Ueber die vollen Invariantensysteme.

Von

David Hilbert in Königsberg i./Pr.

Einleitung.

Meine Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen"*) enthält eine Reihe von Theoremen, welche für die Theorie der algebraischen Invarianten von Bedeutung sind. Insbesondere in Abschnitt V der genannten Abhandlung habe ich mit Hilfe jener Theoreme für beliebige Grundformen die *Endlichkeit* des vollen Invariantensystems bewiesen. *Dieser Satz von der Endlichkeit des vollen Invariantensystems bildet den Ausgangspunkt und die Grundlage für die Untersuchungen der vorliegenden Abhandlung.***) Die im Folgenden entwickelten Methoden unterscheiden sich wesentlich von den bisher in der Invariantentheorie angewandten Mitteln; bei den nachfolgenden Untersuchungen nämlich ordnet sich die Theorie der algebraischen Invarianten unmittelbar unter die allgemeine Theorie der algebraischen Functionenkörper unter: so dass die Theorie der Invarianten lediglich als ein besonders bemerkenswerthes Beispiel für die Theorie der algebraischen Functionenkörper mit mehr Veränderlichen erscheint — gerade wie man in der Zahlentheorie die Theorie der Kreistheilungskörper lediglich als ein besonders bemerkenswerthes Beispiel aufzufassen hat, an welchem die wichtigsten Sätze der Theorie der allgemeinen Zahlenkörper zuerst erkannt und bewiesen worden sind.

Die im Folgenden angewandten Methoden reichen für Grundformensysteme mit beliebig vielen Veränderlichen und Veränderlichenreihen aus, gleichviel ob dieselben sämmtlich denselben linearen Transformationen unterliegen oder ob sie in irgendwie vorgeschriebener Weise theilweise verschiedenen linearen Transformationen unterworfen werden sollen; dennoch werde ich bei der folgenden Darstellung der Kürze und Anschaulichkeit wegen meist nur binäre oder ternäre Grundformen mit einer einzigen Veränderlichenreihe zu Grunde legen.

---

*) Math. Ann. Bd. 36, S. 473.

**) Vergl. die 3 Noten des Verfassers: „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten." Nachrichten v. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1891 (1ste Note) und 1892 (2te und 3te Note).

Unter „*Invariante*" ohne weiteren Zusatz verstehen wir im Folgenden stets eine ganze rationale Invariante d. h. eine solche ganze rationale homogene Function der Coefficienten a der Grundform oder des Grundformensystems, welche sich nur mit Potenzen der Substitutionsdeterminanten multiplicirt, wenn man die Coefficienten a durch die entsprechenden Coefficienten b der linear transformirten Grundformen ersetzt. Diese Invarianten besitzen, wie bekannt, die folgenden elementaren Eigenschaften:

1. Die Invarianten lassen die linearen Transformationen einer gewissen continuirlichen Gruppe zu.

2. Die Invarianten genügen gewissen partiellen linearen Differentialgleichungen.

3. Jede algebraische und insbesondere jede rationale Function von beliebig vielen Invarianten, welche in den Coefficienten a der Grundformen ganz, rational und homogen wird, ist wiederum eine Invariante.

4. Wenn das Product zweier ganzen rationalen Functionen der Coefficienten a eine Invariante ist, so ist jeder der beiden Factoren eine Invariante.

Die Sätze 1. und 2. gestatten die Umkehrung. Nach Satz 3. bildet das System aller Invarianten einen in sich abgeschlossenen Bereich von ganzen Functionen, welcher durch algebraische Bildungen nicht mehr erweitert werden kann. Der Satz 4 sagt aus, dass in diesem Functionenbereiche die gewöhnlichen Theilbarkeitsgesetze gültig sind, d. h.: jede Invariante lässt sich auf eine und nur auf eine Weise als Product von nicht zerlegbaren Invarianten darstellen.

Zur Berechnung der Invarianten und zur weiteren Entwicklung der Theorie bedürfen wir eines Hilfssatzes*), welcher eine fundamentale Eigenschaft des sogenannten Ω-Processes betrifft und kurz wie folgt ausgesprochen werden kann:

Wenn man irgend eine ganze rationale Function der Coefficienten b der linear transformirten Grundform bildet und auf diese den Ω-Process so oft anwendet, bis sich ein von den Substitutionscoefficienten freier Ausdruck ergiebt, so ist der so entstehende Ausdruck eine Invariante.

An diese elementaren Sätze aus der Invariantentheorie schliesst

*) Vergl. meine oben citirte Abhandlung S. 524; der Satz stimmt im Wesentlichen mit einem von P. Gordan und F. Mertens bewiesenen Satze überein. Neuerdings hat Story in den Math. Ann. Bd. 41, S. 469 einen Differentiationsprocess [ ] angegeben, welcher sich direct aus Differentiationen nach den Coefficienten a zusammensetzt und welcher den Ω-Process zu ersetzen im Stande ist; dieser Process ist eine Verallgemeinerung des in meiner Inauguraldissertation für binäre Formen aufgestellten Processes [ ], vergl. Math. Ann. Bd. 30, S. 20.

sich der bereits erwähnte Satz über die Endlichkeit an, welcher wie folgt, lautet:

5. Es giebt eine endliche Anzahl von Invarianten, durch welche sich jede andere Invariante in ganzer rationaler Weise ausdrücken lässt. Wir bezeichnen diese endliche Anzahl von Invarianten kurz als *„das volle Invariantensystem"*.

Die zusammengestellten 5 Sätze regen die Frage an, welche der aufgezählten Eigenschaften sich gegenseitig bedingen und welche getrennt von einander für ein Functionensystem möglich sind. In meiner oben citirten 1sten Note „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten"*) habe ich unter anderem an einem Beispiele gezeigt, dass es ein System von unbegrenzt vielen ganzen rationalen homogenen Functionen giebt, welchem die Eigenschaften 2, 3, 5 zukommen, ohne dass der Satz 4 für dasselbe gilt.

Schliesslich sei erwähnt, dass aus den allgemeinen Theoremen meiner anfangs citirten Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen" noch 2 weitere Endlichkeitssätze für die Invariantentheorie folgen, nämlich der Satz von der Endlichkeit der irreduciblen Syzygien und der Satz von der Syzygienkette, welche im Endlichen abbricht.

I.
Der Invariantenkörper.
§ 1.
Ein algebraischer Hilfssatz.

Die rationalen Invarianten einer Grundform oder eines Grundformensystems bestimmen einen Functionenkörper und die ganzen rationalen Invarianten sind die ganzen algebraischen Functionen dieses Functionenkörpers; um diese Thatsachen einzusehen, brauchen wir den folgenden einfachen Hilfssatz:

Wenn irgend m ganze rationale und homogene Functionen $f_1, \ldots, f_m$ der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ vorgelegt sind, so kann man stets aus denselben gewisse $\varkappa$ ganze rationale und homogene Functionen $F_1, \ldots, F_\varkappa$ der nämlichen Veränderlichen zusammensetzen, zwischen denen keine algebraische Relation mit constanten Coefficienten stattfindet und durch welche sich jede der vorgelegten Functionen $f_1, \ldots, f_m$ als g a n z e algebraische Function ausdrücken lässt.

Zum Beweise bezeichnen wir die Grade der Functionen $f_1, \ldots, f_m$ in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ beziehungsweise mit $\nu_1, \ldots, \nu_m$ und ausserdem das Product dieser Gradzahlen mit ν: dann besitzen die m Functionen

*) S. 233.

$$f_1' = f_1^{\frac{\nu}{\nu_1}}, \ldots, f_m' = f_m^{\frac{\nu}{\nu_m}}$$

sämmtlich den Grad ν. Besteht nun zwischen diesen m Functionen keine algebraische Relation mit constanten Coefficienten, so besteht auch zwischen den ursprünglichen Functionen $f_1, \ldots, f_m$ keine solche Relation und diese Functionen bilden daher selbst schon ein System von Functionen der verlangten Beschaffenheit. Im anderen Falle besteht eine Relation von der Gestalt

$$G(f_1', \ldots, f_m') = 0,$$

wo G eine ganze rationale homogene Function von $f_1', \ldots, f_m'$ bedeutet. Wir führen nun eine lineare Transformation der m Functionen aus, indem wir setzen:

$$\begin{array}{l} f_1' = \alpha_{11} f_1'' + \cdots + \alpha_{1m} f_m'', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m' = \alpha_{m1} f_1'' + \cdots + \alpha_{mm} f_m'', \end{array}$$

wo die Determinante der Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mm}$ von 0 verschieden ist und wo ausserdem für die $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mm}$ solche Zahlenwerthe gewählt sein mögen, dass in der linear transformirten Function $H(f_1'', \ldots, f_m'')$ der Coefficient der höchsten Potenz von f_m'' gleich 1 wird. Dann ist offenbar f_m'' eine ganze algebraische Function von $f_1'', \ldots, f_{m-1}''$ und folglich sind auch die Functionen $f_1', \ldots, f_m'$ und somit auch die ursprünglich vorgelegten Functionen $f_1, \ldots, f_m$ sämmtlich durch die $m - 1$ Functionen $f_1'', \ldots, f_{m-1}''$ ganz und algebraisch ausdrückbar. Besteht nun zwischen diesen $m - 1$ Functionen $f_1'', \ldots, f_{m-1}''$ keine algebraische Relation, so bilden diese $m - 1$ Functionen ein System von Functionen der verlangten Beschaffenheit. Im anderen Falle behandeln wir die zwischen diesen $m - 1$ Functionen bestehende homogene Relation in der nämlichen Weise wie vorhin die Relation $G = 0$, und so gelangen wir schliesslich durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu einem Systeme homogener Functionen $F_1, \ldots, F_\varkappa$ vom nämlichen Grade ν in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, welches die im Satze verlangte Beschaffenheit besitzt.

§ 2.

Die Invarianten $J, J_1, \ldots J_\varkappa$.

Es seien $i_1, \ldots, i_m$ die Invarianten eines vollen Invariantensystems; dieselben sind ganze rationale homogene Functionen der Coefficienten der Grundform und so folgt unmittelbar aus dem in § 1 bewiesenen Hilfssatze der Satz:

Ist eine beliebige Grundform oder ein Grundformensystem vorgelegt, so lassen sich stets gewisse $\varkappa$ Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ bestimmen, zwischen *denen keine algebraische Relation stattfindet und durch welche jede andere Invariante g a n z und algebraisch ausgedrückt werden kann.*

Die Zahl $\varkappa$ ist beispielsweise im Falle einer einzigen binären Grundform n^{ter} Ordnung gleich $n-2$ und im Falle einer ternären Grundform n^{ter} Ordnung gleich $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-8$.

Die nach dem obigen Verfahren sich ergebenden Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind sämmtlich von dem nämlichen Grade in den Coefficienten der Grundform; dieser Grad werde mit ν bezeichnet.

Es gilt ferner der Satz:

Man kann zu den Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ stets eine Invariante J hinzufügen, derart, dass eine jede andere Invariante der Grundform sich r a t i o n a l durch die Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ ausdrücken lässt.

Um diese Invariante J zu finden, wählen wir irgend 2 Invarianten des vollen Invariantensystems aus, etwa i_1, i_2 von den Graden ν_1 bezüglich ν_2 und setzen dann

$$
\begin{aligned}
i_1' &= i_1^{\alpha_1} i_2^{\alpha_2}, \\
i_2' &= i_1^{\beta_1} i_2^{\beta_2} J_1^{\gamma},
\end{aligned}
$$

wo die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ ganze positive den Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 &= \beta_1\nu_2 + \beta_2\nu_2 + \gamma\nu, \\
\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 &= 1
\end{aligned}
$$

genügende Zahlen sind. Um solche Zahlen zu finden, bestimme man zunächst 3 ganze positive Zahlen $\delta_1, \delta_2, \gamma$, so dass die Bedingung

$$\delta_1\nu_1 + \delta_2\nu_2 = \gamma\nu$$

erfüllt ist und ausserdem die Zahlen δ_1 und δ_2 zu einander prim sind. Dann bestimme man 2 ganze positive Zahlen β_1 und β_2, so dass

$$\delta_1\beta_2 - \delta_2\beta_1 = 1$$

wird: die 5 Zahlen $\alpha_1 = \delta_1 + \beta_1$, $\alpha_2 = \delta_2 + \beta_2$, β_1, β_2, γ sind dann, wie man leicht sieht, von der verlangten Beschaffenheit.

Die Formeln

$$
\begin{aligned}
i_1 &= i_1'^{\beta_2}\; i_2'^{-\alpha_2} J_1^{\alpha_2\gamma}, \\
i_2 &= i_1'^{-\beta_1} i_2'^{\alpha_1}\; J_1^{-\alpha_1\gamma}
\end{aligned}
$$

lehren, dass i_1 und i_2 sich rational durch i_1', i_2', J_1 ausdrücken lassen. Da die beiden Invarianten i_1', i_2' von dem nämlichen Grade in den Coefficienten der Grundform sind, so ist auch jede lineare Combination

$$i'' = c_1 i_1' + c_2 i_2'$$

eine Invariante. In diesem Ausdrucke können nach einem bekannten Satze aus der Theorie der algebraischen Functionen die Constanten c_1, c_2 so bestimmt werden, dass sowohl i_1' als auch i_2' rationale Functionen von $i'', J_1, \ldots J_\varkappa$ sind. Hieraus folgt, dass sämmtliche

Invarianten der Grundform sich rational durch i'', $J_1, \ldots, J_\varkappa, i_3, i_4, \ldots, i_m$ ausdrücken lassen. Wählt man nun aus den Invarianten i'', $i_3, i_4, \ldots, i_m$ wiederum 2 Invarianten aus, etwa i'', i_3, so lässt sich in eben derselben Weise wie vorhin eine Invariante i''' bestimmen, derart, dass sowohl i'' als auch i_3 rationale Functionen von i''', $J_1, \ldots, J_\varkappa$ und somit sämmtliche Invarianten rationale Functionen von i''', $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $i_4, i_5, \ldots, i_m$ sind. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangen wir schliesslich zu einer Invariante $i^{(m)} = J$ von der im Satze verlangten Beschaffenheit.

Nach den eben bewiesenen Sätzen ist jede Invariante eine rationale Function von $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ und eine ganze algebraische Function von $J_1, \ldots, J_\varkappa$; es ist aber auch umgekehrt jede von $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ rational und von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ ganz und algebraisch abhängende Function i nothwendigerweise eine Invariante der Grundform. Denn da die Function i rational von den Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ abhängt, so ist dieselbe nothwendig eine rationale Function von den Coefficienten der Grundform: wir setzen $i = \frac{g}{h}$, wo g und h ganze rationale Functionen von den Coefficienten der Grundform ohne einen gemeinsamen Factor sind. Ferner genügt i einer Gleichung von der Gestalt

$$i^k + G_1 i^{k-1} + \cdots + G_k = 0,$$

wo $G_1, \ldots, G_k$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Setzen wir in diese Gleichung $i = \frac{g}{h}$ ein und multipliciren dieselbe dann mit h^{k-1}, so ergiebt sich, dass $\frac{g^k}{h}$ eine ganze rationale Function von den Coefficienten der Grundform ist. Da aber g und h zueinander prim sind, so ist h nothwendigerweise eine Constante d. h. i ist eine ganze rationale Function der Coefficienten der Grundform und mithin eine ganze rationale Invariante. Hieraus folgt der Satz:

Die Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ bestimmen einen Functionenkörper, in welchem die ganzen algebraischen Functionen genau das System der ganzen rationalen Invarianten ausmachen; dieser Functionenkörper werde im folgenden kurz der Invariantenkörper der Grundform genannt.

Es giebt nun nach einem fundamentalen von L. Kronecker aufgestellten Satze in einem jeden Functionenkörper stets eine endliche Anzahl ganzer Functionen derart, dass jede andere ganze Function des Körpers als lineare Verbindung jener endlichen Anzahl dargestellt werden kann, wobei die Coefficienten der linearen Verbindung ganze rationale Functionen des Körpers sind, und die allgemeine von L. Kronecker entwickelte Theorie der algebraischen Functionen lehrt zugleich, wie man die ganzen algebraischen Functionen eines Körpers bestimmen kann. Um hiernach aus den Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ das volle Invariantensystem $i_1, \ldots, i_m$ wieder zurückzugewinnen, berechne man zunächst die Discriminante D der Gleichung k^{ten} Grades für J. Die Invarianten der Grundform d. h. die ganzen algebraischen Functionen des Invariantenkörpers sind dann sämmtlich in der Gestalt

$$i = \frac{\Gamma_1 J^{k-1} + \Gamma_2 J^{k-2} + \cdots + \Gamma_k}{D}$$

darstellbar. Wenden wir das Theorem I in Abschnitt I meiner oben citirten Arbeit*) auf die aus den Functionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ zu bildenden unendlichen Reihen an, so erkennen wir in der That, dass es eine endliche Zahl $j_1, \ldots, j_M$ von Invarianten giebt, derart, dass jede andere Invariante i in der Gestalt

$$i = A_1 j_1 + \cdots + A_M j_M$$

dargestellt werden kann, wo $A_1, \ldots, A_M$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Die Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa, j_1, \ldots, j_M$ sind somit die Invarianten eines vollen Invariantensystems.

Nach Kenntniss der Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ erfordert also die Aufstellung des vollen Invariantensystems nur noch die Lösung einer elementaren Aufgabe aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen.

II.

Das Verschwinden der Invarianten.

§ 3.

Ein allgemeines Theorem über algebraische Formen.

Da alle Invarianten der Grundform ganze algebraische Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind, so folgt unmittelbar die weitere Thatsache:

Wenn man den Coefficienten der Grundform solche besonderen Werthe ertheilt, dass die $\varkappa$ Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ gleich 0 werden, so verschwinden zugleich auch sämmtliche übrigen Invarianten der Grundform.

Es ist nun von grösster Bedeutung für die ganze hier zu entwickelnde Theorie, dass die in diesem Satze ausgesprochene Eigenschaft des Invariantensystems $J_1, \ldots, J_\varkappa$ auch umgekehrt die ursprüngliche in § 2 zu Grunde gelegte Eigenschaft dieser Invarianten bedingt. Um den Nachweis hiervon zu führen, entwickeln wir zunächst ein Theorem, welches sich als drittes allgemeines Theorem aus der Theorie der algebraischen Functionen den beiden Theoremen I und III meiner oben citirten Arbeit**) zugesellt. Dieses Theorem lautet:

Es seien m ganze rationale homogene Functionen $f_1, \ldots, f_m$ der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ vorgelegt und ferner seien $F, F', F'', \ldots$

*) Mathematische Annalen Bd. 36, S. 474.

**) Vgl. Math. Ann. Bd. 36, S. 474 und 492.

irgend welche ganze rationale homogene Functionen der nämlichen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ *von der Beschaffenheit, dass sie für alle diejenigen Werthsysteme dieser Veränderlichen verschwinden, für welche die vorgelegten* m *Functionen* $f_1, \ldots, f_m$ *sämmtlich gleich* 0 *sind: dann ist es stets möglich, eine ganze Zahl* r *zu bestimmen derart, dass jedes Product* $\Pi^{(r)}$ *von* r *beliebigen Functionen der Reihe* $F, F', F'', \ldots$ *dargestellt werden kann in der Gestalt*

$$\Pi^{(r)} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *geeignet gewählte ganze rationale homogene Functionen der Veränderlichen* $x_1, \ldots, x_n$ *sind.*

Im folgenden Beweise dieses Theorems nehmen wir zunächst an, dass die Formenreihe $F, F', F'', \ldots$ nur aus einer endlichen Anzahl von Formen besteht.

Der Beweis zerfällt in 2 Theile: in dem ersten Theile zeigen wir die Richtigkeit des Theorems für den besonderen Fall, dass die vorgelegten m Formen $f_1, \ldots, f_m$ nur eine endliche Anzahl gemeinsamer Nullstellen besitzen. Um diesen Nachweis zu führen, nehmen wir an, dass das Theorem für Formen mit einer gewissen Anzahl gemeinsamer Nullstellen bereits als gültig erkannt worden ist und zeigen dann, dass dasselbe auch für solche Formen gilt, welche noch eine weitere gemeinsame Nullstelle besitzen.

