Macroeconomia - Lista de Exercícios II

Funções de Produção e Modelo de Crescimento de Solow

Professor: Diego Ferreira, ferreira.diego@unifesp.br

Exercício 1: Propriedades da Função de Produção, Mercado de Trabalho Competitivo e Salário Estritamente Positivo

Mostre que a existência de mercado de trabalho competitivo e o fato de a função de produção apresentar produtividade marginal positiva e decrescente, bem como retornos constantes de escala, implicam que o salário (w) deve necessariamente ser estritamente positivo e, portanto, que $L(t) \leq \bar{L}(t)$, $w(t) \geq 0$ e $(L(t) - \bar{L}(t))w(t) = 0$ implicam em $L(t) = \bar{L}(t)$.

Sugestão: utilize o Teorema de Euler.

Exercício 2: Propriedades da Função de Produção e Concavidade

Prove que o fato de a função de produção apresentar produtividade marginal positiva e decrescente, bem como retornos constantes de escala, implica que $F(A, K, L)$ é côncava em K e L, mas não estritamente côncava.

Sugestão: tome as seguintes definições e teorema:

(1) **Definição 1:** Uma matriz M de dimensão $n \times n$ é dita negativa semi-definida se, para $zMz' \leq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$. Se a desigualdade for estrita, diz-se que M é uma matriz negativa definida. Revertendo a desigualdade, obtemos as mesmas definições para M como uma matriz (semi) negativa definida.

(2) **Definição 2:** Seja M uma matriz simétrica. Então, (i) M é positiva (negativa) definida se, e somente se, todos os autovalores de M são estritamente positivos (negativos); (ii) M é semi-positiva (negativa) definida se, e somente se, todos os autovalores de M são não negativos (não positivos); e (iii) M é indefinida se, e somente se, M tem autovalores de sinais contrários.

(3) **Teorema:** Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função C^2. Então, (i) f é côncava se, e somente se, $D^2 f(x)$ é negativa semi-definida para todo $x \in A$; (ii) se $D^2 f(x)$ é negativa definida para todo $x \in M$, f é estritamente côncava.

Exercício 3: Essencialidade do Fator Capital

Segundo Acemoglu (2009, p. 29), a função de produção $F(K, L, A)$ exibe produtividade marginal decrescente em K e L:

$$F_K(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial K} > 0 \qquad F_{KK}(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial K^2} < 0$$
$$F_L(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial L} > 0 \qquad F_{LL}(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial L^2} < 0$$

Além disso, F apresenta retornos constantes de escala em K e L, isto é, F é uma função homogênea de grau 1 em K e L: para qualquer A e para $\alpha \geq 0$, $F(\alpha K, \alpha L, A) = \alpha F(K, L, A)$. Acemoglu (2009, p. 33) também afirma que F satisfaz as Condições de Inada, tais que:

$$\lim_{K \to 0} F_K = \lim_{L \to 0} F_L = +\infty$$
$$\lim_{K \to +\infty} F_K = \lim_{L \to +\infty} F_L = 0$$

Ainda como parte de sua Suposição 2 (*Assumption 2*), Acemoglu (2009, p. 33) define que "*Moreover,* $F(0, L, A) = 0$ *for all* L *and* A". Isto é, o autor assume que o fator capital (K) é essencial para que a produção ocorra. Contudo, prove que esta suposição de essencialidade feita por Acemoglu (2009, p. 33) é redundante, visto que esta pode ser obtida diretamente através das Condições de Inada e da homogeneidade de grau 1 de F.

Sugestão: utilize a regra de l'Hôpital.

Exercício 4: Retornos Constantes de Escala e Soluções do Problema de Maximização de Lucro da Firma

Demonstre que, quando F exibe retornos constantes de escala e o mercado de fatores é competitivo, o problema de maximização da firma pode não possuir solução (isto é, a firma pode apresentar lucro infinito), pode possuir uma solução única tal que $K = L = 0$, ou pode possuir infinitas soluções (isto é, qualquer (K, L), com $K/L = \kappa$ para algum $\kappa > 0$, é solução).

