gleichrichtung und Tiefpass

Phasenmodulation:

$$m(t) = \cos(\Psi(s(t))) = \cos(\Psi(t))$$

$$\Psi_{PM}(t) = 2\pi(f_0 t + k \cdot s(t))$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\Psi(t) = f_0 + k \cdot \frac{d}{dt}s(t)$$ Momentanfrequenz

Frequenzmodulation

$$m(t) = \cos(\Psi(s(t))) = \cos(\Psi(t))$$

$$\Psi_{FM}(t) = 2\pi\left(f_0 t + k \cdot \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\, d\tau\right)$$

$$f_i(t) = f_0 + k \cdot s(t)$$ Momentanfrequenz

Ableitung bei Demodulation:

$$m_D(t) = \frac{d}{dt}m(t) = -(f_0 + k \cdot s(t)) \cdot \sin(\Psi(t))$$

zunehmender Modulationsgrad μ → mehr Seitenbänder

für $s(t) = a \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 t)$

$$\Psi_{FM}(t) = 2\pi f_0 t + \underbrace{\frac{k \cdot a}{f_1}}_{=\mu} \cdot \sin(2\pi f_1 t)$$

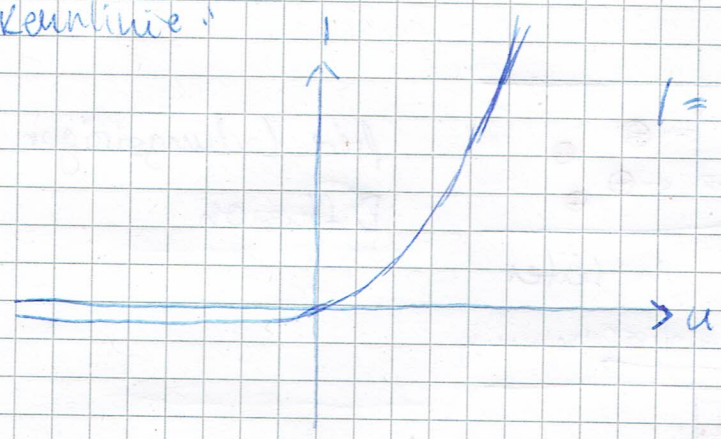
$$\Rightarrow m(t) = \cos(2\pi f_0 t + \mu \sin(2\pi f_1 t))$$

für kleines μ:

$$m(t) \approx \cos(2\pi f_0 t) - \frac{\mu}{2}\cos(2\pi(f_0 - f_1)t) + \frac{\mu}{2}\cos(2\pi(f_0 + f_1)t)$$

Diode

Kennlinie:



$$I = I_0 \left(e^{eU/k_BT} - 1\right)$$

$I_0 \hat{=}$ Sperrstrom der Diode

$\approx 10^{-12} \ldots 10^{-6}$ A

Sperrbereich

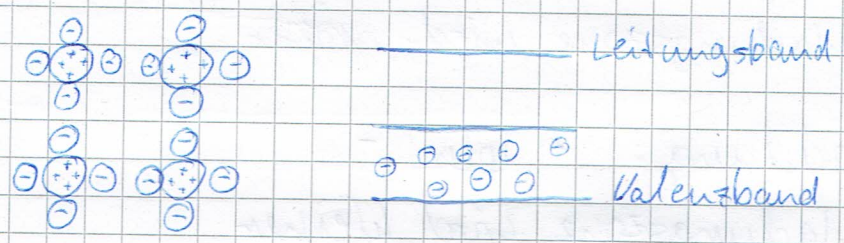
- [p | n] +

Leitungsbereich

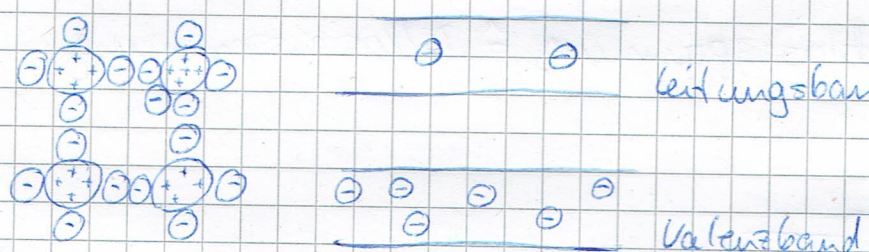
+ [p | n] -

nichtlineare Kennlinie wirkt als Multiplikator

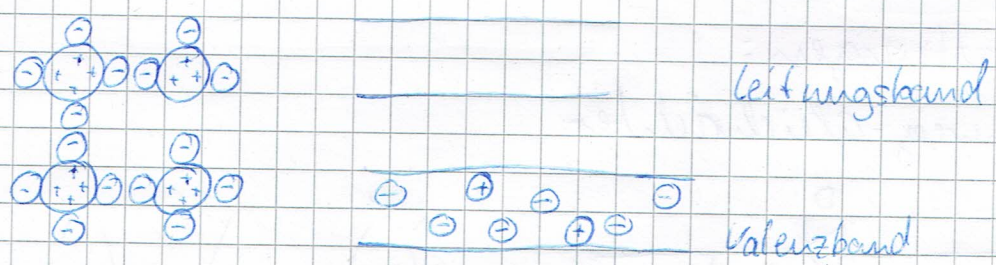
Halbleiter:



n-Dotiert:

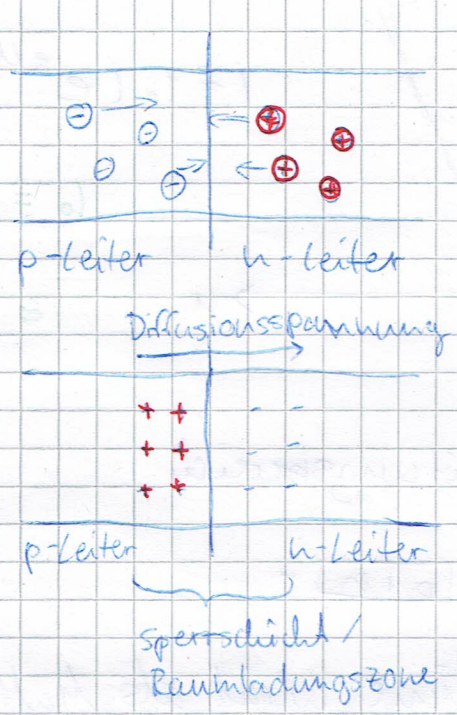


p-Dotiert:



→ Löcherleitung

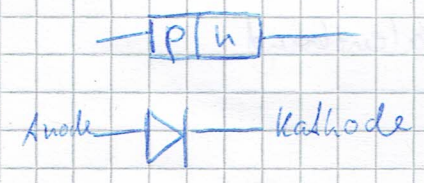
p-n-Übergang



freie Ladungsträger
Diffusion

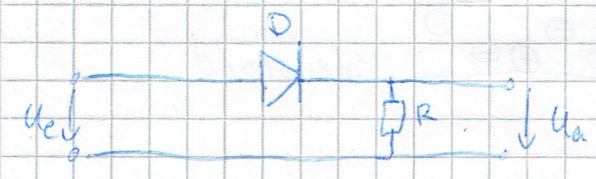
Sperrrichtung: − [p|n] +
→ Raumladungszone wird größer

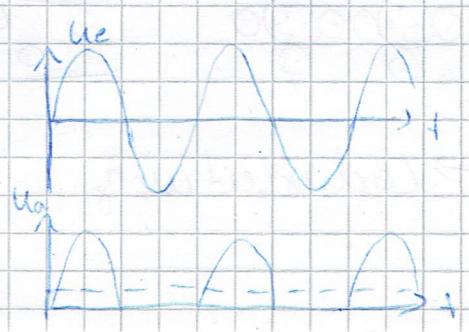
Durchlassrichtung: + [p|n] −
→ Raumladungszone wird kleiner
→ wenn überwunden, Stromfluss
→ Durchlassspannung ≙ Diffusionsspannung



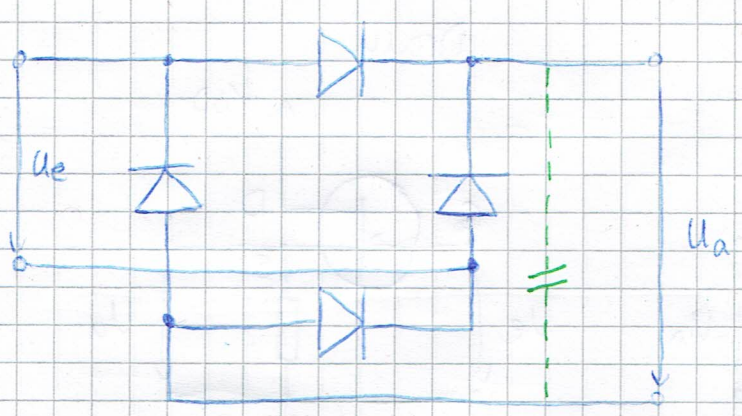
Schaltungen:

Einweg-Gleichrichter

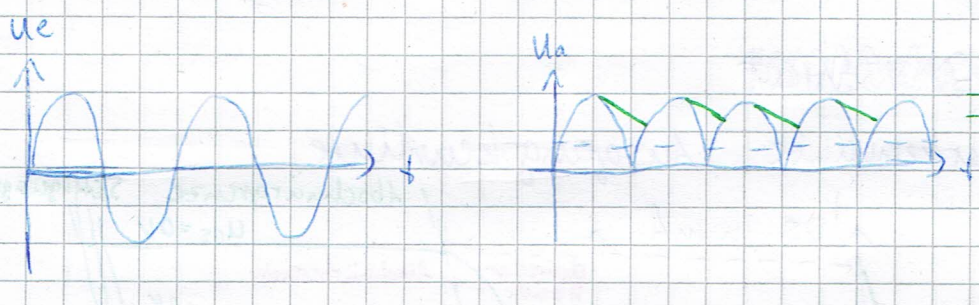




Brückengleichrichter



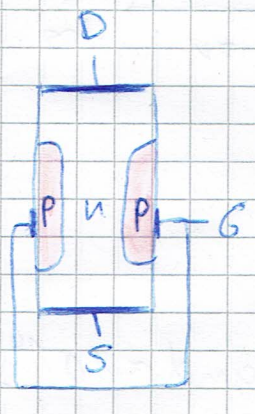
mit Glättung



Brumm-spannung kleiner für hohe Frequenzen

Transistoren:

Feldeffekt-Transistor (FET)



