

Relaciones de recurrencia y combinatoria

↳ Sucesión que relaciona el n -ésimo elemento con un predecesor

Algoritmos recursivos.

def mi-funcion(x)

mi-funcion($x+2$)

Sucesiones.

Secuencia ordenada

$$S = \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \dots & \end{matrix} \right] \text{ Sucesión del}$$

$$S[n] = S[n-1] + S[n-2]$$

Fibonacci

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$n \geq 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Valores} \\ \text{iniciales} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} S_0: S[0] = 0 \\ S_1: S[1] = 1 \end{array} \right.$$

$$n \rightarrow S_2: S[2] = 1 = \left[S[n-1] + S[n-2] \right] = 1$$

$$S_4: S[4] = 3$$

$$S_5: S[5] = 5$$

$$n=6 \quad S_6: S[6] = 8 = S[n-1] + S[n-2] = 8$$
$$\quad \quad \quad \uparrow$$
$$\quad \quad \quad n \quad = S[5] + S[4] = 5 + 3 = 8$$

Ej: $\begin{cases} 1. \text{ Iniciar con } 5 \\ 2. \text{ Sumar } 3 \text{ para obtener el siguiente} \end{cases}$

$$S = [5, 8, 11, 14, 17, \dots]$$

$$S_2 = S_1 + 3 \quad \boxed{S_0 = 5}$$

$$\boxed{S_n = S_{n-1} + 3 \quad \text{dado } S_0 = 5 \quad \text{para } n \geq 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = S_0 + 3 \\ S_2 = S_1 + 3 \\ S_3 = S_2 + 3 \\ \vdots \end{array} \right\} \text{Relación de recurrencia.}$$

$$S_n = S_{n-1} + 3 \quad \checkmark$$

Ejemplo: Primeros cinco terminos

$$a_n = 3 \lfloor n/3 \rfloor; \text{ para } n \geq 4 \Rightarrow [3, 3, 6, 6, 6]$$

$$a_4 = 3 \lfloor 4/3 \rfloor = 3 \lfloor 1,33 \rfloor = 3 \lfloor 1 \rfloor = 3.$$

$$a_5 = 3 \lfloor 5/3 \rfloor = 3 \lfloor 1,66 \rfloor = 3 \lfloor 1 \rfloor = 3.$$

$$a_6 = 3 \lfloor 6/3 \rfloor = 3 \lfloor 2 \rfloor = 6$$

$$a_7 = 3 \lfloor 7/3 \rfloor = 3 \lfloor 2,33 \rfloor = 3 \lfloor 2 \rfloor = 6$$

$$a_8 = 3 \lfloor 8/3 \rfloor = 3 \lfloor 2,66 \rfloor = 3 \lfloor 2 \rfloor = 6$$

Notación de Suma y Producto

$$\sum_{i=0}^{10} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \#$$

$$\prod_{i=0}^{10} = a_0 \times a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{10} \quad /$$

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

↑
índice

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^4 n(1+n) &= 1(1+1) + 2(1+2) + 3(1+3) + 4(1+4) = \\ &= 1(2) + 2(3) + 3(4) + 4(5) = 40 \end{aligned}$$

$$n = [1, 2, 3, 4]$$

$$\prod_{n=1}^3 n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \quad /$$

$$n = [1, 2, 3]$$

Relaciones de recurrencia lineal general.

Ec. que relaciona a_n con ciertos precedores.

Condiciones iniciales. \rightarrow numero finito de terminos. \rightarrow sol. unica.

Para determinar el n -ésimo termino de una sucesión

Ej: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $n \geq 2$ hasta $n = 10$

$$f_3 = f_2 + f_1$$

$$f_1 \quad f_2 \quad f_3 \dots$$

$$f_1 = 1 \quad f_2 = 1$$

$$f_2 = f_1 + f_0$$

$$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \dots$$

$$f_1 = 1 \quad f_0 = 0$$

1 1 2 3 5 8 13 21 ...
↑

0 1 1 2 3 5 8 13 21 ... 34
↑
0 1 2 3 4 5 6 10

Soluciones de relaciones de recurrencia.

Ej: $a_n = a_{n-1} + 3$ $a_1 = 2$

$a_{n-1} = a_{n-2} + 3$

$a_{n-2} = a_{n-3} + \underbrace{(2 \cdot 3)}_k$

Iterar

2	5	8	11	...
---	---	---	----	-----

11 8 5
 $a_n \quad a_{n-1}-3 \quad a_{n-2} \cdot 3$
 $11 - 6 = 5$