Probar que el kernel de un homomorfismo es un grupo

Diego Felipe Cabrejo Suárez

Dados $(G_1, \circ)$ y $(G_2, *)$ dos grupos, $f : G_1 \longrightarrow G_2$ es un homomorfismo sii

$$f(u \circ v) = f(u) * f(v)$$

probar

$$ker(f) = \{u \in G_1 | f(u) = e_{G_2}\}$$

es un grupo.

Demostración

Dado que un homomorfismo de grupos conserva los elementos de identidad, el elemento identidad e de G_1 debe estar contenido en $ker(f)$.
Dado que el homomorfismo f no es inyectivo, entonces existen $a, b \in G_1$ distintos tal que $f(a) = f(b)$. Entonces $f(a)f(b)^{-1} = e_{G_2}$. Y dado $f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) = e_{G_2}$, entonces $ab^{-1} \in ker(f)$.
Por tanto, $ker(f)$ constituye un grupo.