Tarea 2

Flores Chavarria Diego

1. **Determine el valor numérico de cada uno de los coeficientes de la serie de Fourier de la señal:**

$$\boldsymbol{x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}n\right)}$$

Solución:

Usando

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

$$x(n) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{20\pi}{21}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{8\pi}{21}n\right)$$

$$w_1 = \frac{20\pi}{21} \qquad \frac{\frac{20\pi}{21}}{2\pi} = \frac{10}{21} \qquad N = 21$$

$$w_2 = \frac{8\pi}{21} \qquad \frac{\frac{8\pi}{21}}{2\pi} = \frac{4}{21} \qquad N = 21$$

$$x(n) = \frac{1}{4}e^{j(4)\frac{2\pi}{21}} + \frac{1}{4}e^{-j(4)\frac{2\pi}{21}} + \frac{1}{4}e^{j(10)\frac{2\pi}{21}} + \frac{1}{4}e^{-j(10)\frac{2\pi}{21}}$$

$$k = 4 \qquad C_4 = \frac{1}{4}e^{j(4)\frac{2\pi}{21}} \qquad C_{21-4} = C_{17} = \frac{1}{4}e^{-j(4)\frac{2\pi}{21}}$$

$$k = 10 \qquad C_4 = \frac{1}{4}e^{j(10)\frac{2\pi}{21}} \qquad C_{21-10} = C_{11} = \frac{1}{4}e^{-j(10)\frac{2\pi}{21}}$$

2. Determine la transformada de Fourier X($e^{j\omega}$) de la señal:

$$x(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \mathrm{u}(n)$$

Solución:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) e^{-jwn} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}e^{-j\left(w-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}e^{-j\left(w+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^n\right]$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-j\left(w-\frac{2\pi}{3}\right)}} - \frac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-j\left(w+\frac{2\pi}{3}\right)}}\right]$$

3. **Determine y grafique la respuesta en magnitud y fase del sistema definido por la siguiente ecuación en diferencias:**

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}\mathrm{y}(\mathrm{n}-2) \; = \; \mathrm{x}(\mathrm{n})$$

Solución:

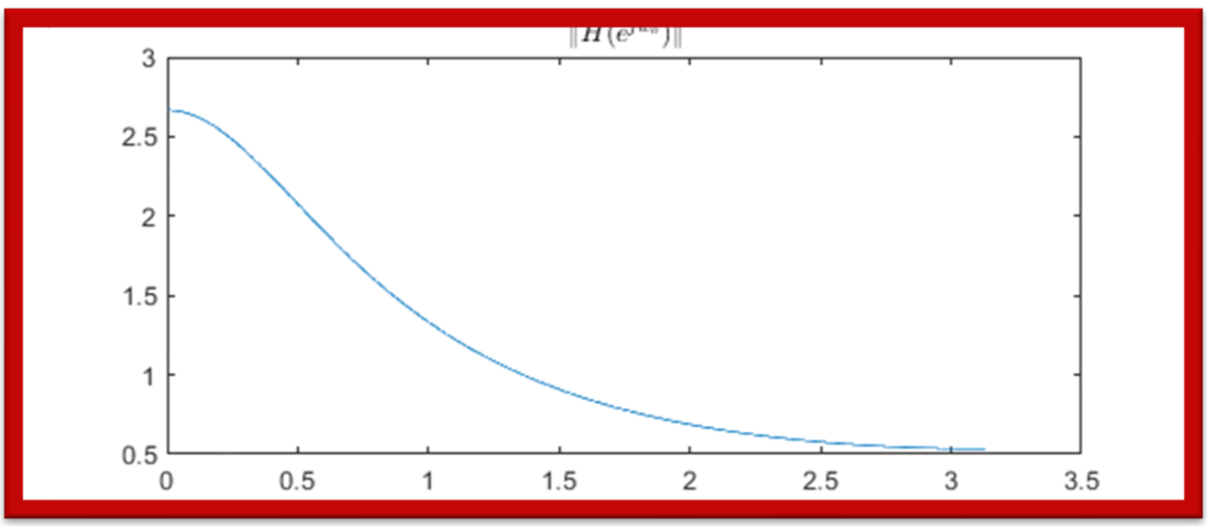
$$Y(e^{jw}) - \frac{3}{4}Y(e^{jw})e^{-jw} + \frac{1}{8}Y(e^{jw})e^{-j2w} = X(e^{jw})$$

$$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-jw} + \frac{1}{8}e^{-j2w}}$$