Die gemeinsamen Nullstellen der Formen $f_1, \ldots, f_m$ seien

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n, \\ x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2,\ \ldots,\ x_n = \beta_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 = \varkappa_1,\ x_2 = \varkappa_2,\ \ldots,\ x_n = \varkappa_n. \end{array}$$

Wir setzen nun an Stelle der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ bezüglich die Ausdrücke $x_1\xi_1, x_2\xi_1, \ldots, x_{n-1}\xi_1, \xi_2$ ein, wodurch die Formen $f_1, \ldots, f_m$ in binäre Formen von den Ordnungen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ in den Veränderlichen ξ_1, ξ_2 übergehen; dann bilden wir die Ausdrücke

$$\begin{array}{l} F_1 = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_m f_m, \\ F_2 = v_1 f_1 + v_2 f_2 + \cdots + v_m f_m, \end{array}$$

wo $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ binäre Formen mit unbestimmten Coefficienten und von solchen Ordnungen in den Veränderlichen ξ_1, ξ_2 sind, dass F_1 und F_2 in eben diesen Veränderlichen homogen werden. Die Resultante der beiden binären Formen F_1, F_2 in Bezug auf die Veränderlichen ξ_1, ξ_2 wird gleich einer ganzen rationalen Function der in den Formen $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ auftretenden unbestimmten Coefficienten, und die Potenzen und Producte dieser unbestimmten Coefficienten erscheinen mit Formen multiplicirt, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ enthalten; diese Formen mögen mit $f_1', \ldots, f_{m'}'$ bezeichnet werden. Aus den Eigenschaften der Resultante zweier binärer Formen wird leicht erkannt, dass die Formen $f_1', \ldots, f_{m'}'$ nur die folgenden gemeinsamen Nullstellen besitzen:

$$\begin{gathered} x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_{n-1} = \alpha_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 = \varkappa_1,\ x_2 = \varkappa_2,\ \ldots,\ x_{n-1} = \varkappa_{n-1} \end{gathered}$$

und dass dieselben ausserdem sämmtlich gleich linearen Combinationen der Formen $f_1, \ldots, f_m$ sind, d. h. es ist

$$\left.\begin{array}{l} f_1' \equiv 0, \\ \cdots\cdots \\ f_{m'}' \equiv 0, \end{array}\right\} \qquad (f_1, \ldots, f_m).$$

Wenden wir das eben angegebene Eliminationsverfahren nunmehr auf die Formen $f_1', \ldots, f_{m'}'$ an, so gelangen wir zu einem Systeme von Formen $f_2'', \ldots, f_{m''}''$ der $n-2$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{n-2}$; welche nur die gemeinsamen Nullstellen

$$\begin{gathered} x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_{n-2} = \alpha_{n-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 = \varkappa_1,\ x_2 = \varkappa_2,\ \ldots,\ x_{n-2} = \varkappa_{n-2} \end{gathered}$$

besitzen und welche sämmtlich nach dem Modul $(f_1', \ldots, f_{m'}')$ und folglich auch nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$ congruent 0 sind. Durch weitere Fortsetzung des Verfahrens ergiebt sich schliesslich ein System von binären Formen $f_1^{(n-2)}, \ldots, f_{m(n-2)}^{(n-2)}$ der Veränderlichen x_1, x_2, welche nur die gemeinsamen Nullstellen

$$\begin{gathered} x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \\ \cdots\cdots \\ x_1 = \varkappa_1,\ x_2 = \varkappa_2 \end{gathered}$$

besitzen und welche sämmtlich congruent 0 sind nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$. Wir wählen eine von diesen binären Formen aus und setzen dieselbe gleich $(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2)^{\varrho_{12}} \varphi_{12}$, wo ϱ_{12} eine ganze positive Zahl bedeutet und φ_{12} eine für $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$ nicht verschwindende binäre Form ist. Hierbei ist angenommen, dass die Grössen α_1, α_2 nicht beide gleich 0 sind.

In gleicher Weise finden wir, falls α_1, α_3 nicht zugleich 0 sind, dass es eine ganze Zahl ϱ_{13} und eine für $x_1 = \alpha_1$, $x_3 = \alpha_3$ nicht verschwindende binäre Form φ_{13} der Veränderlichen x_1, x_3 giebt, derart, dass

$$(\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3)^{\varrho_{13}} \varphi_{13} \equiv 0 \qquad (f_1, \ldots, f_m)$$

ist und es sei schliesslich $\varrho_{n-1,n}$ eine ganze Zahl und $\varphi_{n-1,n}$ eine für $x_{n-1} = \alpha_{n-1}$, $x_n = \alpha_n$ nicht verschwindende binäre Form der Veränderlichen x_{n-1}, x_n derart, dass die Congruenz

$$(\alpha_n x_{n-1} - \alpha_{n-1} x_n)^{\varrho_{n-1,n}} \varphi_{n-1,n} \equiv 0, \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

besteht.

Da nach Voraussetzung eine jede Form der Reihe $F, F', F'', \ldots$ für $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$ verschwindet, so kann allgemein

$$F^{(i)} = F_{12}^{(i)}(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) + F_{13}^{(i)}(\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3) + \cdots + F_{n-1,n}^{(i)}(\alpha_n x_{n-1} - \alpha_{n-1} x_n)$$

gesetzt werden, wo $F_{12}^{(i)},\ F_{13}^{(i)},\ \ldots,\ F_{n-1,n}^{(i)}$ Formen der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ sind, und hieraus folgt mit Hilfe der obigen Congruenzen, dass, wenn zur Abkürzung

$$\varrho = \varrho_{12} + \varrho_{13} + \cdots + \varrho_{n-1,n}$$

und

$$\Phi = \varphi_{12}\, \varphi_{13} \ldots \varphi_{n-1,n}$$

gesetzt wird, die Congruenz

$$\Phi \Pi^{(\varrho)} \equiv 0, \qquad (f_1, \ldots, f_m)$$

besteht, wo Φ eine für $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$ nicht verschwindende Form und $\Pi^{(\varrho)}$ das Product von irgend ϱ Formen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ bezeichnet.

Die Formen $\Phi, f_1, \ldots, f_m$ besitzen eine geringere Anzahl gemeinsamer Nullstellen als die Formen $f_1, \ldots, f_m$ des ursprünglichen Systems. Nehmen wir also an, dass das Theorem für ein Formensystem mit weniger gemeinsamen Nullstellen bereits als richtig erkannt ist, so folgt, dass es eine Zahl r giebt, derart, dass

$$\Pi^{(r)} \equiv 0 \quad (\Phi, f_1, \ldots, f_m)$$

wo $\Pi^{(r)}$ ein Product aus irgend r Formen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ ist, und hieraus folgt dann mit Hilfe der obigen Congruenz

$$\Pi^{(\varrho+r)} \equiv 0 \quad (f_1, \ldots, f_m),$$

wo $\Pi^{(\varrho+r)}$ ein Product aus irgend $\varrho + r$ Functionen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ bedeutet. Somit ist bewiesen, dass das Theorem unter der gemachten Annahme auch für das Formensystem $f_1, \ldots, f_m$ gilt.

Nun gilt das Theorem in dem Falle, wo die vorgelegten Formen keine gemeinsame Nullstelle haben. In der That, bei dieser Annahme haben auch die binären Formen $f_1^{(n-2)}, \ldots, f_{m^{(n-2)}}^{(n-2)}$ keine gemeinsame Nullstelle; es ist daher jede binäre Form von x_1, x_2, deren Ordnung oberhalb einer gewissen Grenze liegt, insbesondere also auch die Form $x_1^{\varrho_1}$ und die Form $x_2^{\varrho_2}$ für genügend grosse Exponenten ϱ_1 und ϱ_2 congruent 0 nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$. Ebenso zeigt man, dass die Formen $x_3^{\varrho_3}, \ldots, x_n^{\varrho_n}$ bei genügend grossen Exponenten $\varrho_3, \ldots, \varrho_n$ congruent 0 sind, nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$. Hieraus folgt, dass eine jede Form der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, deren Ordnung die Zahl $\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n$ übersteigt, congruent 0 ist, nach eben jenem Modul, und damit ist die obige Behauptung bewiesen.

In dem zweiten Theil wird nun das Theorem allgemein bewiesen und zwar nehmen wir zu diesem Zwecke an, dass dasselbe für beliebige Formen von $n-1$ Veränderlichen bereits als richtig erkannt ist und zeigen dann, dass es auch für n Veränderliche gilt.

Setzen wir $x_1 = t x_2$, so gehen die Formen $f_1, \ldots, f_m, F, F', \ldots$ in Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$ über, deren Coefficienten ganze rationale Functionen des Parameters t sind. Diese Formen von $n-1$ Veränderlichen bezeichnen wir bezüglich mit $g_1, \ldots, g_m, G, G', \ldots$. Wenn wir jetzt dem Parameter t irgend einen bestimmten endlichen Werth ertheilen, so ist offenbar, dass jede Form der Reihe $G, G', \ldots$ für solche Werthe der Veränderlichen $x_2, \ldots x_n$ verschwindet, für welche die m Formen $g_1, \ldots, g_m$ sämmtlich gleich 0 sind. Es sei nun das Theorem für den Fall von $n-1$ Veränderlichen bewiesen und es sei für diesen Fall auch bereits erkannt, dass man die Zahl r jedenfalls unterhalb einer Grenze wählen darf, welche nur von den Ordnungen und der Anzahl der Formen $g_1, \ldots, g_m, G, G', \ldots$ und nicht von deren Coefficienten abhängt: dann wissen wir folgendes: Es giebt eine Zahl $r = \sigma_{12}$, so dass ein jedes Product $\Pi^{(\sigma_{12})}$ von σ_{12} Formen der Reihe $G, G', \ldots$ für jeden speciellen Werth von t eine Darstellung von der Gestalt

$$\Phi^{(\sigma_{12})} = b_1 g_1 + b_2 g_2 + \cdots + b_m g_m$$

gestattet, wo $b_1, \ldots, b_m$ ganze rationale homogene Functionen der $n-1$ Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$ sind. Betrachten wir in dieser Formel die Coefficienten u der Formen $b_1, \ldots, b_m$ als unbestimmte Grössen und vergleichen dann auf der linken und rechten Seite die Coefficienten der nämlichen Potenzen und Producte der Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$, so erhalten wir ein System von linearen nicht homogenen Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten u. Die Coefficienten in diesen linearen Gleichungen sind ganze rationale Functionen des Parameters t und wir wissen ausserdem, dass dieses System von linearen Gleichungen für jeden besonderen endlichen Werth von t Lösungen besitzt.

Es gilt nun der folgende leicht zu beweisende Hilfssatz:

Wenn ein System von linearen Gleichungen von der Gestalt

$$\begin{gathered} c_{11} u_1 + \cdots + c_{1p} u_p = c_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{q1} u_1 + \cdots + c_{qp} u_p = c_q \end{gathered}$$

vorgelegt ist, wo $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{qp}, c_1, \ldots, c_q$ ganze rationale Functionen eines Parameters t sind, für jeden besonderen Werth von t Auflösungen besitzt, so kann man für die Unbekannten $u_1, \ldots, u_p$ stets rationale Functionen von t bestimmen, derart, dass nach Einsetzung derselben die obigen Gleichungen bezüglich des Parameters t identisch erfüllt sind.

Wenden wir diesen Hilfssatz auf die oben erhaltenen Gleichungen an und setzen dann $t = \frac{x_1}{x_2}$, so ergiebt sich nach Fortschaffung der Nenner eine Congruenz von der Gestalt

$$\psi_{12} \Pi^{(\sigma_{12})} \equiv 0, \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

wo ψ_{12} eine binäre Form der beiden Veränderlichen x_1, x_2 ist, und wo $\Pi^{(\sigma_{12})}$ ein Product von irgend σ_{12} Formen der Reihe $F, F', \ldots$ bedeutet.

In gleicher Weise erhalten wir eine Congruenz von der Gestalt

$$\psi_{13} \Pi^{(\sigma_{13})} \equiv 0, \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

wo ψ_{13} eine binäre Form der beiden Veränderlichen x_1, x_3 ist und wo $\Pi^{(\sigma_{13})}$ ein Product von σ_{13} Formen der Reihe $F, F', \ldots$ bedeutet, und es sei schliesslich $\sigma_{n-1,n}$ eine ganze Zahl und $\psi_{n-1,n}$ eine Form der beiden Veränderlichen x_{n-1}, x_n derart, dass die Congruenz

$$\psi_{n-1,n} \Pi^{(\sigma_{n-1,n})} \equiv 0 \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

besteht. Da es nun offenbar nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen giebt, für welche die Formen $\psi_{12}, \psi_{13}, \ldots, \psi_{n-1,n}, f_1, \ldots, f_m$ sämmtlich verschwinden, so ist dieses Formensystem ein solches, für welches die Richtigkeit des Theorems bereits feststeht; es kann daher eine Zahl r gefunden werden, so dass die Congruenz

$$\Pi^{(r)} \equiv 0 \quad (\psi_{12}, \psi_{13}, \ldots, \psi_{n-1,n}, f_1, \ldots, f_m)$$

besteht. Mit Hilfe der obigen Congruenzen ergiebt sich hieraus

$$\Pi^{(\sigma+r)} \equiv 0, \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

wo σ die grösste der Zahlen $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots, \sigma_{n-1,n}$ bezeichnet

Da binäre Formen überhaupt nur eine endliche Anzahl von Nullstellen besitzen können, so gilt das Theorem nach dem ersten Theil des Beweises für den besonderen Fall $n = 2$ und somit auch allgemein für Formen von n Veränderlichen. Enthält nun die vorgelegte Reihe $F, F', \ldots$ unendlich viele Formen, so bestimme man — was nach Theorem I meiner oben citirten Arbeit stets möglich ist — eine Zahl μ derart, dass eine jede Form der Reihe $F, F', \ldots$ gleich einer linearen Combination der μ Formen $F, F', \ldots, F^{(\mu-1)}$ wird. Ist dann das Product von irgend r der Formen $F, F', \ldots, F^{(\mu-1)}$ nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$ congruent 0, so gilt offenbar das nämliche auch für jedes Product von r Formen der unendlichen Reihe $F, F', \ldots$ und somit ist das Theorem vollständig bewiesen.

Nach dem eben bewiesenen Theorem ist insbesondere die r^{te} Potenz irgend einer von jenen Formen $F, F', F'', \ldots$ congruent 0 nach dem Modul $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ — eine Thatsache, welche für den speciellen Fall zweier nicht homogenen Veränderlichen bereits von E. Netto*) ausgesprochen und bewiesen worden ist.

*) Vergl. Acta Mathematica Bd. 7, S. 101.

§ 4.

Der grundlegende Satz über die Invarianten, deren Verschwinden das Verschwinden aller übrigen Invarianten zur Folge hat.

Wir nehmen jetzt die am Anfang des vorigen Paragraphen unterbrochenen Entwickelungen über die Theorie der Invarianten einer Grundform oder eines Grundformensystems wieder auf und beweisen den folgenden grundlegenden Satz:

Wenn irgend μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ die Eigenschaft besitzen, dass das Verschwinden derselben stets nothwendig das Verschwinden aller übrigen Invarianten der Grundform zur Folge hat, so sind alle Invarianten ganze algebraische Functionen jener μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$.

Nach Voraussetzung sind die μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ Functionen der Coefficienten der Grundform von der Beschaffenheit, dass allemal, wenn man diesen Coefficienten solche besonderen Werthe ertheilt, welche die μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ zu 0 machen, nothwendig sämmtliche Invarianten der Grundform verschwinden, und daher giebt es dem allgemeinen in § 3 bewiesenen Theorem zufolge eine Zahl r derart, dass jedes Product $\Pi^{(r)}$ von irgend r oder mehr Invarianten der Grundform in der Gestalt

$$\Pi^{(r)} = a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_\mu I_\mu$$

darstellbar ist, wo $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ ganze rationale homogene Functionen der Coefficienten der Grundform sind. Nunmehr bezeichnen wir wie früher mit $i_1, \ldots, i_m$ die Invarianten eines vollen Invariantensystems und ferner mit v die grösste von den Gradzahlen dieser Invarianten: dann stellt sich offenbar eine jede beliebige Invariante i der Grundform, deren Grad $\geqq vr$ ist, als Summe von Producten $\Pi^{(r)}$ dar und es wird somit

$$i = a_1' I_1 + a_2' I_2 + \cdots + a_\mu' I_\mu,$$

wo $a_1', a_2', \ldots, a_\mu'$ wiederum ganze rationale homogene Functionen der Coefficienten der Grundform sind. Nach den Entwickelungen des Abschnittes V meiner oben citirten Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen"*) können in dieser Formel die Ausdrücke $a_1', a_2', \ldots, a_\mu'$ durch Invarianten bezüglich $i_1', i_2', \ldots, i_\mu'$ ersetzt werden, so dass sich eine Gleichung von der Gestalt

$$i = i_1' I_1 + i_2' I_2 + \cdots + i_\mu' I_\mu$$

ergiebt. Die Invarianten $i_1', i_2', \ldots, i_\mu'$ sind sämmtlich von niederem Grade in den Coefficienten der Grundform als die Invariante i; sie können ihrerseits wiederum in der nämlichen Weise durch lineare

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 36, S. 527.

Combination der Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ erhalten werden und dieses Verfahren lässt sich so lange fortsetzen, bis wir zu Invarianten gelangen, deren Grad $< \nu r$ ist. Wir denken uns sämmtliche linear unabhängige Invarianten, deren Grad $< \nu r$ ist, aufgestellt und bezeichnen dieselben mit $j_1, j_2, \ldots, j_w$. Für eine beliebige Invariante i der Grundform besteht dann ein System von w Gleichungen der folgenden Gestalt

$$\begin{aligned} ij_1 &= G_1^{(1)} j_1 + G_2^{(1)} j_2 + \cdots + G_w^{(1)} j_w, \\ ij_2 &= G_1^{(2)} j_1 + G_2^{(2)} j_2 + \cdots + G_w^{(2)} j_w, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ij_w &= G_1^{(w)} j_1 + G_2^{(w)} j_2 + \cdots + G_w^{(w)} j_w, \end{aligned}$$

wo $G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, \ldots, G_w^{(w)}$ ganze rationale Functionen der Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ bedeuten. Durch Elimination von $j_1, j_2, \ldots, j_w$ folgt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} G_1^{(1)} - i & G_2^{(1)} & \ldots & G_w^{(1)} \\ G_1^{(2)} & G_2^{(2)} - i & \ldots & G_w^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_1^{(w)} & G_2^{(w)} & \ldots & G_w^{(w)} - i \end{vmatrix} = 0,$$

welche zeigt, dass i eine **ganze** algebraische Function von $I_1, \ldots, I_\mu$ ist.

Es ist hiernach offenbar für das Studium der Invarianten einer Grundform von grösster Wichtigkeit, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu kennen, dass für diese Grundform die Invarianten sämmtlich gleich 0 sind; wir werden somit, wenn wir die N Coefficienten der Grundform in bekannter Weise als die Coordinaten eines Raumes von $N-1$ Dimensionen deuten, auf die Aufgabe geführt, dasjenige algebraische Gebilde Z in diesem Raume zu untersuchen, welches durch Nullsetzen aller Invarianten bestimmt ist. Bezeichnet wie früher $\varkappa$ die Anzahl der algebraisch unabhängigen Invarianten, so giebt es den früheren Betrachtungen zufolge genau $\varkappa$ Invarianten $I_1, \ldots, I_\varkappa$, durch deren Nullsetzen das algebraische Gebilde Z bereits völlig bestimmt ist; aus dem eben bewiesenen Satze folgt nun nothwendig $\mu \geqq \varkappa$ d. h. es ist nicht möglich, eine noch kleinere Zahl von Invarianten anzugeben, durch deren Nullsetzen das Gebilde Z ebenfalls schon bestimmt wird.

§ 5.

Das Verschwinden der sämmtlichen Invarianten einer binären Grundform.