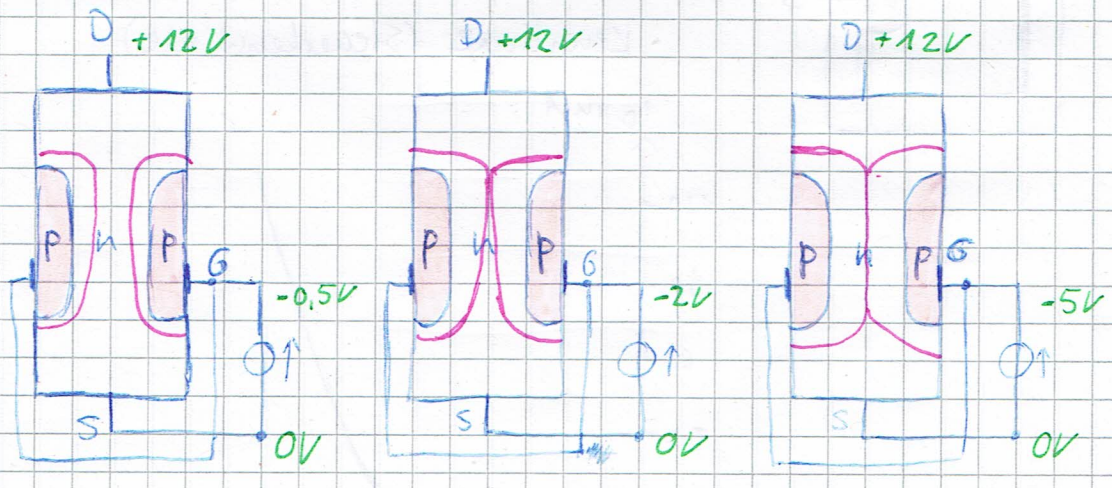
D ≙ Drain, S ≙ Source, G ≙ Gate

ohmscher Bereich: steuerbarer Widerstand

Abschnürbereich: spannungsgesteuerte Stromquelle

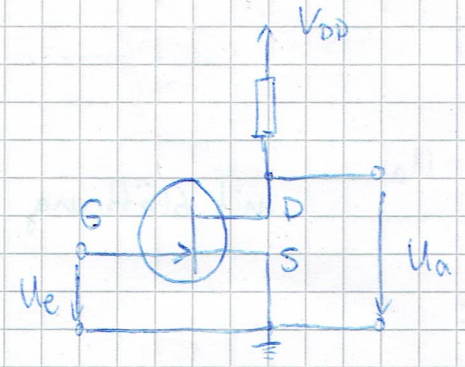
Eingangswiderstand $\approx 10^{13} \ldots 10^{15}\,\Omega$

ohmscher Bereich | Abschnürbereich | Sperrbereich

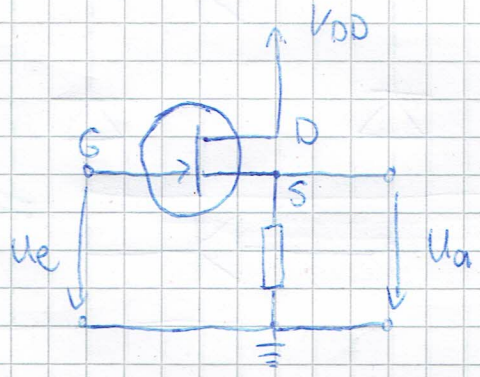


Schaltung FET:

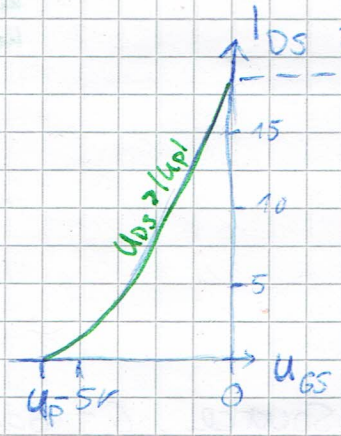
Source



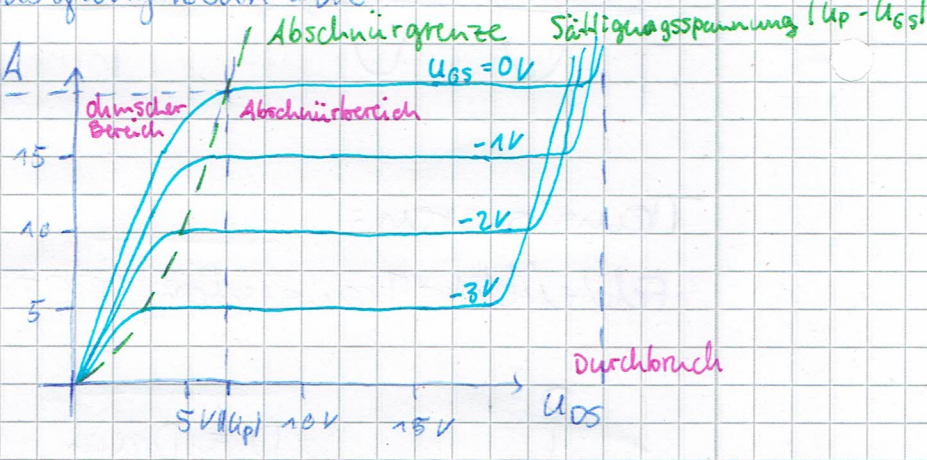
Drain



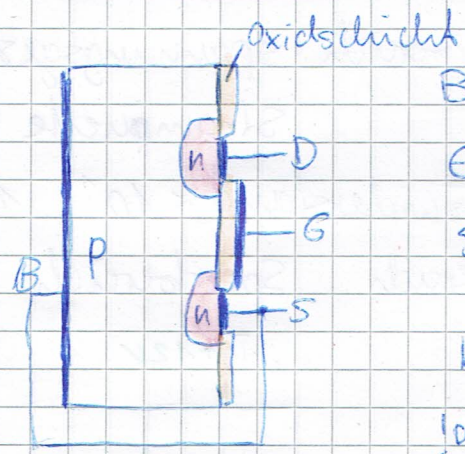
Steuerkennlinie



Ausgangskennlinie



Kanal-MOS-FET

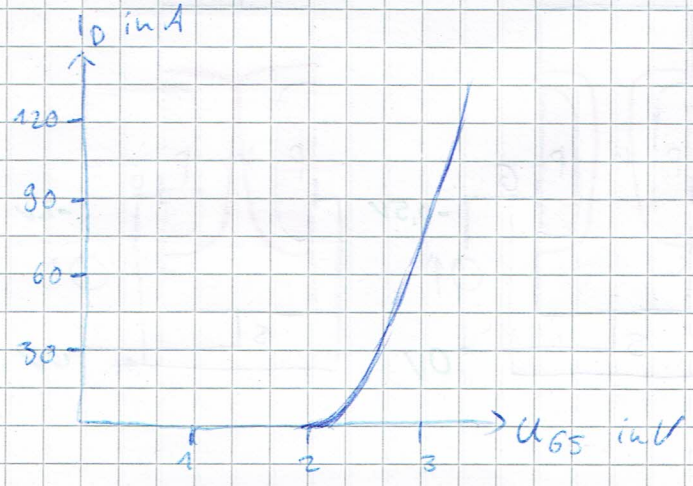


B ≙ Bulk

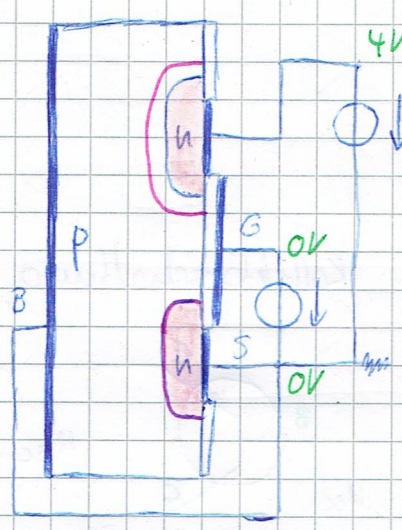
Eingangswiderstand $\approx 10^{14} \ldots 10^{16}\,\Omega$

Schwellspannung $U_{th} \approx 1{,}5 \ldots 3V$

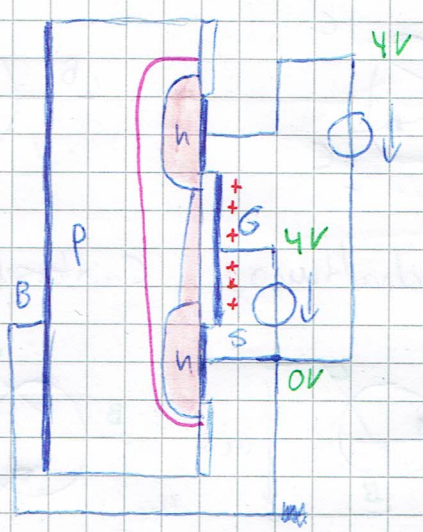
Kennlinie (Steuerkennlinie)



Selbstsperrend



Kanalbildung



positive Spannung am Gate

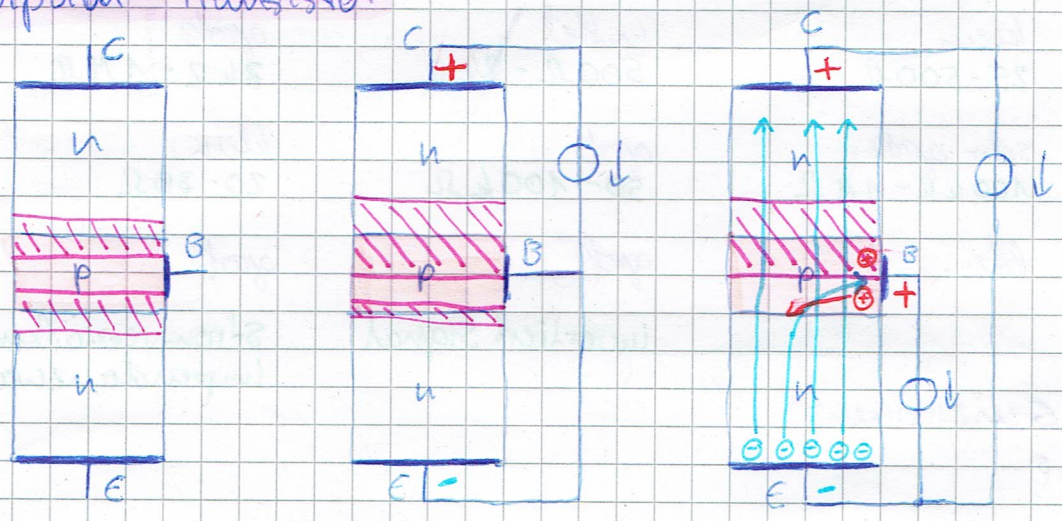
→ elektrisches Feld

→ Elektronen zum Gate, Löcher vom Gate weg

→ n-Leitende Zone am Gate (Inversionsschicht)

→ Verbindung zw. Source u. Drain

Bipolar-Transistor



E ≙ Emitter C ≙ Kollektor B ≙ Basis

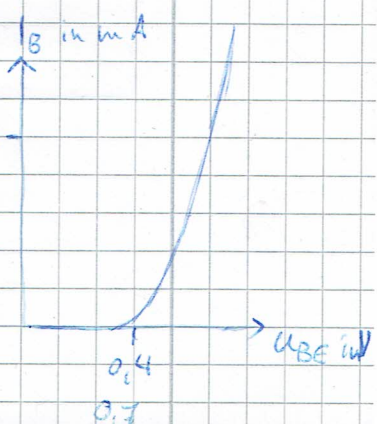
$I_E = I_B + I_C$

$\frac{I_C}{I_E} = \alpha$ (Stromübertragungsverhältnis)
(bis zu 0,997)

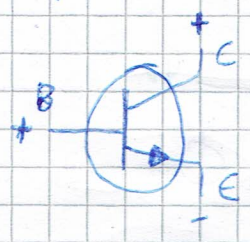
$\frac{I_C}{I_B} = B$ (Gleichstromverstärkung)

$\frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$ ((dynamische) Stromverstärkung)
(für Kleinsignalverstärkung)

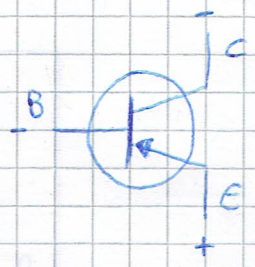
Steuerkennlinie

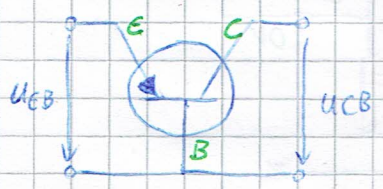
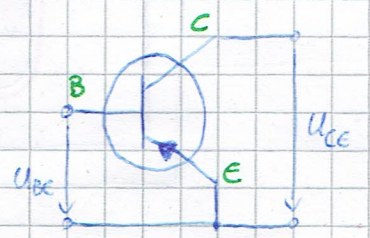
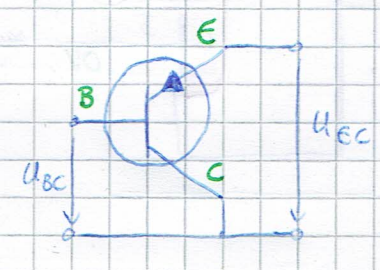


npn-Trasistor

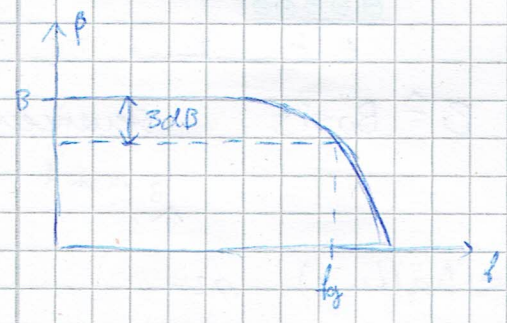


pnp-Transistor

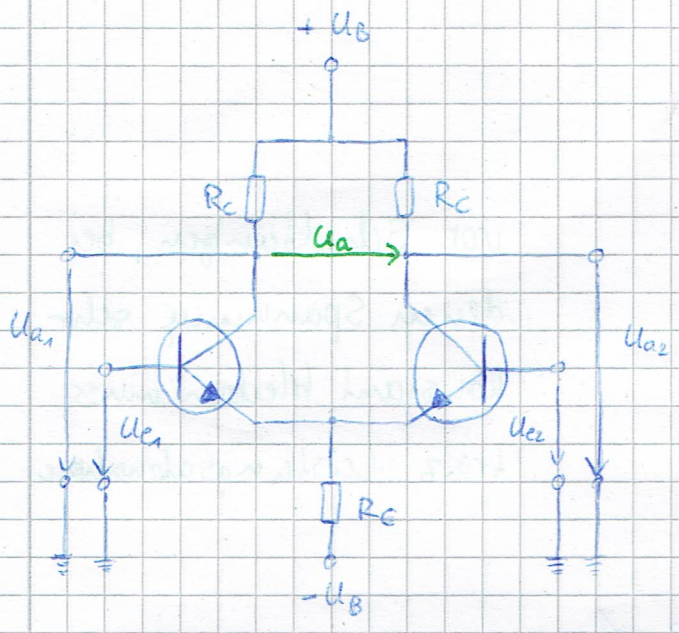


	Basisschaltung	Emitterschaltung	Kollektorschaltung
			
Verwendung	selten, nur für hohe Frequenzen	häufig	häufig
Spannungs-verstärkung	groß	groß	<1
Leistungs-verstärkung	groß	sehr groß 100-1000	mittel
Grenzfrequenz	hoch $B \cdot f_\beta$	niedrig f_β	niedrig $\approx f_\beta$
Eingangs-impedanz	klein 25-500Ω	mittel 500Ω-2kΩ	groß 3kΩ-1MΩ
Ausgangs-impedanz	sehr groß 100kΩ-1MΩ	groß 50-100kΩ	klein 20-30Ω
Stromver-stärkung	klein	groß	groß
		invertiert Signal	Stromverstärkerschaltung Impendanzwandler

Grenzfrequenz



Differenzverstärker / Operationsverstärker

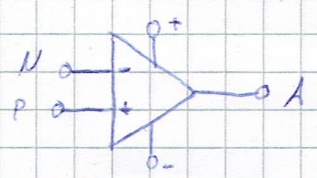


auch für Gleichspannung geeignet
symmetrische Betriebsspannung
ein Eingang invertierend

$U_a = v\,(U_{e1} - U_{e2})$

U_a höchstens Versorgungsspannung

Operationsverstärker



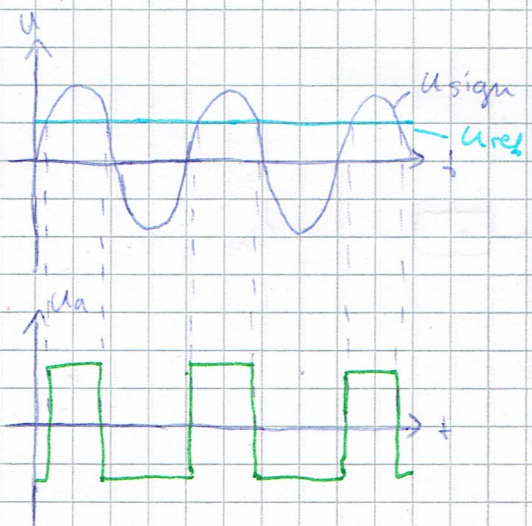
$U_a = v\,(U_P - U_N)$

nichtinvertierender Betrieb
→ Signal an + (P)

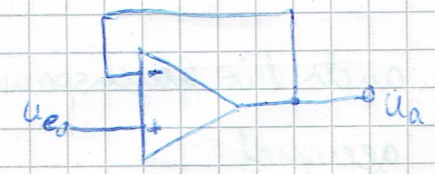
Komparator

ein Eingang (P) Referenzspannung, ein Eingang (N) Signal

- $U_{sign} < U_{ref} \Rightarrow U_a \rightarrow$ negative Versorgerspannung
- $U_{sign} > U_{ref} \Rightarrow U_a \rightarrow$ positive Versorgerspannung



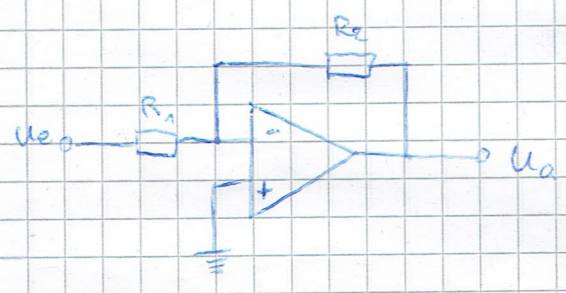
Impedanzwandler



vor Schaltungen, bei denen Spannung sehr konstant bleiben muss trotz Leistungsabnahme

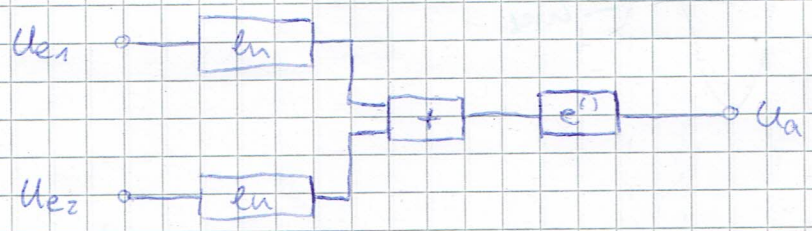
$$u_a = V(u_p - u_N)$$
$$= V(u_e - u_N)$$
$$= V(u_e - u_a)$$
$$\Leftrightarrow (V+1)\, u_a = V\, u_e$$
$$\Leftrightarrow \frac{u_e}{u_a} = \frac{V+1}{V} \xrightarrow{V \to \infty} 1$$
$$A = \frac{u_e}{u_a} = 1 \Rightarrow \text{Verstärkung von } 1$$

Invertierender Verstärker

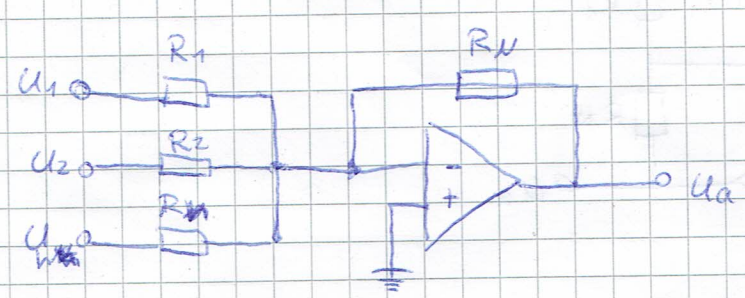


$$I_{R_1} = -I_{R_2} \Leftrightarrow \frac{u_e}{R_1} = -\frac{u_a}{R_2}$$
$$\Rightarrow A = \frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Multiplizierer

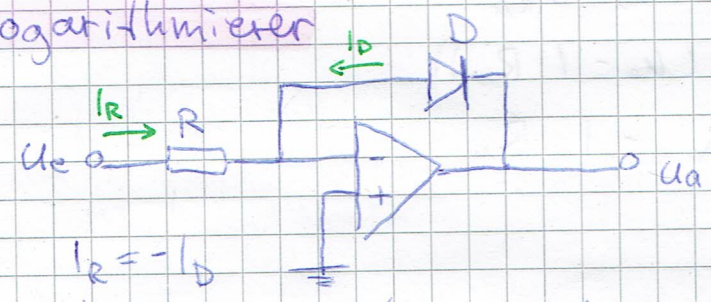


Addierer



$$u_a = -\sum_{i=1}^{n} \frac{R_N}{R_i} u_i = -\left(\frac{R_N}{R_1} u_1 + \ldots + \frac{R_N}{R_n} u_n\right)$$

Logarithmierer



$I_S \hat{=}$ Sperrstrom Diode

$k_B \hat{=}$ Boltzmankonstante

$T \hat{=}$ Temperatur in Kelvin

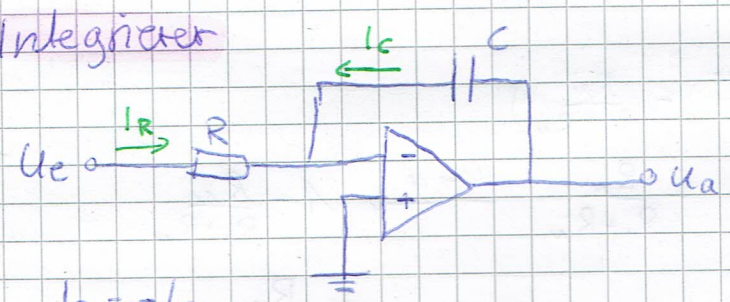
$e \hat{=}$ Elementarladung

$$I_R = -I_D$$

$$\frac{u_e}{R} = I_S \left(\exp\left(\frac{u_a \cdot e}{k_B T}\right) - 1\right)$$

$$\frac{u_e}{R I_S} + 1 = \exp\left(\frac{u_a \cdot e}{k_B T}\right) \Rightarrow u_a = \ln\left(1 + \frac{u_e}{R I_S}\right) \frac{k_B T}{e}$$

Integrierer

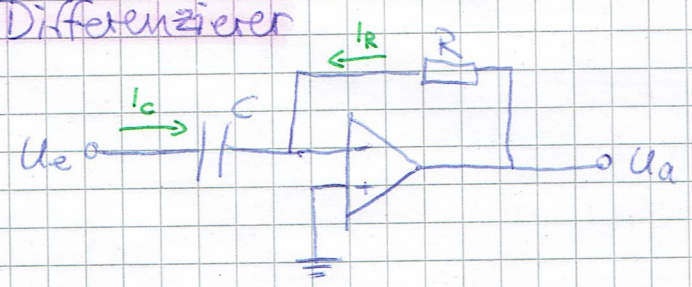


$$I_R = -I_C$$

$$\frac{u_e}{R} = -\frac{d}{dt} u_a C$$

$$\Rightarrow u_a = -\frac{1}{RC} \int u_e \, dt$$

Differenzierer

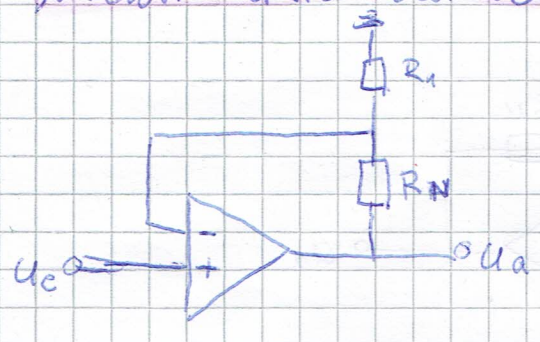


$$I_C = -I_R$$

$$\frac{d}{dt} u_e C = -\frac{u_a}{R}$$

$$\Rightarrow u_a = -RC \frac{d}{dt} u_e$$

Nichtinvertierender Verstärker



$$u_a = V(u_P - u_N)$$
$$= V(u_e - u_N) \qquad u_N = u_{R_1} = u_a - u_{R_N}$$
$$= V(u_e - (u_a - u_{R_N}))$$
$$= V(u_e - (u_a - I \cdot R_N))$$
$$\Leftrightarrow u_e = \frac{V+1}{V} u_a - I \cdot R_N$$

mit

$$u_a = u_{R_1} + u_{R_N}$$
$$= (R_1 + R_N)\, I$$
$$\Leftrightarrow I = u_a / (R_1 + R_N)$$

$$u_e = u_a \left(\frac{V+1}{V} - \frac{R_N}{R_1 + R_N} \right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{u_e}{u_a} = \frac{V+1}{V} - \frac{R_N}{R_1 + R_N} \xrightarrow{V \to \infty} 1 - \frac{R_N}{R_1 + R_N}$$
$$= \frac{R_1}{R_1 + R_N}$$

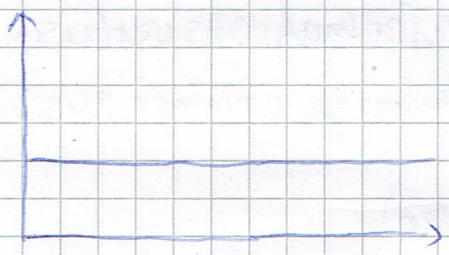
$$A = \frac{u_a}{u_e} = \frac{R_1 + R_N}{R_1} = 1 + \frac{R_N}{R_1}$$

Regelung / Steuerung

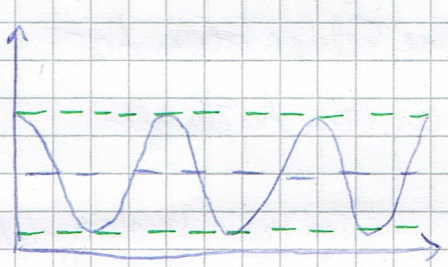
Regelung:

Herstellen / Erhalten eines Zustandes durch Rückführen (von Messgrößen)

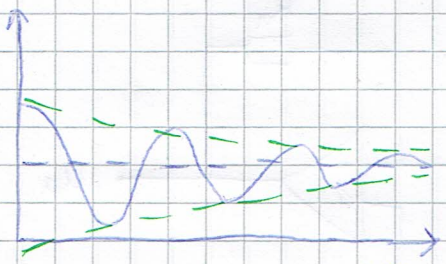
Stabilität



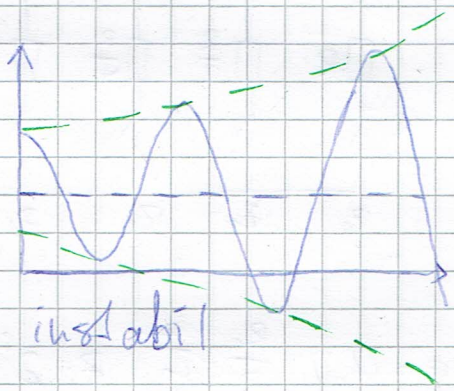
ungestörtes Signal



grenzstabil



asymptotisch stabil



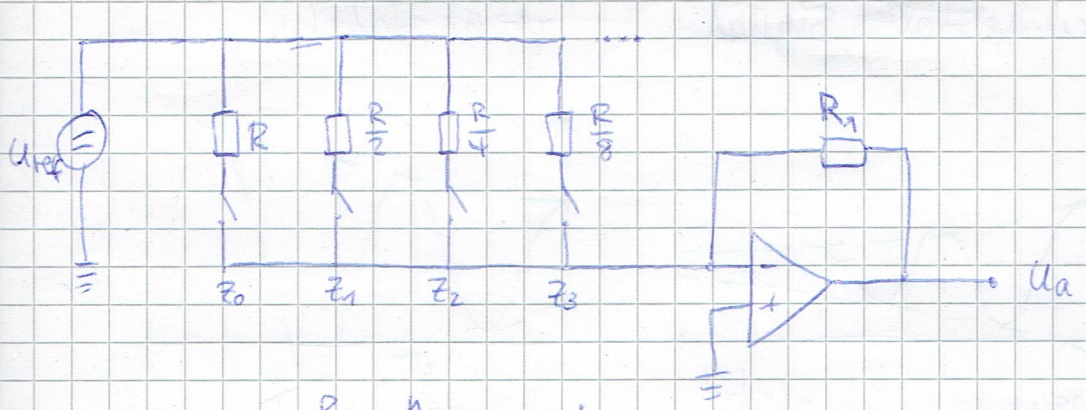
instabil

optimaler Regelübertragungsfaktor (Verstärkungsfaktor) bei minimaler Beruhigungszeit T_E

Digitaltechnik

digital pro:	analog contra:
- eindeutig	- es werden wesentlich mehr Schaltungsbestandteile benötigt
- leicht zu testen	- nur endlich viele Zustände unterscheidbar
- keine Fehlerfortpflanzung	- Informationsverlust
- einfache Datenspeicherung	- Anzeige weniger anschaulich
- günstige Herstellung	
- keine Fehler beim Ablesen von Anzeigen	

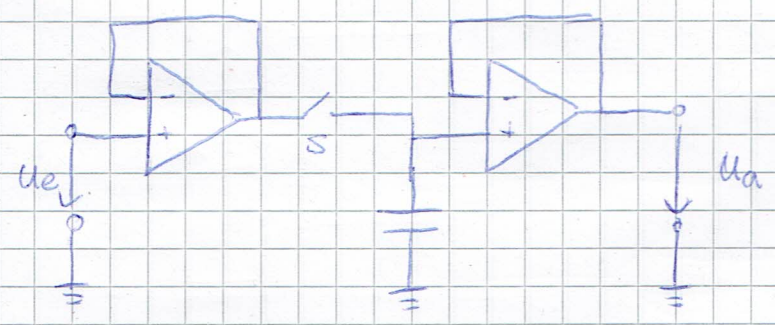
DAC (Digital-Analog-Wandler)



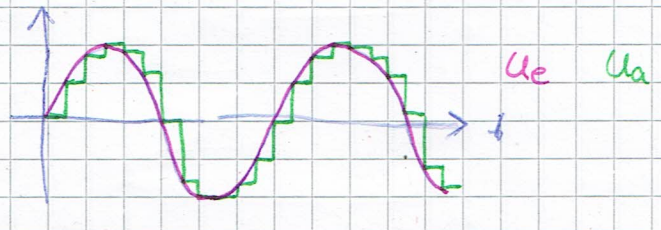
$$U_a = -U_{ref} \frac{R_1}{R} \sum_{i=0}^{n} z_i 2^i$$

$$= -U_{ref} \frac{R_1}{R} (z_0 + 2z_1 + 4z_2 + 8z_3)$$

Abtast-Halte-Schaltung



wird vor ADC geschaltet



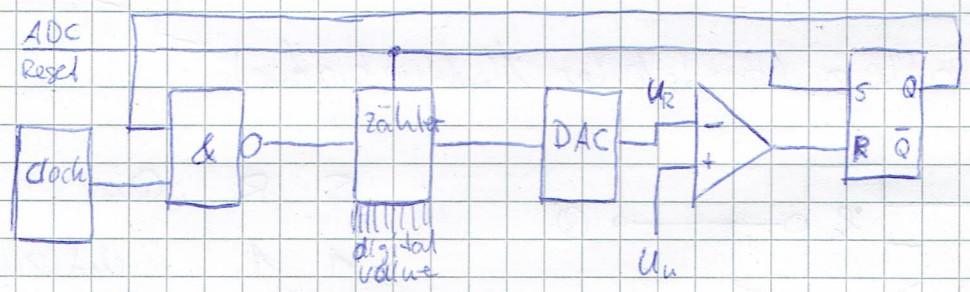
geschlossener Schalter:
U_a folgt U_e
offener Schalter:
letzter Momentanwert von U_e wird gehalten

Impedanzwandler:
1: kleiner Ausgangswiderstand → Kondensator lädt schnell
2: großer Eingangswiderstand → Ladung bleibt auf Kondensator

ADC (Analog-Digital-Wandler)

Zählverfahren / Rampenverfahren

benötigte Elemente:
Clock und Reset (Zähler / Taktgeber)
Komparator (Vergleich)
DAC (Erzeugen d. Vergleichswertes)
Flipflop (setzen d. Wertes)

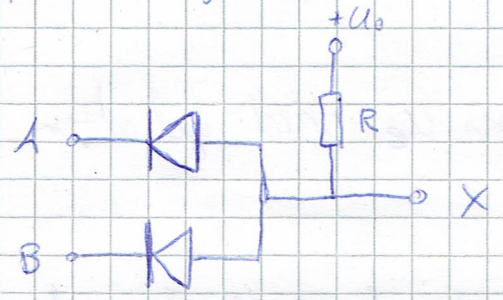


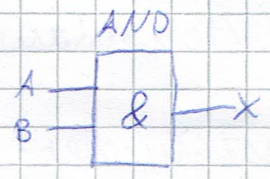
Reset ⇒ Eingangszähler auf 0, Flipflop auf 1 (Q=1)
Clock Impulse ⇒ Zähler ⇒ U_R steigt
$U_R \geq U_u$ ⇒ R = 1 ⇒ Q = 0 ⇒ Taktgeber wird gestoppt

doppelte Genauigkeit doppelte Schrittzahl
sehr langsam
einfacher Aufbau, temperaturresistent
sehr genau (bis zu 20 Bits)

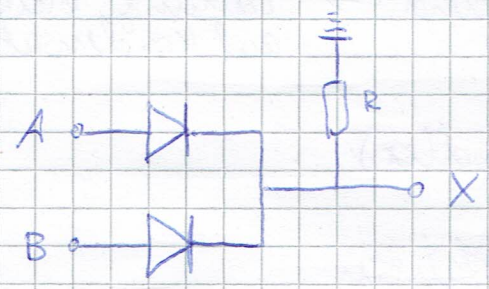
Logik-Gatter

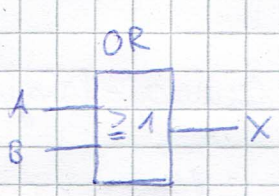
„UND"-Gatter



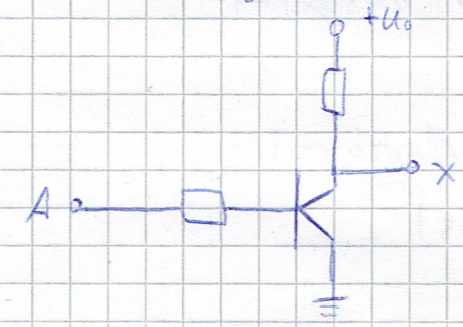


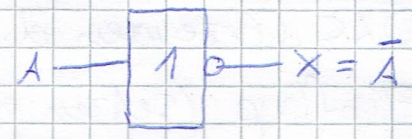
„ODER"-Gatter



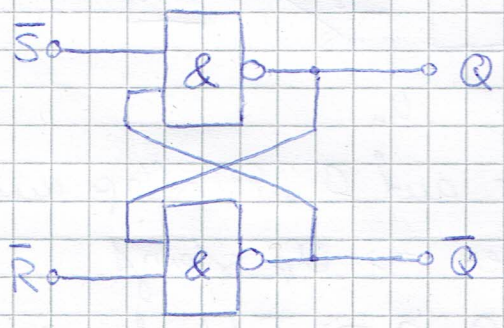


„NOT"-Gatter (Inverter)

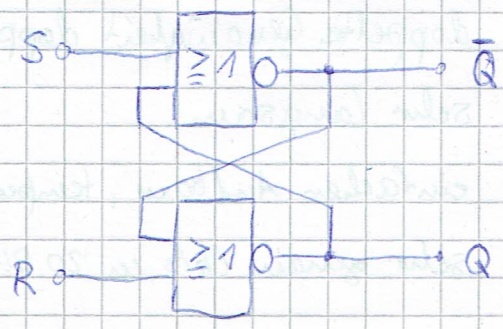




Flipflop (bistabiler Multivibrator)



S	R	Q_{n+1}	
1	1	nicht zulässig	
0	1	0	Rücksetzen
1	0	1	Setzen
0	0	Q_n	Speichern



durch NAND'S
oder NOR'S
umsetzbar

Multivibratoren:

- mitgekoppelte Digitalschaltungen

monostabil (1):

Triggerimpuls am Eingang
=> einzelner Impuls am Ausgang definierter Dauer (Monoflop)

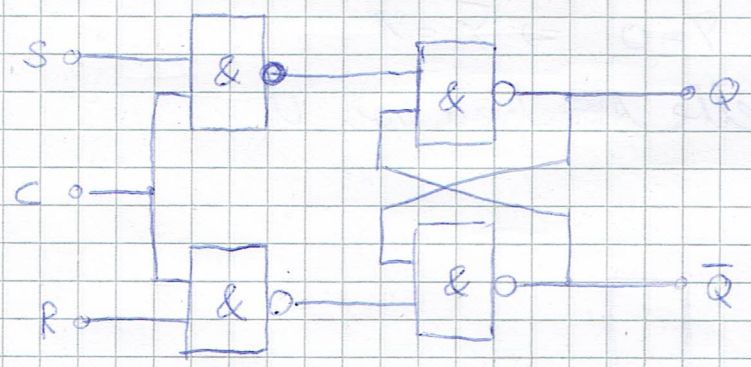
bistabil (2):

Halten eines Ausgangszustandes
externes Signal über Schwellwert => umschalten
(Flipflop, Schmitt-Trigger)

astabil (3):

kein stabiler Ausgangszustand
kein Eingang als Triggersignal
zwei Zustände, zwischen denen es schaltet
(Oszillator)

getakteter Flipflop:



Parallelbetrieb mehrerer Flipflops
=> Takten zur Synchronisation d. Übernahme von Informationen

Verwendung als Zähler (N hintereinander geschaltete)
als Schieberegister

Schieberegister:

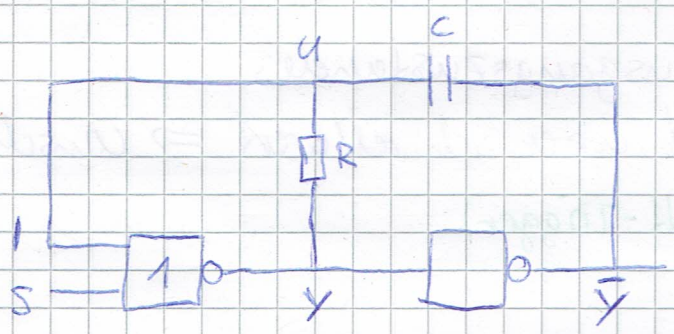
N Flipflops speichern N-stellige Dualzahl

Schiebeimpuls => alle Ziffern eine Stelle nach links/rechts

niedrigstes/höchstes Bit wird "herausgeschoben"

aus Paralleldarstellung wird serielle Darstellung

astabiler ~~[illegible]~~ Monovibrator



für den Eingang S kein stabiler Zustand

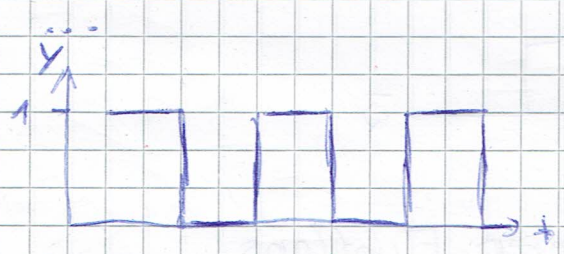
$1 = 0 \Rightarrow Y = 1 \Rightarrow \bar{Y} = 0$

=> exponentielle Zunahme von U mit Zeitkonstante RC

=> Zunahme von 1 bis überschreiten von Schwellwert

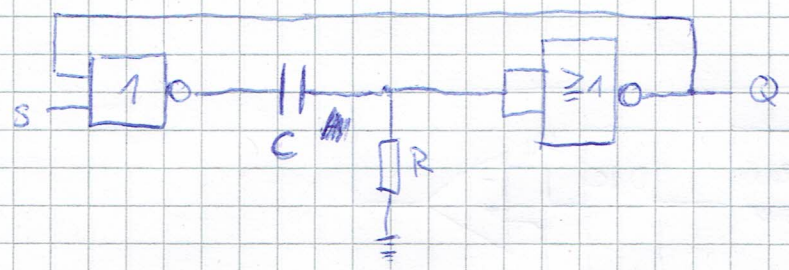
$\Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow \bar{Y} = 1$

=> exponentielle Abnahme von U



Verwendung als Taktgeber, Schalter

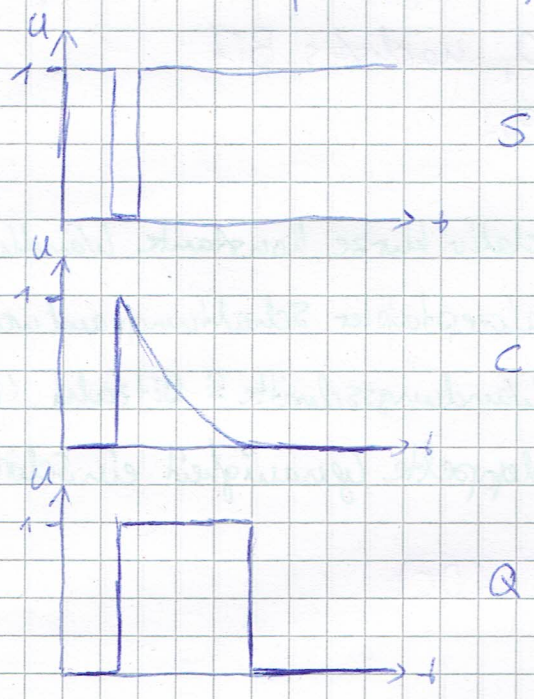
monostabiler Multivibrator



$S = 1$, $Q = 0$ ⇒ stabiler Zustand

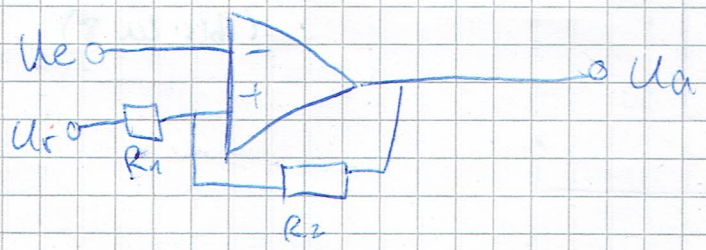
$S = 0$ ⇒ $Q = 1$

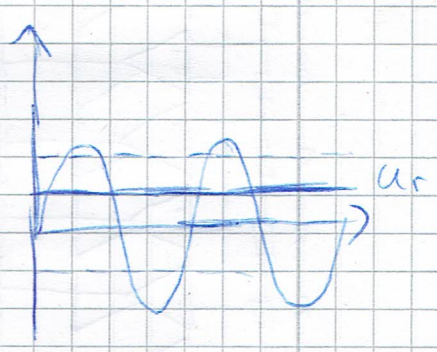
unabh. von S bleibt $Q = 1$, Spannung an C sinkt exponentiell, unter Schwelle ⇒ $Q = 0$

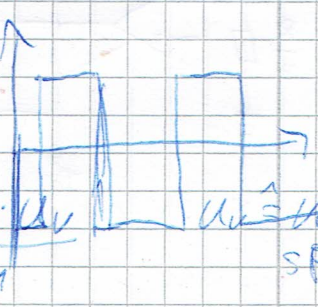


Verwendung als Impulsformer, Verzögerungsglied

Schmitt-Trigger

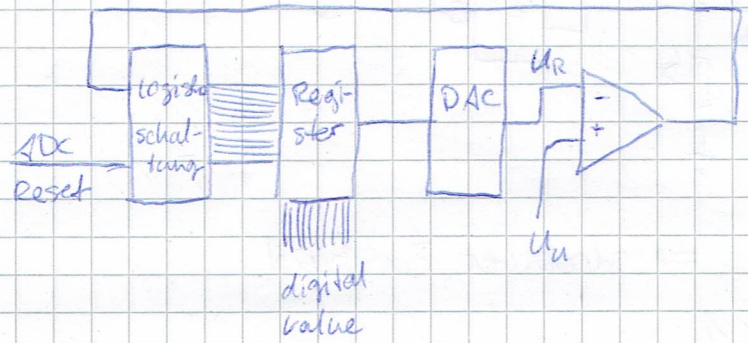






Schwellspannungen: $\frac{R_2 \cdot U_r \pm R_1 \cdot U_v}{R_2 + R_1}$

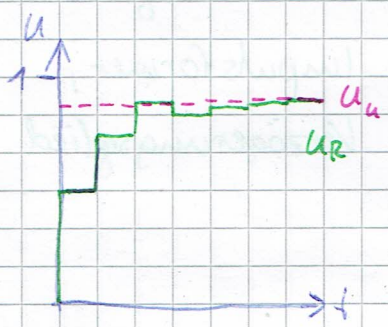
Wägeverfahren



Logische Schaltung setzt größtes Bit auf 1, Ansteuerung d. DAC, Erzeugen von Referenzspannung U_R

$U_R \geq U_u \Rightarrow$ Bit auf 0, nächstes Bit

$U_R < U_u \Rightarrow$ nächstes Bit



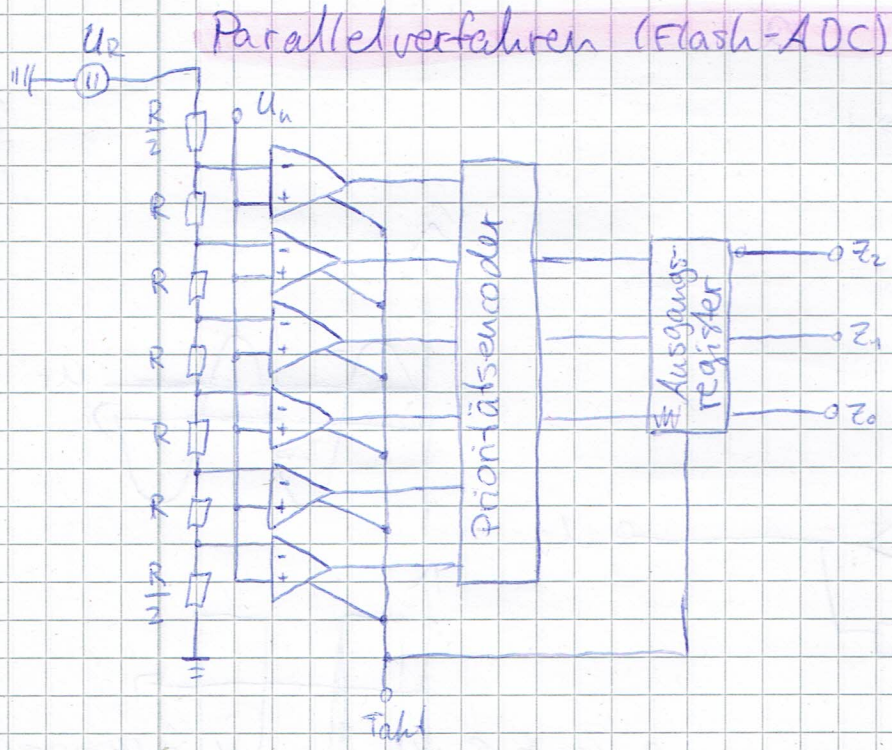
relativ kurze, konstante Wandlungszeit

akzeptabler Schaltungsaufwand

Wandlungsschritte ≙ Bitzahl (bis zu 16)

doppelte Genauigkeit einschritt mehr

Parallelverfahren (Flash-ADC)



nur ein Umwandlungsschritt ⇒ sehr schnell

Aufwand steigt extrem mit Genauigkeit (bis zu 8)