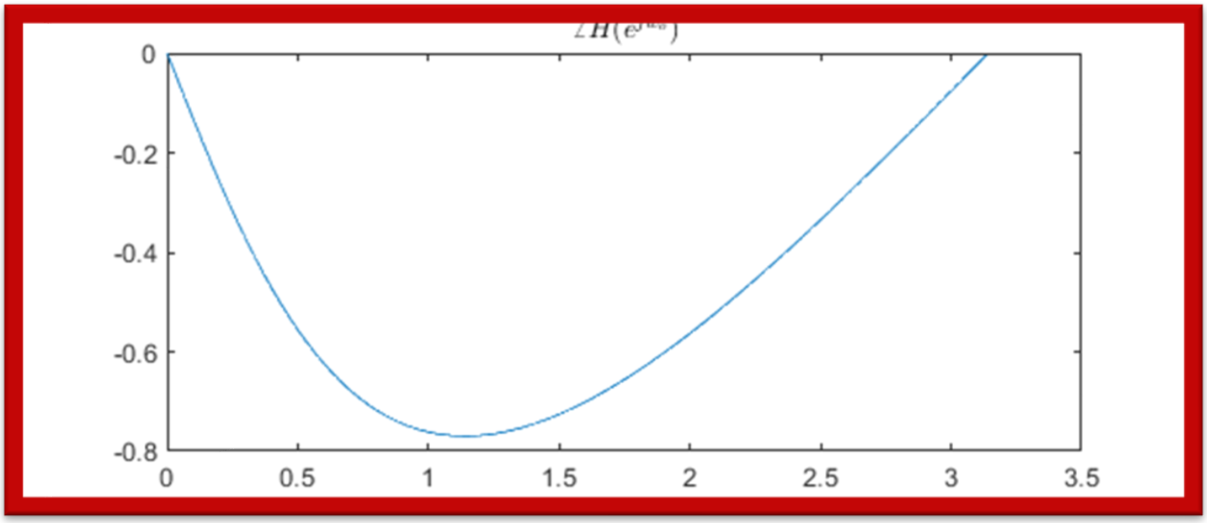
$$\left\|H(e^{jw})\right\| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}e^{-jw} + \frac{1}{8}e^{-j2w}\right)\left(1 - \frac{3}{4}e^{jw} + \frac{1}{8}e^{j2w}\right)}}$$

$$\left\|H(e^{jw})\right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{jw} + \frac{1}{8}e^{j2w} - \frac{3}{4}e^{-jw} + \frac{9}{16} - \frac{3}{32}e^{jw} + \frac{1}{8}e^{-j2w} - \frac{3}{32}e^{-jw} + \frac{1}{64}}}$$

$$\left\|H(e^{jw})\right\| = \frac{1}{\sqrt{\frac{101}{64} - \frac{27}{16}\cos(w) + \frac{1}{4}\cos(2w)}}$$



$$\angle H(e^{jw}) = \frac{-\frac{3}{4}\sin(w) - \frac{1}{8}\sin(2w)}{1 - \frac{3}{4}\cos(w) + \frac{1}{8}\cos(2w)}$$



4. Utilice la transformada de Fourier para determinarla respuesta del sistema.

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}\mathrm{y(n-2)} \; = \; \mathrm{x(n)}$$

A la entrada $x(n) = 3\cos\,(\frac{3\pi n}{5})$

Solución:

$$Y\left(e^{jw}\right) - \frac{3}{4}Y\left(e^{jw}\right)e^{-jw} + \frac{1}{8}Y\left(e^{jw}\right)e^{-j2w} = X\left(e^{jw}\right)$$

$$H\left(e^{jw}\right) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-jw} + \frac{1}{8}e^{-j2w}}$$

$$H\left(e^{j\frac{3\pi}{5}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\frac{3\pi}{5}} + \frac{1}{8}e^{-j\frac{6\pi}{5}}}$$

$$\left|\left|H\left(e^{jw}\right)\right|\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\frac{3\pi}{5}} + \frac{1}{8}e^{-j\frac{6\pi}{5}}\right)\left(1 - \frac{3}{4}e^{j\frac{3\pi}{5}} + \frac{1}{8}e^{j\frac{6\pi}{5}}\right)}}$$

$$\left|\left|H\left(e^{jw}\right)\right|\right| = .7260$$

$$\angle H\left(e^{jw}\right) = \; -.6079$$

$$y(n) = 2.178Cos\left(\frac{3\pi}{5}n - .6079\right)$$

5. **Utilice la transformada de Fourier para determinar la ecuación en diferencias del sistema con respuesta al impulso dada por la ecuación:**

$$H(n) = \left[4\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

Solución:

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[4\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]e^{-jwn}$$

$$\dots = 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}e^{-jw}\right)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-jw}\right)^n = \cdots$$

$$\dots = \frac{4}{1-\frac{2}{3}e^{-jw}} - \frac{3}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} = \cdots$$

$$H(e^{jw}) = \frac{1-4e^{-jw}}{1-\frac{7}{6}e^{-jw}+\frac{1}{3}e^{-j2w}}$$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = -\frac{7}{6} \qquad a_2 = \frac{1}{3} \qquad b_0 = 1 \qquad b_1 = 4$$

$$y(n) - \frac{7}{6}y(n-1) + \frac{1}{3}y(n-2) = x(n) - 4x(n-2)$$

6. Determine la transformada de Fourier inversa de:

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & |w| < \omega_c \\ 1, & \omega_c \le |w| \le \pi \end{cases}$$

Solución:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jw})e^{jwn}dw$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{jwn}dw + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{jwn}dw\right]$$

$$h(n) = -\frac{1}{\pi n}\left[\frac{e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}}{2j}\right] + \frac{1}{\pi n}\left[\frac{e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}}{2j}\right]$$

$$h(n) = -\frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n)\,; n \neq 0$$

$$h(n) = \frac{\pi - \omega_c}{\pi}; n = 0$$

7. Calcule la DFT de 4 puntos de la secuencia $x(n)$ = {2,3,0,3}.

Solución:

$$X(K) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3+0+3 \\ 2-3j-0+3j \\ 2-3+0-3 \\ 2+3j-0-3j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X(K) = \{8,2,-4,2\}$$

8. Use la transformada discreta de Fourier para determinar la convolución circular de las secuencias:

$$x_1(n) = \{1,2,3,1\} \qquad x_2(n) = \{4,3,2,2\}$$

Solución:

$$X_1(K) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2-j \\ 1 \\ -2+j \end{bmatrix}$$

$$X_2(K) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2-j \\ 1 \\ 2+j \end{bmatrix}$$

$$X_3(K) = X_1(K)X_2(K) = \{77,-5,1,-5\}$$

$$x(n) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77 \\ -5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 68 \\ 76 \\ 88 \\ 76 \end{bmatrix}$$

$$x(n) = \{17,19,22,19\}$$

9. **Utilice el algoritmo de traslape y suma para determinar la convolución de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ utilizando N=4:**

Solución:

$$x_0(n) = \{4,2,0,1\} \qquad x_0(n) = \{3,2,1\}$$

Convolución $x_0(n)\ y\ h(n)$

		4	2	0	1
		x	1	2	3
		12	6	0	3
	8	4	0	2	
4	2	0	1		
4	10	16	7	2	3

Convolución $x_1(n)\ y\ h(n)$

		3	2	1
	x	1	2	3
		9	6	3
	6	4	2	
3	2	1		
3	8	14	8	3

$$y(n) = y_0(n) + y_1(n-N) = y_0(n) + y_1(n-4)$$

4	10	16	7	2	3	0	0	0
0	0	0	0	3	8	14	8	3
4	10	16	7	5	11	14	8	3

$$y(n) = \{4,10,16,7,5,11,14,8,3\}$$

10. Utilice el algoritmo FFT-DIT base 2 de 4 puntos para determinar la transformada de Fourier discreta de la secuencia $x(n)$ = {3,2,5,4}.

Solución: