1) Sea $Q(t)$ la cantidad de material radioactivo en miligramos en el instante $t \geq 0$ (t en horas)

Existe $K > 0$ tq

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -KQ \\ Q(0) = 50 \qquad Q(2) = 45 \end{cases}$$

$$\frac{dQ}{Q} = -K dt \qquad \text{ecuacion separable}$$

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int -K dt$$

$$\ln(Q) = -Kt + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$Q(t) = e^{-Kt + C_1}$$

$$Q(t) = Ce^{-Kt}, \qquad C = e^{C_1}$$

Aplicar las condiciones iniciales para obtener C y K

$$Q(0) = 50 \longrightarrow 50 = Ce^{0}$$

$$\boxed{50 = C}$$

$$Q(t) = 50e^{-Kt}$$

$$Q(2) = 45 \longrightarrow 45 = 50e^{-2K}$$

$$\frac{9}{10} = e^{-2K}$$

$$\ln(9/10) = -2K$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}\ln(9/10) = K}$$

$$Q(t) = 50e^{\frac{t}{2}\ln(9/10)}$$

b) Despues de 4 horas quedan

$$Q(4) = 50\, e^{\frac{4}{2}\ln(9/10)}$$

$$= 81/2$$

$$= 40.5 \text{ miligramos}$$

Despues de 4 horas quedan 40.5 miligramos de material

c) la vida media sera un tiempo t_0 tal que

$$Q(t_0) = 25$$

$$50\, e^{t_0/2 \ln(9/10)} = 25$$

$$e^{\frac{t_0}{2}\ln\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t_0}{2}\ln\left(\frac{9}{10}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t_0 = 2\,\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}$$

$$t_0 = 13.157627$$

la vida media del material es 13.157627 horas aproximadamente

② Suponga que existe otra solución y de la forma

$$y = v(x) \cdot y_1$$

$$y = v(x) \cdot x \cdot \ln x$$

Entonces

$$y' = v'(x) \cdot x \ln x + v(x) \cdot [\ln x + 1]$$

$$y'' = v'' x \ln x + v'[\ln x + 1] + v'[\ln x + 1] + v \cdot \frac{1}{x}$$

reemplazamos en la ecuación original $x^2 y'' - xy' + y = 0$

- $x^2 \left[v'' x \ln x + v'[\ln x+1] + v'[\ln x+1] + v \cdot \frac{1}{x} \right]$
$- x \left[v'(x) \cdot x \ln x + v(x) \cdot [\ln x + 1] \right]$
$+ v x \ln x = 0$

- $x^2 v'' x \ln x + 2x^2 v'[\ln x + 1] + xv - x^2 v' \ln x - xv[\ln x + 1]$
$+ xv \ln x = 0$

- $x^3 v'' \ln x + x^2 v' \ln x + 2x^2 v' = 0$

$$v''(x^3 \ln x) + v' x^2 (\ln x + 2) = 0$$

$$v'' + v' \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\ln x + 2}{\ln x} \right) = 0$$

$$v'' + v' \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{2}{\ln x} \right) = 0$$

haya $z = v'$

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{2}{\ln x} \right) = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -z\,\frac{1}{x}\cdot\left(1 + \frac{2}{\ln x}\right)$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int -\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\ln x}\right) dx \qquad \text{separable}$$

• $-\int \frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\ln x}\right) dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{\ln x}\, d$

para la segunda integral haga $w = \ln x$
$dw = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{2}{w}\,dw = 2\ln w$$

Entonces

$$\int \frac{dz}{z} = \int -\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\ln x}\right) dx$$

$$\ln z = -\ln x - 2\ln(\ln x)$$

$$z = e^{-\ln x - 2\ln(\ln x)}$$

$$z = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

pero $z = \frac{dv}{dx}$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$v = \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$$

haga $u = \ln x$
$du = \frac{1}{x}\,dx$

$$V = \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{u^2}\,du$$
$$= -\frac{1}{u}$$
$$= -\frac{1}{\ln x}$$

Entonces $V(x) = -\frac{1}{\ln x}$

y por lo tanto la segunda solución es

$$y(x) = V(x)\cdot x\ln x$$
$$= -\frac{1}{\ln x}\cdot x\ln x \qquad , x > 0$$
$$= -x$$

Note que el Wronskiano de $x\ln x$ y $-x$ es

$$W(x\ln x, -x) = \begin{vmatrix} x\ln x & -x \\ \ln x + 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -x\ln x + x\ln x + x$$
$$= x \neq 0$$

luego la solución general es $y = c_1 x\ln x + c_2 x$ ✓

3 $\begin{cases} y^{(4)} - y''' = x + e^{x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$

- Primero solucionar la ecuacion homogenea

$$y^{(4)} - y''' = 0$$

Ecuación característica

$$m^4 - m^3 = 0$$

$$m^3(m-1) = 0$$

$$m = 0 \quad ó \quad m = 1$$

$m=0$ es de multiplicidad 3. luego

$$y_c = c_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 x^2 e^{0x} + C_4 e^{x}$$

$$= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{x}$$

Ahora, note que $(D-1)$ aniquila x, luego $D^2(D-1)$ anula $x + e^{x}$.

luego se debe buscar una solucion particular de la forma

$$y_p = Ax^3 + Bx^4 + Cxe^{x}$$

Entonces

$$y'_p = 3Ax^2 + 4Bx^3 + C(e^{x} + xe^{x})$$

$$y''_p = 6Ax + 12Bx^2 + C(2e^{x} + xe^{x})$$

$$y_p''' = 6A + 24Bx + C\left(3e^x + xe^x\right)$$

$$y^{(4)}_p = 24B + C\left(4e^x + xe^x\right)$$

Reemplazamos en $y^{(4)} - y''' = x + e^x$

$$24B + C\left(4e^x + xe^x\right) - \left[6A + 24Bx + C\left(3e^x + xe^x\right)\right] = x + e^x$$

$$(24B - 6A) + Ce^x - 24Bx = x + e^x$$

$$\begin{cases} C = 1 \\ -24B = 1 \\ 24B - 6A = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{C = 1} \quad \boxed{B = -1/24} \quad \boxed{A = -1/6}$$

la solucion particular es

$$y_p = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + xe^x$$

Ahora usar las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = 0$$

$$y' = C_2 + 2C_3x + C_4e^x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + e^x + xe^x$$

$$y'' = 2C_3 + C_4e^x - x - \frac{1}{2}x^2 + 2e^x + xe^x$$

$$y''' = C_4e^x - 1 - x + 3e^x + xe^x$$

$y(0)=0 \longrightarrow c_1+c_4=0$ ①

$y'(0)=0 \longrightarrow c_2+c_4+1=0$ ②

$y''(0)=0 \longrightarrow 2c_3+c_4+2=0$ ③

$y'''(0)=0 \longrightarrow 2+c_4=0$ ④

Por ④, $\boxed{c_4=-2}$

Por ③ $c_2=-1-c_4$
$=-1+2$
$=1$ $\boxed{c_2=1}$

Por ① $c_1=-c_4$
$=2$ $\boxed{c_1=2}$

Por ③ $c_3=\frac{1}{2}(-2-c_4)$
$=0$ $\boxed{c_3=0}$

Luego la solución es

$$y=2+x-2e^{x}-\frac{1}{6}x^{3}-\frac{1}{24}x^{4}+xe^{x}$$

④ $y'' + 5y' + 6y = sen(e^x)$

Primero resolver la ecuación homogenea

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Ecuación caracteristica

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$(m+3)(m+2) = 0$$

$$m = -3 \quad ó \quad m = -2$$

Solución complementaria

$$y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

Suponga que la solución particular es de la forma $y_p = u_1 e^{-3x} + u_2 e^{-2x}$

donde u_1 y u_2 son funciones a determinar

$$W = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{-3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-5x} + 3e^{-5x} = e^{-5x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ sen(e^x) & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-2x} sen(e^x)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & sen(e^x) \end{vmatrix} = e^{-3x} sen(e^x)$$

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-e^{2x} sen(e^x)}{e^{-5x}} = -e^{3x} sen(e^x)$$

$$u = \int e^{3x} \operatorname{sen}(e^x) \quad dx$$

• $-\int e^{3x} \operatorname{sen}(e^x)\, dx = -\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(e^x) \cdot e^x dx.$

haga $\quad t = e^x$
$\quad dt = e^x dx$

La integral se transforma en

$$-\int t^2 \operatorname{sen} t \; dt$$

partes $\quad f = t^2 \qquad g' = \operatorname{sen} t \; dt$
$\quad f' = 2t dt \qquad g = -\cos t \; dt$

$$fg - gf' = -t^2 \cos t + 2\int t \cos t \; dt$$

La integral $\int t \cos t \, dt$ por partes

$f = t \qquad g' = \cos t \, dt$
$f' = dt \qquad g = \sin t$

$$fg - gf' = t \operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t \; dt$$
$$= t \operatorname{sen} t + \cos t$$

Luego

$$-\int t^2 \operatorname{sen} t \; dt = -\left[t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t + 2\cos t \right]$$

pero $t = e^x$, entonces

$$u_1 = -[e^{2x}\cos(e^x) + 2e^x \operatorname{sen}(e^x) + 2\cos e^x]$$

Ahora $u_2' = \dfrac{W_2}{W} = \dfrac{e^{-3x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-5x}} = e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)$

$$u_2 = \int e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)\,dx$$

$$= \int e^x \operatorname{sen}(e^x)\, e^x\,dx$$

$t = e^x$
$dt = e^x dx$

$$\int t \operatorname{sen} t\, dt$$

partes $\quad f = t \qquad g' = \operatorname{sen} t\, dt$

$\quad f' = dt \qquad g = -\cos t$

$$fg - \int gf' = -t\cos t + \int \cos t\, dt$$

$$= -t\cos t + \operatorname{sen} t$$

pero $t = e^x$, luego

$$u_2 = -e^x\cos(e^x) + \operatorname{sen}(e^x)$$

y por lo tanto

$$y_p = u_1 e^{-3x} + u_2 e^{-2x}$$

$$= -e^{-3x}[-e^{2x}\cos(e^x) + 2e^x\operatorname{sen}(e^x) + 2\cos e^x]$$

$$+ e^{-2x}[-e^x\cos(e^x) + \operatorname{sen}(e^x)]$$

$$= \cancel{e^{-x} \cos e^{x}} - \cancel{2e^{-2x} \operatorname{sen}(e^{x})} - 2e^{-3x} \cos(e^{x})$$
$$\cancel{- e^{-x} \cos(e^{x})} + \cancel{e^{-2x} \operatorname{sen}(e^{x})}$$

$$= -e^{-2x} \operatorname{sen}(e^{x}) - 2e^{-3x} \cos(e^{x})$$

Luego la solución de general de la ecuación es

$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} - e^{-2x} \operatorname{sen}(e^{x}) - 2e^{-3x} \cos(e^{x}) \end{aligned}}$$