Referenzspannung U_R wird durch Spannungsteiler in $2^n - 1$ gleiche Teile geteilt ($n \hat{=}$ Bitzahl)
liegen an einem Eingang des OP's
anderer Eingang: zu Digitalisierende Spannung
U_n größer $\Rightarrow$ Komparator auf 1
U_n kleiner $\Rightarrow$ 0
Prioritätsencoder $\Rightarrow$ $2^n - 1$ -teiliges Signal in n-Bit-langes Datenwort

Abtastung

analoges Signal wird exakt zum Zeitpunkt nT ausgewertet
mathematisch: Multiplikation mit Dirac-Kamm

abgetastetes Signal:

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = s(t) \cdot Ш\left(\frac{t}{T}\right)$$

Faltung $\rightarrow$ Frequenzspektrum:

$$S_a(f) = S(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = T \cdot S(f) * Ш(f \cdot T)$$

$\Rightarrow$ Spektrum des Signals $s(t)$, jedoch mit Periode $\frac{1}{T}$ wiederholt
$\Rightarrow$ Spektrum von s maximal $\frac{1}{2T}$ breit, sonst Überlappung d. verschobenen Spektren
$\Rightarrow$ $f_{sign} < \frac{1}{2T} \Leftrightarrow \frac{1}{T} > 2 \cdot f_{sign}$ (Abtastrate)

reale Abtastung:

keine idealen Dirac-Stöße möglich

$\Rightarrow$ stattdessen Rechteckimpuls der Länge T_0

$$s_a = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT}{T_0}\right)$$

mit $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

und $\delta\left(\frac{t}{T}\right) = T \cdot \delta(t)$

$$s_a = s(t) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) * \left(\frac{1}{T} \cdot Ш\left(\frac{t}{T}\right)\right)$$

$$\Rightarrow S_a(f) = T_0 \cdot S(f) * \left(\mathrm{sinc}(\pi f T_0) \cdot Ш(fT)\right)$$

sehr kurze Pulse (T_0 klein) bzw. $f T_0 \ll 1$:

$$S_a(f) = T_0 \cdot S(f) * Ш(fT)$$

$\Rightarrow$ (fast) ideale Abtastung

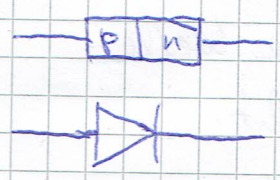
$$S_a(f) = \frac{1}{T} T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - n\frac{1}{T}\right)$$

zu kleine Abtastrate:

$f_T = \frac{1}{T}$, $f_T < 2 f_s$, $f_s \hat{=}$ höchste Frequenz d. Signals Nyquist-Frequenz

Teile des Spektrums $S(f_s \pm f_T)$ fallen in Frequenzbereich (Aliasing-Effekt)

Diode (nodimal)



Photodiode

als Sensor:

- Betrieb in Sperrrichtung, Sperrstrom proportional zu Lichtintensität

als Solarzelle:

- ohne äußere Spannung

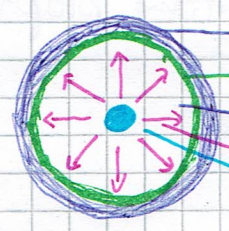
Leuchtdiode (LED)

- Betrieb in Durchlassrichtung
- Rekombination von Elektronen und Löchern → Photonen
- Lichtintensität proportional zu Strom

Wellen auf Kabeln

Ausbreitung als Elektromagnetische Welle
niedrige Frequenzen → Kupferdraht
hohe Frequenzen → starke Verluste

Koaxialkabel



elektrisches Feld nur zwischen Innen- und Außenleiter, außerhalb nicht
Wellen Widerstand: Messtechnik 50Ω
Rundfunk 75Ω

Wellenwiderstand

- Widerstand, den eine Leitung d. Ausbreitung einer elektromagn. Welle entgegenbringt
- unabhängig von Leitungslänge
- Abschluss d. Leitung mit ohmschen Widerstand vom Wert d. Wellenwiderstandes → keine Reflexion d. Signals
  ansonsten → Reflexion d. Signals (teilweise)

Messung d. Wellenwiderstandes
- Erzeugen eines Sinussignals
- Messen des Stroms bei
  - offenen Leitungsenden
  - geschlossenen Leitungsenden

→ Erhalten von Leerlaufwiderstand Z_L und Kurzschlusswiderstand Z_K

→ Wellenwiderstand $Z_W = \sqrt{Z_K \cdot Z_L}$

Impedanzanpassung:

Reflexionsfreies aneinandersetzen zweier Wellenleiter unterschiedlicher Wellenwiderstände

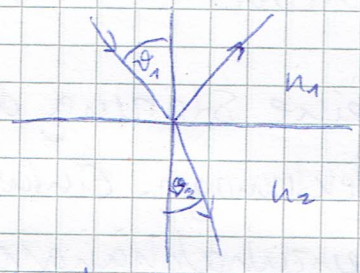
⇒ zwischenschalten einer $\lambda/4$-Leitung mit $Z_i = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2}$

Brechung ebener Wellen

Snellius'sche Brechungsgesetz

$n_1 \sin(\vartheta_1) = n_2 \sin(\vartheta_2)$

Übergang in optisch dichteres Medium → Brechung zum Lot



Totalreflexion:

$\vartheta_2 = 90° \Rightarrow \sin(\vartheta_2) = 1$

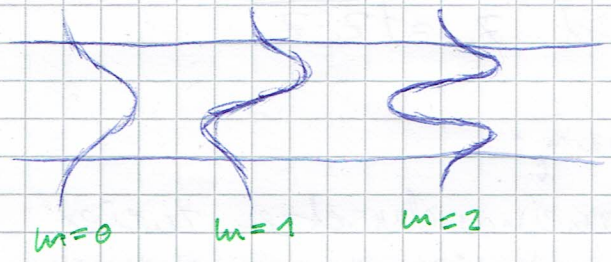
$\Rightarrow \vartheta_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

⇒ nur bei Übergang von dichteren in dünneres Medium ($n_1 > n_2$)

hinter Grenzfläche elektromagn. Feld nicht direkt null → evaneszente Welle propagiert parallel zur Grenzfläche

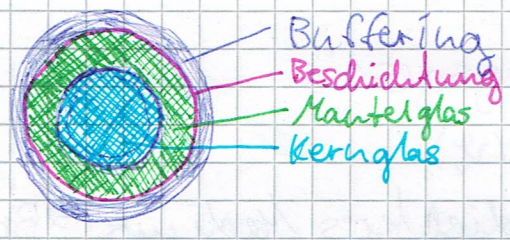
Moden:

stehende Welle mit m Knoten (Mode)



transversale Moden

Glasfaser



$n_{Kern} > n_{Mantel}$ ⇒ Totalreflexion

- optische Übertragung ⇒ keine Störung durch elektromagn. Einflüsse
- Übertragung nahezu frequenzunabhängig
  ⇒ Langstreckenübertragung
- sehr teuer

Datenspeicherung

wiederbeschreibbare und nur lesbare, einmal beschreibbare Datenträger

Arten:

- traditionell, physisch (schrift auf Papier)
- optisch
- elektronisch durch Halbleiter
- magnetisch
- magneto-optisch

Halbleiter-Datenspeicherung

RAM (Random-Access Memory)

- Speicherzellen, die über Speicheradresse direkt angesprochen werden können
- Speicherzelle besteht aus FET und Kondensator
- flüchtige Speicher, schnell in Bearbeitung
- zwei Typen: statisch, dynamisch

SRAM (statisch)

- Dateninformation solange Betriebsspannung anliegt
- 4 MOS-FETs als Flipflop + 2 Zugangstransistoren für 1 Bit
- mögliche Zustände 0, 1
- pro: wenig Leistung, schnell, relativ einfach
- contra: großer Platzverbrauch, geringe Datendichte

Cache-Speicher, Pufferspeicher (Festplatte), Speicher in Mikrokontrollern

DRAM (dynamisch):

- speichern der Binärwerte auf Kondensatoren
- zyklisches Wiederauffrischen, um Ladung im Kondensator zu erhalten
- Lesen / Schreiben über Transistor (als Schalter)
- pro: hohe Speicherdichte, geringer Stromverbrauch, billig
- contra: langsamer, komplizierter, Refreshen nötig

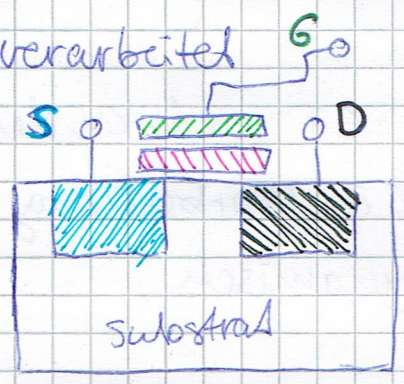
Arbeitsspeicher, Grafikspeicher

Flash-Memory:

- nicht flüchtig
- ohne bewegliche Teile

} Vorteile von Halbleiter-speichern u. Festplatten

- Daten werden in Blöcken von 64, 128, 256, ... Byte verarbeitet



Control Gate

floating Gate

Source

Drain

Funktionsweise ähnlich zum FET

- Ladungsfalle (Floating Gate) im Gate
  - → speichert Ladung wie Kondensator
  - → Oxidschicht verhindert Abfließen der Ladung
- Löschen: Ladung springt in Blitz auf Floating Gate
  - → wird aufgeladen
  - → Stromfluss zwischen Source und Drain wird abgeschnürt
  - → Transistor sperrt: 0

- schreiben: Floating Gate wird entladen
  → Stromfluss zwischen Source und Drain
  → Transistor lässt durch: 1
- lesen: Spannung an Transistor, gucken ob durchlässt oder sperrt

NOR-Flash
- Speicherzellen parallel verschaltet
- Zugriff auf jede Zelle möglich (wie RAM)
  Mikroprozessoren als Speicher-RAM-Ersatz

NAND-Flash
- serielle Verschaltung
  → arbeiten in Blöcken
- gering Anzahl an Datenleitungen
  → wenig Platz, größere Speicherdichte
- schnelle Schreibgeschwindigkeit
- geringer Stromverbrauch
  Speicherkarten, USB-Sticks, SSD's

PRO:
- Datenerhaltung ohne Versorgungsspannung
- unempfindlich für Erschütterungen, magn. Felder
- kurze Zugriffszeiten, konstante Lese-/Schreibgeschw.
- Speichergröße nach oben offen