Der eben in § 4 bewiesene Satz bildet den Kern der ganzen hier zu entwickelnden Theorie der algebraischen Invarianten. Wir wenden denselben zunächst auf die Theorie der binären Formen an; für diese lässt sich das algebraische Gebilde Z ohne besondere Schwierigkeit allgemein angeben, wie der folgende Satz lehrt:

Wenn alle Invarianten einer binären Grundform von der Ordnung $n = 2h + 1$ bezüglich $n = 2h$ gleich Null sind, so besitzt die Grundform einen $h + 1$-fachen Linearfactor und umgekehrt, wenn dieselbe einen $h + 1$-fachen Linearfactor besitzt, so sind sämmtliche Invarianten gleich Null.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, bilden wir für die vorgelegte Grundform

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

die folgenden Ueberschiebungen

$$F_1 = [a_0 a_2 - a_1^2] x_1^{2(n-2)} + \cdots,$$
$$F_2 = [a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2] x_1^{2(n-4)} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_h = \left[a_0 a_{2h} - \binom{2h}{1} a_1 a_{2h-1} + \cdots \pm \frac{1}{2} \binom{2h}{h} a_h^2\right] x_1^{2(n-2h)} + \cdots.$$

Wir stellen dann die Bedingungen dafür auf, dass die Formen $f, F_1, \ldots, F_h$ bezüglich $f, F_1, \ldots, F_{h-1}$ sämmtlich die nämliche Linearform als Factor gemein haben, was etwa auf folgende Weise geschehen kann. Es sei M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen n, $2(n-2)$, $2(n-4), \ldots, 2(n-2h)$ und man setze

$$M = mn = 2m_1(n-2) = \cdots = 2m_h(n-2h),$$

bezüglich

$$M = mn = 2m_1(n-2) = \cdots = 2m_{h-1}(n-2h+2);$$

je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Dann bilde man die beiden Formen

$$U = uf^m + u_1 F_1^{m_1} + \cdots + u_h F_h^{m_h},$$
$$V = vf^m + v_1 F_1^{m_1} + \cdots + v_h F_h^{m_h},$$

bezüglich

$$U = uf^m + u_1 F_1^{m_1} + \cdots + u_{h-1} F_{h-1}^{m_{h-1}},$$
$$V = vf^m + v_1 F_1^{m_1} + \cdots + v_{h-1} F_{h-1}^{m_{h-1}},$$

wo $u, u_1, \ldots, u_h$ und $v, v_1, \ldots, v_h$ unbestimmte Parameter sind. Die Resultante dieser beiden Formen U, V, ist von der Gestalt

$$R(U, V) = J_1 P_1 + \cdots + J_\mu P_\mu,$$

wo $P_1, \ldots, P_\mu$ gewisse Potenzen und Producte der unbestimmten Parameter u, v und wo $J_1, \ldots, J_\mu$ Invarianten der Grundform sind. Die Gleichungen

$$J_1 = 0, \ldots, J_\mu = 0$$

stellen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass die Formen $f, F_1, \ldots, F_h$ bezüglich die Formen $f, F_1, \ldots, F_{h-1}$ sämmtlich die nämliche Linearform als Factor enthalten. Denn wenn das letztere nicht der Fall wäre, so könnte man stets den Parametern u, v solche numerische Werthe ertheilen, dass die beiden Formen U, V keinen gemeinsamen Factor enthielten und dieser Umstand würde der Bedingung $R(U, V) = 0$ widersprechen. Wir transformiren jetzt die binäre Grundform f mittelst der Substitution

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$
$$y_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$

wo $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ diejenige Linearform bezeichnet, welche eben in jenen Formen als gemeinsamer Factor enthalten ist und wo α_1, α_2 so gewählt sind, dass die Determinante $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ von Null verschieden ausfällt. Die Coefficienten der transformirten Form g bezeichnen wir mit $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Da nun die transformirte Form g und ihre Ueberschiebungen sämmtlich den Factor y_2 besitzen, so müssen ihre Coefficienten nothwendig folgende Gleichungen befriedigen:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,\\ b_0 b_2 - b_1^2 &= 0,\\ &\cdots\cdots\\ b_0 b_{2h} - \binom{2h}{1} b_1 b_{2h-1} + \cdots \pm \tfrac{1}{2}\binom{2h}{h} b_h^2 &= 0 \end{aligned}$$

bezüglich

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,\\ b_0 b_2 - b_1^2 &= 0,\\ &\cdots\cdots\\ b_0 b_{2h-2} - \binom{2h-2}{1} b_1 b_{2h-3} + \cdots \pm \tfrac{1}{2}\binom{2h-2}{h-1} b_{h-1}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Fügen wir im Falle eines geraden n noch die Gleichung $F_h = 0$ hinzu, so folgen für ein ungerades sowie für ein gerades n die Gleichungen

$$b_0 = 0,\ b_1 = 0, \ldots, b_h = 0$$

und hieraus ergiebt sich, dass die Form g den Factor y_2 wenigstens $h+1$-fach enthält. Es ist selbstverständlich, dass in besonderen Fällen die Berechnung der Bedingungen dafür, dass $f, F_1, \ldots, F_h$ einen gemeinsamen Factor haben, sich erheblich abkürzen lässt.

Der zweite Theil des Satzes wird unmittelbar als richtig erkannt, wenn wir die Grundform so transformiren, dass dadurch die ersten $h+1$ Coefficienten $b_0, b_1, \ldots, b_h$ sämmtlich gleich 0 werden. In der That, wenn $e_{h+1}, e_{h+2}, \ldots, e_n$ beliebige ganze positive Zahlen bedeuten, so lautet das allgemeinste Glied, welches aus den übrigen Coefficienten $b_{h+1}, b_{h+2}, \ldots, b_n$ gebildet werden kann, wie folgt

$$b_{h+1}^{e_{h+1}} b_{h+2}^{e_{h+2}} \ldots b_n^{e_n};$$

es ist aber für dieses Glied das doppelte Gewicht nothwendig grösser als das n-fache des Grades; jedes Glied einer Invariante enthält daher nothwendig mindestens einen der Coefficienten $b_0, b_1, \ldots, b_h$ als Factor und hat folglich für unsere besondere Grundform den Werth 0.

Die vorhin aufgestellten Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ bezüglich $I_1, \ldots, I_\mu, F_h$ bilden, wie eben gezeigt worden ist, ein System von Invarianten der Grundform f von der Art, dass das Verschwinden dieser Invarianten nothwendig das Verschwinden aller Invarianten der Grundform zur Folge hat, und *nach dem in § 4 bewiesenen Satze sind mithin sämmtliche Invarianten der Grundform f ganze algebraische Functionen jener eben gefundenen. Zu der Herstellung dieses Systems von Invarianten haben wir lediglich Resultantenbildungen verwandt.*

§ 6.

Anwendungen auf besondere binäre Grundformen und Grundformensysteme.

Die allgemeinen bisher von uns erhaltenen Resultate finden in allen besonderen berechneten Fällen die schönste Bestätigung, wie folgende Beispiele zeigen:

Für die binäre Form 5ter Ordnung erfüllen die 3 Invarianten A, B, C von den Graden bezüglich 4, 8, 12 die Bedingungen des in § 4 bewiesenen Satzes. Denn das gleichzeitige Verschwinden derselben bedingt nothwendig das Auftreten eines dreifachen Linearfactors in f und dieser Umstand wiederum hat, wie der in § 5 bewiesene Satz lehrt, zur Folge, dass alle Invarianten der binären Form gleich Null sind. Es müssen daher alle Invarianten ganze algebraische Functionen von A, B, C sein und in der That enthält das volle System nur noch eine weitere Invariante nämlich die schiefe Invariante R, deren Quadrat bekanntlich eine ganze rationale Function von A, B, C ist.

Die binäre Form 6ter Ordnung besitzt 4 Invarianten A, B, C, D von den Graden beziehentlich 2, 4, 6, 10, deren gleichzeitiges Verschwinden nothwendig das Auftreten eines vierfachen Linearfactors bedingt. Dieser Umstand hat wiederum zur Folge, dass alle Invarianten der Form gleich Null sind; in der That ist entsprechend unserem in § 4 bewiesenen Satze die noch übrige schiefe Invariante R der Grundform eine ganze algebraische Function von A, B, C, D, nämlich gleich der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Function dieser 4 Invarianten.

Wir betrachten ferner eine binäre Grundform f von der 5ten Ordnung und eine lineare Grundform l. Wenn die 6 simultanen Invarianten A, B, C, $(f, l^5)_5$, $(h, l^6)_6$, $(i, l^2)_2$, zugleich verschwinden, wo $h = (f, f)_2$ und $i = (f, f)_4$ gesetzt ist, so folgt: entweder tritt die Linearform l 3-fach als Factor in f auf oder die Form f enthält irgend einen 3-fachen Factor, während die Coefficienten der Linearform l gleich 0 sind, oder die Coefficienten der Form f sind sämmtlich 0. In allen diesen 3 Fällen sind, wie man leicht erkennt, sämmtliche Simultaninvarianten der beiden Grundformen gleich 0 und somit hat also das Verschwinden der genannten 6 Simultaninvarianten das Verschwinden aller übrigen Simultaninvarianten zur Folge. Hieraus folgt nach dem in § 4 bewiesenen Satze, dass alle Simultaninvarianten der beiden Grundformen f und l ganze algebraische Functionen der genannten 6 Invarianten sind.

Da die in Rede stehenden Simultaninvarianten mit dem System der Invarianten und Covarianten einer einzigen binären Grundform 5ter Ordnung identisch sind, so folgt, dass sich sämmtliche 23 invariante Formen einer binären Grundform 5ter Ordnung als ganze algebraische Functionen der 3 Invarianten A, B, C und der 3 Covarianten f, h, i ausdrücken lassen. Berücksichtigen wir noch, dass alle Invarianten und Covarianten der binären Grundform 5ter Ordnung rationale Functionen von f, h, i, $(f, h)_1$, $(f, h)_3$ sind, so kann nach unseren allgemeinen in Abschnitt I ausgeführten Entwicklungen aus diesen Angaben allein das bekannte System jener 23 invarianten Formen berechnet werden. Man hat zu dem Zwecke nur nöthig, alle diejenigen Functionen aufzustellen, welche g a n z e algebraische Functionen von A, B, C, f, h, i und zugleich rationale Functionen der Covarianten f, h, i, $(f, h)_1$, $(f, h)_3$ sind.

Um die simultanen Invarianten zweier binären cubischen Formen f, g aufzustellen, bilden wir eine lineare Combination $\varkappa f + \lambda g$ derselben und entwickeln die Discriminante dieser Form nach den unbestimmten Parametern $\varkappa$ und λ, wie folgt:

$$D(\varkappa f + \lambda g) = D_0 \varkappa^4 + D_1 \varkappa^3 \lambda + D_2 \varkappa^2 \lambda^2 + D_3 \varkappa \lambda^3 + D_4 \lambda^4.$$

Die 5 Invarianten D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sind offenbar nur dann sämmtlich gleich null, wenn die cubischen Formen f und g beide den nämlichen Linearfactor zweifach enthalten und dieser Umstand wiederum hat zur Folge, dass auch alle übrigen Simultaninvarianten null sind. Unserem Satze zufolge müssen daher alle simultanen Invarianten der beiden cubischen Formen f und g ganze algebraische Functionen von D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sein. Das volle Invariantensystem enthält nun ausser diesen 5 Invarianten nur noch 2 weitere Invarianten, nämlich die Ueberschiebung $(f, g)_3$ und die Resultante R der beiden Formen;

man findet in der That durch Rechnung bestätigt, dass diese beiden Invarianten ganze algebraische Functionen jener 5 Invarianten sind.

Um das simultane System einer cubischen Form f, einer quadratischen Form g und einer linearen Form l zu untersuchen, bezeichnen wir mit d_1, d_2, r bezüglich die Discriminanten von f und g und die Resultante beider Formen; ferner bilden wir die Invarianten $(f, l^3)_3$, $(h, l^2)_2$, $(g, l^2)_2$ und $(h, g)_2$, wo h die Hesse'sche Covariante von f bezeichnet. Wenn diese 7 Simultaninvarianten sämmtlich gleich 0 sind, so nehmen, wie man ohne Schwierigkeit zeigt, die 3 Grundformen nothwendig die Gestalt an

$$f = c p^2 q, \quad g = c' p^2, \quad l = c'' p,$$

wo p, q lineare Formen und c, c', c'' gleich 0 oder von 0 verschiedene Constante sind. Da nun für diese besonderen Grundformen offenbar sämmtliche Simultaninvarianten gleich 0 sind, so folgt mit Hilfe des in § 4 bewiesenen Satzes, dass sämmtliche Simultaninvarianten der 3 Grundformen ganze algebraische Functionen jener 7 Simultaninvarianten sind, oder, was auf das Nämliche hinausläuft, dass sämmtliche simultane Invarianten und Covarianten einer cubischen Form f und einer quadratischen Form g ganze algebraische Functionen der 4 Invarianten d_1, d_2, r, $(h, g)_2$ und der 3 Formen f, h, g sind.

Wir behandeln endlich noch ein allgemeineres Beispiel, nämlich das System von ν binären linearen Formen

$$l_1 = a_1 x + b_1 y, \quad l_2 = a_2 x + b_2 y, \ldots, l_\nu = a_\nu x + b_\nu y.$$

Das volle Invariantensystem besteht aus den Determinanten

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Wir bilden die beiden binären Formen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varphi = a_1 \xi^{\nu-1} + a_2 \xi^{\nu-2} \eta + \cdots + a_\nu \eta^{\nu-1},$$
$$\psi = b_1 \xi^{\nu-1} + b_2 \xi^{\nu-2} \eta + \cdots + b_\nu \eta^{\nu-1}$$

und berechnen die Functionaldeterminante derselben

$$(\varphi, \psi)_1 = p_0 \xi^{2\nu-4} + p_1 \xi^{2\nu-5} \eta + \cdots + p_{2\nu-4} \eta^{2\nu-4}.$$

Die Coefficienten $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ sind als lineare Combinationen der Determinanten p_{ik} selber Invarianten der linearen Grundformen, und man erkennt leicht, dass, wenn diese Invarianten $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ sämmtlich Null sind, nothwendig entweder alle Coefficienten der Form φ oder diejenigen von ψ verschwinden oder beide Formen bis auf einen numerischen Factor mit einander übereinstimmen. In allen diesen Fällen sind sämmtliche Determinanten p_{ik} gleich Null und hieraus folgt mit Hülfe unseres Satzes, dass die Determinanten p_{ik} ganze algebraische Functionen von $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ sind*), woraus zugleich die Unabhängigkeit der letzteren $2\nu - 3$ Invarianten geschlossen werden kann.

§ 7.

Systeme von simultanen Grundformen.

Um die in § 5 für eine binäre Grundform erhaltenen Resultate auf ein System simultaner binärer Grundformen auszudehnen, verfahren wir, wie folgt: wir betrachten die beiden binären Formen von der nämlichen Ordnung n

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n,$$

$$g = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + b_n x_2^n$$

und bilden dann eine lineare Combination $\lambda f + \mu g$ derselben, wo λ und μ 2 Parameter bedeuten. Wenn nun die Invarianten von $\lambda f + \mu g$ für alle Werthe λ und μ verschwinden, so muss nach dem in § 5 bewiesenen Satze die Form $\lambda f + \mu g$ nothwendigerweise einen $\frac{n}{2} + 1$ bezüglich $\frac{n+1}{2}$ Ueber die vollen Invariantensysteme. für Werthe auch die Parameter λ und μ annehmen mögen und hieraus folgt leicht, dass f und g selber die nämliche Linearform als $\frac{n}{2} + 1$ bezüglich $\frac{n+1}{2}$-fachen Factor enthalten müssen, ein Umstand, welcher seinerseits zur Folge hat, dass auch sämmtliche Simultaninvarianten der beiden Formen f und g gleich 0 sind d. h.

Wenn $J_1, \ldots, J_\mu$ solche Invarianten der einen Grundform f sind, durch welche sich alle übrigen Invarianten dieser Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen, so gelangt man von diesen Invarianten $J_1, \ldots, J_\mu$ durch wiederholte Anwendung des Aronhold'schen Processes

$$b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + b_n \frac{\partial}{\partial a_n}$$

zu einem System von Simultaninvarianten, welches die Eigenschaft besitzt, dass jede Simultaninvariante der beiden Formen f und g eine ganze algebraische Function der Simultaninvarianten dieses Systems ist.

Durch diesen Satz tritt eine neue fundamentale Eigenschaft des Aronhold'schen Processes zu Tage.

---

*) Das nämliche Resultat habe ich auf einem völlig anderen Wege erhalten in meiner Arbeit: „Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functionaldeterminante"; Mathematische Annalen Bd. 33, S. 233.

Der besondere Fall $n = 3$ ist bereits oben behandelt worden. Im Fall zweier biquadratischer Grundformen haben wir die beiden Invarianten i und j in Betracht zu ziehen und setzen

$$i(\lambda f + \mu g) = i_0 \lambda^2 + i_1 \lambda \mu + i_2 \mu^2,$$
$$j(\lambda f + \mu g) = j_0 \lambda^3 + j_1 \lambda^2 \mu + j_2 \lambda \mu^2 + j_3 \mu^3.$$

Es folgt dann aus entsprechenden Gründen wie vorhin, dass jede Simultaninvariante der beiden Formen f und g eine ganze algebraische Function der 7 Invarianten $i_0, i_1, i_2, j_0, j_1, j_2, j_3$ ist und diese 7 Simultaninvarianten sind algebraisch von einander unabhängig, da die Zahl $\varkappa$ für das betrachtete Grundformensystem den Werth 7 besitzt.

Setzt man an Stelle der binären Form g die n^{te} Potenz einer Linearform, so gewinnen wir das folgende Resultat:

Aus den Invarianten $J_1, \ldots, J_\mu$ der binären Grundform f ergiebt sich durch wiederholte Anwendung des Processes

$$x_2^n \frac{\partial}{\partial a_0} - x_1 x_2^{n-1} \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots \pm x_1^n \frac{\partial}{\partial a_n}$$

ein System von Covarianten, welches die Eigenschaft besitzt, dass alle übrigen Covarianten der Grundform ganze algebraische Functionen der Covarianten des erhaltenen Systems und der Invarianten $J_1, \ldots, J_\mu$ sind.

Beispielsweise erhält man für die binäre cubische Grundform f durch ein- und zweimalige Anwendung jenes Processes auf ihre Discriminante D die beiden Covarianten $t = (f, h)_1$ und f^2; in der That ist die Hesse'sche Covariante $h = (f, f)_2$ eine ganze algebraische Function von D, t und f, da ja ihre dritte Potenz eine ganze rationale Function dieser invarianten Bildungen wird. Wenden wir ferner auf die Invarianten i und j einer biquadratischen binären Form j jenen Process an, so gelangen wir zu den Covarianten f und $h = (f, f)_2$ und in der That ist das Quadrat der allein noch übrigen Covariante $t = (f, h)_1$ eine ganze rationale Function von i, j, f und h.

Sämmtliche Ueberlegungen lassen sich leicht auf die Theorie der Combinanten von zwei oder mehr binären Grundformen übertragen. So zeigt sich, dass die Combinantinvarianten der beiden Formen f und g dann und nur dann sämmtlich verschwinden, wenn unter den Formen des Formenbüschels $\lambda f + \mu g$ sich zwei Formen befinden, von denen die eine einen r-fachen Linearfactor besitzt und die andere diesen nämlichen Linearfactor $n + 1 - r$-fach enthält und hieraus folgt der Satz:

Eine jede Combinantinvariante zweier binärer Formen f, g ist eine ganze algebraische Function der Invarianten ihrer Functionaldeterminante $(f, g)_1$.

Die Ausdehnung der bisherigen Entwicklungen auf die Theorie der Formen mit mehr Veränderlichen ist ohne weiteres nur in dem

Maasse möglich, als man die Besonderheit derjenigen Formen anzugeben weiss, welche die Eigenschaft besitzen, dass alle ihre Invarianten 0 sind. So ist beispielsweise im Falle einer ternären Form dritter Ordnung das Verschwinden aller Invarianten die Bedingung für das Auftreten eines Rückkehrpunktes in der durch Nullsetzen der Form dargestellten Curve. Wenn wir nun 2 ternäre cubische Formen linear combiniren und die beiden Invarianten

$$S(\lambda f + \mu g) = S_0 \lambda^4 + \cdots + S_4 \mu^4,$$
$$T(\lambda f + \mu g) = T_0 \lambda^6 + \cdots + T_6 \mu^6$$

bilden, so folgt durch die entsprechende Schlussweise, dass alle simultanen Invarianten der beiden Formen f und g ganze algebraische Functionen der 12 Invarianten $S_0, \ldots, S_4$, $T_0, \ldots, T_6$ sind und da die Zahl $\varkappa$ ebenfalls gleich 12 ist, so erkennen wir zugleich, dass diese 12 Invarianten von einander algebraisch unabhängig sind.

Auch die ternäre biquadratische Form kann noch auf dem nämlichen Wege durch Rechnung behandelt werden, wogegen die Erledigung der entsprechenden Probleme für höhere Fälle neuer und allgemeinerer Methoden*) bedarf.

III.

Der Grad des Invariantenkörpers.

§ 8.

Darstellung des asymptotischen Werthes der Zahl $\varphi(\sigma)$.

