Tarea 1. Procesamiento Digital de Señales

Flores Chavarria Diego

1. Determine si las siguientes secuencias son periódicas y calcule su periodo:

a. $x(n) = 3\,cos\left(\frac{2\pi}{15}n\right) cos\left(\frac{3\pi}{10}n\right)$

Solución:

$\boldsymbol{cos(A) * cos\,(B) = \frac{1}{2}[cos(A+B) + cos(A-B)]}$

$\boldsymbol{A = \frac{2\pi}{15} \qquad B = \frac{3\pi}{10}}$

$\boldsymbol{x(n) = \frac{3}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{30}n\right)\right]}$

$\boldsymbol{x_1(n) = cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) \qquad donde \qquad w_o = \frac{\pi}{6}}$

$\boldsymbol{\frac{2\pi}{w_o} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \notin \mathbb{Q} \qquad donde\ x_1(n) =}$

$\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)\ es\ aperiodica}$

$\boldsymbol{x_2(n) = cos\left(\frac{13\pi}{30}n\right) \qquad donde \qquad w_o = \frac{13\pi}{30}}$

$\boldsymbol{\frac{2\pi}{w_o} = \frac{2\pi}{\frac{13\pi}{30}} = \frac{60}{13} \in \mathbb{Q} \qquad donde\ \ N = \frac{60}{13}\,k \quad k = 13\ \ y\ \ N = 60}$

Por lo tanto $\boldsymbol{x(n) = \frac{3}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{30}n\right)\right]\ es\ aperiodica}$

b. $x(n) = 2\,cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + 3cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 2sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right)$

Solución:

$$\boldsymbol{cos(A) * cos\,(B) = \frac{1}{2}[cos(A+B) + cos(A-B)]}$$

$$\boldsymbol{x_1(n) = 2\,cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \qquad donde \qquad w_o = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\boldsymbol{\frac{2\pi}{w_o} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3 \notin \mathbb{Q} \qquad donde\; x_1(n) = 2\,cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\; es\; aperiodica}$$

$$\boldsymbol{x_2(n) = 3cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right) \qquad donde \qquad w_o = \frac{3\pi}{5}}$$

$$\boldsymbol{\frac{2\pi}{w_o} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}} = \frac{10}{3} \in \mathbb{Q} \qquad donde\; x_1(n) = 3cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)\; es\; periodica}$$

$$\boldsymbol{x_3(n) = 2sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right) \qquad donde \qquad w_o = \frac{\pi}{4}}$$

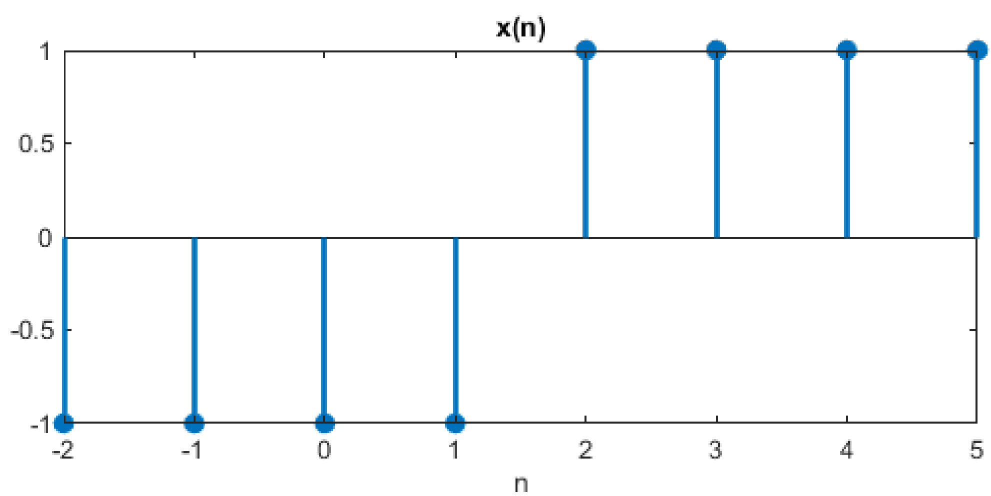
$$\boldsymbol{\frac{2\pi}{w_o} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \notin \mathbb{Q} \qquad donde\; x_3(n) = 2sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right) \quad es\; periodica}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x(n) = 2\,cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + 3cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 2sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right)}$

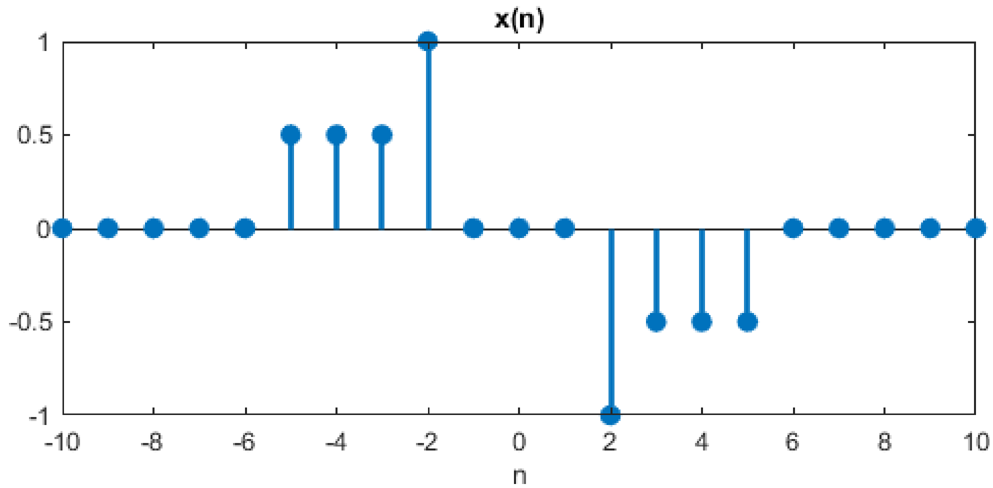
$\boldsymbol{es\; aperiodica}$

2. Dada la señal $x(n) = u(n+2) - 2u(n-2) + u(n-6$ representar gráficamente las siguientes secuencias.

a. $x_1(n) = x(n-3)$



b. $x_2(n) = x(n-3)$



3. Realice la convolución numérica de las siguientes secuencias:

$$x(n) = \{2,3,4,3,2\} \quad y \quad h(n) = \{1,2,3\}$$

		2	3	4	3	2
			x	1	2	3
		6	9	12	9	6
	4	6	8	6	4	
2	3	4	3	2		
2	7	16	20	20	13	6

Por lo tanto, el resultado de la convolución es $\boldsymbol{y(n)} = \{\mathbf{2, 3, 16, 20, 20, 13, 6}\}$

4. Calcule la convolución de las siguientes secuencias:

a. $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n-1) \quad y \quad h(n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2} u(n-1)$

$caso\ 1: n < 1$

$y(n) = \mathbf{0}$

$caso\ 2: n \geq 1$

$y(n) = \mathbf{3}\ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \mathbf{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} =$

$\ldots = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1} = \mathbf{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$

$Respuesta\ general: 3\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{n})$

b. $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) \quad y \quad h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n-11)$

$caso\ 1: n < 0$

$y(n) = \mathbf{0}$

$caso\ 2: 0 \leq n < 10$

$y(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} =$

$\ldots = \left[3\left(\frac{1}{2}\right) - \mathbf{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right] u(n)$

$caso\ 3: n \geq 10$

$y(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} =$

$\ldots = 170.99\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n)$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0,\ \boldsymbol{n} < \mathbf{0} \\ \left[3\left(\frac{1}{2}\right) - \mathbf{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right] u(n),\ 0 \leq n < 10 \\ 170.99\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n),\ n \geq 10 \end{cases}$$

5. Calcule la convolución periódica de las secuencias

$\tilde{x} = \{3, -2, 7, 2\}$ y $\tilde{h} = \{2, 5, -3, 1\}$.

$y(n) = \tilde{\boldsymbol{x}}(n) * \tilde{\boldsymbol{h}}(n) = \{6, 11, 13, 40, -13, 1, 2\}$

La extensión periódica es:

6	11	13	40
-13	1	2	
-8	12	15	40

6. Determine la respuesta al impulso del sistema caracterizado por la ecuación en diferencias: $y(n) - \frac{7}{6}y(n-1) + \frac{1}{3}y(n-2) = x(n)$

$\lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{3}$ $\quad \ldots ecuacion\ caracteristica$

$\lambda_1 = \frac{2}{3} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$ $\quad \ldots soluciones\ a\ la\ ecuacion\ caracteristica$

Encontrando C_1 y C_2: Evaluando la solución general en n = 0 y n = 1

$y(0) = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^0 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 6 = C_1 + C_2$

$y(\mathbf{1}) = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 6 = C_1\left(\frac{2}{3}\right) + C_2\left(\frac{1}{2}\right)$

Mediante recursión:

$\boldsymbol{y(n) = \frac{7}{6}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) + x(n)}$

n = 0 $\quad \boldsymbol{y(0)} = \frac{7}{6}\boldsymbol{y(-1)} - \frac{1}{3}\boldsymbol{y(-2)} + \boldsymbol{x(0)} = 1$

n = 1 $\quad \boldsymbol{y(1)} = \frac{7}{6}\boldsymbol{y(0)} - \frac{1}{3}\boldsymbol{y(-1)} + \boldsymbol{x(1)} = \frac{7}{6}$

$C_1 + C_2 = 1$

$C_1\left(\frac{2}{3}\right) + C_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$

$Dando\ solucion\ al\ sistema\ de\ ecuaciones\ \ C_1 = 4 \quad C_2 = -3$

$Solucion\ general: y = \left[4\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$

7. Determine la respuesta al escalón del sistema caracterizado por la ecuación en diferencias: $y(n) - \frac{7}{6}y(n-1) + \frac{1}{3}y(n-2) = x(n)$

$\lambda^2 - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}\lambda + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = 0$ $\quad$ $\dots ecuacion\ caracteristica$

$\lambda_1 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ $\quad$ $\dots soluciones\ a\ la\ ecuacion\ caracteristica$

$y_h = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad$ $y_p = ku(n)$

$y = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + k$ $\qquad$ $\dots solucion\ general$

Encontrando k:

$\boldsymbol{ku(n) - \frac{7}{6}ku(n-1) + \frac{1}{3}ku(n-2) = u(n)}$

$\boldsymbol{n = 2} \qquad \boldsymbol{ku(2) - \frac{7}{6}ku(1) + \frac{1}{3}ku(0) = u(2)}$

k =6 **por lo tanto** $y_p = 6u(n)$

Encontrando $C_1\ y\ C_2$: Evaluando la solución general en n = 0 y n = 1

$y(0) = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^0 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 6 = C_1 + C_2 + 6$

$y(\mathbf{1}) = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 6 = C_1\left(\frac{2}{3}\right) + C_2\left(\frac{1}{2}\right) + 6$

Mediante recursión:

$\boldsymbol{y(n) = \frac{7}{6}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) + x(n)}$

n = 0 $\quad \boldsymbol{y(0) = \frac{7}{6}y(-1) - \frac{1}{3}y(-2) + x(0)} = 1$

n = 1 $\quad \boldsymbol{y(1) = \frac{7}{6}y(0) - \frac{1}{3}y(-1) + x(1) = \frac{13}{6}}$

$C_1 + C_2 + 6 = 1$

$C_1\left(\frac{2}{3}\right) + C_2\left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}}$

$Dando\ solucion\ al\ sistema\ de\ ecuaciones\ \ C_1 = -8 \quad C_2 = 3$

$Solucion\ general: y = \left[-8\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right]\ u(n)$

8. Un sistema de tiempo discreto se caracteriza por la ecuación en diferencias:

$$y(n) - \frac{7}{6}y(n-1) + \frac{1}{3}y(n-2) = x(n)$$

Determine la respuesta del sistema a la entrada $x(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$ si las condiciones iniciales son:

$$y(-1) = 1, y(-2) = 2$$

$\lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{3} = 0$ $\quad$ $\ldots$ *ecuacion caracteristica*

$\lambda_1 = \frac{2}{3} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\ldots$ *soluciones a la ecuacion caracteristica*

$y_h = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad$ $y_p = k\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

$y = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + k\left(\frac{1}{5}\right)^n$ $\quad$ $\ldots$ *solucion general*

Encontrando k:

$$\boldsymbol{k\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n) - \frac{7}{6}k\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u(n-1) + \frac{1}{3}k\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} u(n-2) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)}$$

$\boldsymbol{n = 2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{k\left(\frac{1}{5}\right)^2 u(2) - \frac{7}{6}k\left(\frac{1}{5}\right)^1 u(1) + \frac{1}{3}k\left(\frac{1}{5}\right)^0 u(0)} = \left(\frac{1}{5}\right)^1 \boldsymbol{u(2)}$

k =$\frac{2}{7}$ $\qquad$ **por lo tanto** $\quad$ $y_p = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

$y = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n$ $\quad$ $\ldots$ *solucion general*

Encontrando C_1 y C_2: Evaluando la solución general en n = 0 y n = 1

$$y(0) = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^0 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^0 u(0) = C_1 + C_2 + \frac{2}{7}$$

$$y(1) = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^1 u(0) = C_1\left(\frac{2}{3}\right) + C_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{35}$$

Mediante recursión:

$$\boldsymbol{y(n)} = \frac{7}{6}\boldsymbol{y(n-1)} - \frac{1}{3}\boldsymbol{y(n-2)} + \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

n = 0 $\quad$ $\boldsymbol{y(0)} = \frac{7}{6}\boldsymbol{y(-1)} - \frac{1}{3}\boldsymbol{y(-2)} + \left(\frac{1}{5}\right)^0 u(0) = 1$

n = 1 $\quad$ $\boldsymbol{y(1)} = \frac{7}{6}\boldsymbol{y(0)} - \frac{1}{3}\boldsymbol{y(-1)} + \left(\frac{1}{5}\right)^1 u(1) = \frac{41}{30}$

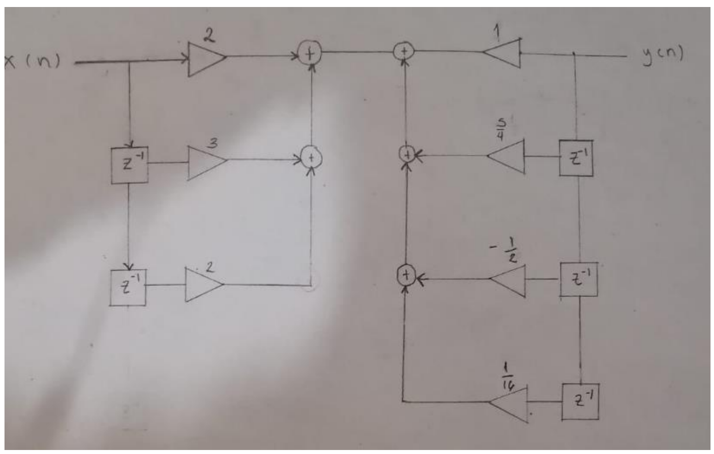
$$C_1 + C_2 + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}} \;\; = 1$$

$$\underline{C_1\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right) + C_2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) + \;\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{35}} = \quad \frac{\mathbf{41}}{\mathbf{30}}}$$

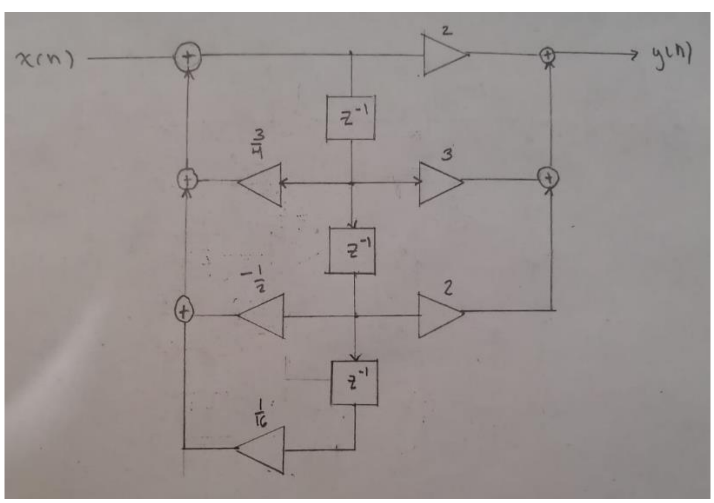
$$Dando\ solucion\ al\ sistema\ de\ ecuaciones\ \ C_1 = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{7}} \quad C_2 = -5$$

$$Solucion\ general: y = \left[\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{7}} \quad \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^n - 5\ \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^n + 6\right]\ \ u(n)$$

9. Obtenga el diagrama a bloques correspondiente a la forma directa I, forma directa II y transpuesta de la forma directa II del sistema caracterizado por la ecuación en diferencias:
    - Forma directa I:



    - Forma directa II:



- Transpuesta de la forma directa II: