

Introdução à Computação (I.C)

Módulo 03

Prof. Daniel Caixeta in







Conteúdo programático

Conversão numérica: Como o computador pensa e executa.

- 7.1. Sistema posicional.
 - 7.2. As bases [...].
 - 7.3. Conversão entre bases 2, 8 e 16.
 - 7.4. Conversão de base b para base 10.
 - 7.5. Conversão de base 10 para base b.
 - 7.6. Números binários negativos.
 - 7.7. Aritmética binária.

8

A lógica binária: Circuitos lógicos e operadores.

- 8.1. Sistemas dicotômicos e a Álgebra de Boole.
- 8.2. Interruptores.
- 8.3. A lógica binária.
- 8.4. A soma em um computador.

Referências



7.1. SISTEMA POSICIONAL

- O método de numeração de quantidades que adotamos, utiliza um sistema de numeração posicional.
- Significa que a posição ocupada por cada algarismo em um número altera seu valor de uma potência decimal (base 10) para cada casa à esquerda. Vejamos o exemplo abaixo:

$$125_{10} = 1 \times 10^{2} + 2 \times 10^{1} + 5 \times 10^{0}$$

$$100 \qquad 20 \qquad 5$$
Centena Dezena Unidade

7.2. AS BASES [...]

- A base de um sistema é a quantidade de algarismos disponíveis em sua representação.
- A base 10 (decimal) é hoje a mais utilizada, mas não é a única. Por exemplo, temos:
 - ✓ A dúzia (base 12).
 - ✓ O minuto = 60 segundos (base 60).
 - ✓ Etc ...
- Em computadores usamos outras bases como a binária (base 2), octal (base 8) e hexadecimal (base 16).

Portanto, temos:



(10 algarismos + 6 símbolos)

$$N_b = a_0 \times b^n + a_1 \times b^{n-1} + ... + a_n \times b^0$$

• Exemplo: Converta o número 35 nas bases abaixo:

Decimal

$$35 = 3 \times 10^{1} + 5 \times 10^{0} = 30 + 5 = 35_{10}$$

Binário

$$35 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 100011_2$$

Octal

$$35 = 4 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 32 + 3 = 43_8$$

Hexadecimal

$$35 = 2 \times 16^{1} + 3 \times 16^{0} = 32 + 3 = 23_{16}$$

PRÁTICAS [...]

1. Converta os números abaixo para as suas respectivas bases usando o método de sistema posicional.

a)
$$24_{10} \rightarrow ?_2 =$$

b)
$$121_{10} \rightarrow ?_2 =$$

c)
$$24_{10} \rightarrow ?_8 =$$

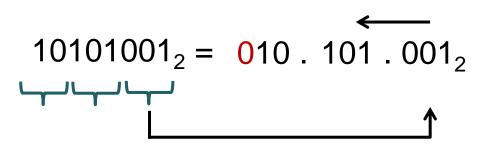
c)
$$24_{10} \rightarrow ?_8 =$$

d) $121_{10} \rightarrow ?_{16} =$



7.3. CONVERSÃO ENTRE BASES 2, 8 E 16.

- As conversões mais simples são as que envolvem bases que são potências entre si. (FARIAS, 2013).
- Leva-se em consideração que $2^3 = 8$ e $2^4 = 16$.
- Exemplifiquemos a conversão 2³, que funciona da seguinte forma:
 - 1º. Separa-se os algarismos de um número binário em grupos de três (começando sempre da direita para a esquerda).
 - o 2º. Converta cada grupo de três algarismos por seu equivalente em octal.
- Vejamos:



Olhando a tabela de conversão direta temos:

$$010_2 = 2_8 \quad 101_2 = 5_8 \quad 001_2 = 1_8 \qquad 251_8$$

$$10101001_2 = 251_8$$

Tabela 1. Conversão direta de binário para octal e vice-versa.

Binário)	Octal
000		0
001	→	1
010	\longrightarrow	2
011		3
100		4
101	\longrightarrow	5
110		6
111		7

- Agora a conversão entre as bases 2 e 16.
- Como 2⁴ = 16, seguimos o mesmo processo anterior, bastando agora separarmos em grupos com <u>quatro</u> algarismos e converter cada grupo seguindo a Tabela 2. Por exemplo:

11010101101₂ = 0110 . 1010 . 1101₂

$$0110_2 = 6_{16}$$

$$1010_2 = A_{16}$$

$$1101_2 = D_{16}$$
11010101101₂ = 6AD₁₆

Tabela 2. Conversão direta de binário para hexadecimal e vice-versa.

Bin.	Hexa.	Bin.	Hexa.
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	В
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Analisaremos agora a conversão inversa. Por exemplo:

$$A81_{16} = A . 8 . 1_{16}$$

De acordo com a tabela ao lado, temos:

$$A_{16} = 1010_2$$

 $8_{16} = 1000_2$
 $1_{16} = 0001_2$ $A81_{16} = 1010.1000.0001_2$

Tabela 3. Conversão direta de hexadecimal para binário e vice-versa.

Bin.	Hexa.	Bin.	Hexa.
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	В
0100	4	1100	С
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

7.4. CONVERSÃO DE BASE b PARA BASE 10

Lembremos da expressão geral descrita na página 6.

$$N_b = a_0 \times b^n + a_1 \times b^{n-1} + ... + a_n \times b^0$$

 A melhor forma de fazer a conversão é usando essa expressão. Como exemplo usemos o valor 101101₂.

$$101101_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 45_{10}$$

Outros exemplos:

$$125_5 = 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 100_{10}$$
$$485_9 = 4 \times 9^2 + 8 \times 9^1 + 5 \times 9^0 = 324 + 72 + 5 = 401_{10}$$

7.5. CONVERSÃO DE BASE 10 PARA BASE b

- Já a conversão de números da base 10 para uma base qualquer, empregase algoritmos que serão de ordem inversa das anteriores.
- O número decimal será dividido sucessivas vezes pela base 2, o resto de cada divisão ocupará sucessivamente as posições de ordem 0 e 1, e assim por diante, até que o resto da última divisão resulte em quociente 0.
- Esse último quociente irá ocupar a posição mais alta ordem.

• Exemplo: Converta o numero 19₁₀ para a base 2.

Usando a conversão anterior como prova real, temos:

$$10011_2 = (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = 19_{10}$$

Conversão do número 512₁₀ para a base 16:

$$512 \boxed{16}$$
 $0 \ 32 \boxed{16}$
 $512_{10} = 200_{16}$

$$a_2 = 2$$
 $a_1 = 0$ $a_0 = 0$

Na prova real, temos:

$$200_{16} = (2 \times 16^2) + (0 \times 16^1) + (0 \times 16^0) = 512_{10}$$

7.6. NÚMEROS BINÁRIOS NEGATIVOS

- Segundo Farias (2013), os computadores operam com números positivos (+) e negativos (-), sendo necessário encontrar uma representação para números com sinal negativo.
- Existem uma grande variedade de opções. Apresentemos aqui as duas formas mais usuais:
 - 1. Complemento de 1.
 - 2. Complemento de 2.

1. Complemento de 1

- Na representação em complemento de 1 invertem-se todos os bits de um número para representar o seu complementar.
- Converte-se um valor positivo por um negativo, e vice-versa.
- Quando o bit mais à esquerda é 0, esse valor é positivo; se for 1, então é negativo. Por exemplo:

$$100_{10} = 01100100_2 \text{ (com 8 bits)}$$

$$-100_{10} = 10011011_2$$
 (*bits* invertidos)



O problema desta representação é que existem 2 padrões de *bits* para o 0, havendo assim desperdício de representação:

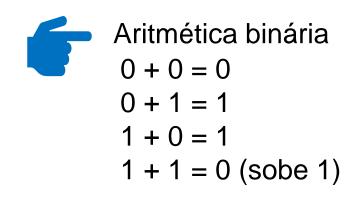
$$0_{10} = 00000000_2 = 111111111_2$$

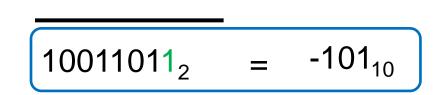
2. Complemento de 2

 Para determinar o negativo de um número na forma de complemento de 2, basta inverter todos os bits e somar 1 unidade.