In § 2 ist ein System von Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ bestimmt worden, von der Beschaffenheit, dass alle übrigen Invarianten der Grundform sich ganz und algebraisch durch $J_1, \ldots, J_\varkappa$ und rational durch $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ ausdrücken lassen. Die irreducible Gleichung, welcher J genügt, ist von der Gestalt

$$J^k + G_1 J^{k-1} + G_2 J^{k-2} + \cdots + G_k = 0,$$

wo $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Der Grad k dieser Gleichung ist zugleich der Grad des Invariantenkörpers.

Um zunächst für eine binäre Grundform f von der n^{ten} Ordnung die Zahl k zu bestimmen, betrachten wir die Anzahl $\varphi(\sigma)$ derjenigen Invarianten der Grundform f, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl σ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Die Berechnung dieser Zahl $\varphi(\sigma)$ kann auf 2 verschiedenen Wegen geschehen

*) Vgl. die Abschnitte IV und V dieser Arbeit.

und die Vergleichung der auf beiden Wegen gefundenen Resultate für den Grenzfall $\sigma = \infty$ ergiebt dann den gesuchten Werth von k.

Nach § 2 ist jede Invariante i in der Gestalt

$$i = \frac{\mathsf{r}_1 J^{k-1} + \mathsf{r}_2 J^{k-2} + \cdots + \mathsf{r}_k}{D}$$

darstellbar, wo $\mathsf{r}_1, \ldots, \mathsf{r}_k$, D ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_k$ sind. Aus dieser Darstellungsweise können wir eine obere und eine untere Grenze für die Zahl $\varphi(\sigma)$ ableiten. Beachten wir nämlich dass im vorliegenden Falle die Zahl $\varkappa$ den Werth $n-2$ hat und bezeichnen wir mit $\nu, \nu_1, \ldots, \nu_{n-2}, \delta$ die Grade der Invarianten $J, J_1, \ldots, J_{n-2}$, D und mit $\lambda(\sigma)$ die Anzahl der Systeme von positiven ganzen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-2}$, welche der Ungleichung

$$\nu_1 \xi_1 + \nu_2 \xi_2 + \cdots + \nu_{n-2} \xi_{n-2} \leqq \sigma$$

genügen, so finden wir leicht

$$\lambda(\sigma) + \lambda(\sigma - \nu) + \lambda(\sigma - 2\nu) + \cdots + \lambda(\sigma - [k-1]\nu) \leqq \varphi(\sigma),$$

$$\varphi(\sigma) \leqq \lambda(\sigma+\delta) + \lambda(\sigma+\delta-\nu) + \lambda(\sigma+\delta-2\nu) + \cdots + \lambda(\sigma+\delta-[k-1]\nu).$$

Nun gilt für die eben definirte Zahl $\lambda(\sigma)$ die Formel

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\lambda(\sigma)}{\sigma^{n-2}} = \frac{1}{n-2!} \frac{1}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}}$$

und somit folgt aus obiger Ungleichung

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^{n-2}} = \frac{1}{n-2!} \frac{k}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}}.$$

§ 9.

Berechnung des Grades k des Invariantenkörpers für eine binäre Grundform n^{ter} Ordnung.

Wir können eben diesen Grenzwerth noch auf einem anderen Wege, nämlich mit Hilfe derjenigen Methode bestimmen, welche von Cayley und Sylvester zur Abzählung der Invarianten von vorgeschriebenen Graden benutzt worden ist. Bekanntlich ist die Anzahl der linear unabhängigen Invarianten vom Grade σ in den Coefficienten der binären Grundform n^{ter} Ordnung gleich dem Coefficienten von $r^{\frac{1}{2}n\sigma}$ in der Entwicklung des Ausdruckes

$$f(r) = \frac{(1-r^{\sigma+1})(1-r^{\sigma+2})\ldots(1-r^{\sigma+n})}{(1-r^2)(1-r^3)\cdots(1-r^n)} \text{ *)}.$$

*) Vgl. Faà di Bruno, Theorie der binären Formen Leipzig 1881, S. 194.

Dieser Ausdruck kann in die Gestalt

$$f(r) = f_0(r) + r^\sigma f_1(r) + r^{2\sigma} f_2(r) + \cdots + r^{n\sigma} f_n(r)$$

gebracht werden, wo $f_0(r)$, $f_1(r)$, $\ldots$, $f_n(r)$ rationale Functionen von r bedeuten, welche durch die Identität

$$u^n f_0 + u^{n-1} f_1 + \cdots + f_n = \frac{(u-r)(u-r^2)\ldots(u-r^n)}{(1-r^2)(1-r^3)\ldots(1-r^n)}$$

definirt sind. Zur Ausführung der Rechnung bedarf es der Unterscheidung zwischen ungerader und gerader Ordnung n.

Es sei erstens die Ordnung n eine ungerade Zahl. Da es in diesem Falle nur Invarianten von geradem Grade giebt, so erhalten wir offenbar die gesuchte Zahl $\varphi(\sigma)$, wenn wir den Coefficienten

$$\begin{array}{llllll}
\text{von } r^n & \text{in den Ausdruck} & f_0 + r^2 f_1 + r^4 f_2 + \cdots, \\
\text{,,} \quad r^{2n} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & f_0 + r^4 f_1 + r^8 f_2 + \cdots, \\
\text{,,} \quad r^{3n} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & f_0 + r^6 f_1 + r^{12} f_2 + \cdots, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\text{,,} \quad r^{\frac{\sigma}{2} n} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & f_0 + r^\sigma f_1 + r^{2\sigma} f_2 + \cdots
\end{array}$$

bestimmen und die Summe dieser Coefficienten bilden oder, was auf das Nämliche hinausläuft, wenn wir die Coefficienten

$$\begin{array}{llllll}
\text{von } r^n, & r^{2n}, & r^{3n}, & \ldots, & r^{\frac{\sigma}{2} n} & \text{in } f_0, \\
\text{,,} \quad r^{n-2}, & r^{2(n-2)}, & r^{3(n-2)}, & \ldots, & r^{\frac{\sigma}{2}(n-2)} & \text{,,} \quad f_1, \\
\text{,,} \quad r^{n-4}, & r^{2(n-4)}, & r^{3(n-4)}, & \ldots, & r^{\frac{\sigma}{2}(n-4)} & \text{,,} \quad f_2, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\text{,,} \quad r, & r^2, & r^3, & \ldots, & r^{\frac{\sigma}{2}} & \text{,,} \quad f_{\frac{n-1}{2}}
\end{array}$$

sämmtlich zu einander addiren. Verstehen wir nun unter ε_n eine primitive n^{te} Einheitswurzel, so ist, wie man sieht, die Summe der Coefficienten von r^n, r^{2n}, r^{3n}, $\ldots$, $r^{\frac{\sigma}{2} n}$ in f_0 gleich dem n^{ten} Theil der Summe der ersten $\frac{\sigma}{2} n$ Coefficienten in der Entwicklung des Ausdruckes

$$f_0'(r) = f_0(r) + f_0(\varepsilon_n r) + f_0(\varepsilon_n^2 r) + \cdots + f_0(\varepsilon_n^{n-1} r).$$

Verstehen wir ferner unter ε_{n-2} eine primitive $n-2^{\text{te}}$ Einheitswurzel, so ist die Summe der betreffenden Coefficienten in f_1 gleich dem $n-2^{\text{ten}}$ Theile der Summe der ersten $\frac{\sigma}{2}(n-2)$ Coefficienten in der Entwicklung des Ausdruckes

$$f_1'(r) = f_1(r) + f_1(\varepsilon_{n-2} r) + f_1(\varepsilon_{n-2}^2 r) + \cdots + f_1(\varepsilon_{n-2}^{n-3} r).$$

Endlich werde

$$f'_{\frac{n-1}{2}}(r) = f_{\frac{n-1}{2}}(r)$$

gesetzt. Wenn wir jetzt für den Parameter r in den Ausdrücken $f_0', f_1', \ldots, f'_{\frac{n-1}{2}}$ bezüglich die Grössen

$$t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n}},\quad t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n-2}},\ \ldots,\ t^{1\cdot3\cdot5\cdots n}$$

einsetzen, so erkennen wir, dass die gesuchte Zahl $\varphi(\sigma)$ gleich der Summe der ersten $\frac{\sigma}{2}\,1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,n$ Coefficienten in der Entwicklung des Ausdruckes

$$h(t) = \frac{1}{n} f_0'\left(t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n}}\right) + \frac{1}{n-2} f_1'\left(t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n-2}}\right) + \cdots + f'_{\frac{n-1}{2}}\left(t^{1\cdot3\cdot5\cdots n}\right)$$

wird.

Aus einem bekannten Satze von Abel lässt sich leicht die folgende Thatsache ableiten:

Wenn die Coefficienten einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

von der Beschaffenheit sind, dass, unter $\varkappa$ eine ganze Zahl verstanden, der Ausdruck

$$\frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_\varrho}{\varrho^\varkappa}$$

für unendlich wachsende ϱ sich einer endlichen Grenze nähert, so ist diese endliche Grenze

$$\frac{1}{\varkappa!}\, \underset{t=1}{L}\, [(1-t)^\varkappa\, \mathfrak{P}(t)].$$

Mit Hilfe dieses Satzes findet man

$$\underset{\sigma=\infty}{L}\, \frac{\varphi(\sigma)}{\left(\frac{\sigma}{2}\,1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,n\right)^{n-2}} = \frac{1}{(n-2)!}\, \underset{t=1}{L}\, [(1-t)^{n-2}\, h(t)].$$

Falls nun $n > 3$ ist, kann

$$h(t) = \frac{1}{n} f_0\left(t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n}}\right) + \frac{1}{n-2} f_1\left(t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n-2}}\right) + \cdots + f_{\frac{n-1}{2}}\left(t^{1\cdot3\cdot5\cdots n}\right) + h'(t)$$

gesetzt werden, wo $h'(t)$ eine solche rationale Function von t bedeutet, dass der Ausdruck $(1-t)^{n-3}\, h'(t)$ in der Grenze für $t=1$ verschwindet. Ferner ist für einen beliebigen Index i

$$(1-t)^{n-1} f_i(r) = \frac{g_i(r)}{\left[2\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]\left[3\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]\cdots\left[n\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]},$$

wo zur Abkürzung

$$[M] = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{M-1}$$

gesetzt ist und wo die Zeichen $g_i(r)$ rationale Functionen von r bedeuten, welche durch die Identität

$$(u-r)(u-r^2)\cdots(u-r^n) = g_0(r)\,u^n + g_1(r)\,u^{n-1} + \cdots + g_n(r)$$

definirt sind. Nun führt eine einfache Rechnung zu folgender Formel

$$\underset{t=1}{L}\,[1-t)^{n-2}\,h(t)]$$

$$= \sum \frac{1}{n-2i}\,\frac{g_i(1)\left[\frac{dN(t)}{dt}\right]_{t=1} - \left[\frac{dg_i(r)}{dr}\right]_{r=1}\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\,N(1)}{N^2(1)},$$

wo die Summe über die Zahlen $i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}$ zu erstrecken ist und wo zur Abkürzung

$$N(t) = \left[2\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]\left[3\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]\cdots\left[n\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]$$

gesetzt ist und hieraus folgt durch geeignete Umformung der Summe rechter Hand

$$\underset{t=1}{L}\,[(1-t)^{n-2}\,h(t)]$$

$$= -\frac{1}{2\,.\,n!\,(1.3.5\ldots n)^{n-2}}\sum(-1)^i\binom{n}{i}(n-2i)^{n-3},$$

wo die Summe wiederum über die Zahlen $i = 0, 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$ zu erstrecken ist.

Die Vergleichung mit der am Schlusse des § 8 erhaltenen Formel liefert *das Resultat*

$$\frac{k}{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{n-2}} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{n!}\sum^{i}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3}.\ ^{*)}$$

$$\left(i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}\right).$$

Die eben für den Grad k des Invariantenkörpers gewonnene Formel wird im Falle einer binären Grundform 5ter Ordnung leicht bestätigt. Da nämlich die 3 Invarianten A, B, C bezüglich von den Graden 4, 8, 12 sind, so haben wir $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 8$, $\nu_3 = 12$ zu setzen und es ergiebt sich dann $k = 2$. In der That genügt die schiefe Invariante R einer Gleichung 2ten Grades und durch diese 4 Invarianten A, B, C, R ist der Invariantenkörper völlig bestimmt.

Es sei zweitens die Ordnung n eine gerade Zahl. Wir erhalten dann in entsprechender Weise wie vorhin die gesuchte Zahl $\varphi(\sigma)$, wenn wir die Coefficienten

---

*) Diese Formel, sowie die entsprechende für eine gerade Ordnung n habe ich bereits in den Berichten der Gesellschaft der Naturforscher und Aerzte, Halle 1891 mitgetheilt.

$$\begin{array}{lllllll}
\text{von } r^0, & r^{1\cdot\frac{n}{2}}, & r^{2\cdot\frac{n}{2}} & r^{3\cdot\frac{n}{2}}, & \ldots, r^{\sigma\cdot\frac{n}{2}} & \text{in } f_0, \\
\text{,,} \quad r^0, & r^{1\left(\frac{n}{2}-1\right)}, & r^{2\left(\frac{n}{2}-1\right)}, & r^{3\left(\frac{n}{2}-1\right)}, & \ldots, r^{\sigma\left(\frac{n}{2}-1\right)} & \text{,,} \quad f_1, \\
\text{,,} \quad r^0, & r^{1\left(\frac{n}{2}-2\right)}, & r^{2\left(\frac{n}{2}-2\right)}, & r^{3\left(\frac{n}{2}-2\right)}, & \ldots, r^{\sigma\left(\frac{n}{2}-2\right)} & \text{,,} \quad f_2, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\text{,,} \quad r^0, & r^1, & r^2, & r^3, & \ldots, r^\sigma, & \text{,,} \quad f_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}
\end{array}$$

sämmtlich zu einander addiren. Mit Hilfe der primitiven Einheitswurzeln $\varepsilon_{\frac{n}{2}}, \varepsilon_{\frac{n}{2}-1}, \ldots$ von den Graden $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1, \ldots$ gelangen wir entsprechend wie vorhin zu den Functionen $f_0', f_1', \ldots, f'_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}$ und wenn wir in diesen Functionen für den Parameter r bezüglich die Grössen $t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}}}, t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-1}}, \ldots, t^{\frac{n}{2}!}$ einsetzen, so erkennen wir, dass die gesuchte Zahl $\varphi(\sigma)$ gleich der Summe der ersten $\sigma\frac{n}{2}!$ Coefficienten in der Entwicklung des Ausdruckes

$$h(t) = \frac{1}{\frac{n}{2}} f_0'\left(t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}}}\right) + \frac{1}{\frac{n}{2}-1} f_1'\left(t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-1}}\right) + \cdots + f'_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(t^{\frac{n}{2}!}\right)$$

ist und hieraus folgt dann durch dieselbe Schlussweise, wie vorhin

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi(\sigma)}{\left(\sigma\frac{n}{2}!\right)^{n-2}} = \frac{1}{(n-2)!} \underset{t=1}{L} \left[(1-t)^{n-2} h(t)\right].$$

Falls nun $n > 4$ ist, kann wiederum

$$h(t) = \frac{1}{\frac{n}{2}} f_0\left(t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}}}\right) + \frac{1}{\frac{n}{2}-1} f_1\left(t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-1}}\right) + \cdots + f_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(t^{\frac{n}{2}!}\right) + h'(t)$$

gesetzt werden, wo $h'(t)$ eine solche rationale Function von t bedeutet, dass der Ausdruck $(1-t)^{n-2} h'(t)$ in der Grenze für $t = 1$ verschwindet. Ferner ist für einen beliebigen Index i unter Benutzung der oben erklärten Abkürzungen

$$(1-t)^{n-1} f_i(r) = \frac{g_i(r)}{\left[2 \cdot \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-i}\right]\left[3 \cdot \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-i}\right] \cdots \left[n \cdot \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-i}\right]}.$$

Bezeichnen wir den Nenner des Ausdruckes rechter Hand mit $N(t)$, so wird

$$\underset{t=1}{L}\left[1-t)^{n-2} h(t)\right]$$

$$= \sum \frac{1}{n-2i} \frac{g_i(1)\left[\frac{dN(t)}{dt}\right]_{t=1} - \left[\frac{dg_i(r)}{dr}\right]_{r=1} \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-i} N(1)}{N^2(1)}$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot n!\left(\frac{n}{2}!\right)^{n-2}} \sum (-1)^i \binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3},$$

wo die Summe über die Zahlen $i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ zu erstrecken ist.

Die Vergleichung mit der am Schlusse des § 8 erhaltenen Formel liefert *das Resultat*

$$\frac{k}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n!}\sum^{i}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3}.$$

$$\left(i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{n}{2}-1\right).$$

Die eben gewonnene Formel wird im Falle einer binären Grundform 6ter Ordnung leicht bestätigt. Da nämlich die 4 Invarianten derselben A, B, C, D bezüglich von den Graden 2, 4, 6, 10 sind, so haben wir $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 6$, $\nu_4 = 10$ zu setzen und es ergiebt sich dann $k = 2$. In der That genügt die schiefe Invariante R einer Gleichung 2ten Grades und durch die 5 genannten Invarianten ist der Invariantenkörper völlig bestimmt.

§ 10.

Die typische Darstellung einer binären Grundform.

Die in § 8 und § 9 angewandten Methoden führen zugleich zu einem neuen Beweise für die Möglichkeit einer typischen Darstellung der binären Grundform.

Um dies zu zeigen, nehmen wir erstens an, es sei die Ordnung der binären Grundform n eine ungerade Zahl. Die linearen Covarianten der Grundform sind dann sämmtlich von ungeradem Grade in den Coefficienten der Grundform und es bezeichne $\varphi_1(\sigma)$ die Anzahl der linearen Covarianten, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl σ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Um die typische Darstellung der Grundform auszuführen, bedarf es zweier linearer Covarianten l und m, welche nicht durch eine Relation von der Gestalt

$$Al + Bm = 0$$

mit einander verbunden sind, wenn man unter A und B geeignet gewählte Invarianten versteht. Die Existenz zweier solcher linearer Covarianten kann, wie folgt, bewiesen werden: nehmen wir an die Grundform besitze überhaupt keine lineare Covariante, so hätte offenbar $\varphi_1(\sigma)$ für alle σ den Werth 0. Gäbe es andererseits eine lineare Covariante l von der Art, dass alle übrigen Covarianten der Grundform gleich $A\,l$ sind, wo A eine Invariante bedeutet, so wäre nothwendigerweise, wenn λ den Grad von l bezeichnet

$$\varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma - \lambda)$$

und folglich

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi_1(\sigma)}{\varphi(\sigma)} = 1.$$

Nehmen wir endlich die Existenz zweier linearer Covarianten l und m von der gewünschten Beschaffenheit an und bezeichnen wir mit $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die übrigen im vollen Formensysteme vorkommenden linearen Covarianten, so ist jede dieser Covarianten in der Gestalt

$$p_i = \frac{A_i l + B_i m}{C_i}$$

darstellbar, wo A_i, B_i, C_i Invarianten sind und es ist folglich eine jede lineare Covariante p der Grundform in der Gestalt

$$p = \frac{Al + Bm}{C_1 C_2 \ldots C_r}$$

darstellbar. Bezeichnen wir jetzt den Grad der linearen Covariante m mit μ und den Grad der Invariante $C_1 C_2 \ldots C_r$ mit γ, so ergiebt sich für $\varphi_1(\sigma)$ die Ungleichung

$$\varphi(\sigma - \lambda) + \varphi(\sigma - \mu) \leqq \varphi_1(\sigma) \leqq \varphi(\sigma - \lambda + \gamma) + \varphi(\sigma - \mu + \gamma)$$

und folglich ist

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi_1(\sigma)}{\varphi(\sigma)} = 2.$$

Um nun zu entscheiden, welchen Werth der Ausdruck $\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi_1(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$ in Wirklichkeit besitzt, wenden wir wiederum die Cayley-Sylvester'schen Abzählungssätze an. Diesen Sätzen zufolge ist die Zahl der linearen Covarianten vom Grade σ gleich dem Coefficienten von $r^{\frac{1}{2}(n\sigma-1)}$ in der Entwicklung des Ausdruckes f, und wir erhalten daher die gesuchte Zahl $\varphi_1(\sigma)$, wenn wir die Coefficienten

$$\begin{array}{llllllll}
\text{von} & r^{\frac{1}{2}(n-1)}, & r^{\frac{1}{2}(3n-1)}, & r^{\frac{1}{2}(5n-1)}, & \ldots, & r^{\frac{1}{2}(\sigma n-1)} & \text{in} & f_0, \\
\text{,,} & r^{\frac{1}{2}(n-1)-1}, & r^{\frac{1}{2}(3n-1)-3}, & r^{\frac{1}{2}(5n-1)-5}, & \ldots, & r^{\frac{1}{2}(\sigma n-1)-\sigma} & \text{,,} & f_1, \\
\text{,,} & r^{\frac{1}{2}(n-1)-2}, & r^{\frac{1}{2}(3n-1)-6}, & r^{\frac{1}{2}(5n-1)-10}, & \ldots, & r^{\frac{1}{2}(\sigma n-1)-2\sigma} & \text{,,} & f_2, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\text{,,} & r^0, & r^1, & r^2, & \ldots, & r^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} & \text{,,} & f_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}
\end{array}$$

sämmtlich zu einander addiren. Die Ausführung der Rechnung ergiebt dann unter der Voraussetzung $n>3$ für den Ausdruck $\underset{\sigma=\infty}{L}\frac{\varphi_1(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$ den Werth 2, und hiermit ist der gewünschte Nachweis geführt.

Ist zweitens die Ordnung n eine gerade Zahl, so bezeichnen wir mit $\varphi_2(\sigma)$ die Anzahl der quadratischen Covarianten, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl σ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Um die typische Darstellung der Grundform auszuführen, bedarf es dreier quadratischer Covarianten l, m, p zwischen denen keine Relation von der Gestalt

$$Al + Bm + Cp = 0$$

besteht, wo A, B, C Invarianten sind. Wir erkennen wiederum durch die nämliche Schlussweise wie vorhin, dass es 3 solche Covarianten nothwendig giebt, falls der Quotient $\frac{\varphi_2(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$ in der Grenze für $\sigma=\infty$ den Werth 3 annimmt. Dies trifft unter der Voraussetzung $n>4$ in der That zu, wie eine der vorigen entsprechende Rechnung zeigt.

Die bisherigen Resultate dieses Abschnittes III sind auf rein arithmetischem Wege abgeleitet worden und nur am Anfange des § 8 ist die aus algebraischen Betrachtungen bekannte Thatsache benutzt worden, dass die Zahl $\varkappa$ der algebraisch unabhängigen Invarianten einer binären Grundform n^{ter} Ordnung den Werth $n-2$ hat. Auch diese Thatsache ergiebt sich, wie im Folgenden kurz gezeigt werden soll, mit Hilfe unserer Methode ohne Benutzung eines Eliminationsverfahrens.

Die Ueberlegungen des § 8 zeigen, dass der Quotient $\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^{\varkappa}}$ in der Grenze für $\sigma=\infty$ einen endlichen von 0 verschiedenen Werth annimmt. In § 9 ist gezeigt worden, dass der Ausdruck $\underset{\sigma=\infty}{L}\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^{n-2}}$ bis auf einen von 0 verschiedenen Zahlenfactor gleich der Summe

$$\sum^{i}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3} \qquad \left(i=0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\text{ bezgl. }\frac{n}{2}-1\right)$$

ist. Aus diesen Thatsachen kann $\varkappa = n-2$ geschlossen werden, sobald der Nachweis dafür geführt ist, dass jene Summe eine von 0 verschiedene Zahl darstellt. Um diesen Nachweis zu führen, bestimmen wir die Anzahl der Covarianten $l, m, \ldots, p$, welche in den Veränderlichen von der Ordnung ν sind und zwischen denen keine lineare Relation von der Gestalt

$$Al + Bm + \cdots + Ep = 0$$

besteht, wo $A, B, \ldots, E$ Invarianten sind. Diese Anzahl findet man gleich dem Ausdrucke $\underset{\sigma=\infty}{L}\frac{\varphi_\nu(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$, wo $\varphi_\nu(\sigma)$ die Anzahl der Covarianten ν^{ter} Ordnung bezeichnet, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl σ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Berechnen wir diesen Grenzwerth mit Hilfe der Cayley-Sylvester'schen Abzählungssätze entsprechend, wie dies oben für die Fälle $\nu = 1$ und $\nu = 2$ geschehen ist, so erhalten wir einen Ausdruck, in welchem wiederum jene Summe

$$\sum^{i}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3}$$

auftritt. Trägt man in diesen Ausdruck an Stelle jener Summe den Werth 0 ein und legt dann der Zahl ν einen genügend grossen Werth bei, so fällt, wie die Rechnung zeigt, der Werth des neu erhaltenen Ausdruckes grösser als $\nu+1$ aus, und dieser Umstand widerspricht der Thatsache, dass die Anzahl der Covarianten $l, m, \ldots, p$ von der ν^{ten} Ordnung höchstens gleich $\nu+1$ sein darf. Die Annahme, dass jene Summe den Werth 0 hat, trifft folglich nicht zu und *damit ist zugleich der gewünschte Nachweis erbracht.*

Mit Hilfe der typischen Darstellung einer binären Grundform ist von A. Clebsch*) der folgende Satz bewiesen worden:

Wenn für 2 binäre Formen von irgend einer Ordnung $n > 4$ mit numerischen Coefficienten die entsprechenden Invarianten sämmtlich die nämlichen Werthe haben und ausserdem eine gewisse im Nenner der typisch dargestellten Coefficienten auftretende Invariante N von 0 verschieden ist, so gehören die beiden Formen zu der nämlichen Classe.

Dabei bezeichne ich 2 binäre Formen als zugehörig zur nämlichen Classe, wenn man dieselben durch eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante in einander transformiren kann. Wenn wir die Werthe für die Invarianten $J_1, \ldots, J_{n-2}$ überdies derart wählen, dass die Discriminante D der Gleichung für J von 0 verschieden ist,

*) Theorie der binären Formen.

so giebt die Zahl k an, wie viel Werthe von J mit jenen Werthen von $J_1, \ldots, J_{n-2}$ vereinbar sind, und hieraus folgt:

Der Grad k des Invariantenkörpers giebt zugleich im allgemeinen die Zahl der von einander verschiedenen Classen von binären Formen an, deren Invarianten $J_1, \ldots, J_{n-2}$ gleich gegebenen Grössen sind.

§ 11.

Das System von ν binären Linearformen.

Die Methoden dieses Abschnittes III lassen sich auch auf Systeme von simultanen binären Grundformen anwenden. Als einfachstes Beispiel diene das System der ν binären Linearformen

$$a_1 x + b_1 y, \quad a_2 x + b_2 y, \ldots, \quad a_\nu x + b_\nu y,$$

welches bereits in § 6 behandelt worden ist. Das volle Invariantensystem besteht aus den Determinanten p_{ik}. Ausserdem genügt jede dieser Invarianten der Differentialgleichung

$$a_1 \frac{\partial J}{\partial b_1} + a_2 \frac{\partial J}{\partial b_2} + \cdots + a_\nu \frac{\partial J}{\partial b_\nu} = 0$$

und umgekehrt jede dieser Differentialgleichung genügende Function J von der Gestalt

$$J = \sum C a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_\nu^{r_\nu} b_1^{s_1} b_2^{s_2} \ldots b_\nu^{s_\nu}$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = s_1 + s_2 + \cdots + s_\nu = \varrho$$

ist eine Invariante der Linearformen vom Gewichte ϱ. Hieraus kann bewiesen werden, dass die Anzahl der Invarianten vom Gewichte ϱ, zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet, gleich ist

$$\chi(\varrho) = \psi[\psi(\varrho)]^2(\varrho) - \psi(\varrho - 1)\, \psi(\varrho + 1),$$

wo $\psi(\varrho)$ die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = \varrho$$

bedeutet und daher den Werth $\frac{(\varrho + \nu - 1)!}{\varrho!\,(\nu - 1)!}$ besitzt. Durch Einsetzung dieses Werthes finden wir

$$\chi(\varrho) = \frac{(\varrho + 1)(\varrho + 2)^2)\varrho + 3)^2 \cdots (\varrho + \nu - 2)^2 (\varrho + \nu - 1)}{(\nu - 1)!\,(\nu - 2)!}.$$

In § 6 ist ein System von Invarianten $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ aufgestellt worden, durch welche sich alle übrigen Invarianten der Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Ferner werde eine lineare Function p der Invarianten p_{ik} mit constanten Coefficienten bestimmt derart, dass alle Invarianten p_{ik} rationale Functionen von $p, p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ sind. Da in Folge dessen die Invarianten $p, p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ ein Invariantensystem von der in § 2 behandelten Art bilden, so können wir mit Hilfe der in § 8 angewandten Methode den Grad k des durch diese Invarianten bestimmten Invariantenkörpers berechnen. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$k = (2\nu - 4)! \underset{\varrho=\infty}{L} \frac{\chi(\varrho)}{\varrho^{2\nu-4}} = \frac{(2\nu-4)!}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}.$$

Auch kann zugleich gezeigt werden, dass die $2\nu - 3$ Invarianten $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ algebraisch von einander unabhängig sind.

Gehen wir zurück auf die Bestimmungsweise der $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ in § 6, so erkennen wir, dass die für k gefundene Zahl zugleich die Anzahl der Büschel von binären Formen angiebt, deren Functionaldeterminante eine vorgeschriebene binäre Form von der $2\nu - 4^{\text{ten}}$ Ordnung ist.*)

Endlich sei noch erwähnt, dass die Function $\chi(\varrho)$ nichts anderes ist, als die sogenannte „charakteristische Function" desjenigen algebraischen Gebildes, welches man erhält, wenn man

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \qquad (i, k = 1, 2 \ldots \nu)$$

setzt und hierin die Grössen p_{ik} als die Veränderlichen, a_i, b_i als willkürliche Parameter auffasst. Somit zeigt das eben behandelte Beispiel zugleich, wie die in der vorliegenden Abhandlung entwickelten Principien sich mit denjenigen auf allgemeinen Moduln bezüglichen Methoden in Verbindung bringen lassen, welche ich in Abschnitt III und IV meiner Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen" auseinandergesetzt habe. In Uebereinstimmung mit den dort gemachten allgemeinen Angaben**) ist der Grad $2\nu - 4$ der charakteristischen Function in Bezug auf ϱ die Dimension des algebraischen Gebildes, während der Coefficient der $(2\nu-4)^{\text{ten}}$ Potenz von ϱ nach Multiplication mit $(2\nu-4)!$ in der That die Ordnung jenes algebraischen Gebildes liefert.

---

*) Vgl. meine Arbeit: „Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functionaldeterminante", Mathematische Annalen Bd. 33, S. 227, sowie die dort ausführlich citirte Litteratur dieses Problems.

**) Vgl. meine Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen". Mathematische Annalen Bd. 36, S. 520.

IV.

Der Begriff der Nullform.

§ 12.

Die Substitutionsdeterminante als Function der Coefficienten der transformirten Grundform.

Nach den Auseinandersetzungen in Abschnitt I und II ist es zur Aufstellung und Untersuchung des vollen Invariantensystems einer Grundform vor Allem erforderlich, ein endliches System von solchen Invarianten zu kennen, deren Verschwinden nothwendig das Verschwinden sämmtlicher Invarianten der Grundform zur Folge hat. Die Aufgabe, ein System solcher Invarianten zu finden, ist in § 5 für eine binäre Grundform f gelöst, jedoch auf einem Wege, welcher bei Benutzung der bisherigen Hilfsmittel keiner Ausdehnung auf Grundformen von mehr Veränderlichen fähig ist. Zwar die Existenz eines solchen Systems von Invarianten, deren Verschwinden das Verschwinden aller übrigen zur Folge hat, folgt unmittelbar aus dem Theorem I in Abschnitt I meiner Arbeit „Ueber die Theorie der algebraischen Formen"*); aber dieses allgemeine Theorem giebt durchaus kein Mittel in die Hand, ein solches System von Invarianten durch eine endliche Anzahl schon vor Beginn der Rechnung übersehbarer Processe aufzustellen in der Art, dass beispielsweise eine obere Grenze für die Zahl der Invarianten dieses Systems oder für ihre Grade in den Coefficienten der Grundform angegeben werden kann. Die hierin liegende Schwierigkeit wird nun vollständig überwunden durch die nachfolgenden Entwicklungen, bei deren Darstellung wir uns der Kürze halber auf den Fall einer einzigen Grundform beschränken, obwohl die Methoden und Resultate von allgemeinster Gültigkeit sind.

Es sei eine ternäre Grundform f von der n^{ten} Ordnung in den Veränderlichen x_1, x_2, x_3 vorgelegt, deren $N=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sämmtlich bestimmte numerische Werthe besitzen: dann besteht zunächst unsere Aufgabe darin, zu entscheiden, ob es noch irgend eine Invariante J giebt, welche für die vorgelegte besondere Grundform f von 0 verschieden ist oder ob alle Invarianten von f gleich 0 sind. Um diese Entscheidung zu ermöglichen, transformiren wir die Form f der 3 Veränderlichen x_1, x_2, x_3 mittelst der linearen Substitution

*) Math. Ann, Bd. 36, S. 474.

$$x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3, \qquad \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$
$$x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3,$$
$$x_3 = \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3,$$

wo die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ unbestimmte Grössen sind. Die Coefficienten der transformirten Form $g(y_1, y_2, y_3)$ bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_N$; dieselben sind ganze rationale Functionen vom n^{ten} Grade in $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ mit bestimmten numerischen Coefficienten. Nehmen wir nun an, es gebe eine Invariante J, welche für die besondere Grundform f verschieden von 0 ist, so wäre

$$J(g) = \delta^p J(f),$$

wo p das Gewicht der Invariante J bedeutet und $J(f)$ eine von 0 verschiedene Zahl ist. Nach der Division durch diese Zahl lehrt die letztere Gleichung, dass die Substitutionsdeterminante δ einer Gleichung genügt, deren erster Coefficient gleich 1 ist und deren übrige Coefficienten ganze rationale Functionen von $b_1, b_2, \ldots, b_N$ sind, d. h. die Substitutionsdeterminante δ ist unter jener Annahme eine ganze algebraische Function der Coefficienten $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

Es ist nun sehr wesentlich, dass der hierin ausgesprochene Satz auch umgekehrt gilt. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es sei δ eine ganze algebraische Function von $b_1, b_2, \ldots b_N$ und genüge etwa der Gleichung

$$\delta^p + G_1(b)\delta^{p-1} + \cdots + G_p(b) = 0,$$

wo $G_1, G_2, \ldots, G_p$ ganze rationale Functionen von $b_1, b_2, \ldots, b_N$ mit numerischen Coefficienten sind. Diese Gleichung muss identisch erfüllt sein, wenn wir für die Substitutionsdeterminante δ und für die $b_1, \ldots, b_N$ ihre Ausdrücke in den $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ eintragen. Da nun δ homogen vom 3^{ten} Grade und die $b_1, \ldots, b_N$ homogen vom n^{ten} Grade in den $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ sind, so können wir offenbar annehmen, dass in der obigen Gleichung diejenigen Coefficienten G_s gleich 0 sind, für welche $\frac{3s}{n}$ eine gebrochene Zahl ist, und dass die übrigen Functionen G_s in den Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ homogen vom Grade $\frac{3s}{n}$ sind. Wir denken uns ferner für den Augenblick in der Form f die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_N$ als unbestimmte Grössen, und $b_1, b_2, \ldots, b_N$ dementsprechend als Functionen nicht nur der Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$, sondern zugleich als linear von $a_1, a_2, \ldots, a_N$ abhängig. Die linke Seite der obigen Gleichung, nämlich der Ausdruck

$$\delta^p + G_1(b)\delta^{p-1} + \cdots + G_p(b)$$

wird nunmehr erst dann identisch für alle Werthe von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ verschwinden, sobald wir wieder statt der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ die betreffenden numerischen Coefficienten der besonderen Grundform f einsetzen. Indem wir auf diesen Ausdruck p-mal den Process

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_{11}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{12}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{21}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{22}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{23}} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{31}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{32}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{33}} \end{vmatrix}$$

anwenden, erhalten wir zufolge des in Abschnitt V meiner Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen"*) bewiesenen Satzes einen Ausdruck von der Gestalt

$$C_p + J_1(a) + J_2(a) + \cdots + J_p(a),$$

wo C_p eine von 0 verschiedene Zahl bedeutet und $J_1(a), J_2(a), \ldots, J_p(a)$ Invarianten der Grundform f mit den unbestimmt gedachten Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_N$, sind. Dieser Ausdruck muss nun 0 sein, sobald man für die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ die betreffenden numerischen Coefficienten der Form f einführt und daraus folgt, dass nicht sämmtliche Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_p$ für die besondere Grundform f verschwinden können. Wir sprechen dieses Resultat in folgendem Satze aus:

Eine Grundform mit bestimmten numerischen Coefficienten besitzt dann und nur dann eine von 0 verschiedene Invariante, wenn die Substitutionsdeterminante δ eine g a n z e algebraische Function der Coefficienten der linear transformirten Form ist.

§ 13.

Die Entscheidung ob die vorgelegte Grundform eine von 0 verschiedene Invariante besitzt oder nicht.

Nunmehr soll der Weg angegeben werden, wie man durch endliche und von vornherein übersehbare Processe entscheiden kann, ob δ eine ganze algebraische Function der Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ ist oder nicht. Zunächst lehrt der in § 1 bewiesene Hilfssatz, dass es stets möglich ist, aus den Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ mittelst geeigneter numerischer Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{rN}$ solche r lineare Ausdrücke

$$B_1 = c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \cdots + c_{1N} b_N,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_r = c_{r1} b_1 + c_{r2} b_2 + \cdots + c_{rN} b_N$$

zu bilden, durch welche alle Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ sich als ganze

*) Mathematische Annalen Bd. 36, S. 524.

algebraische Functionen ausdrücken lassen und zwischen denen keine algebraische Relation stattfindet. Die r Ausdrücke $B_1, \ldots, B_r$ sind dann ebenso, wie die Grössen $b_1, \ldots, b_N$ ganze rationale homogene Functionen n^{ten} Grades von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ mit numerischen Coefficienten und da zwischen irgend 10 solchen Functionen von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ stets eine algebraische Relation bestehen muss, so hat r jedenfalls höchstens den Werth 9.

Um zu untersuchen, unter welchen Umständen die Zahl $r < 9$ ausfällt, denken wir uns in der transformirten Form $g(y_1, y_2, y_3)$ für die Veränderlichen der Reihe nach irgend 8 Werthsysteme

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1', \; y_1 = y_1'', \ldots, y_1 = y_1^{(8)}, \\ y_2 &= y_2', \; y_2 = y_2'', \ldots, y_2 = y_2^{(8)}, \\ y_3 &= y_3', \; y_3 = y_3'', \ldots, y_3 = y_3^{(8)} \end{aligned}$$

eingesetzt; wir gelangen so zu 8 linearen Ausdrücken $g', g'', \ldots, g^{(8)}$ von der Art der Ausdrücke B. Zwischen g und diesen 8 Ausdrücken bestehe die algebraische Relation

$$G(g, g', \ldots, g^{(8)}) = 0,$$

wo angenommen werden kann, dass nicht auch die Differentialquotienten der ganzen rationalen Function G nach den $g, g', \ldots, g^{(8)}$ für alle $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ identisch verschwinden. Durch Differentiation der obigen Identität nach den $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial \alpha_{11}} + \frac{\partial G}{\partial g'}\frac{\partial g'}{\partial \alpha_{11}} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial g^{(8)}}\frac{\partial g^{(8)}}{\partial \alpha_{11}} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial G}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial \alpha_{33}} + \frac{\partial G}{\partial g'}\frac{\partial g'}{\partial \alpha_{33}} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial g^{(8)}}\frac{\partial g^{(8)}}{\partial \alpha_{33}} = 0 \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial \alpha_{11}} & \frac{\partial g'}{\partial \alpha_{11}} & \cdots & \frac{\partial g^{(8)}}{\partial \alpha_{11}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha_{33}} & \frac{\partial g'}{\partial \alpha_{33}} & \cdots & \frac{\partial g^{(8)}}{\partial \alpha_{33}} \end{vmatrix} = 0.$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_{ik}} = y_k \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

so liefert die Entwicklung der obigen Determinante nach den Elementen der ersten Verticalreihe eine Relation von der Gestalt

$$\begin{aligned} & D_{11}y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + D_{21}y_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + D_{31}y_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ + & D_{12}y_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + D_{22}y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + D_{32}y_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ + & D_{13}y_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} + D_{23}y_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + D_{33}y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}$$

wo $D_{11}, D_{21}, \ldots, D_{33}$ ganze rationale Functionen der Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}, y_1', y_2', y_3', \ldots, y_1^{(8)}, y_2^{(8)}, y_3^{(8)}$ sind. Wir nehmen an, dass die Unterdeterminanten $D_{11}, D_{21}, \ldots, D_{33}$ nicht sämmtlich identisch für alle diese Parameter verschwinden und legen den letzteren dann solche numerische Werthe bei, dass wenigstens eine jener Unterdeterminanten von 0 verschieden ist. Da die y_1, y_2, y_3 lineare Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, so ergiebt sich hiernach aus der obigen Relation eine lineare Differentialgleichung für f von der Gestalt

$$l_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

wo l_1, l_2, l_3 lineare homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 sind. Wenn jedoch die obige Annahme nicht zutrifft und somit alle Unterdeterminanten der obigen Determinante identisch verschwinden, so stelle man mit irgend einer dieser Unterdeterminanten die entsprechende Ueberlegung an: man gelangt dann wiederum zu einer linearen Differentialgleichung für f.

Die gewonnene lineare Differentialgleichung für f kann durch Anwendung einer geeigneten linearen Transformation der Veränderlichen leicht näher untersucht werden; es ergiebt sich dann das Resultat:

Die Zahl r ist im allgemeinen nur dann < 9, wenn die vorgelegte Form f die besondere Eigenschaft hat, lineare continuirliche Transformationen in sich selbst zu gestatten.

Wir kehren nun zu der am Anfange dieses Paragraphen angestellten Betrachtung zurück und bestimmen, falls $r < 9$ ist, irgend $9-r$ Functionen $B_{r+1}, \ldots, B_9$ vom Grade n in $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ und mit numerischen Coefficienten derart, dass zwischen den 9 Functionen $B_1, \ldots, B_9$ ebenfalls keine algebraische Relation stattfindet. Dass dies unter den obwaltenden Umständen immer möglich ist, lässt sich leicht mit Hilfe einer bekannten Eigenschaft der Functionaldeterminante zeigen. Nunmehr werde die irreducible Gleichung aufgestellt, welche zwischen $\delta, B_1, \ldots, B_9$ besteht; dieselbe sei von der Gestalt

$$\Gamma_0 \delta^{\pi} + \Gamma_1 \delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_{\pi} = 0,$$

wo $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\pi}$ ganze rationale Functionen von $B_1, \ldots, B_9$ bedeuten. Nehmen wir an, es sei δ eine ganze algebraische Function der Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$, so hängt δ nothwendig auch ganz und algebraisch von $B_1, \ldots, B_r$ ab und genügt folglich einer Gleichung von der Gestalt

$$\delta^\varrho + E_1 \delta^{\varrho-1} + \cdots + E_\varrho = 0,$$

wo $E_1, \ldots, E_\varrho$ ganze rationale Functionen von $B_1, \ldots, B_r$ sind. Die linke Seite dieser Gleichung muss aber die linke Seite der vorigen Gleichung als Factor enthalten und hieraus kann leicht geschlossen werden, dass Γ_0 gleich einer von 0 verschiedenen Constanten ist und dass die übrigen Coefficienten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\pi$ lediglich ganze rationale Functionen der Ausdrücke $B_1, \ldots, B_r$ sind. Um also die gewünschte Entscheidung zu treffen, ist es nur nöthig festzustellen, ob die irreducible, zwischen δ, $B_1, \ldots, B_9$ bestehende Gleichung von der soeben genannten Beschaffenheit ist oder nicht.

§ 14.

Eine obere Grenze für die Gewichte der Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$.

Wir können zugleich für den Grad π jener irreduciblen Gleichung eine obere Grenze finden und zwar mit Hilfe der folgenden Betrachtung:

Es seien $h+1$ Formen $H_1, \ldots, H_{h+1}$ gegeben, welche sämmtlich vom Grade m in den h homogenen Veränderlichen $u_1, \ldots, u_h$ sind. Wir bilden alle Potenzen und Producte R^{ten} Grades der Grössen $H_1, \ldots, H_{h+1}$ und betrachten die Gleichung

$$\sum C_{s_1, s_2, \ldots, s_{h+1}} H_1^{s_1} H_2^{s_2} \ldots H_{h+1}^{s_{h+1}} = 0.$$
$$(s_1 + s_2 + \cdots + s_{h+1} = R).$$

Indem wir auf der linken Seite nach Ausführung der Multiplication sämmtliche Potenzen und Producte der Veränderlichen $u_1, \ldots, u_h$ gleich 0 setzen, ergiebt sich zur Bestimmung der

$$\frac{(R+1)(R+2)\ldots(R+h)}{1.2\ldots h}$$

Coefficienten $C_{s_1, s_2, \ldots, s_{h+1}}$ ein System von

$$\frac{(mR+1)(mR+2)\ldots(mR+h-1)}{1.2\ldots h-1}$$

linearen homogenen Gleichungen; diese Gleichungen werden stets Lösungen haben, sobald

$$\frac{(R+1)\ldots(R+h)}{1.2\ldots h} > \frac{(mR+1)\ldots(mR+h-1)}{1.2\ldots h-1}$$

und folglich um so mehr, sobald

$$(R+1)^h > h(mR+h-1)^{h-1}$$

ist. Diese Ungleichung wird jedenfalls dann erfüllt sein, wenn wir

$R = h(m+1)^{h-1}$ nehmen. Hieraus folgt, dass zwischen den Functionen $H_1, \ldots, H_{h+1}$ nothwendig eine Relation bestehen muss, deren Grad kleiner oder gleich der Zahl $h(m+1)^{h-1}$ ist.

Wir wenden diesen Satz auf die 10 Formen δ^n, $B_1^3, \ldots, B_9^3$ an, von denen jede homogen vom $3n^{\text{ten}}$ Grade in den 9 Veränderlichen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ ist; wir setzen also $h = 9$ und $m = 3n$. Auf diese Weise ergiebt sich, dass der Grad π der oben aufgestellten Gleichung jedenfalls die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt. Hieraus folgt unter Anwendung des in § 12 eingeschlagenen Beweisverfahrens der Satz:

Wenn die Substitutionsdeterminante δ eine ganze algebraische Function der Coefficienten der linear transformirten Grundform ist, so giebt es nothwendig eine von 0 verschiedene Invariante, deren Gewicht die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt.

Dieser Satz führt dann mit Hilfe der in § 4 und § 12 bewiesenen Sätze unmittelbar zu folgendem Satze:

Sämmtliche Invarianten einer ternären Grundform n^{ter} Ordnung lassen sich als ganze algebraische Functionen derjenigen Invarianten ausdrücken, deren Gewicht $\leqq 9n(3n+1)^8$ ist.

Hiernach können auch die in Abschnitt I behandelten Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ stets so angenommen werden, dass die Gewichte derselben unterhalb einer gewissen nur von n abhängigen Grenze liegen und aus der oberen Grenze für die Gewichte folgt dann unmittelbar eine obere Grenze für die Grade der Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$.

Um die in diesem Abschnitt IV gefundenen Resultate und die späterhin aus denselben zu ziehenden Folgerungen kürzer aussprechen zu können, führen wir den Begriff der Nullform ein.

Eine Grundform wird eine N u l l f o r m *genannt, wenn ihre Coefficienten solche besonderen numerischen Werthe besitzen, dass alle Invarianten für dieselbe gleich 0 sind.*

Ist eine Nullform f vorgelegt, so lehren die obigen Betrachtungen, dass für gewisse endliche, durch $\Gamma_0 = 0$ bestimmte Werthe von $B_1, \ldots, B_r$ die Determinante δ unendlich grosse Werthe annehmen muss. Da nun für endliche $B_1, \ldots, B_r$ auch die Grössen $b_1, \ldots, b_N$ sämmtlich endliche Werthe haben müssen, so kann — in richtig zu verstehendem Sinne — *die Nullform f auch als eine Form bezeichnet werden, welche die Eigenschaft besitzt, endliche Coefficienten zu behalten bei Anwendung gewisser linearer Substitutionen von unendlich grosser Determinante.* Diese Eigenschaft der Nullform findet in dem folgenden Paragraphen ihren genauen algebraischen Ausdruck.

V.

Die Aufstellung der Nullformen.

§ 15.

Eine der Nullform eigenthümliche lineare Transformation.

Aus den Betrachtungen des Abschnittes IV geht hervor, wie man durch eine endliche Anzahl rationaler Operationen ein System von Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ mit den in Abschnitt I aufgeführten Eigenschaften finden kann. Was die practische Berechnung eines solchen Systems in bestimmten Fällen angeht, so wird dieselbe offenbar wesentlich erleichtert werden, wenn man von vornherein anzugeben weiss, welche Bedeutung das Verschwinden sämmtlicher Invarianten für die vorgelegte Grundform besitzt. Diese Bedeutung ist für eine binäre Grundform in § 5 ermittelt worden und ich habe dann auch auf Grund dieser Kenntniss ein System von Invarianten aufgestellt, durch welche sich alle übrigen Invarianten der binären Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Versucht man auf diesem im binären Gebiete eingeschlagenen Wege oder durch Rechnung auch im Falle von mehr Veränderlichen die Nullformen aufzustellen, so stösst man auf wesentliche Schwierigkeiten und es ist mir nur für eine cubische und eine biquadratische ternäre Grundform durch mühsame Rechnung gelungen, die Nullformen auf solche Weise zu finden. Im gegenwärtigen Abschnitte wird mittelst einer neuen und allgemeinen Methode die Aufgabe, alle Nullformen zu finden, vollständig gelöst werden. Bei der Entwicklung dieser Methode werde ich wiederum der Kürze halber eine einzige ternäre Form zu Grunde legen. Die Methode beruht auf dem folgenden Hilfssatze:

Wenn eine ternäre Nullform f von der n^{ten} Ordnung mit den Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ vorgelegt ist, so lässt sich stets eine lineare Substitution von der Gestalt finden

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix},$$

wo μ_1, μ_2, μ_3 ganze Zahlen und $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}, \ldots, \mathfrak{P}_{33}$ gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen der Veränderlichen τ fortschreitende Reihen sind und für welche die Coefficienten $b_1, \ldots, b_N$ der transformirten Nullform g in der Grenze für $\tau = 0$ sämmtlich endlich bleiben, während die Determinante der Substitution

$$\delta = \begin{vmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{33} \end{vmatrix} = \tau^{\mu}\mathfrak{Q}$$

für $\tau = 0$ unendlich wird.

Zum Beweise transformiren wir die vorgelegte Nullform f mittelst der linearen Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{aligned} \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

wo $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ unbestimmte Parameter sind. Es entsteht so eine Form g, deren Coefficienten $b_1, \ldots, b_N$ ganze rationale Functionen n^{ten} Grades von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ mit bestimmten numerischen Coefficienten sind. Wir construiren dann in der Weise, wie gegen Ende des § 13 dargelegt worden ist, 9 algebraisch von einander unabhängige Functionen $B_1, \ldots, B_9$, durch welche sich alle Functionen $b_1, \ldots, b_N$ ganz und algebraisch ausdrücken und bilden auch wie dort die irreducible Gleichung, welche zwischen δ, $B_1, \ldots, B_9$ besteht; dieselbe ist von der Gestalt

$$\Gamma_0\delta^{\pi} + \Gamma_1\delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_{\pi} = 0,$$

wo $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\pi}$ ganze rationale homogene Functionen von $B_1, \ldots, B_9$ sind und wo insbesondere der erste Coefficient Γ_0 nothwendigerweise ein Ausdruck ist, welcher einige der Grössen $B_1, \ldots, B_9$ wirklich enthält. Denn im entgegengesetzten Falle wäre δ eine ganze algebraische Function von $b_1, \ldots, b_N$ und dann könnte f nicht, wie vorausgesetzt worden ist, eine Nullform sein.

Nunmehr bestimme man 9 Zahlen $B_1^0, \ldots, B_9^0$ derart, dass, wenn man dieselben bezüglich für $B_1, \ldots, B_9$ einsetzt, der Ausdruck Γ_0 verschwindet, dagegen wenigstens einer der übrigen Coefficienten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\pi}$ jener irreduciblen Gleichung von 0 verschieden bleibt. Ferner bestimme man 9 Zahlen $B_1^{00}, \ldots, B_9^{00}$ derart, dass, wenn man in jene irreducible Gleichung

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1^0 + B_1^{00}t, \\ &\cdots\cdots \\ B_9 &= B_9^0 + B_9^{00}t \end{aligned}$$

einsetzt, dieselbe dann in eine Gleichung zwischen δ und t übergeht, welche ebenfalls irreducibel ist.*) Diese Gleichung zwischen δ und t sei folgende

*) Dass eine solche Bestimmung der $B_1^{00}, \ldots, B_9^{00}$ stets möglich ist, habe ich in meiner Abhandlung „Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten", Crelle's Journal Bd. 110 gezeigt.

$$\Gamma_0{}^0\delta^\pi + \Gamma_1{}^0\delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_\pi^0 = 0,$$

wo $\Gamma_0{}^0, \Gamma_1{}^0, \ldots, \Gamma_\pi^0$ ganze rationale Functionen von t bedeuten.

Nunmehr betrachten wir die folgenden 9 Gleichungen

$$B_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}) = B_1{}^0 + B_1{}^{00}t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_9(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}) = B_9{}^0 + B_9{}^{00}t.$$

Da zwischen den 9 Functionen $B_1, \ldots, B_9$ keine algebraische Relation besteht, so verschwindet die Functionaldeterminante derselben

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_{11}} & \cdots & \frac{\partial B_9}{\partial \alpha_{11}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_{33}} & \cdots & \frac{\partial B_9}{\partial \alpha_{33}} \end{vmatrix}$$

nicht identisch für alle $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ und folglich sind durch jene 9 Gleichungen die 9 Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ als algebraische Functionen von t definirt. Ein System zusammengehöriger Zweige dieser algebraischen Functionen werde in der Umgebung der Stelle $t = 0$ durch die folgenden Entwickelungen

$$\alpha_{ik} = t^{\nu_{ik}} P_{ik}\left(t^{\frac{1}{m}}\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

dargestellt, wo m eine positive ganze Zahl, ν_{ik} rationale Zahlen und P_{ik} gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen des Argumentes $t^{\frac{1}{m}}$ fortschreitende Reihen sind. Die Determinante der 9 entwickelten Grössen

$$\delta = \left| t^{\nu_{ik}} P_{ik}\left(t^{\frac{1}{m}}\right) \right| = t^\nu\, Q\left(t^{\frac{1}{m}}\right)$$

ist von der nämlichen Gestalt und stellt einen Zweig der algebraischen Function $\delta(t)$ dar, welche durch jene Gleichung

$$\Gamma_0{}^0\delta^\pi + \Gamma_1{}^0\delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_\pi^0 = 0$$

definirt ist. Da diese Gleichung nun irreducibel ist, so können sämmtliche übrigen $\pi - 1$ Zweige der algebraischen Function $\delta(t)$ aus dem eben gewonnenen Zweige $\delta = t^\nu Q\left(t^{\frac{1}{m}}\right)$ durch analytische Fortsetzung erhalten werden. Diese weiteren $\pi - 1$ Zweige seien

$$\delta' \quad = t^{\nu'} Q'\left(t^{\frac{1}{m'}}\right),$$
$$\delta'' \quad = t^{\nu''} Q''\left(t^{\frac{1}{m''}}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^{(\pi-1)} = t^{\nu^{(\pi-1)}} Q^{(\pi-1)}\left(t^{\frac{1}{m^{(\pi-1)}}}\right)$$

und zwar möge der ursprüngliche Zweig δ übergehen in die Zweige $\delta', \delta'', \ldots, \delta^{(\pi-1)}$ bezüglich auf den Wegen $W', W'', \ldots, W^{(\pi-1)}$ und diese $\pi - 1$ Wege seien in der complexen Ebene der Veränderlichen t so gewählt, dass die Unstetigkeitspunkte der algebraischen Functionen $\alpha_{ik}(t)$ und $\delta(t)$ sämmtlich ausserhalb dieser Wege liegen. Nun verschwindet Γ_0^0 für $t=0$, während die übrigen Coefficienten $\Gamma_1^0, \ldots, \Gamma_\pi^0$ für $t=0$ nicht sämmtlich gleich 0 sind, und daher muss wenigstens einer der π Zweige $\delta, \delta', \ldots, \delta^{(\pi-1)}$ für $t=0$ den Werth ∞ annehmen; es sei dies etwa der Zweig $\delta' = t^{\nu'} Q'$. Da Q' eine nach ganzen positiven Potenzen von $t^{\frac{1}{m'}}$ fortschreitende Reihe ist und m' hierbei eine ganze positive Zahl bedeutet, so muss ν' nothwendig eine negative Zahl sein. Nunmehr verfolgen wir die Werthe derjenigen zusammengehörigen Zweige, welche durch das System von Potenzreihen

$$\alpha_{ik} = t^{\nu_{ik}} P_{ik}\left(t^{\frac{1}{m}}\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

dargestellt sind, auf dem Wege W' und gelangen dadurch zu einem anderen System von zusammengehörigen Zweigen der algebraischen Functionen $\alpha_{ik}(t)$; das System dieser Zweige werde in der Umgebung der Stelle $t=0$ durch die Potenzreihen

$$\alpha'_{ik} = t^{\nu'_{ik}} P'_{ik}\left(t^{\frac{1}{m'}}\right)$$

dargestellt. Bezeichnet M eine positive ganze Zahl, welche sowohl durch m' als auch durch die Nenner der rationalen Zahlen ν'_{ik} theilbar ist, so liefert die Substitution $t = \tau^M$ ein System von Potenzentwicklungen für die algebraischen Functionen α_{ik} von der Gestalt

$$\alpha_{ik} = \tau^{\mu_i} \mathfrak{P}_{ik}(\tau) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

wo die μ_i ganze Zahlen sind, und dies System ist von der im Satze verlangten Beschaffenheit; denn für $t=0$ erhalten die Grössen $B_1, \ldots, B_9$ die Werthe $B_1^0, \ldots, B_9^0$ und folglich bleiben auch die Grössen $b_1, \ldots, b_N$, da dieselben ganze algebraische Functionen von $B_1, \ldots, B_9$ sind, sämmtlich für $\tau=0$ endlich.

Die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes ist unmittelbar einzusehen. In der That, wenn man für die Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ Potenzreihen von der genannten Eigenschaft angeben kann, so ist jedenfalls δ nicht eine ganze algebraische Function von $b_1, \ldots, b_N$ und folglich ist die Grundform f eine Nullform.

§ 16.

Ein Hilfssatz über lineare Substitutionen, deren Coefficienten Potenzreihen sind.

Um den in § 15 gefundenen Satz auf die Berechnung der Nullformen anzuwenden, brauchen wir einen Hilfssatz über die Normirung von linearen Substitutionen, deren Coefficienten Potenzreihen einer Veränderlichen τ sind. Dieser Hilfssatz lautet:

Wenn eine Substitution von der in § 15 bezeichneten Art

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix},$$

mit der Determinante

$$\delta = \tau^{\mu}\mathfrak{Q}$$

gegeben ist, wo μ_1, μ_2, μ_3, μ ganze Zahlen und $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}, \dots, \mathfrak{P}_{33}$ gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen der Veränderlichen τ fortschreitende Reihen sind, so lassen sich stets 2 andere lineare Substitutionen bestimmen

$$(\beta) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}, \qquad (\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix},$$

welche von folgender Beschaffenheit sind:

1) Die Elemente der beiden Substitutionen (β) und (γ) sind gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen, etwa

$$\beta_{ik} = (\beta_{ik})_0 + (\beta_{ik})_1\tau + (\beta_{ik})_2\tau^2 + \cdots,$$
$$\gamma_{ik} = (\gamma_{ik})_0 + (\gamma_{ik})_1\tau + (\gamma_{ik})_2\tau^2 + \cdots,$$

deren constante Glieder den Bedingungen

$$\begin{vmatrix} (\beta_{11})_0 & (\beta_{12})_0 & (\beta_{13})_0 \\ (\beta_{21})_0 & (\beta_{22})_0 & (\beta_{23})_0 \\ (\beta_{31})_0 & (\beta_{32})_0 & (\beta_{33})_0 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} (\gamma_{11})_0 & (\gamma_{12})_0 & (\gamma_{13})_0 \\ (\gamma_{21})_0 & (\gamma_{22})_0 & (\gamma_{23})_0 \\ (\gamma_{31})_0 & (\gamma_{32})_0 & (\gamma_{33})_0 \end{vmatrix} = 1$$

genügen.

2) Die aufeinander folgende Anwendung der Substitutionen (β), (α), (γ), liefert eine Substitution von der Gestalt

$$(\gamma)(\alpha)(\beta) = \begin{pmatrix} \tau^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{\lambda_3} \end{pmatrix},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gewisse ganze Zahlen sind.