CONTRA:
- begrenzte Schreib-/Löschvorgänge
- begrenzte Speicherkapazität
- teuer

magnetische Datenspeicherung

- Speicherung auf magnetisierbarem Material
- lesen / schreiben mittels Magnetkopf
- lesen: Induktion → Spannung in Magnetkopf → Umwandlung in elektr. Signal
- schreiben: Kopf arbeitet als Elektromagnet

MRAM (magnetosistive):

- permanente Speicherung (nicht flüchtig)
- besteht aus drei Schichten:
  - magnetisch weiche Schicht: durch kleinere Ströme in Magnetisierungsrichtung veränderlich
  - nichtmagnetische Schicht
  - magnetisch harte Schicht: Magnetisierungsrichtung unveränderlich

  ⇒ Magnetfeldunterschied zwischen beiden Zellen als Unterscheidung d. Speicherzelleninhaltes
- schneller als DRAM, weniger Platz, Temperaturunempfindlich, Datenerhaltung ohne Strom

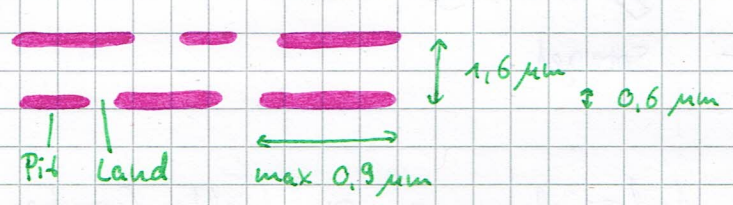
FRAM (ferroelectric):

- Speicher-/Löschvorgang durch Polarisationsänderung in einer ferroelektrischen Schicht
- Aufbau durch FET und Kondensator, ersetzen des Gate-Anschlusses durch dünne ferroelektrische Schicht
- (fast) unbegrenzte Lebensdauer, kurze Schreibzeit, Datenerhaltung ohne Strom

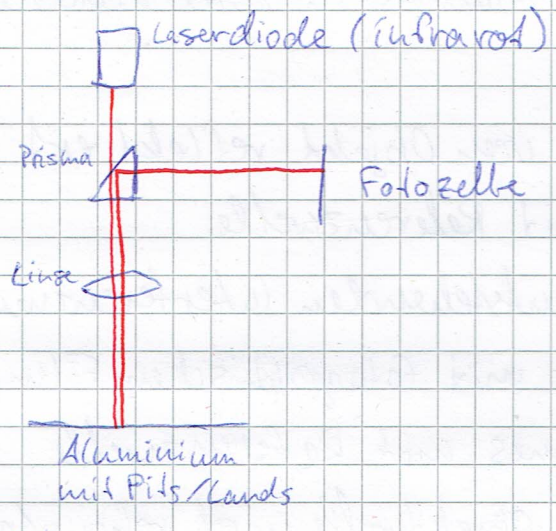
optische Datenspeicherung

- lesen/schreiben durch optische Abtastung (Laser)
- CD-ROM, DVD, Blu-ray Disc

CD-ROM:



- Massenspeicher mit 650 - 879 MByte Speicherkapazität
- Daten in spiralförmig von innen nach außen führender Spur von Vertiefungen (Pits)
- Lesen der Daten:

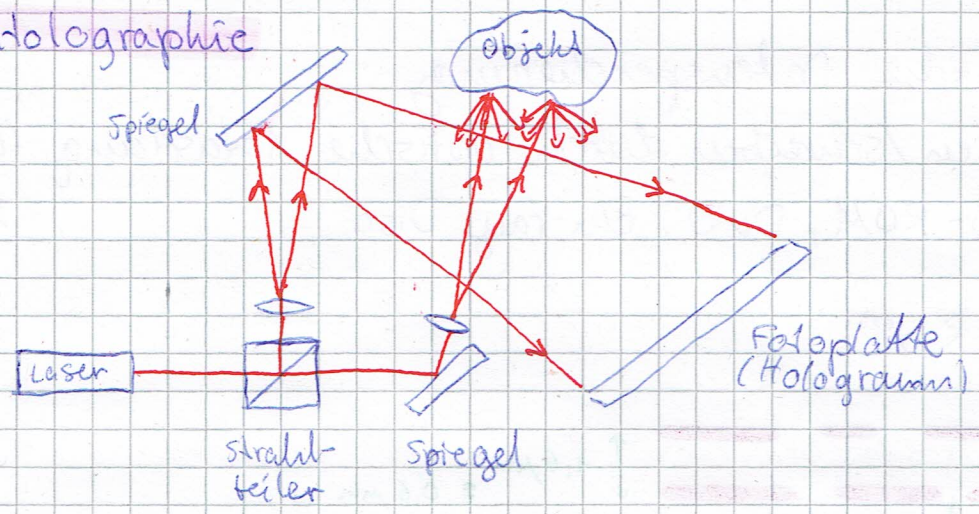


Übergang zwischen Pit und Land

⇒ Laserstrahl abgelenkt

⇒ Fotostrom ändert sich

Holographie



- vollständige Aufzeichnung von Wellenfronten
  ⇒ Intensität UND Phase
  ⇒ bei Rekonstruktion von Objektwellenfront räumlicher Eindruck erhalten
- Funktionsweise:
  - Aufteilen d. Laserstrahles in zwei kohärente Wellen
  - Objektwelle wird von Objekt reflektiert
  - Überlagerung mit Referenzwelle
  - Aufzeichnen des entstehenden Interferenzmusters als Hologram (z.B. mit fotographischem Film)
  - beleuchten des Filmes mit Referenzwelle
    ⇒ ursprüngliche Objektwelle wird rekonstruiert

Korrelation

In der Physik treten häufig Funktionen auf, für die gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 \, dt \;\hat{=}\; \text{umgesetzte Energie (bis auf Konstanten)}$$

Energiesignal:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt \quad \text{beschränkt}$$

Ähnlichkeit zweier Energiesignale $s(t)$ und $g(t)$:

$$\Phi_{sg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g^*(t+\tau) \, dt$$

τ zum Erfassen einer Zeitverschiebung

$s(t) \neq g(t)$ Kreuzkorrelation

$s(t) = g(t)$ Autokorrelation

Bei Signalen mit großer Gleichkomponente häufig entfernen dieser für mehr Aussagekraft von Φ_{sg}

$$\varphi_{sg}(\tau) = \frac{\Phi_{sg}(\tau)}{\sqrt{\Phi_{ss}(0) \cdot \Phi_{gg}(0)}}$$ normierte Korrelationsfunktion

$|\varphi_{sg}(\tau)| \leq 1$

für irgendein τ $1 \Rightarrow$ vollständig korreliert mit Zeitverschiebung τ

für irgendein τ $-1 \Rightarrow$ antikorreliert mit Zeitverschiebung

$\varphi_{ss}(0) = 1$

$\Phi_{sg}(\tau) = \Phi_{gs}(-\tau)$ zeitgespiegelt

Wiener-Khintchin-Theorem

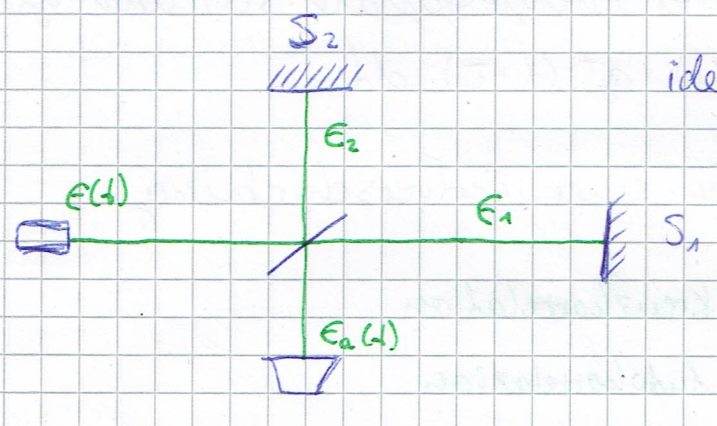
Energiedichtespektrum eines reellen Energiesignals ist die FT der Autokorrelationsfunktion

$$\Phi_{ss}(\tau) = FT^{-1}\left(|S(f)|^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \cdot e^{i2\pi f\tau}\, df$$

$|S(f)|^2$ Energiedichtespektrum (Energie / Frequenz)

Anwendung von Korrelationsfunktionen

zeitliche Kohärenz eines Strahlungsfeldes



ideales Michealsoninterferometer

$E(t) \hat{=}$ Feldstärke am Eingang

T_1 bzw. $T_2 \hat{=}$ Laufzeiten der Teilwellen E_1 bzw. E_2

$$E_a(t) = E_1(t) + E_2(t) = \frac{1}{2}\left(E(t-T_1) + E(t-T_2)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(E(t) + E(t+\tau)\right)$$

mit $\tau = T_1 - T_2$ bei stationärem Feld (Mittelwerte zeitinvariant)

mit $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E^2$

$$I_a = \varepsilon_0 c\left(\frac{1}{4}\langle E^2(t)\rangle + \frac{1}{4}\langle E^2(t+\tau)\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle E(t)\cdot E(t+\tau)\rangle}_{\text{Autokorrelationsfunktion der Feldstärke}}\right)$$

$$\langle E(t-T_1)\cdot E(t-T_2)\rangle = \gamma(\tau)\cdot\langle E^2(t)\rangle$$

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E(t)\cdot E(t+\tau)\rangle}{\langle E^2(t)\rangle}$$ normierte Autokorrelationsfunktion

Korrelationszeit τ_c mit $|\gamma(\tau)| > 0$ für $\tau < \tau_c$

$|\gamma(\tau)| \approx 0$ für $\tau > \tau_c$

Interferenz nur, wenn Laufzeitunterschied die Korrelationszeit (Kohärenzzeit) nicht übersteigt

Kohärenzlänge: $c \cdot \tau_c$

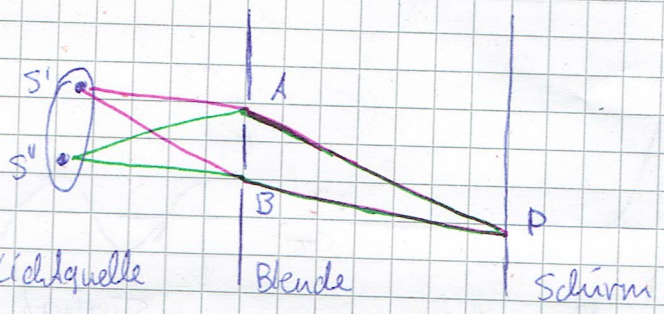
$\gamma(\tau)$ messen durch Verstellen der Armlänge des Interferometers

Anwendung:

Fourierspektroskopie: FT von $\gamma(\tau)$ ergibt Leistungsspektrum, in Optik Spektrum genannt

räumliche Kohärenz eines Strahlungsfeldes

Beugung am Doppelspalt



Ist der Abstand d zwischen A und B klein genug, liefern alle Punkte zwischen S' und S'' das gleiche Interferenzbild:

$d \ll \frac{\lambda}{\vartheta_s}$ $\quad \vartheta_s \hat{=}$ Öffnungswinkel

transversale Kohärenzlänge bestimmen durch aufnehmen von $V(d)$

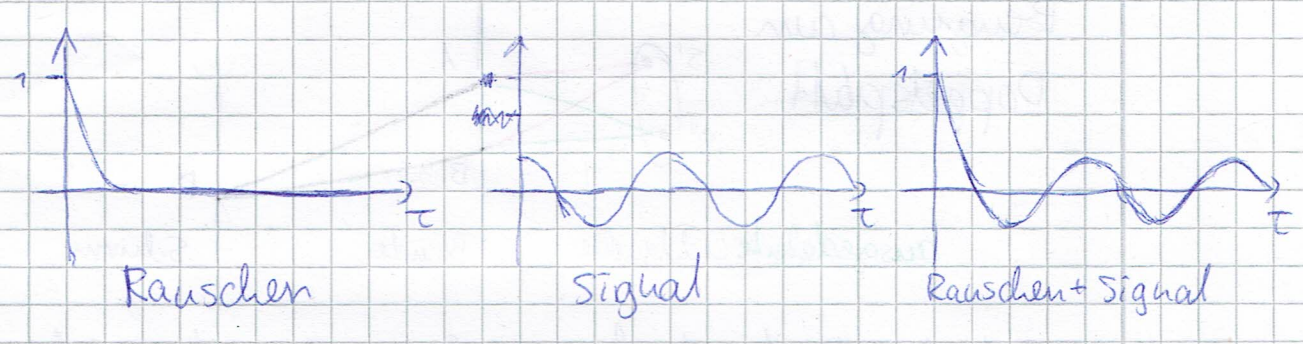
$\Rightarrow$ Rückschluss auf Dimension der Lichtquelle möglich

Anwendung: Michelsonsche Stellarinterferometer

Auffinden kleiner periodischer Signale

- Problem: häufig erforderlich kleine Änderungen physikalischer Größen nachzuweisen
  ⇒ gehen im Rauschen unter
- häufig möglich für wohldefinierte Frequenz des Signals zu sorgen (Modulation)
  ⇒ Autokorrelationsfunktion oszilliert bis zu sehr großen $|\tau|$
- Rauschen ist breitbandig, keine wohldefinierte Frequenz ⇒ kurze Korrelationszeit, Autokorrelation fällt schnell ab

Autokorrelationsfunktionen:



für $s'(t) = s(t) + r(t)$ gilt

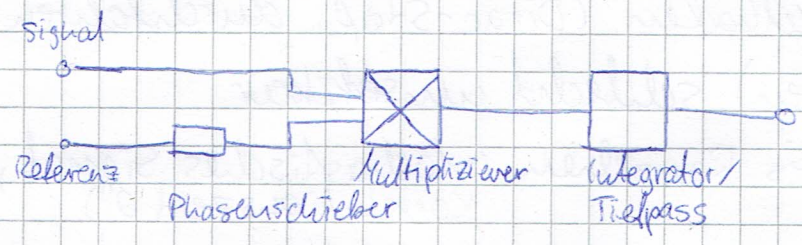
$$\Phi_{s's'}(\tau) = \Phi_{ss}(\tau) + \Phi_{rr}(\tau)$$

Probleme in der Realität:

- nicht nur Rauschen, sondern auch Störsignale (technisches Rauschen)
- Störsignale haben meist hohe Korrelationszeiten
  ⇒ Fouriertransformieren

Lock-In-Verstärker

auch phasenempfindlicher Gleichrichter



bei Versuch mit diskreter Frequenz meist auch Phase bekannt

Referenzeingang: Signal mit Informationen über Modulation des physik. Effektes

$$U_{ref} = U_0 \cdot \sin(2\pi f_s t + \varphi_R)$$

Signaleingang: zu messendes, meist stark verrauschtes Signal

$$U_s = U_1 \cdot \sin(2\pi f_s t + \varphi_s) + U_R(t)$$

Messgröße: U_1 in Abhängigkeit von Parametern

Lock-In-Verstärker liefert den Wert der Kreuzkorrelation zwischen Referenzsignal und Signal

$$\Phi_{ref\,s}(\tau) \quad \text{für} \quad \tau = \frac{\varphi_s - \varphi_R}{2\pi f_s}$$

$\Rightarrow$ ist also phasenempfindlich

Anwendung:

- komplexe Signale $\rightarrow$ häufig Realteil und Imaginärteil der Amplitude unterschiedliche Parameterabhängigkeiten
  $\Rightarrow$ passende Wahl von φ_R: getrennte Messung von Real- und Imaginärteil möglich

Messung der Übertragungseigenschaften

- LTI-System
- andere Methoden (Dirac-Stoß, "durchfahren" aller Frequenzen) schlecht umsetzbar

  ⇒ weißes Rauschen (stochastisches Signal, Korrelationszeit 0)

  ⇒ Autokorrelation ist δ-Peak

  ⇒ Leistungsspektrum frequenzunabhängig

$h(t) = r(t) * g(t)$

dann gilt $g(\tau) \sim \Phi_{rs}(\tau)$

⇒ Gewichtsfunktion proportional zu Kreuzkorrelation aus Rauschen (Eingangssignal) und Ausgangssignal

⇒ Für Systeme ohne Rauschen auch FT möglich ($H(f) = R(f) \cdot G(f)$)

Nachtrag: Leistungssignale

$$\Gamma_{12}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s_1(t) \cdot s_2^*(t+\tau)\, dt$$

$$= \langle s_1(t) \cdot s_2^*(t+\tau) \rangle$$

Leistung

$$\gamma = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0) \cdot \Gamma_{22}(0)}}$$ normierte Korrelationsfunktion

Laufzeitbestimmung

räumlich ausbreitendes Signal $s(t)$ ist an Stellen

$x_1 : s_1(t) = a \cdot s(t - t_1)$

$x_2 : s_2(t) = a \cdot s(t - t_2)$

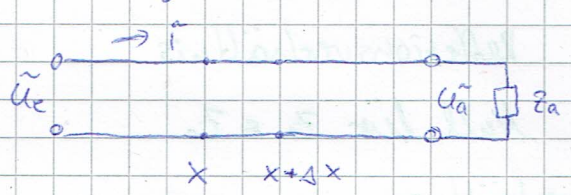
aus $\tau = t_1 - t_2$ für das (nahezu) vollständig korreliert und Entfernung $x_1 - x_2$ Laufzeit

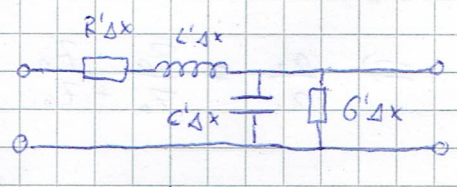
$\Rightarrow$ möglichst breites Spektrum, damit $\phi_{ss}(\tau)$ schnell abfällt $\Rightarrow$ genauer

Anwendung: Radartechnik, Sonartechnik, Fledermäuse

Wellenwiderstand, Abschlusswiderstand

- Leiterleitung (Doppelstegleitung)
- LTI-System





Ersatzschaltbild zwischen x und $x+\Delta x$

bei x: $U = \tilde{U} e^{i\omega t}$, $I = \tilde{I} e^{i\omega t}$ Betrachtung der komplexen Amplituden genügt

bei $x+\Delta x$: $\tilde{U}+\Delta\tilde{U}$, $\tilde{I}+\Delta\tilde{I}$

Kirchhoffsche Gesetze:

$$\tilde{U} - (\tilde{U}+\Delta\tilde{U}) = \tilde{I}(R'+i\omega L')\Delta x$$

$$\tilde{I} - (\tilde{I}+\Delta\tilde{I}) = \tilde{U}(G'+i\omega C')\Delta x$$

$\Delta x \to 0$:

$$\frac{d\tilde{U}}{dx} = -(R'+i\omega L')\tilde{I}$$

$$\frac{d\tilde{I}}{dx} = -(G'+i\omega C')\tilde{U}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\tilde{U}}{dx^2} = (R'+i\omega L')(G'+i\omega C')\tilde{U}$$

Lösung:

$$\tilde{U} = a_1 e^{-\gamma x} + a_2 e^{\gamma x}, \quad \gamma = \sqrt{(R'+i\omega L')(G'+i\omega C')} = \alpha + i\beta$$

$\Rightarrow$ nach links und nach rechts laufende, mit α gedämpfte Welle

$R'=0$, $G'=0$ $\Rightarrow$ ungedämpft ($\alpha=0$)

$\Rightarrow \beta = \omega\sqrt{L'C'} = k$ (Wellenzahl)

Umformen: $\tilde{I} = a_1 e^{-\gamma x}\frac{1}{Z_0} - a_2 e^{\gamma x}\frac{1}{Z_0}$

mit $Z_0 = \sqrt{\frac{R' + i\omega L'}{G' + i\omega C'}}$ Wellenwiderstand

$R' = 0,\ G' = 0 \Rightarrow Z_0$ reell, frequenzunabhängig

am Ende der Leitung $(x=0)$:

$\tilde{U}_2 = a_1 + a_2$

$\tilde{I}_2 = (a_1 - a_2)/Z_0$

und

$\tilde{U}_2 = Z_a \cdot \tilde{I}_2$

$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} = r$ Reflexionsverhältnis

Null für $Z_a = Z_0$

$S = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$ Stehwellenverhältnis

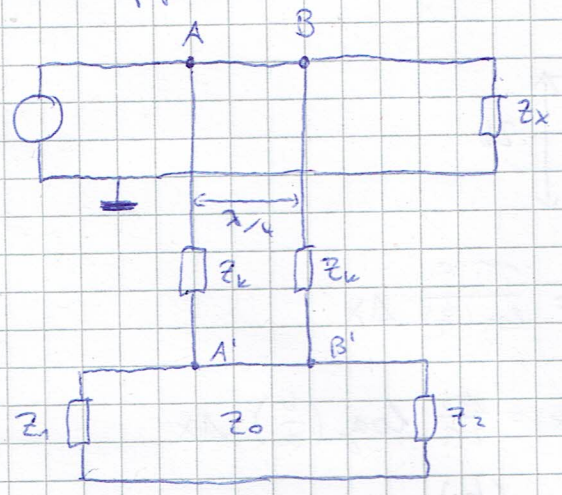
$\lambda/2$-Leitung $Z_e = Z_a$

$\lambda/4$-Leitung $Z_e = Z_0^2/Z_a$

Impendanzanpassung

- Reflexionsfreies Anschließen einer Leitung mit Wellenwiderstand Z_1 an Leitung mit Wellenwiderstand Z_2
- zwischenschalten von $\lambda/4$-Leitung mit $Z_i = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2}$
- Abschluss mit $Z_a = Z_2 \Rightarrow$ an Stoßstelle 2 erscheint Eingangswiderstand Z_2
- zwischengeschaltetes Leitungsstück scheint mit Z_2 abgeschlossen $\Rightarrow$ Eingangswiderstand $Z_e = Z_i^2/Z_2 = Z_1$
- Wellenleiter 1 mit Z_1 abgeschlossen $\Rightarrow$ Reflexionsfrei

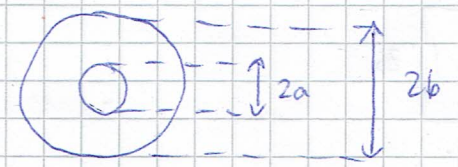
Richtkoppler



Ziel: Amplitude der vor- und rücklaufenden Welle getrennt messtechnisch erfassen

- Anzapfen der Leitung im Abstand $\lambda/4$
- Einkoppeln in zweiten Leiter, der an beiden Enden mit $Z_1 = Z_2 = Z_0$ abgeschlossen ist
- an Stellen A' und B' jeweils eine nach links und eine nach rechts laufende Welle
  $\Rightarrow$ 4 Teilwellen gleicher Amplitude

Koaxialkabel



Kapazität $C = C' \Delta x = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} \Delta x$

Induktivität $L = L' \Delta x = \frac{\mu_0}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \Delta x$

$\Rightarrow Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}} \log\left(\frac{b}{a}\right)$

$\Rightarrow$ Änderung von Z_0 durch variieren von b/a möglich

$\Rightarrow$ wichtiger: Möglichkeit des Ausgleiches von Variationen von ε $\Rightarrow$ konstant halten von Z_0