Tarea 3

Flores Chavarria Diego

1. **Determine la transformada z de la siguiente secuencia:**

$$\boldsymbol{x(n) = (.3)^n sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)u(n)}$$

Solución:

$$x(n) = \frac{1}{2}\left(.3e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)^n u(n) + \frac{1}{2}\left(.3e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - .3e^{j\frac{3\pi}{4}}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - .3e^{-j\frac{3\pi}{4}}}\right)$$

$$X(Z) = \frac{.3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)z^{-1}}{1 - .6cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)z^{-1} + .09z^{-2}}$$

$$ROC: |z| > |.3|$$

2. **Determine la transformada z inversa por el método de integral de contorno de la siguiente función:**

$$\boldsymbol{H(z) = \frac{z^2}{(z-.5)(z-1)^2} \qquad |z| > 1}$$

Solución:

$$H_0(z) = H(z)z^{n-1}$$

$$H_0(z) = \frac{\boldsymbol{z^{n+1}}}{\boldsymbol{(z-.5)(z-1)^2}}$$

Para $n \geq 0$ $h(n)$ es la suma de los residuos $z = \frac{1}{2}$ y $z = 1$

$$h(n) = \underset{z=\frac{1}{2}}{Res}[H_0(z)] + \underset{z=1}{Res}[H_0(z)]$$

Residuo en $z = \frac{1}{2}$

$$\underset{z=\frac{1}{2}}{Res}[H_0(z)] = \left.\frac{\boldsymbol{z^{n+1}}}{\boldsymbol{(z-1)^2}}\right|_{\boldsymbol{z=\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Residuo en $z = 1$

$$\underset{z=1}{Res}[H_0(z)] = \left.\boldsymbol{\frac{d}{dz}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-.5)}\right]}\right|_{\boldsymbol{z=1}} = \boldsymbol{2n(1)^n - 2(1)^n}$$

Sumando los residuos se obtiene:

$$h(n) = \left[\boldsymbol{2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n(1)^n - 2(1)^n}\right]u(n)$$

3. **Utilice la transformada z unilateral para determinar la respuesta del sistema:**

$$\boldsymbol{y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = 3x(n)}$$

Cuando la entrada es $\boldsymbol{x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)}$ y las condiciones iniciales son: $\mathbf{y(-1) = 1, y(-2) = 2}$

Solución:

Aplicar la transformada z unilateral:

$$Y^+(z) - \frac{5}{6}[Y^+(z)z^{-1} + y(-1)] + \frac{1}{6}[Y^+(z)z^{-2} + y(-1)z^{-1} + y(-2)] = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Sustituir condiciones iniciales:

$$Y^+(z) = \frac{3}{\left(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right)}$$

Aplicando la transformada inversa:

$$y(n) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n) + \left[9\left(\frac{1}{2}\right)^n + 36n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 60\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$

Por lo tanto:

$$y(n) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n + 36n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 60\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$

4. **Determine la ecuación en diferencias de un filtro digital Butterworth pasa bajas de 2° orden con una frecuencia de corte de 1500 Hz. Considere una frecuencia de muestreo 8 KHz y utilice la transformación bilineal.**

Solución:

Predistorsión de la frecuencia de corte:

$$w_c' = tan\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi(1500)}{8000}\right) = .4142 +$$

Función de transferencia de 2° orden:

$$H'(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$H(z) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{s}{\omega_p} + 1}$$

$$H(z) = \frac{1}{\left(\frac{s}{.6682}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{s}{.6682} + 1} * \frac{.4465}{.4465}$$

$$H(z) = H'(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{.4465}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + .9445\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 1}$$

$$H(z) = \frac{.4465}{2.3915 - 1.107z^{-1} + .5015z^{-2}}$$

Normalizando:

$$H(z) = \frac{.1867(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - .4629z^{-1} + .2097z^{-2}}$$

Ecuación en diferencias:

$$y(n) - .4629y(n-1) + .2097y(n-2) = .1867(x(n) + 2x(n-1) + x(n-2))$$

5. **Diseñe un filtro digital FIR pasa bajas que cumpla las siguientes especificaciones:**
    a. **Frecuencia límite de la banda de paso de 1.5 KHz**
    b. **Frecuencia límite de la banda de rechazo de 2.5 KHz.**
    c. **Atenuación máxima en la banda de paso de 0.1 dB**
    d. **Atenuación mínima en la banda de rechazo de 40 dB**
    e. **Frecuencia de muestreo de 8 KHz**

    Usando ventana Hann:

Solución:

$$w(n) = 0.5 - 0.5cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = \frac{\frac{2\pi f_p}{F_s} + \frac{2\pi f_s}{F_s}}{2} = \frac{\frac{2\pi 1500}{8000} + \frac{2\pi 2500}{8000}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\omega = \left|\omega_s - \omega_p\right| = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\omega = \frac{6.2\pi}{N} \qquad \therefore N = \frac{6.2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 24.8 \approx 25$$

$$H_d\left(e^{j\omega}\right) = \{e^{-j\alpha\omega}, \quad |\omega| \le 0.5\pi \quad 0 \quad , 0.5\pi \le |\omega| \le \pi$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 12$$

$$h_d(n) = \frac{\sin\left(0.5\pi(n-12)\right)}{\pi(n-12)} \quad cuando\ n \ne 12\ y\ h_d(12) = 0.5$$

$$h_d(n) = \left(\frac{sin\ sin\ \left(0.5\pi(n-12)\right)}{\pi(n-12)}\right)\left(0.5 - 0.5cos\left(\frac{2\pi n}{24}\right)\right) \quad 0 \le n \le 24, \quad n \ne 12, \qquad h_d(12) = 0.5$$