Zum Beweise setzen wir

$$\mathfrak{P}_{ik} = (\mathfrak{P}_{ik})_0 + (\mathfrak{P}_{ik})_1 \tau + (\mathfrak{P}_{ik})_2 \tau^2 + \cdots,$$
$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q})_0 + (\mathfrak{Q})_1 \tau + (\mathfrak{Q})_2 \tau^2 + \cdots;$$

hierbei darf $(\mathfrak{Q})_0$ verschieden von 0 angenommen werden, da man im anderen Falle die Zahl μ um eine oder mehrere Einheiten grösser wählen kann. Ausserdem nehmen wir noch $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3$ an. Ist dann $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu$, so wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{P}_{11})_0 & (\mathfrak{P}_{12})_0 & (\mathfrak{P}_{13})_0 \\ (\mathfrak{P}_{21})_0 & (\mathfrak{P}_{22})_0 & (\mathfrak{P}_{23})_0 \\ (\mathfrak{P}_{31})_0 & (\mathfrak{P}_{32})_0 & (\mathfrak{P}_{33})_0 \end{vmatrix}$$

gleich einer von 0 verschiedenen Constanten sein und folglich liefert die Umkehrung der Substitution

$$(\mathfrak{P}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_{11} & \mathfrak{P}_{12} & \mathfrak{P}_{13} \\ \mathfrak{P}_{21} & \mathfrak{P}_{22} & \mathfrak{P}_{23} \\ \mathfrak{P}_{31} & \mathfrak{P}_{32} & \mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix}$$

eine Substitution $(\mathfrak{P})^{-1}$, deren Elemente wiederum gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen sind. Man erhält somit unmittelbar 2 Substitutionen von der im Satze verlangten Beschaffenheit, wenn man setzt

$$(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\gamma) = (\mathfrak{P})^{-1}$$

$$\mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = \lambda_2, \quad \mu_3 = \lambda_3.$$

Ist andererseits $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 < \mu$, so muss jene Determinante $|(\mathfrak{P}_{ik})_0|$ den Werth 0 haben und wir können dann 3 nicht sämmtlich verschwindende Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ finden, so dass

$$\varepsilon_1 (\mathfrak{P}_{1i})_0 + \varepsilon_2 (\mathfrak{P}_{2i})_0 + \varepsilon_3 (\mathfrak{P}_{3i})_0 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wird. Nunmehr haben wir 3 Fälle zu untersuchen.

1) Es sei $\varepsilon_1 \neq 0$; wir setzen $\varepsilon_1 = 1$. Dann ist

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \tau^{\mu_1 - \mu_2} \varepsilon_2 & \tau^{\mu_1 - \mu_3} \varepsilon_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Substitution von der Determinante $\varepsilon_1 = 1$, deren Elemente ganze rationale Functionen von τ sind, und es wird

$$(\alpha') = (\alpha)(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1'} \mathfrak{P}_{11}', & \tau^{\mu_1'} \mathfrak{P}_{12}', & \tau^{\mu_1'} \mathfrak{P}_{13}' \\ \tau^{\mu_2} \mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2} \mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2} \mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3} \mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3} \mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3} \mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix}$$

wo μ_1' eine ganze Zahl $> \mu_1$ ist, und wo $\mathfrak{P}'_{11}, \mathfrak{P}'_{12}, \mathfrak{P}'_{13}$ wiederum nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen sind.

2) Es sei $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 \neq 0$; wir nehmen $\varepsilon_2 = 1$ an. Dann ist

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \tau^{\mu_2 - \mu_3}\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wiederum eine Substitution von der Determinante $\varepsilon_2 = 1$, deren Elemente ganze rationale Functionen von τ sind und es wird

$$(\alpha') = (\alpha)(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2'}\mathfrak{P}'_{21}, & \tau^{\mu_2'}\mathfrak{P}'_{22}, & \tau^{\mu_2'}\mathfrak{P}'_{23} \\ \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix}$$

wo μ_2' eine ganze Zahl $> \mu_2$ ist und wo $\mathfrak{P}'_{21}, \mathfrak{P}'_{22}, \mathfrak{P}'_{23}$ nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen sind.

3) Es sei $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, und $\varepsilon_3 \neq 0$; wir setzen $\varepsilon_3 = 1$. Dann ist

$$(\mathfrak{P}_{31})_0 = 0, \quad (\mathfrak{P}_{32})_0 = 0, \quad (\mathfrak{P}_{33})_0 = 0$$

und folglich können wir setzen

$$(\alpha') = (\alpha) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3'}\mathfrak{P}'_{31}, & \tau^{\mu_3'}\mathfrak{P}'_{32}, & \tau^{\mu_3'}\mathfrak{P}'_{33} \end{pmatrix}$$

wo μ_3' eine Zahl $> \mu_3$ ist und wo $\mathfrak{P}'_{31}, \mathfrak{P}'_{32}, \mathfrak{P}'_{33}$ wiederum nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen sind.

Ist nun die Exponentensumme $\mu_1' + \mu_2 + \mu_3$ bezüglich $\mu_1 + \mu_2' + \mu_3$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3' = \mu$, so ist nach dem vorhin Bewiesenen für die Substitution (α') unser Satz richtig und folglich gilt derselbe, wenn wir die Gleichung

$$(\gamma)(\alpha')(\beta) = (\gamma)(\alpha)\{(\varepsilon)(\beta)\}$$

berücksichtigen, auch für die Substitution (α). Ist jedoch jene Exponentensumme $< \mu$, so wiederhole man das eben auf (α) angewandte Verfahren nunmehr für die Substitution (α'). Da bei jedem weiteren Schritte die bezügliche Exponentensumme sich wenigstens um eine Einheit vermehrt, so wird man nach einer endlichen Zahl r von Wiederholungen des beschriebenen Verfahrens zu einer Substitution $(\alpha^{(r)})$ gelangen, für welche die Exponentensumme gleich μ ist. Damit ist der Beweis für unseren Hilfssatz erbracht.

§ 17.

Die kanonische Nullform.

Die Elemente der Substitution

$$(\beta_0) = \begin{pmatrix} (\beta_{11})_0 & (\beta_{12})_0 & (\beta_{13})_0 \\ (\beta_{21})_0 & (\beta_{22})_0 & (\beta_{23})_0 \\ (\beta_{31})_0 & (\beta_{32})_0 & (\beta_{33})_0 \end{pmatrix}$$

sind constante Zahlen und da überdies die Determinante $|(\beta_{ik})_0| = 1$ ist, so gestattet diese Substitution die Umkehrung. Wir transformiren nun die vorgelegte Nullform f mittelst dieser Umkehrung und erhalten so eine Nullform $f' = (\beta_0)^{-1}f$, deren Coefficienten wiederum Constante sind. In Folge der in § 16 aufgestellten Formel ist

$$\underset{\tau=0}{L}\left[\begin{pmatrix} \tau^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{\lambda_3} \end{pmatrix} f'\right] = \underset{\tau=0}{L}\,[(\gamma)(\alpha)(\beta)f'].$$

Andererseits ist

$$\underset{\tau=0}{L}\,[(\gamma)(\alpha)(\beta)f'] = \underset{\tau=0}{L}\,[(\gamma)(\alpha)\underset{\tau=0}{L}\,\{(\beta)f'\}] = \underset{\tau=0}{L}\,[(\gamma)(\alpha)f].$$

Nach § 15 liefert die Anwendung der Substitution (α) auf f eine Form, deren Coefficienten für $\tau = 0$ sämmtlich endlich bleiben und da (γ) eine Substitution ist, deren Elemente nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihen sind, so ist auch $(\gamma)(\alpha)f$ eine Form, deren Coefficienten für $\tau = 0$ sämmtlich endlich bleiben. Somit folgt dann die nämliche Eigenschaft auch für die Form

$$\begin{pmatrix} \tau^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{\lambda_3} \end{pmatrix} f' = f'(\tau^{\lambda_1}x_1,\ \tau^{\lambda_2}x_2,\ \tau^{\lambda_3}x_3).$$

Da die Determinante der Substitution (α) für $\tau = 0$ unendlich wird, so ist die Summe $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ nothwendig eine negative Zahl.

Umgekehrt, wenn es für eine Form f mit numerischen Coefficienten 3 ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von den genannten Eigenschaften giebt, so ist die Form f offenbar eine Nullform; wir wollen eine Nullform von dieser besonderen Art eine kanonische Nullform nennen und sprechen dann die folgende Definition aus:

Eine ternäre Form $f = \Sigma a_{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ von der Ordnung n möge eine „kanonische Nullform" heissen, wenn sich 3 ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, deren Summe negativ ist, finden lassen von der Art, dass jeder Coefficient $a_{n_1 n_2 n_3}$ den Werth 0 hat, für welchen die Zahl $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3$ negativ ausfällt, während die übrigen Coefficienten beliebige numerische Werthe besitzen.

Die vorigen Entwickelungen lehren dann den Satz:

Eine jede Nullform kann mittelst einer geeigneten linearen Substitution von der Determinante 1 *in eine kanonische Nullform transformirt werden.*

Verstehen wir unter einer Classe von Formen die Gesammtheit aller derjenigen Formen, welche durch lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante ineinander transformirt werden können, so spricht sich der eben gewonnene Satz, wie folgt aus:

In jeder Classe von Nullformen giebt es eine kanonische Nullform.

Die Aufgabe, alle Nullformen aufzustellen, ist somit auf die Frage nach den kanonischen Nullformen zurückgeführt, und diese Frage verlangt lediglich die Construction aller Systeme ganzer Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von der oben genannten Beschaffenheit.

§ 18.

Die Aufstellung der kanonischen Nullformen.

Um die am Schlusse des vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe zu lösen, nehmen wir in einer Ebene ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge n als Coordinatendreieck an und bestimmen dann die Coordinaten eines Punktes P dieser Ebene, wie folgt: wir ziehen durch P je eine Parallele zu den Seiten AC, BA, CB, welche die Dreieckseiten BC, CA, AB bezüglich in den Punkten A', B', C' treffen mögen. Die Abschnitte $\xi_1 = PA'$, $\xi_2 = PB'$, $\xi_3 = PC'$ seien dann die Coordinaten des Punktes P. Theilen wir jetzt jede der 3 Dreieckseiten in n gleiche Theile und ziehen dann durch diese Theilpunkte zu jeder Seite je $n-1$ Parallelen, so zerfällt das Coordinatendreieck in lauter gleichseitige Dreiecke von der Seitenlänge 1. Jedem so entstehenden im Inneren oder auf den Seiten des Coordinatendreiecks gelegenen Eckpunkte $\xi_1 = n_1$, $\xi_2 = n_2$, $\xi_3 = n_3$ entspricht dann ein Glied $a_{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ der ternären Form von der n^{ten} Ordnung und es entspricht auch umgekehrt einem jeden Gliede der ternären Form je ein Eckpunkt der construirten Dreiecke.

Sind nun u_1, u_2, u_3 beliebige reelle Constante, deren Summe $u_1 + u_2 + u_3$ von 0 verschieden ist, so stellt die Gleichung

$$u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$$

eine Gerade dar, welche nicht durch den Mittelpunkt M des Coordinatendreieckes hindurchgeht. Wir bestimmen alle diejenigen Eckpunkte n_1, n_2, n_3, welche ausserhalb und mit dem Mittelpunkte M auf der nämlichen Seite von jener Geraden $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ gelegen sind und setzen dann in der ternären Form n^{ter} Ordnung alle diesen Eckpunkten n_1, n_2, n_3 entsprechenden Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$ gleich 0, dagegen die übrigen Coefficienten gleich irgendwelchen numerischen Werthen. Die so erhaltene Form werde mit $f_{u_1 u_2 u_3}$ bezeichnet; dieselbe ist eine kanonische Nullform. Um dies einzusehen, bestimmen wir 3 rationale Zahlen u_1', u_2', u_3' von nicht verschwindender Summe und von der Beschaffenheit, dass alle ausserhalb und mit M auf ein und der nämlichen Seite von jener Geraden $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ gelegenen Eckpunkte auch ausserhalb und mit M auf der nämlichen Seite von der Geraden $u_1' \xi_1 + u_2' \xi_2 + u_3' \xi_3 = 0$ liegen und umgekehrt. Das dies immer möglich ist, sieht man leicht ein, wenn man die 3 Fälle unterscheidet, dass auf jener Geraden $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ keine, eine oder mehrere der betrachteten Eckpunkte gelegen sind und man dann die u_1', u_2', u_3' genügend wenig von u_1, u_2, u_3 verschieden annimmt. Dann bestimmen wir eine positive oder negative ganze Zahl u derart, dass die Producte uu_1', uu_2', uu_3' ganze Zahlen mit negativer Summe sind. Setzt man diese ganzen Zahlen bezüglich gleich λ_1, λ_2, λ_3, so erweist sich mittelst derselben in der That die vorhin construirte Form $f_{u_1 u_2 u_3}$ als kanonische Nullform, da in $f_{u_1 u_2 u_3}$ alle diejenigen Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$ gleich 0 sind, für welche

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 < 0$$

ausfällt.

Sind ferner v_1, v_2, v_3 reelle Constante, deren Summe verschwindet, so stellt die Gleichung $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ eine Gerade dar, welche durch den Mittelpunkt M geht. In diesem Falle bestimmen wir alle diejenigen Eckpunkte u_1, u_2, u_3, welche auf jener Geraden $v_1 \xi_1 + v_1 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ liegen sowie alle diejenigen, welche ausserhalb und mit dem Coordinateneckpunkt A auf der nämlichen Seite jener Geraden $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ gelegen sind und setzen dann in der ternären Form n^{ter} Ordnung alle diesen Eckpunkten n_1, n_2, n_3 entsprechenden Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$ gleich 0, dagegen die übrigen gleich beliebigen Werthen. Die so erhaltene Form werde mit $f_{v_1 v_2 v_3}$ bezeichnet; dieselbe ist wiederum eine kanonische Nullform. Um dies einzusehen, verschieben wir die Gerade $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ parallel mit sich und in der Richtung von A weg derart, dass dabei kein Eckpunkt von der Geraden überschritten wird, welcher nicht schon zu Anfang auf der Geraden lag. Ist dann die neue Lage der Geraden durch die Gleichung $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ dargestellt, so stimmt die Form $f_{v_1 v_2 v_3}$ offenbar mit $f_{u_1 u_2 u_3}$ überein und ist daher nach dem Vorhergehenden eine kanonische Nullform.

Bei der Definition der kanonischen Nullform $f_{v_1 v_2 v_3}$ hätten wir an Stelle der dem Punkte A zugewandten Seite der Geraden $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ auch mit gleichem Rechte die andere Seite in Betracht ziehen können. Die so entstehende kanonische Nullform ist der ersteren umkehrbar eindeutig zugeordnet.

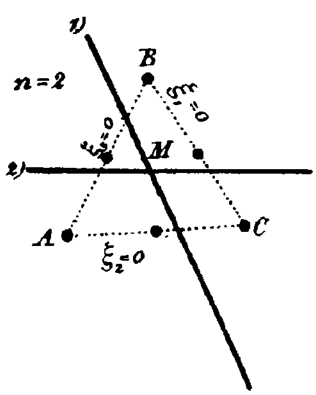
Die kanonischen Nullformen $f_{u_1u_2u_3}$ sind nun lediglich specielle Fälle der zuletzt behandelten kanonischen Nullformen $f_{v_1v_2v_3}$. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, dass die Punkte M und A auf der nämlichen Seite der zu betrachtenden Geraden $u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0$ liegen und ziehen dann zu dieser Geraden durch M eine Parallele; die Gleichung dieser Parallelen sei $v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = 0$, wo die Summe $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ ist. Man erhält nun die Form $f_{u_1u_2u_3}$ aus der Form $f_{v_1v_2v_3}$, wenn man in letzterer alle diejenigen Coefficienten gleich 0 nimmt, welche durch die zwischen beiden Parallelen gelegenen Eckpunkte dargestellt werden.

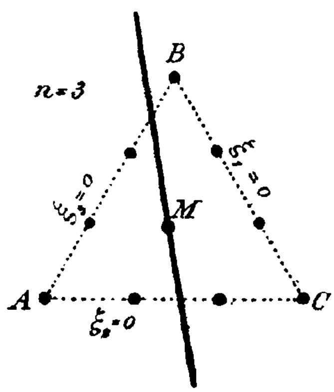
Liegen die Punkte M und A nicht auf der nämlichen Seite der Geraden $u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0$, so ist noch zuvor eine Vertauschung der Coordinaten nothwendig.

Nach dem Vorstehenden ist es zur Aufstellung einer vollständigen Tabelle der kanonischen Nullformen nur nöthig, die kanonischen Nullformen $f_{v_1v_2v_3}$ zu ermitteln und wir erhalten somit zur Construction jener Tabelle die folgende Regel:

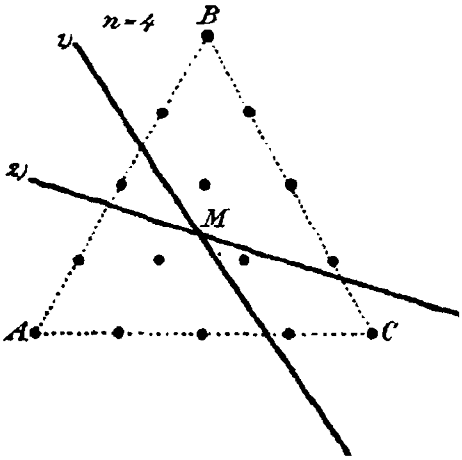
Man ziehe durch den Mittelpunkt M irgend eine gerade Linie und bestimme dann diejenigen Eckpunkte, welche auf dieser Geraden oder auf der dem Punkte A zugewandten Seite ausserhalb dieser Geraden gelegen sind. Die diesen Eckpunkten n_1, n_2, n_3 entsprechenden Coefficienten $a_{n_1n_2n_3}$ in der ternären Form n^{ter} Ordnung setze man gleich 0, *während man die übrigen Coefficienten beliebig lasse.*

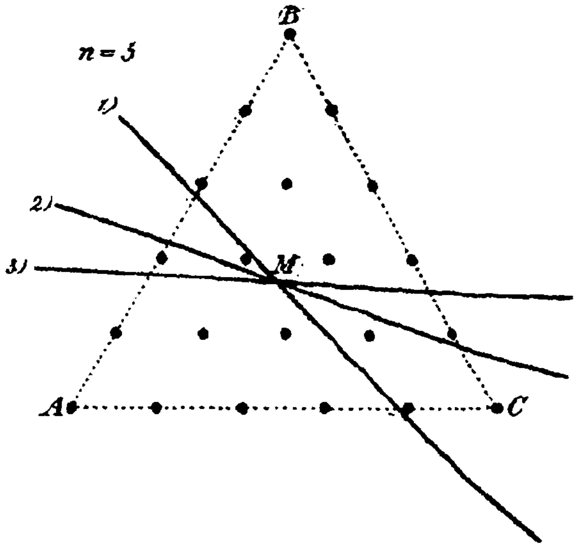
Da man auf die angegebene Art alle kanonischen Nullformen erhält, so folgt, dass die Anzahl der verschiedenen Arten von Nullformen übereinstimmt mit der Anzahl der wesentlich verschiedenen Stellungen, welche ein durch M gehender Strahl den betrachteten Eckpunkten gegenüber einnehmen kann. Dabei dürfen jedoch diejenigen Stellungen unberücksichtigt bleiben, für welche die entsprechenden Formen specielle kanonische Nullformen sind.

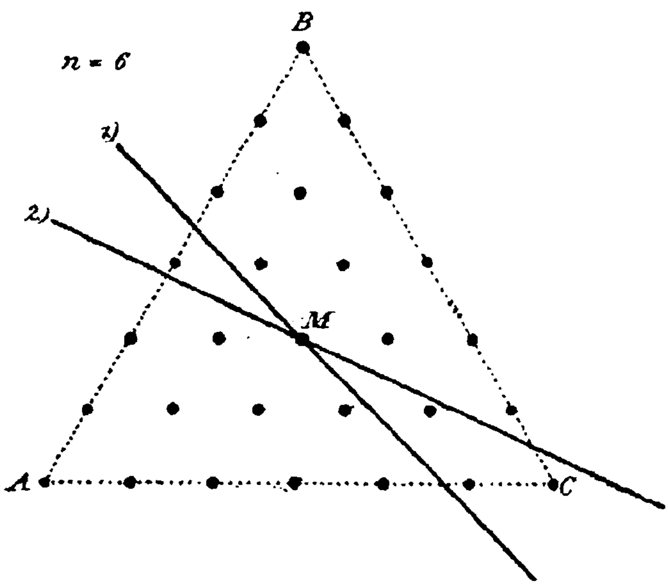




Um die gefundene Regel an einigen Beispielen zu erläutern, habe ich die obenstehenden und die auf Seite 365 folgenden Figuren entworfen, denen man sofort die ternären kanonischen Nullformen bis zur 6ten Ordnung entnimmt. Man erhält dann die folgende Tabelle, in welcher der Kürze halber $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ gesetzt ist, ferner a eine







willkürliche Grösse und $(xy)_s$ einen homogenen Ausdruck s^{ten} Grades in x, y mit willkürlichen Coefficienten bedeutet.