10011010₂

- Representação binária
 101₁₀ = 01100101₂ (com 8 *bits*)
- 2. Invertendo todos os *bits* $01100101_2 \rightarrow 10011010_2$
- 3. Somando 1 unidade 10011010₂ + 1





EXERCÍCIO

1. Determine o número binário negativo de 120₁₀ em 8 *bits* usando a representação de complemento 1.

Solução:

1. Converte dec. para bin. $120_{10} = 01111000_2$

2. Inverte os bits binários $10000111_2 = -120_{10}$

2. Qual o número representado por 11100100₂ (com 8 *bits*)? Este número é negativo ou positivo?

Solução:

1. Verifique se o *bit* mais a esquerda é 0 (para positivo) ou 1 para negativo). Obs.: Já vimos esta informação na página 19.

11100100₂ Negativo

2. Inverte todos os bits e soma 1 unidade



+1

$$00011100_2 = 28_{10}$$

$$11100100_2 = -28_{10}$$



Aritmética binária

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0$$
 (sobe 1)

7.7. ARITMÉTICA BINÁRIA

 Como o computador manipula dados (números) através de uma representação binária, veremos a partir de agora como a aritmética do sistema binário, a mesma usada pela ULA (Unidade Lógica Aritmética) dos processadores, processa esses dados.

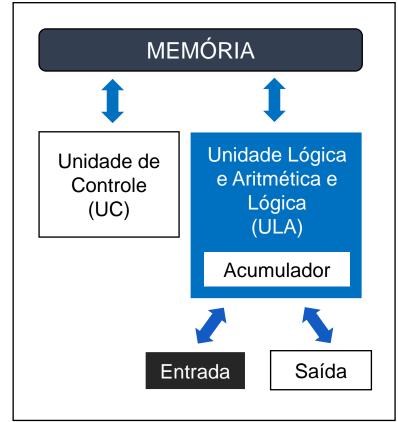


Figura 1. Arquitetura proposta por John von Neumann (1946).

Soma e Subtração Binária

Tabela 4. Tabuada de soma binária.

Operação	Valor	Obs.
0 + 0 =	0	
0 + 1 =	1	
1 + 0 =	1	
1 + 1 =	0	"vai um" ^(*)
1 + 1 + 1 =	1	"vai um" ^(*)

Tabela 5. Tabuada de subtração binária.

Operação	Valor	Obs.
0 - 0 =	0	
0 - 1 =	1	"vem um"(**)
1 - 0 =	1	
1 - 1 =	0	

^{(*) –} Vai um para a ordem superior ou seja, sobe 1, como na aritmética tradicional.

^{(**) –} Vem um do próximo

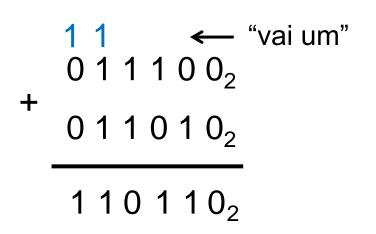
• Exemplo 01: Efetue $011100_2 + 011010_2$

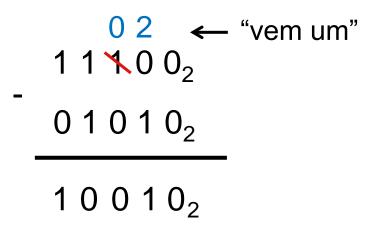
Soma-se as posições da direita para esquerda, tal como uma soma decimal.

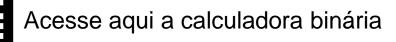
• Exemplo 02: Efetue 11100₂ - 01010₂

Como não é possível tirar 1 de 0, o artifício é "pedir emprestado" 1 da casa de ordem superior, ou seja, na realidade o que se faz é subtrair 1₂ de 10₂ e encontramos 1₂ como resultado, devendo então subtrair 1 do dígito de ordem superior. Este modo é o mesmo da subtração em decimal.

Subtrai-se a direita para a esquerda.







APRENDA MAIS Q

• Dica bacana [...].



Vídeo sobre soma e subtração binária.



https://www.youtube.com/watch?v=NeQBC9Z5FHk

A subtração nos computadores

- Na eletrônica digital a construção de circuitos simples custa menos e operam mais rápido do que circuitos mais complexos.
- Portanto, os números utilizados na aritmética em <u>Complemento de 2</u> (pg. 19), permitem a implementação e uso de circuitos mais simples, baratos e rápidos.
- Uma característica é que tanto os números com sinal quanto os números sem sinal podem ser somados pelo mesmo circuito.
- Por exemplo, suponha que você deseja somar os números sem sinal 132₁₀ e 14₁₀.

+
$$\frac{10000100_{2}}{00001110_{2}}$$
 Entrada: A + $\frac{132_{10}}{141_{10}}$ + $\frac{146_{10}}{146_{10}}$

- O microprocessador tem um circuito na ULA que pode somar números binários sem sinal, que quando aparece o padrão A em uma entrada e B na outra entrada, resulta C na saída.
- Surge a pergunta: como a ULA sabe que os padrões de *bit*s nas entradas representam número sem sinal e não em complemento de dois?
- A resposta é: NÃO SABE! A ULA sempre soma como se as entradas fossem números binários sem sinal. Sempre produzirá o resultado correto, mesmo se as entradas forem números em complemento de dois. É um circuito/instrução corretiva.

- Isto comprova um ponto importante. O somador na ULA sempre soma padrões de *bits* como se eles fossem números binários sem sinal.
- É de nossa interpretação decidir se números com ou sem sinal estão sendo tratados, ou melhor ainda, o bom do complemento de dois é que os padrões de *bits* podem ser interpretados de qualquer maneira.
- Isto nos permite trabalhar com números com e sem sinal sem requerer diferentes circuitos para cada padrão. (FARIAS, 2013).

- A aritmética de complemento de 2 também simplifica a ULA em outro ponto.
- Todo microprocessador precisa da instrução de subtração. Assim, a ULA deve ser capacitada a subtrair um número de outro. Entretanto, se isto necessitar de um circuito de subtração separado, a complexidade e o custo da ULA seriam aumentados.
- Felizmente, a aritmética de complemento de 2 permite realizar operações de subtração usando um <u>circuito somador</u>. Ou seja, a CPU usa o mesmo circuito tanto para soma como para subtração.

Multiplicação e Divisão Binária

Tabela 6. Tabuada multiplicação binária.

Operação	Valor
0 x 0 =	0
0 x 1 =	0
1 x 0 =	0
1 x 1 =	1



O processo é idêntico à multiplicação entre números decimais.

• Exemplo: Efetue 101₂ x 110₂

$$\begin{array}{c}
1 \ 0 \ 1_{2} \\
1 \ 1 \ 0_{2} \\
\hline
0 \ 0 \ 0 \\
1 \ 0 \ 1 \\
1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{2}
\end{array}$$



8.1. SISTEMAS DICOTÔMICOS E A ÁLGEBRA DE BOOLE

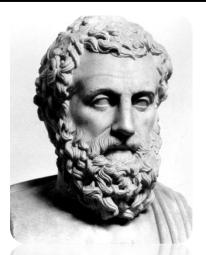
 Segundo Daghlian (2008), o mundo em que vivemos apresenta situações dualísticas em sua grande maioria, ou seja, com dois estados que mutuamente se excluem.

Tabela 7. Situações dualísticas.

Valor 1	Valor 2
1	0
Sim	Não
Dia	Noite
Preto	Branco
Ligado	Desligado

 Existem situações como morno, tépido, diferentes tons de cores que não apresentam estritamente como dicotômicas, i.e., com dois estados excludentes bem definidos.

- Segundo Daghlian (2008) a Lógica começou a se desenvolver no século IV a.C., com Aristóteles.
- Neste período os filósofos gregos passaram a usar em suas discussões sentenças lógicas enunciadas nas formas afirmativas e negativas, resultando assim em grande simplificação da realidade no dia a dia [...]. E quase 2.000 anos depois, por volta de 1666, Leibniz usou em vários trabalhos o que chamou de Calculus ratiotinator. Essas ideias nunca foram teorizadas, porém seus escritos trazem a ideia do que seria a Lógica Matemática.

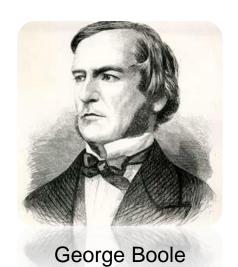


Aristóteles (384 – 322 a.C.)



Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716)

- Em 1854, George Boole introduz o formalismo que até hoje usamos para o tratamento sistemático da lógica, chamada de Álgebra Booleana, que pode ser definida como um conjunto de operadores e de axiomas, que são assumidos verdadeiros sem a necessidade de prova. (Güntzel & Nascimento, 2001).
- Em 1938, C. E. Shannon aplicou esta álgebra para mostrar que as propriedades de circuitos elétricos de chaveamento podem ser representadas com dois valores. (*ibidem*).
- Para Güntzel & Nascimento (2001), diferentemente da álgebra ordinária dos números reais, onde as variáveis podem assumir valores no intervalo (-∞; +∞), as variáveis booleanas só podem assumir um número finito de valores.



(1815 - 1864)

0 ou 1

• Em particular, na álgebra booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois valores possíveis. Por exemplo:

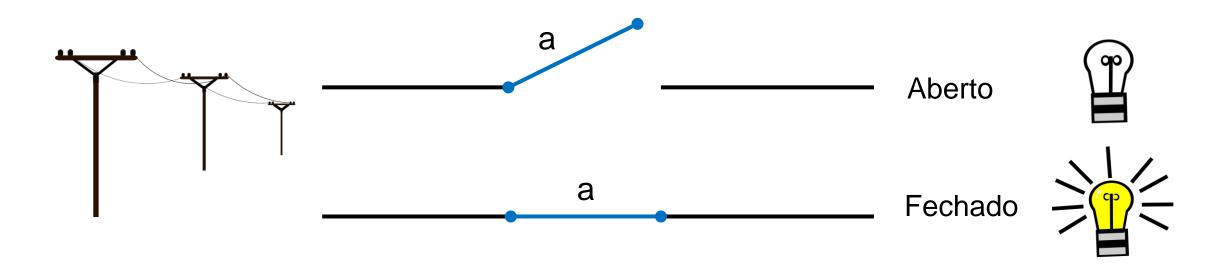
Tabela 8. Exemplo de operadores.

Operador	Valores
V ou F	Verdadeiro ou Falso
C ou E	Certo ou Errado
0 ou 1	-

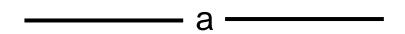
 Portanto são sistemas dicotômicos. Computacionalmente dizendo 0 e 1, a qual é também utilizada na eletrônica digital de circuitos.

8.2. INTERRUPTORES

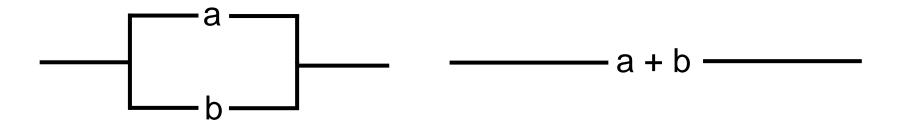
- Chamamos interruptor ao dispositivo ligado a um ponto de um circuito elétrico, o que pode assumir um dos dois estados, e.g., Fechado (1) e Aberto (0). (DAGHLIAN, 2008).
- Quando fechado, o interruptor permite que a corrente passe através do ponto, enquanto aberto nenhuma corrente passa.



• Por conveniência, representaremos os interruptores da seguinte forma (DAGHLIAN, 2008):



• Sejam a e b dois interruptores ligados em paralelo, só passará corrente se pelo menos um dos interruptores estiver fechado. Então denotaremos a ligação de dois interruptores em paralelo por a + b. (*ibidem*). Então:



 Mas se dois interruptores estão ligados em série, só passará corrente se ambos estiverem fechados, i.e., a = b = 1. Portanto detonaremos a ligação de dois interruptores a e b por a . b ou simplesmente ab. (DAGHLIAN, 2008):

Então temos:

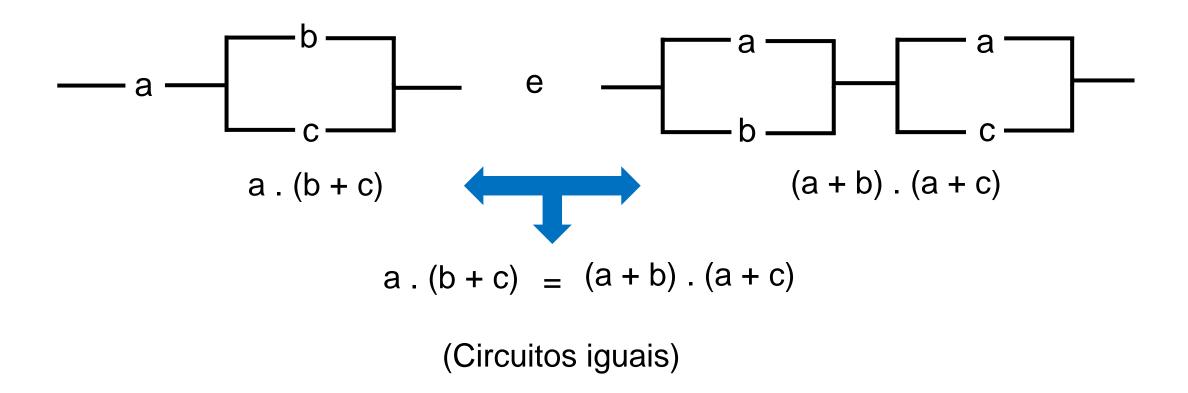
Paralelo	Série
0 + 0 = 0	0.0=0
0 + 1 = 1	0 . 1 = 0
1 + 0 = 1	1.0=0
1 + 1 = 1	1 . 1 = 1

Tabela 9. Possíveis ligações em interruptores.

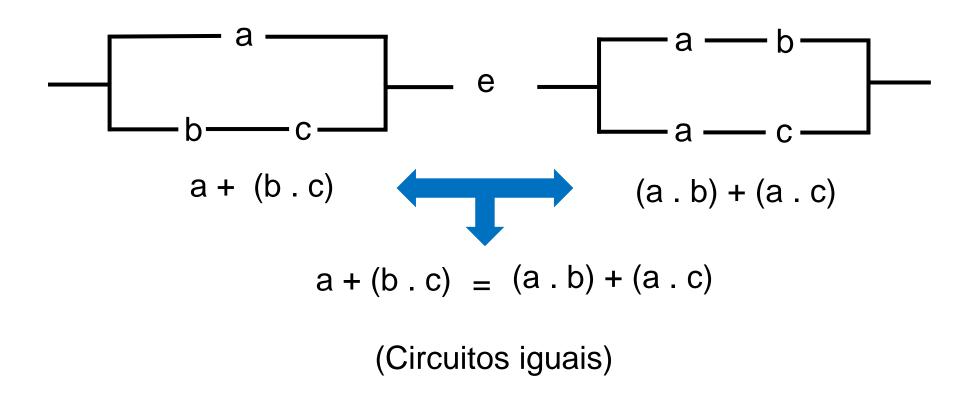
- Observações importantes segundo Daghlian (2008):
 - Conhecendo o estado de um interruptor <u>a</u>, podemos compreender que qualquer outro interruptor tenha o mesmo estado de <u>a</u>, i.e., aberto quando <u>a</u> está aberto e fechado quando <u>a</u> está fechado.
 - Chamamos de complemento quando um interruptor <u>aberto</u> está <u>fechado</u> e viceversa. Isso se chama de <u>inversão</u> ou <u>negação</u>.
 - Por exemplo: $a \neq a' \longrightarrow 1 \neq 0$
 - É possível criar inúmeras operações/expressões lineares na lógica digital compreendendo suas ligações nos circuitos apresentados.



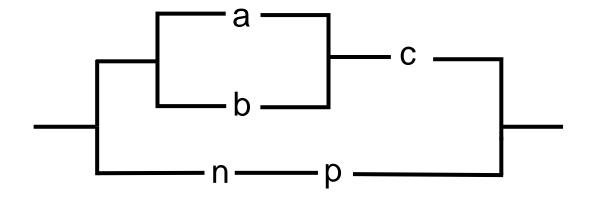
Apresentamos abaixo algumas equações baseadas em circuitos lógicos.



Outro exemplo:

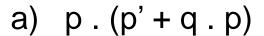


• Exercício 1. Determine a ligação do seguinte circuito:



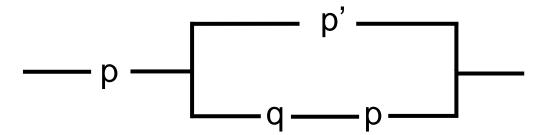
Solução: (a + b) . c + (n . p)

• Exercício 2. Desenhe os circuitos cujas as ligações são:



b)
$$(x + y') \cdot (x' + y)$$





8.3. A LÓGICA BINÁRIA

- George Boole publicou a Álgebra booleana em 1854 como sendo um sistema completo que permitia a construção de modelos matemáticos para o processamento computacional.
- O interessante na lógica booleana é que a partir de três operadores básicos (NOT, AND e OR), podemos construir <u>circuitos lógicos</u> capazes de realizar diversas operações em um computador.
- Como o número de valores que cada variável pode assumir é finito (e pequeno), o número de estados que uma função booleana pode assumir também será finito, o que significa que podemos descrevê-las completamente utilizando tabelas.

• Essa tabela recebe o nome de <u>Tabela Verdade</u>, e nela são listadas todas as combinações de valores que as variáveis de entrada podem assumir e os correspondentes valores da função (saídas).

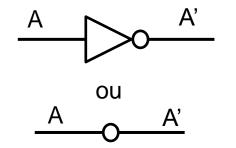
1. Operador NOT

O operador unário NOT, <u>negação binária</u>, resulta no complemento do operando, ou seja, será um *bit* 1 se o operando for 0, e será 0 caso contrário, conforme apresentado Tabela 10, onde A é o *bit* de entrada e S é a resposta, ou *bit* de saída.

Tabela 10. Tabela verdade operador NOT.

A	S ou A'
0	1
1	0

Figura 2. Representação gráfica do operador lógico NOT, com seus valores de entrada e saída.



2. Operador AND

O operador binário AND, ou <u>conjunção binária</u> devolve um *bit* 1 sempre que ambos operandos sejam 1, conforme podemos confirmar na Tabela 11, onde A e B são *bits* de entrada, e S é o *bit*-resposta, ou *bit* de saída.

Tabela 11. Tabela verdade operador AND.

Α	В	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(A . B)

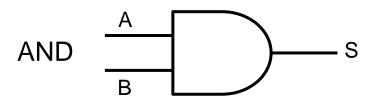


Figura 3. Representação gráfica do operador lógico AND, com seus valores de entrada e saída.

3. Operador OR

O operador binário OR, ou <u>disjunção binária</u> devolve um *bit* 1 sempre que pelo menos um dos operandos seja 1, conforme podemos confirmar na Tabela 12, onde A e B são os *bits* de entrada, e S é o *bit*-resposta, ou *bit* de saída.

OR

Tabela 12. Tabela verdade operador OR.

Α	В	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\frac{\text{(A + B)}}{\text{s}}$$

Figura 4. Representação gráfica do operador lógico OR, com seus valores de entrada e saída.

8.4. A SOMA EM UM COMPUTADOR

- Neste módulo, aprendemos sobre os sistemas de numeração, dando ênfase ao sistema binário, sendo este o sistema adotado pelos computadores.
- Aprendemos como funciona a aritmética binária (soma, subtração, multiplicação, etc.), representação negativa dos números, entre outros.
- Mas como um computador soma?
- Primeiro, precisamos abordar as portas lógicas, elas são a base para as outras operações.

- A construção de uma porta lógica, utiliza conhecimentos de circuitos eletrônicos formados por diodos, resistências, resistores, capacitores entre outros que são abordados em cursos avançados da Eletrônica Analógica/Digital, entretanto, seu entendimento foge ao escopo da nossa disciplina.
- O importante é sabermos que existem portas lógicas que seguem a lógica binária já apresentada e que estas portas podem ser combinadas, formando os circuitos digitais.
- A Figura 5 apresenta um circuito digital somador de 2 bits.

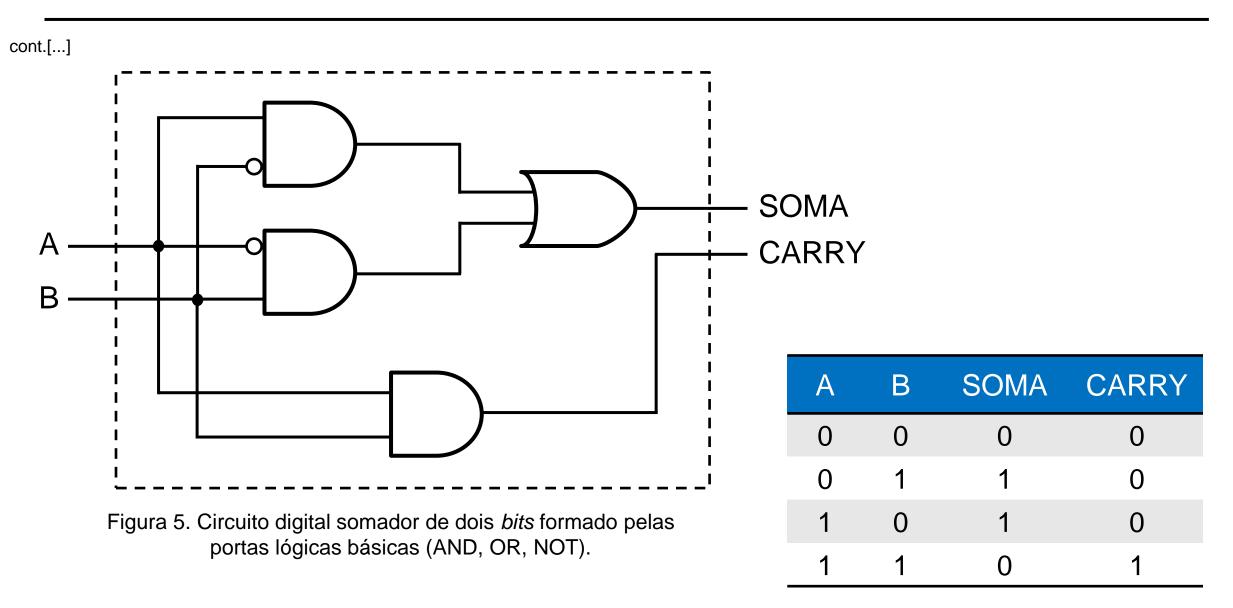


Tabela 13. Tabela de valores da operação de Soma de 2 bits.

- Para entendermos o passo a passo do circuito digital proposto, torna-se necessário criarmos uma tabela verdade para que em caso de dúvidas sobre os valores, revisarmos a operação binária (SOMA) dos dois bits, e constatar se a saída corresponde ao esperado, considerando que a saída CARRY é a operação "vai um" da aritmética binária, neste caso a soma.
- E uma dica bem legal. Vejam o vídeo abaixo:



Circuito digital somador de 2 bits:



https://www.youtube.com/watch?v=E5yDNF2clQw

REFERÊNCIAS

DAGHLIAN, Jacob. Lógica e Álgebra de Boole. 4ª ed. 12ª reimpr. São Paulo : Atlas, 2008.

FARIAS, Gilberto. Introdução à computação. UFPB, 2013.

GÜNTZEL, José Luís; NASCIMENTO, Francisco de Assis. Introdução aos Sistemas Digitais (v.2001/1). Disponível in: https://www.inf.ufsc.br/~j.guntzel/isd/isd.html.

TANENBAUM, Andrew S. Sistemas Operacionais Modernos. 3ª ed. Pearson, 2010.

TANENBAUM, Andrew S. AUSTIN, Todd. Organização Estruturada de Computadores. 6ª ed. Pearson, 2013.

MONTEIRO, Mário A. Introdução à Organização dos Computadores. 5ª ed. LTC. 2014.

TANENBAUM, Andrew S. VAN STEEN, Maarten. Sistemas Distribuídos. Princípios e Paradigmas. 2ª ed. Pearson, 2007.

RIBEIRO, Carlos; DELGADO, José. Arquitetura de Computadores. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