Sugestão: Por F ser uma função côncava (*vide exercício 2*), para que o problema de maximização de lucro da firma apresente solução, esta deve respeitas as seguintes condições (que serão necessárias e suficientes):

$$F_K(K, L, A) \leq R$$
$$F_L(K, L, A) \leq w$$

Analise cada caso possível, tecendo comentários sobre as potenciais soluções. Utilize o Teorema de Euler quando necessário.

Exercício 5: Função de Produção com Elasticidade de Substituição Constante (CES) e o Modelo de Crescimento de Solow

Considere uma função de produção CES definida para $K > 0$ e $L > 0$

$$\begin{aligned} Y(t) &= F(K(t), L(t), A(t)) \\ &\equiv A_H(t) \left[\gamma (A_K(t) K(t))^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} + (1 - \gamma)(A_L(t) L(t))^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}} \end{aligned}$$

onde $A_H(t) > 0$, $A_K(t) > 0$ e $A_L(t) > 0$ são três diferentes tipos de mudança tecnológica; $\gamma \in (0; 1)$ é um parâmetro de distribuição, que determina o quão importantes são os serviços de trabalho e capital em determinar a produção final do bem; e $\sigma \in (0, +\infty)$ é a elasticidade de substituição constante entre capital e trabalho.

(a) Demonstre que a elasticidade de substituição é de fato constante e igual a σ.

(b) Em Acemoglu (2009, p. 55), o autor afirma que, ao assumirmos $\sigma > 1$, estaríamos violando as suposições de produtividade marginal positiva decrescente e de retornos constantes de escala (*Assumption 1*, p. 29). Contudo, demonstre que, para qualquer $\sigma > 0$, tais suposições são válidas.

Explicação: Há um erro de digitação no texto de Acemoglu (2009, p. 55): onde se lê que $\sigma > 1$ viola a Suposição 1, deve-se ler que $\sigma > 1$ viola a Suposição 2 (Condições de Inada, p. 33).

(c) Demonstre que a função de produção CES se torna uma função linear quando $\sigma \to +\infty$ e uma função Cobb-Douglas quando $\sigma \to 1$. Apresente a forma geral de cada uma dessas funções partindo da forma funcional da função CES apresentada e tomando os respectivos limites.

Sugestão: O primeiro caso é imediato. No segundo caso, tome o limite de $\ln(Y)$ e use a regra de l'Hôpital.

(d) Demonstre que as Condições de Inada não são válidas no caso de uma função de produção CES, exceto quando $\sigma \to 1$ (*i.e.*, exceto no caso Cobb-Douglas).

Sugestão: Trabalhe com F_K ou F_L, mas separadamente, com $\sigma > 1$ e $\sigma < 1$. Pode-se afirmar, por exemplo, que $\lim_{K\to+\infty} F_K = 0$ no caso de $\sigma > 1$? E que $\lim_{K\to 0} F_K = +\infty$ no caso de $\sigma < 1$?

Exercício 6: Crescimento Sustentado e Modelo AK Sem Progresso Tecnológico

Considere o modelo de Solow com tempo contínuo e crescimento demográfico à taxa n, mas sem progresso técnico. Relaxe as suposições 1 e 2 em Acemoglu (2009), fazendo $F = AK$, $A > 0$. Mostre que, neste caso, pode haver crescimento sustentado de k^* (definido como K/L) e y^* (definido como Y/L), com ambos crescendo à taxa $sA - n + \delta$, sem progresso tecnológico, bastando para isso que os parâmetros do modelo sejam tais que $sA > n + \delta$.

Exercício 7: Equação Fundamental de Solow através do Funcionamento dos Mercados

Ao invés de proceder como na Seção 2.4.2 em Acemoglu (2009, p. 48), modifique o modelo de Solow apresentado no livro-texto de modo a considerar um consumidor representativo, que vende trabalho pelo salário de mercado w e transaciona ativos financeiros Z pela taxa de juros r. A renda total recebida pelo consumidor representativo é, portanto, a soma das rendas dos ativos e do trabalho: $rZ + wL$. O consumidor utiliza a renda não consumida para acumular mais ativos, de modo que a equação de acumulação de ativos seja $\dot{Z} = rZ + wL - C$, em que $\dot{Z} = dZ/dt$ e C representa o consumo realizado de bens e serviços. Assuma que as firmas contratem trabalho (L) e capital (K), utilizando ambos fatores em sua produção - $Y = F(K, L, A)$ - a qual estas vendem a preço unitário. Seja R a taxa de aluguel unitária do capital que é paga pelas firmas aos consumidores (que detêm este) e assuma que o estoque de capital se deprecie à taxa constante $\delta \geq 0$. Logo, a taxa líquida de retorno para o consumidor que detém capital é $R - \delta$. Lembre-se que os consumidores recebem a taxa de juros r em fundos emprestados a outros consumidores. Na ausência de incerteza, capital e empréstimos são substitutos perfeitos como formas de estoque de valor e, como resultado, devem render a mesma taxa de retorno, de modo que $r = R - \delta$ ou, equivalentemente, $R = r + \delta$.

(a) Encontre a equação de acumulação de ativos *per capita* (*i.e.*, por trabalhador).

(b) Explicite o problema de maximização de lucro pela firma representativa, assumindo que a tecnologia está disponível sem custo associado. Encontre a condição de maximização de lucro desta firma.

(c) Demonstre que o modelo não determina a escala da firma competitiva individual que opera com uma função de produção com retornos de escala constantes (isto é, não define o valor de L).

(d) Como o modelo trata de uma economia fechada, os ativos financeiros devem se anular para que esta se encontre em equilíbrio (isto é, o montante financeiro tomado se iguala ao montante financeiro ofertado). Logo, o único ativo em oferta líquida positiva seria o capital físico (K), pois ele existe como bem real e não é passivo de ninguém. Consequentemente, temos $Z = K$. Considere também que as famílias consomem uma fração constante de sua renda bruta, isto é, $C = (1-s)Y$. Com base nestas informações e os resultados obtidos nos itens anteriores, derive a mesma equação fundamental de movimento do modelo tradicional de Solow: $\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$.

Exercício 8: Política Econômica e Mudança no Estado Estacionário

Suponha que uma economia se comporte *a la* Solow, sem inovação tecnológica. Considere que um governante deseje realizar políticas econômicas capazes de aumentar o estoque de capital *per capita* de estado estacionário. Quais seriam as potenciais estratégias a serem seguidas? Demonstre através da utilização do Teorema da Função Implícita na condição de equilíbrio estacionário $[f(k^*)/k^*]$.

Exercício 9: Convergência Absoluta e Convergência Relativa

A partir da Lei Fundamental de Movimento do Capital em Solow e das demais hipóteses do modelo, demonstre que

$$\frac{d\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)}{dk} < 0.$$

Este resultado implica que todas as economias com menor estoque de capital tenderão a apresentar taxas de crescimento mais elevadas, desta forma gerando convergência mundial de renda *per capita*? Ou, de acordo com o resultado obtido, há condicionantes para esta convergência? Explique.

Sugestão: Ver discussão em Barro e Sala-i-Martin (2004), seção 1.2.10 (p. 44).

Exercício 10: Política Tributária no Modelo de Crescimento de Solo.