$n = 2.$ 1) $(xy)_2$,

2) $ax + x(xy)_1$.

$n = 3.$ $ay^2 + (xy)_3$.

$n = 4.$ 1) $(xy)_3 + (xy)_4$,

2) $x\{ax + x(xy)_1 + (xy)_3\}$.

$n=5.$ 1) $ax^3+(xy)_4+(xy)_5$,
2) $x\{x(xy)_1+x(xy)_2+(xy)_4\}$,
3) $x^2\{a+(xy)_1+(xy)_2+(xy)_3\}$.

$n=6.$ 1) $x^3(xy)_1+(xy)_5+(xy)_6$,
2) $x\{ax^2+x^2(xy)_1+x(xy)_3+(xy)_5\}$.

Zu bemerken ist, dass im Falle $n=2$ die beiden kanonischen Nullformen durch lineare Transformationen in einander übergeführt werden können, so dass in diesem Falle thatsächlich nur eine Nullform existirt.

Nach Berechnung der Nullformen kann man leicht angeben, welche Ausartung diejenigen ebenen Curven aufweisen, die durch Nullsetzen dieser Nullformen definirt sind. So erhält man aus dieser Tabelle für eine cubische ternäre Form das oben in § 7 S. 335 angegebene Resultat bestätigt. Ferner finden wir beispielsweise, dass für eine biquadratische Form f sämmtliche Invarianten dann und nur dann verschwinden, wenn die Curve $f=0$ entweder einen 3-fachen Punkt besitzt oder wenn sie in eine cubische Curve und eine Wendetangente derselben zerfällt.

§ 19.

Die quaternären cubischen Nullformen.

Die dargelegte zur Aufstellung aller ternären Nullformen dienende Methode lässt sich unmittelbar auf den Fall von Formen und Formensysteme mit beliebig vielen Veränderlichen und Veränderlichenreihen ausdehnen.

Um beispielsweise die quaternären Nullformen von der 3. Ordnung aufzustellen, construiren wir im Raume ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge 3, theilen dann jede Kante in 3 gleiche Stücke und ziehen durch die Theilpunkte zu jeder der 4 Seitenflächen je 2 Parallelebenen; dieselben zerschneiden das Tetraeder in lauter reguläre Tetraeder mit der Kantenlänge 1. Je einem Eckpunkte (n_1, n_2, n_3, n_4) dieser Tetraeder entspricht ein Glied der quaternären cubischen Form. Um alle kanonischen Nullformen zu ermitteln, haben wir alle möglichen Stellungen aufzusuchen, welche eine durch den Mittelpunkt M des Tetraeders gehende Ebene gegenüber den bezeichneten Eckpunkten einnehmen kann. Zu dem Zwecke benutzen wir das ursprüngliche Tetraeder zu einer ähnlichen Coordinatenbestimmung im Raume, wie vorhin das gleichseitige Dreieck in der Ebene. Dann wird eine jede den Mittelpunkt $M=(1, 1, 1, 1)$ enthaltende Ebene durch eine Gleichung von der Gestalt $u_1\xi_1+u_2\xi_2+u_3\xi_3+u_4\xi_4=0$ dargestellt, wo $u_1+u_2+u_3+u_4=0$ ist. Wir nehmen $u_1\geqq u_2\geqq u_3\geqq u_4$ an und nennen kurz einen Punkt $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0)$ des Raumes links oder rechts von der Ebene $u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 + u_4\xi_4 = 0$ gelegen, je nachdem $u_1\xi_1^0 + u_2\xi_2^0 + u_3\xi_3^0 + u_4\xi_4^0 \gtreqless$ oder < 0 ist. Aus der Gleichung $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ und den angenommenen Ungleichungen folgt $u_1 > 0$. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle 1) $u_2 \leqq 0$, 2) $u_2 > 0$. Im Falle 1) erkennen wir leicht, dass die 9 Punkte (3, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1) nothwendigerweise links von jener Geraden liegen und die Gleichung $5\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - 3\xi_4 = 0$ stellt auch wirklich eine Ebene dar, auf deren linker Seite gerade jene 9 Punkte liegen, während sämmtliche übrigen 11 Eckpunkte rechts von derselben gelegen sind. Im Falle 2) haben wir 2 Unterfälle 2a) und 2b) zu unterscheiden, je nachdem $\mu_3 \leqq 0$ oder $\mu_3 > 0$ ist. Im Falle 2a) liegen nothwendigerweise die 8 Eckpunkte (3, 0, 0, 0), (2, 1, 0; 0), (2, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 3, 0, 0) links von jener Ebene und die Gleichung $5\xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 - 3\xi_4 = 0$ stellt auch wirklich eine Ebene dar, auf deren linker Seite jene 8 Punkte liegen, während sämmtliche übrigen 12 Eckpunkte rechts von derselben gelegen sind. Der Fall 2b) führt zu einer Ebene, auf deren linker Seite diejenigen 10 Eckpunkte, für welche $\xi_4 = 0$ ist und auf deren rechter Seite die übrigen 10 Eckpunkte gelegen sind. Wenn wir nun der Kürze wegen $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$ setzen und unter a eine willkürliche Grösse unter $(xyz)_s$ und $(yz)_s$ homogene Ausdrücke s^{ten} Grades von x, y, z bezüglich y, z mit beliebigen Coefficienten verstehen, so erhalten wir folgende Tabelle der Nullformen:

1) $z^2 + (xyz)_3$,

2a) $(yz)_2 + (yz)_3 + x(yz)_2 + x^2(yz)_1$,

2b) $az + z(xyz)_1 + z(xyz)_2$.

Da aber, wie leicht zu sehen, die Nullform 2b) durch Anwendung einer geeigneten linearen Substitution in eine Gestalt transformirt werden kann, welche in der Form 2a) als Specialfall enthalten ist, so folgt, dass es nur 2 wesentlich verschiedene Arten von Nullformen giebt. Indem wir ferner die Ausartungen derjenigen cubischen Flächen ermitteln, welche durch Nullsetzen dieser Nullformen dargestellt werden, finden wir den folgenden Satz:

Für eine quaternäre cubische Form f verschwinden dann und nur dann sämmtliche Invarianten, wenn die durch $f = 0$ dargestellte Fläche entweder einen Doppelpunkt besitzt, für welchen die 2^{te} Polare eine doppelt gezählte Ebene ist oder wenn dieselbe einen Doppelpunkt besitzt, für welchen die 2^{te} Polare aus 2 getrennten Ebenen besteht, deren Schnittlinie ganz auf der Fläche liegt.

Auch die Theorie der quadratischen und bilinearen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen kann auf dem eingeschlagenen Wege behandelt werden.

Ferner lassen sich durch die nunmehr gewonnenen Hilfsmittel alle diejenigen Sätze auf Formen mit 3 und mehr Veränderlichen ausdehnen, welche in Abschnitt II lediglich für binäre Formen abgeleitet sind. *Insbesondere erweist sich der in* § 7 *gefundene Satz über eine fundamentale Eigenschaft des Aronhold'schen Processes als allgemein gültig.*

Die gewonnenen Resultate über ternäre Nullformen gestatten die folgende geometrische Deutung: wenn wir die ternäre Form f durch einen Punkt in einem Raume von $N-1$ Dimensionen darstellen, so ist in diesem Raume durch das Nullsetzen aller Invarianten ein algebraisches Gebilde bestimmt, dessen irreducible Bestandtheile zufolge der obigen Entwicklung von vornherein angegeben werden können; zugleich sieht man, dass diese Gebilde sämmtlich rational d. h. von solcher Art sind, dass man ihre Punkte erhalten kann, indem man die Coordinaten derselben gleich rationalen Functionen von Parametern einsetzt.

Fassen wir alle Invarianten der ternären Grundform zu einem Modul zusammen, so haben wir durch die obigen Entwicklungen zugleich alle diejenigen irreduciblen Moduln bestimmt, welche in jenem Modul enthalten sind.

§ 20.

Das Verschwinden der Invarianten einer Nullform und die Ordnung dieses Verschwindens.

Die Thatsache, dass für eine kanonische Nullform sämmtliche Invarianten 0 sind, kann auch direct aus der obigen Definition der kanonischen Nullform abgeleitet werden und auf diesem Wege erhalten wir zugleich einen bemerkenswerthen Aufschluss über die Vielfachheit des Verschwindens der Invarianten einer beliebigen Nullform.

Eine Invariante der Grundform

$$f=\sum a_{n_1,n_2,n_3}\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$$

ist nämlich eine ganze rationale Function der Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$, deren Glieder sämmtlich den gleichen Grad g und die gleichen Gewichte $p=\frac{1}{3}ng$ besitzen. Schreiben wir dieselbe also in der Gestalt

$$J=\sum C\prod a_{n_1 n_2 n_3}^{e_{n_1 n_2 n_3}},$$

wo C den Zahlencoefficient des betreffenden Gliedes bezeichnet, so gelten für die Exponenten $e_{n_1 n_2 n_3}$ die folgenden 3 Gleichungen

$$\sum n_1 e_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3} ng,$$
$$\sum n_2 e_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3} ng,$$
$$\sum n_3 e_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3} ng,$$

wo die Summe über alle Systeme von Zahlen n_1, n_2, n_3 zu erstrecken ist, deren Summe n beträgt. Es möge nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ein System von 3 Zahlen sein, durch welche eine kanonische Nullform der oben gegebenen Definition gemäss bestimmt wird. Die Summe dieser 3 Zahlen sei gleich $-\lambda$, wo λ eine positive von 0 verschiedene Zahl bedeutet. Aus den letzteren Gleichungen folgt dann

$$\sum (\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3)\, e_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3} ng(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -\frac{1}{3} \lambda ng.$$

Lassen wir in der Summe linker Hand alle diejenigen Glieder weg, deren Werthe $\geqq 0$ sind, so erhalten wir

$$\sum{}' (\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3)\, e_{n_1 n_2 n_3} \leqq -\frac{1}{3} \lambda ng$$

oder

$$\sum{}' (|\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3|)\, e_{n_1 n_2 n_3} \geqq \frac{1}{3} \lambda ng,$$

wo die Summe $\sum{}'$ über alle Systeme von Zahlen n_1, n_2, n_3 zu erstrecken ist, für welche $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3$ negativ ausfällt. Bezeichnet ferner Λ den grössten der absoluten Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so ist

$$|\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3| \leqq n\Lambda$$

und hieraus ergiebt sich

$$\sum{}' e_{n_1 n_2 n_3} \geqq \frac{\lambda g}{3\Lambda}$$

d. h. in jedem Gliede $C\Pi a_{n_1 n_2 n_3}^{e_{n_1 n_2 n_3}}$ einer Invariante erreicht oder übersteigt die Summe der Exponenten derjenigen Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$, welche für eine kanonische Nullform gleich 0 sind, eine gewisse positive Zahl $\frac{\lambda g}{3\Lambda}$ und daher *verschwinden für eine kanonische Nullform nicht nur alle Invarianten, sondern auch sämmtliche nach den* $a_{n_1 n_2 n_3}$ *genommenen Differentialquotienten derselben bis zu einer gewissen Ordnung G hin, wo G die grösste ganze, den Werth* $\frac{\lambda g}{3\Lambda}$ *nicht übersteigende Zahl bedeutet* und mithin eine Zahl ist, welche zugleich mit dem Grade g selbst über alle Grenzen hinaus wächst. Da nun jede beliebige Nullform nach dem obigen Satze in eine kanonische Nullform transformirt werden kann, *so gilt die eben gefundene Eigenschaft für eine jede Nullform* und auf diesen Umstand lässt sich ein neuer Beweis für die Endlichkeit des vollen Invariantensystems gründen, auf welchen ich jedoch hier nicht näher eingehe.*)

VI.

Die Aufstellung des vollen Invariantensystems.

§ 21.

Die drei Schritte zur Erlangung des vollen Invariantensystems.

Um nach der in Abschnitt I und II entwickelten Methode das volle Invariantensystem zu erhalten, hat man der Reihe nach die *folgenden 3 Aufgaben zu lösen:*

1. Man stelle ein System S_1 von Invarianten auf, durch welche sich alle übrigen Invarianten der Grundform als ganze algebraische Functionen ausdrücken lassen.

2. Man stelle ein System S_2 von Invarianten auf, durch welche sich alle übrigen Invarianten rational ausdrücken lassen.

3. *Man berechne ein vollständiges System* S_3 von ganzen algebraischen Functionen in dem durch die Systeme S_1 und S_2 bestimmten Invariantenkörper. Die Functionen dieses Systems S_3 sind Invarianten und bilden, zusammengenommen mit den Invarianten S_1, das gesuchte volle Invariantensystem.

Von diesen 3 Aufgaben ist die erste die schwierigste. Nach dem in § 4 bewiesenen Satze erhält man ein System S_1, indem man solche Invarianten ermittelt, deren Verschwinden nothwendig das Verschwinden aller Invarianten zur Folge hat, und hierzu wiederum genügt es nach dem in § 14 bewiesenen Satze, alle diejenigen Invarianten in Betracht zu ziehen, deren Gewicht eine gewisse Zahl nicht übersteigt. Was endlich die *wirkliche Berechnung eines solchen Systems* S_1 in bestimmten Fällen angeht, so wird dieselbe wesentlich durch die in § 18 gewonnene Kenntniss der Nullformen erleichtert; denn mittelst dieser Kenntniss kann in jedem besonderen Falle offenbar leicht entschieden werden, ob irgend welche bereits gefundenen Invarianten von der Beschaffenheit sind, dass ihr Verschwinden nothwendig das Verschwinden sämmtlicher Invarianten zur Folge hat.

Die Aufstellung eines Systems S_2 ist mit Hilfe einer typischen Darstellung oder durch eine geeignete in jedem besonderen Falle an-

*) Diesen Beweis habe ich dargelegt in meiner 3ten oben citirten Note S. 7; derselbe gebraucht nicht das Theorem I meiner Arbeit: Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann. Bd. 36, S. 474.

zustellende Rechnung möglich. Wir wollen jedoch im folgenden Paragraphen zeigen wie auch ohne die Kenntniss eines Systems S_2 das volle Invariantensystem aufgestellt werden kann.

§ 22.

Die Ableitung des vollen Invariantensystems aus den Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$.

Es sei $i_1, \ldots i_m$ ein System S_1 von Invarianten, durch welche sich alle übrigen ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Der in § 1 bewiesene Hilfssatz lehrt dann, aus diesen Invarianten ein System von $\varkappa$ Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ berechnen, durch welche sich ebenfalls alle Invarianten der Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen, und zwischen denen keine algebraische Relation stattfindet. Ist dies geschehen, so wähle man aus den Functionen $b_1, \ldots, b_N$ eine gewisse Zahl τ von Functionen aus — es seien dies etwa $b_1, \ldots, b_\tau$, so dass zwischen $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots, b_\tau$ keine algebraische Relation stattfindet und dass sämmtliche übrigen Functionen $b_{\tau+1}, b_{\tau+2}, \ldots, b_N$ algebraische Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots, b_\tau$ sind*). Nun gilt, wenn p_1 das Gewicht der Invariante J_1 bezeichnet, die Gleichung

$$\delta^{p_1} J_1(a_1, \ldots, a_N) = J_1(b_1, \ldots, b_N)$$

und da infolgedessen die Grösse δ eine algebraische Function von $J_1, b_1, \ldots, b_N$ ist, so lassen sich nach einem bekannten Satze in dem Ausdrucke

$$B = c\delta + c_{\tau+1} b_{\tau+1} + c_{\tau+2} b_{\tau+2} + \cdots + c_N b_N$$

die Constanten $c, c_{\tau+1}, c_{\tau+2}, \ldots, c_N$ derart bestimmen, dass sämmtliche Grössen $\delta, b_{\tau+1}, b_{\tau+2}, \ldots, b_N$ rationale Functionen von $B, J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots, b_\tau$ sind. Die Function B genügt einer Gleichung von der Gestalt

$$B^\mu + R_1 B^{\mu-1} + \cdots + R_\mu = 0,$$

wo $R_1, \ldots, R_\mu$ rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots, b_\tau$ sind.

Wir betrachten jetzt $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots, b_\tau$ als die unabhängigen Veränderlichen und bestimmen dann in dem durch B definirten Functionenkörper ein Fundamentalsystem d. h. ein System von ganzen algebraischen Functionen $B_1, \ldots, B_M$ des Körpers derart, dass jede andere ganze Function des Körpers sich in der Gestalt

$$G_1 B_1 + G_2 B_2 + \cdots + G_M B_M$$

*) Die Zahl $\varkappa$ hat in dem vorliegenden Falle einer ternären Grundform n^{ter} Ordnung den Werth $N - 8$ und die Zahl τ hat den Werth 9.

darstellen lässt, wo $G_1, G_2, \ldots, G_M$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots, b_\tau$ sind. Die Functionen B_s genügen, da sie ganze algebraische Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots, b_\tau$ sind, je einer Gleichung von der Gestalt

$$B_s^\mu + \Gamma_{1s} B_s^{\mu-1} + \cdots + \Gamma_{\mu s} = 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, M),$$

wo $\Gamma_{1s}, \ldots, \Gamma_{\mu s}$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots b_\tau$ sind, und da diese Functionen andrerseits rational von $B, J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots, b_\tau$ abhängen, so gehen dieselben, wenn man an Stelle der Grössen $b_1, \ldots, b_N$ ihre Ausdrücke in $a_1, \ldots, a_N, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ einsetzt, über in ganze rationale Functionen von $a_1, \ldots, a_N, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$.

Bezeichnen wir, wenn irgend ein von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ ganz und rational abhängender Ausdruck A vorgelegt ist, allgemein das von diesen Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ freie Glied mit $[A]$, so sind offenbar die Ausdrücke $[B_1], \ldots, [B_M]$ sämmtlich Invarianten der Grundform. In der That $[B_s]$ genügt der Gleichung

$$[B_s]^\mu + [\Gamma_{1s}]\,[B_s]^{\mu-1} + \cdots + [\Gamma_{\mu s}] = 0$$

und da nun lediglich die Grössen $b_1, \ldots, b_\tau$ noch die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ enthalten, so ist klar, dass die Ausdrücke $[\Gamma_{11}], \ldots, [\Gamma_{1s}], \ldots [\Gamma_{\mu s}]$ ganze rationale Functionen der Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Hieraus folgt wegen der in der Einleitung genannten Eigenschaft 3. des Invariantensystems, dass $[B_1], \ldots, [B_M]$ Invarianten sind.

Andrerseits ist eine jede Invariante J der Grundform f wegen der Gleichung

$$\delta^p J(a_1, \ldots, a_N) = J(b_1, \ldots, b_N)$$

eine rationale Function der Grössen $\delta, b_1, \ldots, b_N$ und da sie ausserdem ganz und algebraisch von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ abhängt, so ist sie eine ganze algebraische Function des betrachteten Körpers und als solche nothwendig in der Gestalt

$$J = G_1 B_1 + \cdots + G_M B_M$$

darstellbar, wo $G_1, \ldots, G_M$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ $b_1, \ldots, b_\tau$ sind. Aus dieser Formel erhält man

$$J = [G_1]\,[B_1] + \cdots + [G_M]\,[B_M],$$

wo $[G_1], \ldots, [G_M]$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Diese Gleichung sagt aus, dass $J_1, \ldots, J_\varkappa, [B_1], \ldots, [B_M]$ ein System von Invarianten bilden, durch welche sich eine jede andere Invariante der Grundform f ganz und rational ausdrücken lässt.

Die auseinandergesetzte Methode zur Aufstellung des vollen Invariantensystems erfordert lediglich rationale und von vornherein übersehbare Processe und die nähere Ausführung liefert auch zugleich eine nur von n abhängige obere Grenze für die Gewichte der Invarianten des vollen Invariantensystems. Hiermit sind, glaube ich, die wichtigsten allgemeinen Ziele einer Theorie der durch die Invarianten gebildeten Functionenkörper erreicht.

Königsberg, den 29. September 1892.