Suponha a existência de um governo que impõe uma alíquota tributária τ sobre a renda (Y), de modo o consumo das familias seja definido como $C(t) = (1-s)(1-\tau)Y(t)$. Considere que a receita tributária seja totalmente utilizada para consumo do governo (que, por sua vez, não gera benefícios às famílias). Assuma que a função de produção desta economia seja caracterizada por uma função Cobb-Douglas com tecnologia Harrod-neutra (aumentadora de trabalho): $Y(t) = [K(t)]^\alpha [A(t)L(t)]^{1-\alpha}$. Além disso, tome a taxa de crescimento populacional como n e a taxa de progresso tecnológico como a, tal que $L(t+1) = (1+n)L(t)$ e $A(t+1) = (1+a)A(t)$, respectivamente.

(a) Defina a equação de investimento desta economia. Com base nesta, apresente a equação de acumulação (movimento) do capital.

(b) Transforme as quatro equações para o formato de trabalho efetivo, isto é, divida-as por $A(t)L(t)$. Faça uso da notação convencional $\tilde{x} \equiv X(t)/A(t)L(t)$.

(c) Encontre o nível de estado estacionário para a razão capital-trabalho efetivo $\tilde{k}^*$ nesta economia.

(d) Discuta os efeitos de mudanças nos parâmetros δ, n, a, s e τ sobre o nível de estado estacionário da razão capital-trabalho efetivo $\tilde{k}^*$ nesta economia.

(e) Discuta os efeitos de mudanças nos parâmetros δ, n, a, s e τ sobre o nível de estado estacionário da razão consumo-trabalho efetivo $\tilde{c}^*$ nesta economia.

(f) As famílias valorizam seu nível de consumo *per capita*, isto é, $c(t)$. Esta variável cresce à taxa a uma vez que a economia se encontra na trajetória de crescimento equilibrada (isto é, a trajetória de equilíbrio de estado estacionário na presença de progresso tecnológico). Diante disso, discuta se valores altos ou baixos para a são preferíveis sob o ponto de vista das famílias.

Exercício 11: Recursos Naturais e Terra no Modelo de Crescimento de Solow

Para avaliarmos o papel desempenho pelos recursos naturais [N(t)] e o uso da terra [T(t)] no modelo de crescimento de Solow, iremos incorporar estes dois fatores a uma função de produção do tipo Cobb-Douglas:

$$Y(t) = [K(t)]^\alpha [N(t)]^\beta [T(t)]^\phi [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta-\phi},$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\phi > 0$ e $\alpha + \beta + \phi < 1$. O processo de desgaste dos recursos naturais pode ser definido como $N(t+1) = (1-b)N(t)$, em que b é a taxa de depreciação do estoque de recursos naturais desta economia. O estoque de terra nesta economia é assumido constante, isto é, $\Delta T(t) = T(t+1) - T(t) = 0$. Considere que a taxa de crescimento populacional seja n e a taxa de progresso tecnológico seja a, tal que $L(t+1) = (1+n)L(t)$ e $A(t+1) = (1+a)A(t)$, respectivamente. Por se tratar de uma economia fechada e sem governo, a equação de acumulação (movimento) de capital é dada por $K(t+1) = (1-\delta)K(t) + I(t)$, em que $I(t) = S(t) = sY(t)$. O consumo das famílias corresponde a $C(t) = (1-s)Y(t)$.

(a) Apresente as equações que caracterizam o modelo no formato de trabalho efetivo.

(b) Encontre o nível de estado estacionário para a razão capital-trabalho efetivo $\tilde{k}^*$ nesta economia.

(c) Demonstre que a razão capital-produto desta economia na trajetória de crescimento equilibrado continuará a ser constante, visto que a taxa de crescimento do produto será igual a taxa de crescimento do capital.

(d) Encontre a taxa de crescimento da renda na trajetória de crescimento equilibrado e discuta as implicações de considerar a utilização dos recursos naturais e da terra no modelo de Solow.

Sugestão: Compare o resultado obtido neste item com a taxa de crescimento da renda no modelo tradicional, em que a função de produção considera apenas os fatores capital e trabalho.